Алексић Стефан 16995 VI домаћи задатак [ЧМР] 1/2

① R је троугаона матрица ①, Q је ортогонална матрица
$A = Q^T R Q$ је симетрична матрица. Да ли је R дијагонална?

R је дијагонална $\Leftrightarrow$ R је троугаона $\land$ R је симетрична

$$A = Q^T R Q = A^T = (Q^T R Q)^T = (RQ)^T (Q^T)^T = Q^T R^T Q$$

$$Q^T R Q = Q^T R^T Q \quad / Q \rightarrow *, * \leftarrow Q^T$$

$$Q Q^T R Q Q^T = Q Q^T R^T Q Q^T$$

$$IRI = IR^T I$$

② $R = R^T \Rightarrow R$ је симетрична матрица

на основу услова задатка ① и $R = R^T$ ② $\Rightarrow R$ је дијагонална матрица

② $a \in \mathbb{R}$. За које вредности a је $A^T A$ регуларна, а за које позитивно дефинитна матрица?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & a-4 \\ a-4 & 8+a^2 \end{bmatrix}$$

$A^T A$ је регуларна $\Leftrightarrow \det(A^T A) \neq 0$

$$\det \begin{vmatrix} 3 & a-4 \\ a-4 & a^2+8 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$3(a^2+8) - (a-4)^2 \neq 0$$

$$3a^2 + 24 - a^2 + 8a - 16 \neq 0$$

$$2a^2 + 8a + 8 \neq 0 \quad /:2$$

$$a^2 + 4a + 4 \neq 0$$

$$(a+2)^2 \neq 0$$

$\boxed{a \neq -2} \Rightarrow A^T A$ је регуларна матрица $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$A^T A$ је позитивно дефинитна $\Leftrightarrow Sp(A^T A) > 0$

$Sp(A^TA) > 0 \quad Sp = \{\lambda_1, \lambda_2\} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\lambda \in Sp$, v је сопствени вектор који одговара λ

$$\|Av\|^2 = (Av)^T(Av) = v^T(A^TA \cdot v) = v^T(\lambda v) = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2$$

$$\|Av\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \|v\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$$
$$v \neq \vec{0}$$

λ је једнако нула, акко је A^TA нерегуларна матрица

$\Rightarrow$ A^TA је позитивно дефинитна када је регуларна, односно $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

3. $A \in M_{n \times n}$ регуларна $(\det(A) \neq 0)$

$(v,u) = (Av)^T(Au) \qquad u, v \in \mathbb{R}^n$ уопштен реалан скаларни производ?

$S_1: \; v \cdot u = u \cdot v$

$$(v,u) = (Av)^T(Au) \xrightarrow[\text{скаларни производ}]{\text{третирамо са као}} (Av)\cdot(Au) \xrightarrow[\text{важи } S_1]{\text{за њега}} (Au)(Av) =$$

$$= (Au)\cdot(Av) \xrightarrow[\text{се назад на матричне}]{\text{враћамо}} (Au)^T(Av) = (u,v)$$

$$\Rightarrow (v,u) = (u,v)$$

$S_2: \; (\alpha u)\cdot v = \alpha(u \cdot v)$

$$(\alpha v, u) = (A\alpha v)^T(Au) = \alpha(Av)^T(Au) = \alpha(v,u)$$

$$\Rightarrow (\alpha v, u) = \alpha(v,u)$$

$S_3: \; (u+v)\cdot w = uw + v \cdot w \qquad w \in \mathbb{R}^n$

$$(u+v, w) = (A(u+v))^T(Aw) = (Au + Av)^T(Aw) =$$

$$= (Au)^T Aw + (Av)^T Aw = (u,w) + (v,w)$$

$$\Rightarrow (u+v, w) = (u,w) + (v,w)$$

$S_4: \; v \cdot v > 0 \; , \; v \neq \vec{0}$

$$(v,v) = (Av)^T(Av) = v^TA^TAv \overset{\det(A)\neq 0,\; Sp(A^TA)>0}{=} v^TQ^TDQv = \left| \; Qv = k \; \right| =$$

$$= k^TDk = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i^2 > 0 \iff k \neq \vec{0} \iff Qv \neq 0 \iff v \neq 0$$

$$\Rightarrow (v,v) > 0 \iff v \neq \vec{0}$$

4. $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}$ симетрична матрица
Описати Гивенсову ротацију $Q(i,j,c,s)$ која производи трансформацију сличности QAQ^T матрице A са тродијагоналном матрицом

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & p & q \\ z & q & r \end{bmatrix}$$

$x, y, z, p, q, r \in \mathbb{R}$

*Уколико је $z = 0 \Rightarrow Q = I$
јер је A сама по себи тродијагонална

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & p & q \\ z & q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z \\ cy+sz & cp+sq & cq+sr \\ cz-sy & cq-sp & cr-sq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x & cy+sz & cz-sy \\ cy+sz & c^2p+csq+scq+s^2r & c^2q+csr-scp-s^2q \\ cz-sy & c^2q-csp+scr-s^2q & c^2r-csq-scq+s^2p \end{bmatrix}$$

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} x & cy+sz & cz-sy \\ cy+sz & c^2p+2csq+s^2r & c^2q+scr-csp-s^2q \\ cz-sy & c^2q-csp+scr-s^2q & c^2r-2csq+s^2p \end{bmatrix}$$

$$c^2+s^2=1 \qquad s^2\left(1+\left(y/z\right)^2\right)=1$$

$$cz-sy=0 \qquad s^2=\frac{z^2}{z^2+y^2}$$

$$cz=sy \qquad s=\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} \Rightarrow c=\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}}\cdot y/z=\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}$$

$$\boxed{c=s\,y/z}$$

$$cy+sz=\sqrt{z^2+y^2}$$

[redacted]

$$c^2p+2csq+s^2r=\frac{y^2p+2q\,yz+z^2r}{z^2+y^2}$$

$$c^2r-2csq+s^2p=\frac{y^2r-2qyz+z^2p}{z^2+y^2}$$

$$c^2q-csp+scr-s^2q=\frac{y^2q-z^2q-yzp+zyr}{y^2+z^2}$$

$$QAQ^T=\begin{bmatrix} x & \sqrt{z^2+y^2} & 0 \\ \sqrt{z^2+y^2} & \frac{y^2p+2qyz+z^2r}{z^2+y^2} & \frac{y^2q-z^2q-yzp+zyr}{y^2+z^2} \\ 0 & \frac{y^2q-z^2q-yzp+zyr}{y^2+z^2} & \frac{y^2r-2qyz+z^2p}{z^2+y^2} \end{bmatrix}$$

$$Q\left(2,3,\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} \\ 0 & -\frac{s}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

Алексић Стефан 16995 VI домаћи задатак [ННР] 2/2

(5) $A = LU$ Дулитлова декомпозиција $A \in M_{4\times4}$

A_{ii} вредност главног минора A реда i, $A_0 = 1$

Приказати да за пивот елемент Дулитлове декомпозиције важи (без избора пивот елемента)

$$U_{ii} = \frac{A_{ii}}{A_{i-1\,i-1}}$$

$$A_{ii} = L_{ii} \cdot U_{ii}$$

L_{ii}, U_{ii} је детерминанта троугаоне матрице

$$L_{ii} = \prod_{j=1}^{i} l_{jj} \qquad U_{ii} = \prod_{j=1}^{i} u_{jj}$$

$$A_{ii} = \prod_{j=1}^{i} l_{jj} u_{jj}$$

С обзиром да су на главној дијагонали матрице L јединице, детерминанта L је $\det(L) = 1 \iff L_{ii} = 1 \ \forall i \in \{1,4\}$

$$A_{ii} = \prod_{j=1}^{i} u_{jj} \implies A_{i-1\,i-1} = \prod_{j=1}^{i-1} u_{jj}$$

$$\frac{A_{ii}}{A_{i-1\,i-1}} = \frac{\prod_{j=1}^{i} u_{jj}}{\prod_{j=1}^{i-1} u_{jj}} = U_{ii} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \cancel{\frac{u_{jj}}{u_{jj}}} = U_{ii}$$

$$\implies \boxed{U_{ii} = \frac{A_{ii}}{A_{i-1\,i-1}}}$$

С обзиром да је поступак налажења пивот елемената, односно Дулитлове декомпозиције такав да се за пивот елементе узима елемент у горњој троугаоној матрици