Klasifikacija matrica

3. čas

Istaknute vrste matrica

Realne matrice

- Simetrična $A = A^T$
- Koso-simetrična $A = -A^T$
- Ortogonalna $AA^T = A^T A = I$
- Projekcija $A^2 = A$
- Ortogonalna projekcija $A^2 = A = A^T$

Kompleksne matrice

- Ermitska $A = A^H$
- Koso-ermitska $A = -A^H$
- Unitarna $AA^H = A^H A = I$
- Projekcija $A^2 = A$
- Ortogonalna projekcija $A^2 = A = A^H$

Istaknute vrste matrica

- Gornje trougaona matrica $A \in M_{m\times n},\ \ a_{ij} = 0$ za $i > j$
- Donje trougaona matrica $A \in M_{m\times n},\ \ a_{ij} = 0$ za $i < j$
- Trougaona matrica – gornje ili donje trougaona matrica
- Dijagonalna matrica $A \in M_{m\times n},\ \ a_{ij} = 0$ za $i \neq j$

  – i gornje i donje trougaona matrica
- Inverzna matrica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Matrice kao skupovi vektora

Primer. Odrediti tip sledećih matrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & i & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 0 & -3-2i \\ 2 & -3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice kao skupovi vektora

Primer. Dopunite sledeće matrice tako da A bude simetrična, B koso-simetrična i C ermitska.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ & 0 & \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & 2 & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 22 - i & 2 + i \\ & 2 & 3 \\ & -1 + 2i & 0 \end{bmatrix}$$

Zadaci

1. Dokazati sledeća tvrđenja.
   a) Simetrična, koso-simetrična, ermitska, koso-ermitska matrica i matrice projekcije moraju biti kvadratne matrice.
   b) Ermitska matrica na glavnoj dijagonali ima realne vrednosti.
   c) Realna simetrična matrica je istovremeno i ermitska.
   d) Koso-simetrična i koso-ermitska matrica imaju dijagonalne elemente jednake 0.

Zadaci

2. Dokazati sledeća tvrđenja.
   a) Ako je A simetrična regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   b) Ako je A koso-simetrična regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   c) Ako je A ermitska regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   d) Ako je A koso-ermitska regularna matrica onda je takva i A^{-1}.
   e) Ako je A regularna trougaona matrica onda je i A^{-1} trougaona matrica istog tipa.

Zadaci

3. Neka je A kvadratna matrica, dokazati da je tada
   a) $A + A^T$ simetrična matrica.
   b) $A - A^T$ koso-simetrična matrica.
   c) $A + A^H$ ermitska matrica.
   d) $A - A^H$ koso-ermitska matrica.
   e) AA^T simetrična matrica.
   f) AA^H ermitska.

Zadaci

4. Pokazati da se svaka kvadratna realna matrica A može napisati u obliku zbira simetrične i koso-simetrične matrice.

5. Dokazati da je determinanta koso-simetrične matrice neparnog reda jednaka 0.

6. Pod pretpostavkom da sve inverzne matrice koje figurišu u izrazu postoje, dokazati

$$(A-B)^{-1}=A^{-1}+A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

Zadaci

7. Pokazati da je proizvod dve kvadratne trougaone matrice istog tipa ponovo trougaona matrica istog tipa.

8. Pokazati da je inverzna matrica regularne trougaone matrice ponovo trougaona matrica istog tipa.