



LU dekompozicija

5. čas

Jednakosti sa blok matricama

$$\bullet \begin{vmatrix} I & B \\ O & I \end{vmatrix} = 1$$

$$\bullet \begin{vmatrix} I & O \\ C & I \end{vmatrix} = 1$$

$$\bullet \begin{bmatrix} I & O \\ O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & XC \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -C & I \end{bmatrix}$$

Blok LU dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & M/A \end{bmatrix}$$

$$M/A = D - CA^{-1}B$$

Blok LU dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & M/A \end{bmatrix}$$

$$M/A = D - CA^{-1}B$$

$$M = \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O \\ \frac{1}{a} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ O & M/a \end{bmatrix}$$

$$M/a = D - \frac{1}{a}uv^T$$

Blok LU dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}u & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & D - \frac{1}{a}uv^T \end{bmatrix}$$

Blok LU dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}u & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} = L_1 U_1$$

$$l_1 = \frac{1}{a}u$$

LU dekompozicija

$$M = \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O \\ l_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ O & M_1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & v_1^T \\ u_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O \\ l_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & v_1^T \\ O & M_2 \end{bmatrix} = L_2 U_2$$

LU dekompozicija

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & L_2 U_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & l_2 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} a & v^T & \\ \hline 0 & a_1 & v_1^T \\ \hline 0 & 0 & M_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

LU dekompozicija

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O \\ l_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ O & M_1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline l_1 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & O \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline O & l_2 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} a & v^T \\ \hline 0 & a_1 & v_1^T \\ \hline O & O & M_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & O \\ \hline & 1 & \\ \hline l_1 & l_2 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} a & v^T \\ \hline 0 & a_1 & v_1^T \\ \hline O & O & M_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

LU dekompozicija

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & M/a \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l_1 & I \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & M/a \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ u & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & v^T \\ 0 & M/a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

LU dekompozicija \Leftrightarrow Gausov algoritam

Primer.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 10 & -2 \\ 4 & 2 & 16 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

LU dekompozicija \Leftrightarrow Gausov algoritam

Primer.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

LU dekompozicija \Leftrightarrow Gausov algoritam

Primer. Dobijena je LU faktORIZACIJA permutovane polazne matrice

$$P \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadaci

1. Odrediti broj aritmetičkih operacija potrebnih za rešenje sistema linearnih jednačina Gausovim algoritmom i LU faktORIZACIJOM.
2. Koristeći LU faktORIZACIJU rešiti simultano sisteme jednačina

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -1, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 9. \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 13\end{aligned}$$

Zadaci

3. Odrediti inverznu matricu matrice A koristeći njenu LU faktORIZACIJU.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -9 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

Zadaci

4. Odrediti LU faktORIZACIJU punog ranga matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$