Aleksić Stefan 16995 – RI 19/20

Domaći zadatak br. 1

1. **Pokazati da se svaka kvadratna matrica A može napisati u obliku zbira ermitske i koso-ermitske matrice.**

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n} \Rightarrow \exists A^H$

$2A = A + A^H + A - A^H$

$A = \frac{1}{2}(A + A^H) + \frac{1}{2}(A - A^H) \quad | \quad P = \frac{1}{2}(A + A^H)$, $Q = \frac{1}{2}(A - A^H)$

$P^H = [\frac{1}{2}(A + A^H)]^H = \frac{1}{2}(A + A^H)^H = \frac{1}{2}[A^H + (A^H)^H] = \frac{1}{2}(A^H + A) = \frac{1}{2}(A + A^H) = P$

$\Rightarrow$ P je ermitska matrica

$Q^H = [\frac{1}{2}(A - A^H)]^H = \frac{1}{2}(A - A^H)^H = \frac{1}{2}[A^H - (A^H)^H] = \frac{1}{2}(A^H - A) = -\frac{1}{2}(A - A^H) = -Q$

$\Rightarrow$ Q je koso–ermitska matrica

2. **Neka su A i B simetrične matrice reda n. Pokazati da je AB – BA antisimetrična matrica. Dokazati da AB – BA ne može biti dijagonalna matrica, osim $\mathcal{O}$ matrice.**

A i B su simetrične matrice $\Rightarrow A^T = A$, $B^T = B$

$(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = BA - AB = -(AB - BA)$

$\Rightarrow$ AB – BA je koso–simetrična matrica $\Rightarrow AB - BA = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid x_{ii} = 0 \ \forall i = 1,2,...,n$

$\Rightarrow$ S obzirom da su elementi dijagonale koso-simetrične matrice jednaki nuli, da bi AB – BA bila i dijagonalna matrica, onda bi svi elementi trebalo da budu jednaki nuli, što je jedino moguće ako je

$AB - BA = \mathcal{O}$.

3. **Ispitati da li je P = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ projekcija. Da li je P ortogonalna projekcija?**

P je projekcija akko je $P^2 = P$.

$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P \qquad \Rightarrow$ P jeste projekcija.

P je ortogonalna projekcija akko je $P^T = P^2 = P$.

$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \neq P \qquad \Rightarrow$ P nije orotgonalna projekcija.

4. **Ako je P projekcija, onda je i I – P projekcija. Ukoliko je P ortogonalna projekcija, takva je i I – P. Dokazati.**

P je projekcija $\Leftrightarrow P^2 = P$

$(I - P)^2 = I^2 - 2*I*P + P^2 = I - 2*P + P = I - P$ $\Rightarrow$ I – P je projekcija, akko je P projekcija.

P je ortogonalna projekcija $\Leftrightarrow P^T = P^2 = P$

$(I - P)^T = I^T - P^T = I - P$ $\Rightarrow$ I – P je ortogonalna projekcija, ukoliko je P ortogonalna projekcija.

5. **Dokazati da je determinanta ortogonalne matrice jednaka ± 1.**

Neka je $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ortogonalna matrica. Tada važi:

$X*X^T = X^T*X = I$ ***/det ( )***

$\det(X*X^T) = \det(I)$ **| $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$**

$\det(X) * \det(X^T) = 1$ **| $\det(A^T) = \det(A)$**

$[\det(X)]^2 = 1$

$\det(X) = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

6. **Pod pretpostavkom da sve inverzne matrice, koje konfigurišu u izrazu postoje, dokazati: $(I + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$ i $\det[(I + A)^{-1} + (I + A^{-1})^{-1}] = 1$.**

Definicija inverzne matrice: $A*A^{-1} = A^{-1}*A = I$

a) $(I + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

$(A*A^{-1} + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

$(A*(A^{-1} + I))^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

$A^{-1}*(A^{-1} + I)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

$(A^{-1} + I)*(A^{-1} + I)^{-1} = I$ **| $B = A^{-1} + I$**

$B*B^{-1} = I$

$\Rightarrow$ Izraz pod a) je tačan.

b) $\det[(I + A)^{-1} + (I + A^{-1})^{-1}] = 1$

S obzirom da je $\det(I) = 1$, treba da dokažemo da je $(I + A)^{-1} + (I + A^{-1})^{-1} = I$.

Oduzimanjem $(I + A^{-1})^{-1}$ i s leve i s desne strane izraza, dobijamo:

$(I + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

Ovo je izraz pod a), za koji smo pokazali da je tačan.

$\Rightarrow$ Izraz pod b) je tačan.