Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet

Matrični metodi
Primene kroz Python

Autor: Jovana Džunić

Niš, 2020

Sadržaj

Poglavlje 1

Specijalne vrste matrica. Uvod

1.1 Klasifikacija

U matematici, fizici i inženjerstvu neke klase matrica pojavljuju se veoma često. Na Wikipediji se može naći veoma opširna lista najčešće korišćenih tipova matrica. Iz tog razloga osobine pojedinih karakterističnih klasa posebno proučavamo. Njihova svojstva, kao što su specifičan oblik ili spektralne karakteristike, koristimo za dizajn efikasnih numeričkih algoritama.

U nastavku dajemo listu tipova matrica od posebnog značaja za teme obrađivane u okviru kursa.

Definicija 1. a) Kada važi $A^T = A$, tada se matrica A naziva simetrična matrica. Ukoliko je $A = -A^T$, za matricu A kažemo da je koso-simetrična.

b) Ako za realnu matricu A važi $A^T A = AA^T = I$, tada se A naziva ortogonalna matrica.

c) Ukoliko za matricu A važi $A^H = A$, onda se A naziva ermitska matrica. Kada je $A^H = -A$, matrica A je koso-ermitska.

d) Ako za matricu A važi $A^H A = AA^H = I$, tada se A naziva unitarna matrica.

e) Matrica P se zove projekcija ako zadovoljava jednakost $P^2 = P$. U slučaju da važi $P^2 = P = P^H$, matrica P se zove ortogonalna projekcija. Realna matrica je ortogonalna projekcija ukoliko je $P^2 = P = P^T$.

f) Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}$ je gornje trougaona ukoliko su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako je

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \forall j \in \{1, 2, ..., m\},\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

g) Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}$ je donje trougaona ukoliko su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako je

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \forall j \in \{1, 2, ..., m\},\ i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

h) Matrica je trougaona ukoliko je gornje ili donje trougaona matrica.

i) Matrica koja je istovremeno gornje i donje trougaona je dijagonalna matrica.

Primer 1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & i & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ je simetrična, ali nije ermitska.

Matrica $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ je kososimetrična i koso-ermitska.

Matrica $C = \begin{bmatrix} -1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 0 & -3-2i \\ 2 & -3+2i & 1 \end{bmatrix}$ je ermitska.

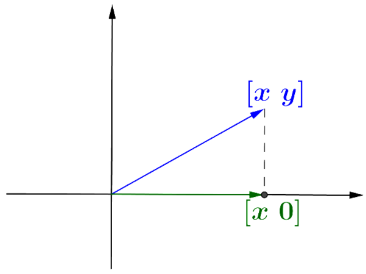
Matrice $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ su donje trougaone, dok su matrice $L_k^T,\ k = 1,2,3,$ gornje trougaone.

Jedinična matrica I je simetrična i ermitska, ortogonalna i unitarna, ortogonalna projekcija i dijagonalna matrica.

Primer 2. Matrica $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je ortogonalna projekcija. Kako je

$$Pv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

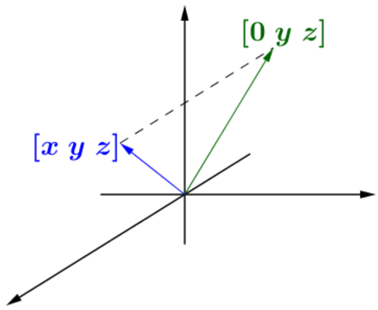
to se matrica P zove projekcija na $x-$osu u 2D.



Primer 3. Matrica $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je ortogonalna projekcija. Kako je

$$Pv = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

to se matrica P zove projekcija na $Oyz-$ravan u 3D.



Primer 4. Neka je $v \in \mathbb{R}^n$ vektor. Tada je spoljašnji proizvod vektora sa samim sobom, tj. vv^T simetrična matrica. Za vektor $v \in \mathbb{C}^n$ je vv^H ermitska matrica.

Na osnovu definicije posebnih klasa matrica možemo zaključiti sledeće osobine.

Posledica 1. a) *Simetrična, koso-simetrična, ermitska, koso-ermitska matrica i matrice projekcije moraju biti kvadratne matrice.*

b) *Ermitska matrica na glavnoj dijagonali ima realne vrednosti, jer za dijagonalne elemente važi* $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

c) *Realna simetrična matrica je istovremeno i ermitska.*

d) *Ukoliko je matrica* $A = [a_{ij}]$ *koso-simetrična ili koso-ermitska dijagonalni elementi* a_{ii} *su jednaki nuli. Zaista, kako važi da je*

$$a_{ii} = -a_{ii}, \text{ odnosno } a_{ii} = -\overline{a_{ii}},$$

to mora biti $a_{ii} = 0$.

Posebna karakteristika nekih kvadratnih matrica je postojanje inverzne matrice.

Definicija 2. Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji matrica X takva da je $XA = AX = I$, tada se X naziva inverzna matrica matrice A i označava A^{-1}. Za matricu koja ima inverznu matricu kažemo da je regularna ili invertibilna.

Teorema 1. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna za kvadratnu matricu A reda n.*

a) Matrica A je regularna matrica, tj. postoji inverzna matrica A^{-1} matrice A.

b) Matrica A ima n linearno nezavisnih kolona.

c) Matrica A ima n linearno nezavisnih vrsta.

d) Matrica A je matrica punog ranga, tj. $rang(A) = n$.

e) $\det(A) \neq 0$.

f) Sve sopstvene vrednosti matrice A su različite od nule.

1.1.1 Pitanja i zadaci

1. Dopisati nedostajuće elemente matrica A, B i C tako da je matrica A simetrična, B koso-simetrična i C ermitska.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ & 0 & \\ & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 22-i & 2+i \\ & 2 & \\ & -1+2i & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Dokazati:
   a) Ako je A simetrična regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   b) Ako je A koso-simetrična regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   c) Ako je A ermitska regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   d) Ako je A koso-ermitska regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   e) Ako je A trougaona matrica onda je i A^{-1} trougaona matrica istog tipa.

3. Neka je A kvadratna matrica, dokazati da je
   a) $A + A^T$ simetrična matrica.
   b) $A - A^T$ koso-simetrična matrica.
   c) $A + A^H$ ermitska matrica.
   d) $A - A^H$ koso-ermitska matrica.
   e) AA^T simetrična matrica.
   f) AA^H ermitska.

4. Pokazati da se svaka kvadratna realna matrica A može napisati u obliku zbira simetrične i koso-simetrične matrice.

5. Pokazati da se svaka kvadratna matrica A može napisati u obliku zbira ermitske i koso-ermitske matrice.

6. Neka su A i B simetrične matrice reda n. Pokazati da je $AB-BA$ antisimetrična matrica. Dokazati da $AB-BA$ ne može biti dijagonalana matrica, osim nula matrice.

7. Dokazati da je determinanta koso-simetrične matrice neparnog reda jednaka 0.

8. Dokazati da je determinanta ortogonalne matrice jednaka ± 1.

9. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Ako je $AA^T = I$ i $\det(A) < 0$, naći $\det(A+I)$.

10. Ispitati da li je matrica $P = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ projekcija. Da li je P ortogonalna projekcija?

11. Ako je P projekcija onda je i $I-P$ projekcija. Ukoliko je P ortogonalna projekcija, takva je i projekcija $I-P$. Dokazati.

12. Pokazati da je proizvod dve kvadratne trougaone matrice istog tipa ponovo trougaona matrica istog tipa.

13. Pokazati da je inverzna matrica regularne trougaone matrice ponovo trougaona matrica istog tipa.

14. Dokazati da je $T^{-1}AT$ uvek dijagonalna bez obzira na vrednosti x i y, gde su

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ y & x & y \\ 0 & y & x \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

15. Pod pretpostavkom da sve inverzne matrice koje figurišu u izrazu postoje, dokazati

$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

Specijalno, $(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1}$ i $\det\Big((I+A)^{-1} + (I+A^{-1})^{-1}\Big) = 1$.