

## Domaći zadatak br. 8

1. Data je redukovana QR faktorizacija matrice  $A$  punog ranga kolona. Neka je rešenje problema najmanjih kvadrata  $Ax = b$  označeno sa  $\hat{x}$ . Pokazati da je  $A\hat{x} = QQ^T b$  i  $\|A\hat{x} - b\|^2 = \|b\|^2 - \|Q^T b\|^2$ .
2. Neka je  $Q \in \mathcal{M}_{n \times m}$  matrica sa ortonormiranim kolonama i  $b \in \mathbb{R}^n$  vektor. Pokazati da je  $\hat{x} = Q^T b$  vektor koji minimizira normu  $\|Qx - b\|^2$ .
3. Odrediti najbolju aproksimaciju  $b_{approx}$  vektora  $b$  duž pravca određenog vektorom  $a$ . Aproksimacija je najbolja ukoliko minimizira normu  $\|b - b_{approx}\|$ .
4. Pokazati da je srednja vrednost  $\mu(y) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$  rešenje problema najmanjih kvadrata kojim se pronalazi horizontalna linija najbliža podacima  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .
5.
  - a) Izraziti  $\sigma(v + u)$  za svaki od slučajeva  $\rho(v, u) = 0$ ,  $\rho(v, u) = 1$  i  $\rho(v, u) = -1$ .
  - b) Neka su vektori  $u$  i  $v$  sa jednakim parametrima  $\mu(u) = \mu(v) = \mu$  i  $\sigma(u) = \sigma(v) = \sigma$ . Ukoliko je  $\rho(u, v) = \rho$ , odrediti  $\mu(w)$  i  $\sigma(w)$  za  $w = \frac{u + v}{2}$ . Uporediti vrednosti  $\sigma(w)$  i  $\sigma$ .