① برای $X_c(jw) = 0 \ , \ |w| \geqslant \pi/T_1 \longrightarrow w_M = \frac{\pi}{T_1}$

$\longleftarrow$ برای رعایت نرخ nyquist : $w_s = \frac{2\pi}{T} > 2 w_M$

$\longleftarrow T < T_1$ که شرط درست است پس در C/D

aliasing نداریم

در بخش D/C خواهیم داشت :

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n] \, T_2 \times \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{T_2}(t-nT_2)\right)}{\pi(t-nT_2)}$$

می‌دانیم که اگر $T_2 = T_1$ می‌بود آن موقع چون aliasing نداشتیم y_c با x_c برابر می‌شد

$$x_c(t) = \sum x_d[n] \, T_1 \times \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{T_1}(t-nT_1)\right)}{\pi(t-nT_1)}$$

حال اگر دقت کنیم داریم :

$$y_c\left(\frac{T_2}{T_1}t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] \times T_2 \times \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{T_2}\times\frac{T_2}{T_1}(t-nT_1)\right)}{\pi\frac{T_2}{T_1}(t-nT_1)} =$$

$$\sum T_1 \, x_d[n] \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{T_1}(t-nT_1)\right)}{\pi(t-nT_1)} = x_c(t)$$

این شرط هیچ ارتباطی به اینکه $T_2 > T_1$ یا $T_2 < T_1$ ندارد.

Day. Month. Year. Subject.

(۲) ثبت داریم که،

$$x_d[n] = x_c(nT) \times (-1)^n$$

پس برای راحتی ابتدا تبدیل فوریه‌ی $x'_d[n] = x_c(nT)$ را یافته و بعد با convolu

کردن $X'_d(e^{j\Omega})$ با تبدیل فوریه‌ی $(-1)^n$ $X_d(e^{j\Omega})$ را می‌یابیم.

با توجه به اینکه $x'_d[n]$ سمپل شده‌ی سیگنال $x_c(t)$ با نرخ T است پس،

$$X'_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{T} \sum_k X_c\left(\frac{j}{T}(\Omega - k2\pi)\right)$$

$x_d[n] = x'_d[n] \times e^{-j\pi n}$ ⟷ خواص تبدیل فوریه

~~$X_d[n] = X'_d[$~~

$$X_d(e^{j\Omega}) = X'_d(e^{j(\Omega-\pi)}) =$$

$$\sum_k \left(X_c\left(\frac{j}{T}(\Omega - \pi - 2k\pi)\right)\right)$$

ب) X_d درواقع یک شیفت یافته‌ی به اندازه‌ی π X'_d که sample شده

عادی‌مون اع هستش پس صرفاً باید حواسمون به همون رخ ندادن

aliasing باشه که شرط معادل اینه که ⟵ $\frac{2\pi}{T} \geq 2 \times W$

$$W \leq \frac{\pi}{T}$$

با یک دید دیگه هم میشه به این مسئله رسید که اگر x_d رو در $(-1)^n$ ضرب

کنیم عملاً همون سمپل شده‌ی سیگنال $x(t)$ خواهد بود پس اگه ~~بدون aliasing باشه~~

برای برگشت بدون تغییر باید که شرط niquyst برقرار باشد : $2 \times W \leq \frac{2\pi}{T}$

(۳) با توجه به اینکه $2\times W \leq 200 = \frac{2\pi}{T} = w_s$ پس aliasing ~~$\frac{2\pi}{T} \geq 2\times W$~~

رخ نداده و چون فیلترینگ آنرا هم در بازه $\frac{-w_s}{2} < w < \frac{w_s}{2}$

هست و با gain ای T پس می‌توانیم از رابطه

$$H_c(jw) = \begin{cases} H_d(e^{jwT}) & |w| < \frac{w_s}{2} \\ 0 & |w| > \frac{w_s}{2} \end{cases}$$

استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$|w| < \frac{w_s}{4} \longrightarrow \frac{-2\pi}{4} < wT < \frac{2\pi}{4} \longrightarrow \frac{-\pi}{2} < wt < \frac{\pi}{2} \longrightarrow$$

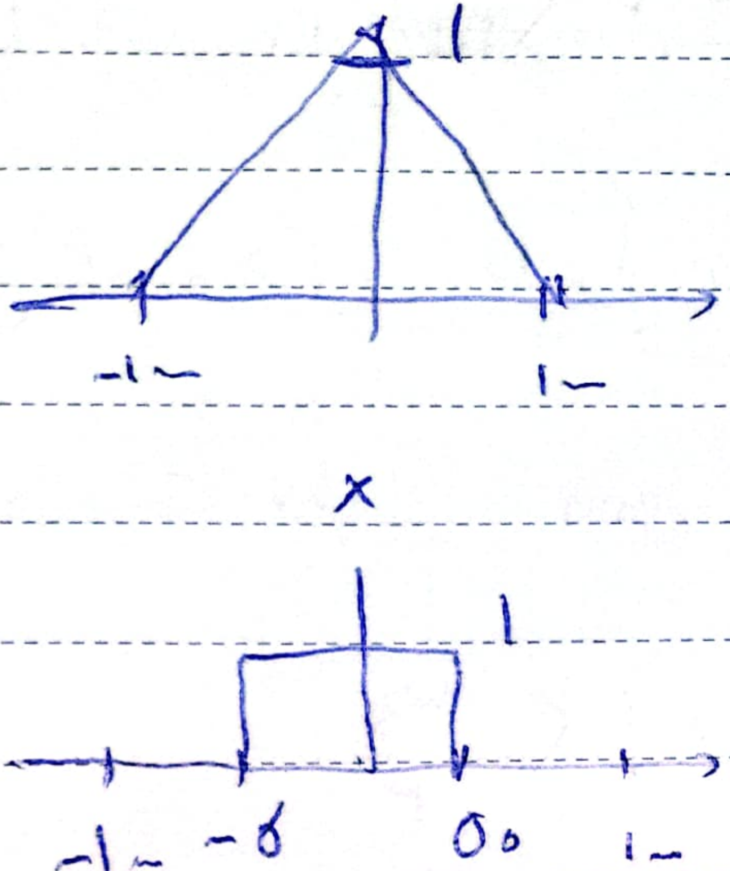
$$H_d(e^{jwT}) = 1 \longrightarrow$$

$$H_c(jw) = \begin{cases} 1 & |w| < \Omega \\ 0 & |w| > \Omega \end{cases} \longrightarrow \text{ideal filter}$$

low pass

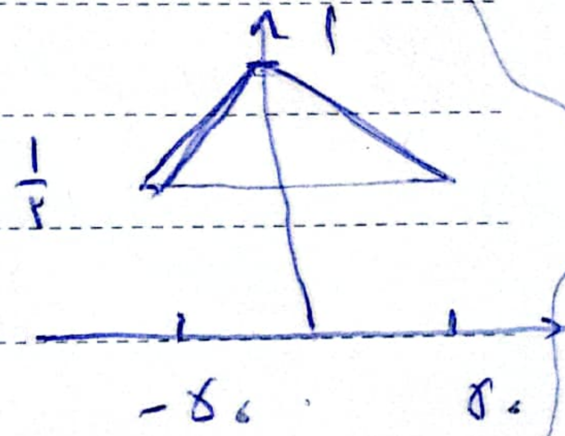
cut off $= \Omega$.

Day....Month.....Year.............. Subject..............................

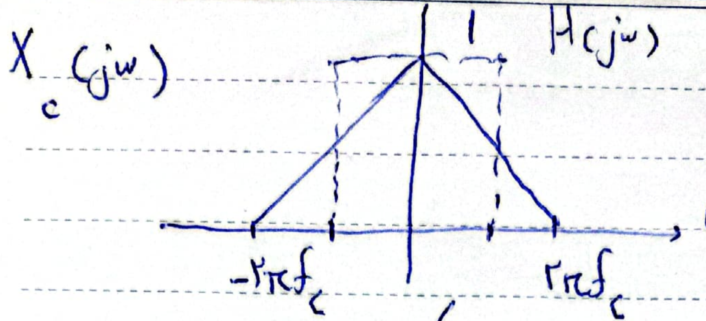


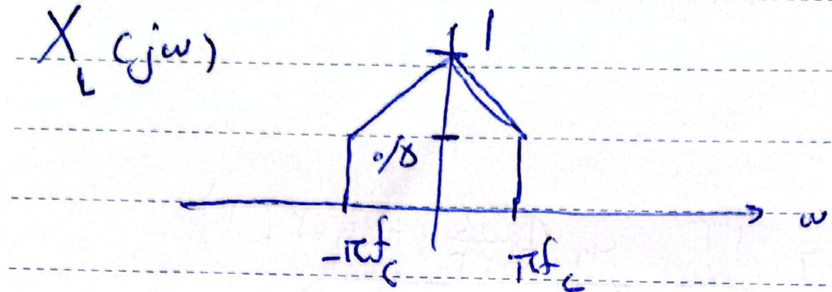
$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) \times H_c(j\omega)$ است

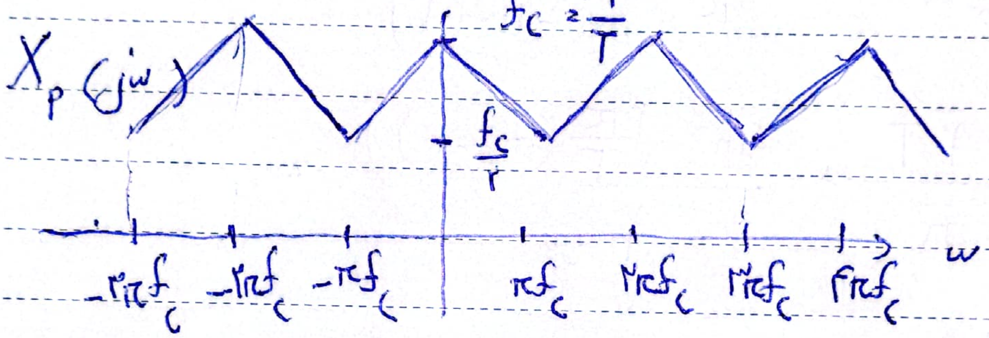
$Y_c(j\omega) =$

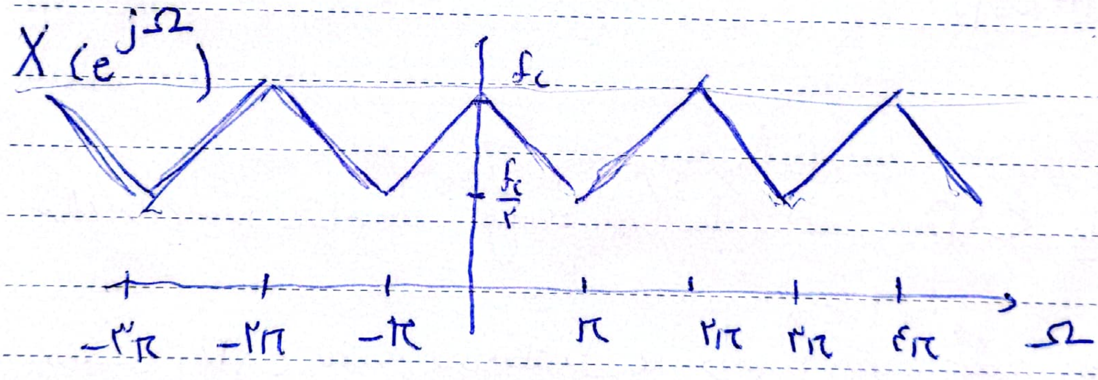


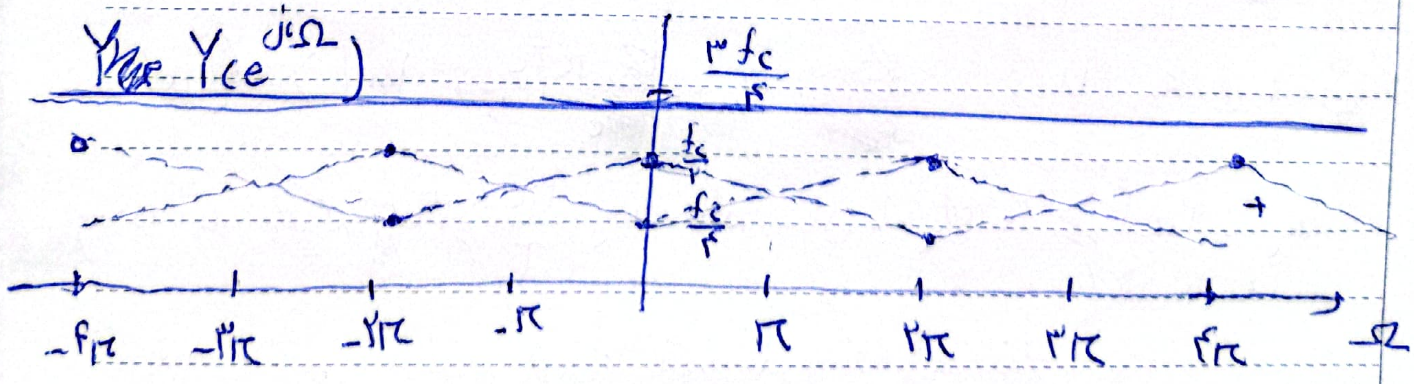
۴











$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{3f_c}{4}$$

$$\longrightarrow y[n] = \frac{3f_c}{4}\,\delta[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,\frac{2T}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2T}(t-n\times 2T)\right)}{(t-n\times 2T)} =$$

$$\frac{3f_c}{4}\times\frac{2T}{\pi}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(t-0)\right)}{t-0} =$$

$$\frac{3\sin(\pi f_c t/2)}{2\pi t}$$

به طور کلی در دو بخش می‌توانیم aliasing داشته باشیم در C/D یا در $\downarrow M$

در بخش C/D با توجه به وجود فیلتر [illegible] خواهیم داشت $X_L(j\omega) = 0$

برای $|\omega| > \pi f_c$ پس $\omega_M = \pi f_c$ و لذا تا برای نداشتن

aliasing باید که $\omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_M$ که در مثال ما $\omega_s = 2\pi f \geq 2\times\pi f_c$.

که درست است پس در بخش C/D با توجه به فیلتر aliasing نداریم

اما در بخش $\downarrow M$ همان طور که در مثال حل شده دیدیم ممکن است aliasing رخ

بعد سه شرط رخ ندادن aliasing در $\downarrow M$ ~~بیجه~~ خواهد بود که ۱

$\cancel{X(e^{j\Omega})}$

$X(e^{j\Omega})$ در بازه‌های $\frac{\pi}{M} \le \cancel{X(e^{j\Omega})} \le \pi$ و

$2k\pi+\frac{\pi}{M} \le \Omega \le 2k\pi+\pi$ و $2k\pi-\pi \le \Omega \le 2k\pi-\frac{\pi}{M}$ صفر باشد

که ترجمه این شرط برای $X_L(j\omega)$ با توجه به کشش رخ داده ~~در~~ sampling

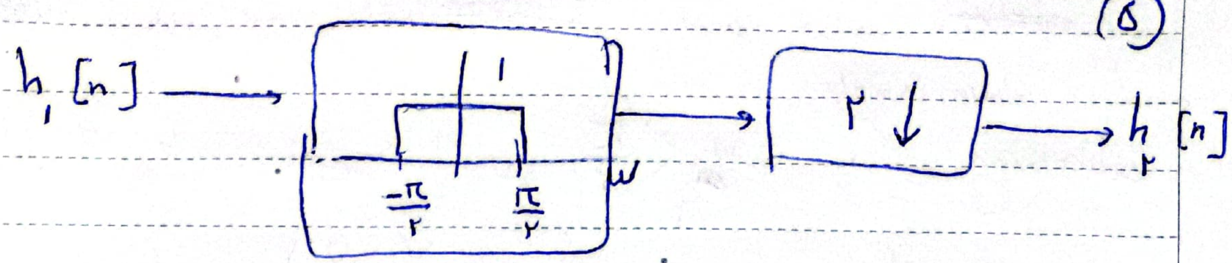
این است که $X_L(j\omega)=0$ ~~به~~ $\cancel{f \le \omega \le \frac{f_c}{M}}$

برای $|\omega| \ge \frac{f_c}{M}$ و با توجه به فیلترینگ عملاً معادل این می‌شود که ورودی

$X_c(j\omega)$ برای $\frac{f_c}{M} \le \omega \le \pi f_c$ و $-\pi f_c \le \omega \le -\frac{f_c}{M}$

برابر ۰ باشد

۵



ادعا می‌کنم ~~بالا~~ اگر h_2 بر اساس سیستم بالا از h_1 بدست

بیاید اون وقت $y_2[n] = y_1[n]$ خواهد بود برای هر ورودی ای —

برای این ادعا توجه به سیستم تولید کننده y_1 دقت کنیم — ابتدا $x_2[n]$ upsample

سیگنال $x_2[n]$ را می‌گیریم

می‌شود و لذا در حوزه فرکانس در هر بازه $[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$ دو برابر فشرده و اندازه اش

۲ برابر می‌شود سپس برای $x_2[n]$ داریم $X_2(e^{j\omega}) = 0$ برای

$|\omega| > \frac{\pi}{2}$ در بازه $[-\pi, \pi]$ و مشابها برای بازه های دیگر سپس با گذر از h_1

در حوزه فرکانس خواهیم داشت $X_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$ که با توجه به صفر بودن X_2 در

$|\omega| > \frac{\pi}{2}$ عملاً
$$H'(e^{j\omega}) = \begin{cases} H_1(e^{j\omega}) & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
در X_2 ضرب می‌شود

در نهایت با downsample شدن $H_1'(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

سیگنال در فرکانس در هر بازه $[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$ کشیده شده و

$\frac{1}{2}$ می‌شود پس عملاً $Y_1(e^{j\omega})$ می‌شود $X_2(e^{j\omega})$ downsample شده $H_2(e^{j\omega})$

Day. Month. Year. Subject.

که ~~دو~~ دو سیگنال ضرب ~~upsample~~ شود ~~upsample~~ هر دو در اثر ~~upsample~~
down sample

به دلیل ~~ما~~ ~~صفر شدن~~ داشتن $w_M < \frac{\pi}{2}$ درگیر ailiasing

نمی‌شوند و لذا می‌توانیم $Y_1(e^{jw})$ را صرفاً به صورت ضرب down sample

شده تک تک $X_2(e^{jw})$ و $H'(e^{jw})$ بنویسیم که خوب $X_2(e^{jw})$ ی شود

خوب $X(e^{jw})$ و down sample شده $H'(e^{jw})$ ی شده $H_2(e^{jw})$ ای که به

دنبالش هستیم

نهایتاً $H_2(e^{jw})$ ~~حاصل~~ از ~~قطع کردن~~ قطع $H_1(e^{jw})$ در بازه

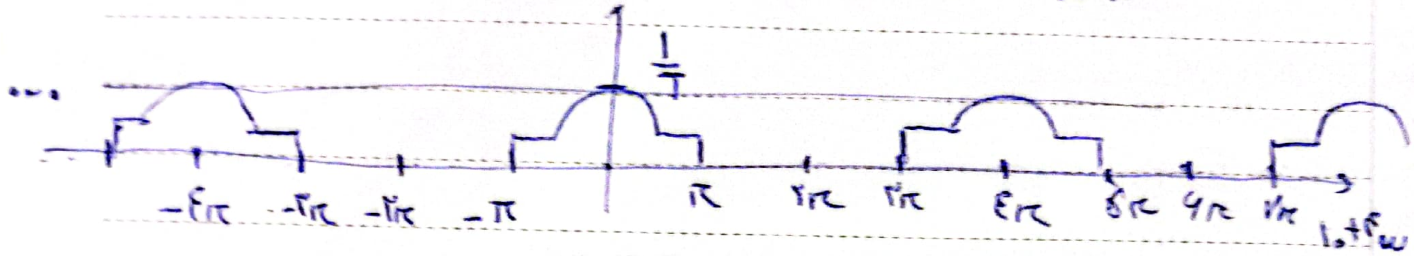
$\cancel{H_2(e^{jw})}$

های $[2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $2k\pi - \frac{\pi}{2}]$ (filtering)

و سپس کشیدن هر قطعه بازه‌های $[-\pi+2k\pi, +\pi+2k\pi]$ به اندازه ۲

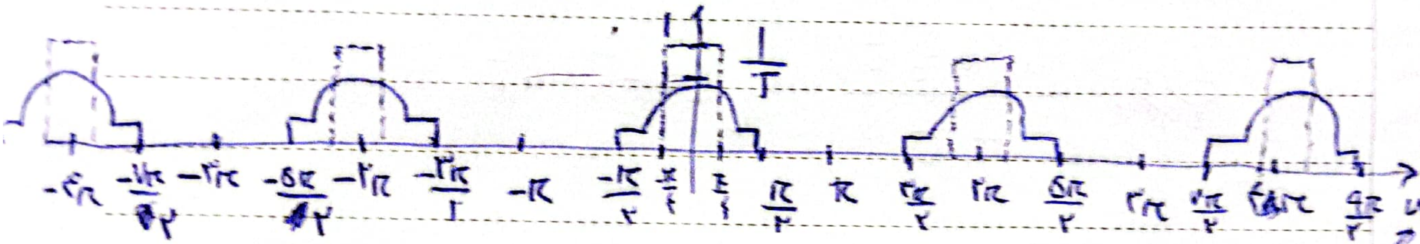
برابر و ضرب در $\frac{1}{2}$ کردن بدست می‌آید (down sampling)

$$x_p(t) = x(t) \times p(t) \longleftrightarrow X_p(j\omega) = X(j\omega) * \frac{1}{2\pi T} \sum \delta(\omega - k\omega_s)$$



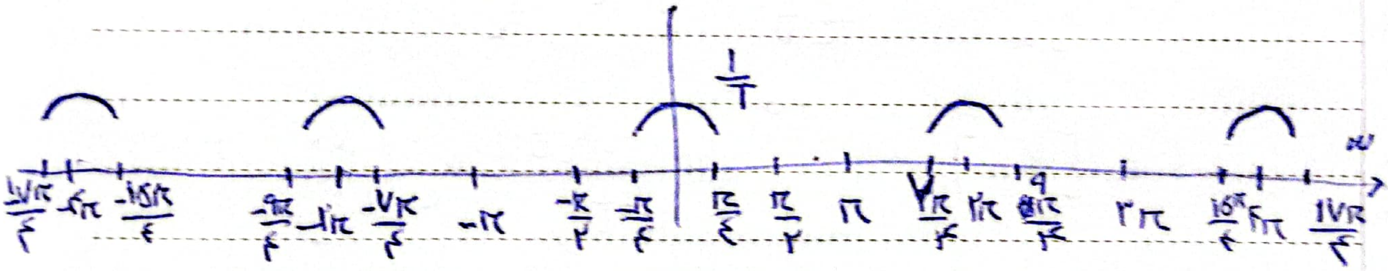
! لطفا تو مخرج ضریب ۲ داشتیم !

$$X(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

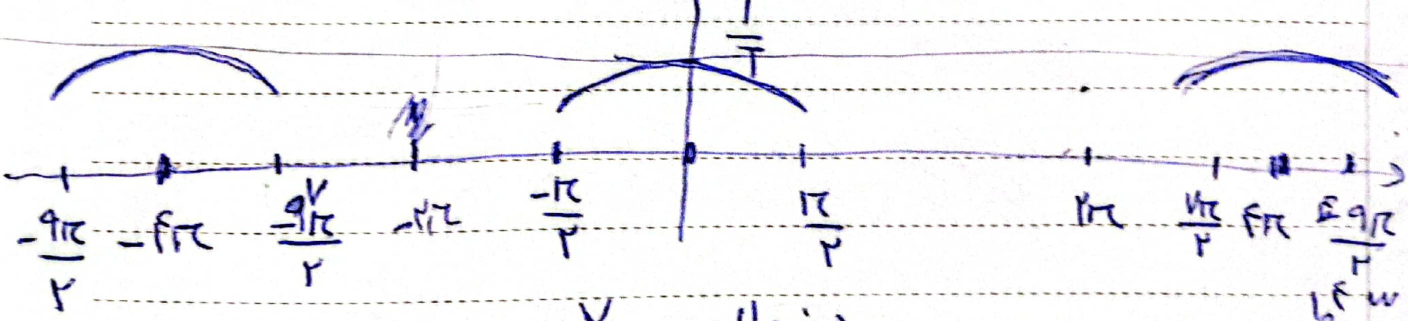


! ولی اینجا نه !

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})$$



$$Y_p(j\omega) = Y(e^{jT\Omega})$$



$$Y_c(j\omega) = Y_p(j\omega) \times H(j\omega)$$

! دوباره ضریب گام داریم !