Blok matrice

4. čas

Uvod

Primer. Sabiranje niza vrednosti $S = \sum_{k=1}^{2n} a_k$

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_{S_1} + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})}_{S_2} = S$$

Uvod

Primer. Sabiranje niza vrednosti $S = \sum_{k=1}^{2n} a_k$

$$\Big(\underbrace{(a_1 + \cdots)}_{S_1} + \underbrace{(\cdots + a_n)}_{S_2}\Big) + \Big(\underbrace{(a_{n+1} + \cdots)}_{S_3} + \underbrace{(\cdots + a_{2n})}_{S_4}\Big)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$$

Uvod

Primer. Izračunavanje vrednosti polinoma

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^5 \\ x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uvod

Primer. Izračunavanje vrednosti polinoma

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5$$

$$= (x^2 + 2x - 1)x^3 + 3x^2 + x - 5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uvod

Primer. Izračunavanje vrednosti polinoma

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5$$

$$= (x^4 - x^2 + 1)x + 2x^4 + 3x^2 - 5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^4 \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^4 \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^4 \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podela na blokove

Primer.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 17 & 18 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 19 & 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

Podela na blokove

Primer.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 17 & 18 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 19 & 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Podela na blokove

Primer.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \left[A \mid b\right]$$

Operacije nad blok matricama

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+X & B+Y \\ C+U & D+V \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A & \alpha B \\ \alpha C & \alpha D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BU & AY+BV \\ CX+DU & CY+DV \end{bmatrix}$$

Operacije nad blok matricama

Primer.

$$\left[\begin{array}{c|cc}1 & 1 & 0\\ \hline 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 2\\ \hline -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}2 & 1 & 2\\ \hline -1 & 4 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cc}1 & 1 & 0\\ \hline 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 2\\ \hline -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}0 & 3 & 3\\ \hline -1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{array}\right]$$

Operacije nad blok matricama

Primer. Pronaći konformnu blok podelu matrice B za množenje AB

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Množenje blok matrica

Štrasenov algoritam

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$

$M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$

$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$

$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$

$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$

$M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$

$M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$

$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$

$C_{12} = M_3 + M_5$

$C_{21} = M_2 + M_4$

$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$

Specijalne vrste blok matrica

Blok dijagonalna matrica $\begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}$

Blok gornje trougaona matrica $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$

Blok donje trougaona matrica $\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$

Blok matrice

Da li postoje analogije i u determinanti blok matrice i

kod inverzne matrice u blok formi?

Determinanta i inverzna matrica

- $\begin{vmatrix} A & O \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$
- $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$
- $\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$

- $\begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -C & I \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$

Blok dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}$$

$$M/A = D - CA^{-1}B$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M/D & O \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}$$

$$M/D = A - BD^{-1}C$$

Blok sistem jednačina

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = A^{-1}(b_1 - Bx_2) \\ (M/A)x_2 = b_2 - CA^{-1}b_1 \end{cases}$$

Šurov komplement

Posledica. Za matricu $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa regularnim vodećim blokom A

važi:

1. $rang(M) = rang(A) + rang(M/A)$
2. $def(M) = def(M/A)$
3. M je regularna akko je M/A regularna
4. $det(M) = det(A)det(M/A)$

Šurov komplement

Posledica. Za matricu $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa regularnim vodećim blokom A važi:

5. $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}$

Šurov komplement

Posledica. Za matricu $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa regularnim dijagonalnim blokom D važi:

6. $M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$

Šurov komplement

Posledica. Za matricu $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa regularnim dijagonalnim blokovima A i D važi:

7. $M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}$

Primena blok matrica

Teorema. (Silvester) Ako su $A \in M_{m\times n}$ i $B \in M_{n\times m}, m \geq n$, tada je

$$det(AB - \lambda I_m) = (-\lambda)^{m-n} det(BA - \lambda I_n).$$

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda I_m & A \\ B & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB - \lambda I_m & O \\ \lambda B & -\lambda I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda I_m & A \\ B & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda I_m & A \\ O & BA - \lambda I_n \end{bmatrix}$$

Primena teoreme Silvestera

Primer. Odrediti spektar matrice A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadaci

1. Ako je kvadratna matrica M blokovski podeljena $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa kvadratnim vodećim blokom A, kakvog je oblika blok D?
2. Koristeći blok matrice izračunati M^2 za $M = \begin{bmatrix} I & S \\ O & A \end{bmatrix}$, gde su $I = I_4$, $O = O_4$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadaci

3. Neka je kvadratna matrica M blokovski podeljena $M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}$. Dokazati da je $M^n = \begin{bmatrix} A^n & A^{n-1}B \\ O & O \end{bmatrix}$.