Алексић Стефан 16995 III домаћи задатак [ММР]

(1) $Q \in M_{n \times n}$, $U \in M_{m \times m}$, $QQ^T = I = UU^T$ $M \circ M^T = I$?

$$M = \begin{bmatrix} Q & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & U \end{bmatrix} \quad M^T = \begin{bmatrix} Q^T & O_{m \times n}^T \\ O_{n \times m}^T & U^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^T & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & U^T \end{bmatrix}$$

$$M \circ M^T = \begin{bmatrix} Q & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & U^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QQ^T + O_{n \times n} & O_{n \times m} + O_{n \times m} \\ O_{m \times n} + O_{m \times n} & O_{m \times m} + UU^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & I_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$= I_{n+m \times n+m}$$

$\Rightarrow M$ јесте ортогонална матрица

(2) H_1, H_2 су елементарне рефлексије, да ли су то и M_1, M_2?

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} H_1 = I - 2V_1V_1^T & \|V_1\| = 1 \\ H_2 = I - 2V_2V_2^T & \|V_2\| = 1 \end{matrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2V_2V_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2V_2V_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_2V_2^T \end{bmatrix}$$

$$= I - 2w_2w_2^T \qquad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|w_2\| = 1 \Rightarrow \exists w_2 \Rightarrow \exists M_1$$ као ел. рефлексија

$$M_2 = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - 2V_1V_1^T & 0 \\ 0 & I - 2V_2V_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2V_1V_1^T & 0 \\ 0 & 2V_2V_2^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} V_1V_1^T & 0 \\ 0 & V_2V_2^T \end{bmatrix} = I - 2w_1w_1^T$$

$w_1w_1^T$ је спољашњи производ $\Rightarrow \mathrm{RANK}(w_1w_1^T) = 1$

$\mathrm{RANK}\left(\begin{bmatrix} V_1V_1^T & 0 \\ 0 & V_2V_2^T \end{bmatrix}\right) \geq 2$, мада бих рекао да је тачно 2, али

$\Rightarrow w_1$ не постоји $\Rightarrow M_2$ не постоји као елементарна рефлексија

нисам сигуран, свеједно је више од 1

3. $v \in \mathbb{R}^{n-1}$

$a \neq 0$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\| = 1 = \sqrt{a^2+v_1^2+v_2^2+\dots+v_{n-1}^2} \Rightarrow a^2 + \|v\|^2 = 1$$

$$\boxed{a^2 + v^T v = 1}$$

#

$$Q = \begin{bmatrix} a & v^T \\ v & I - \frac{vv^T}{1-a} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} QQ^T = I \\ Q = Q^T \end{matrix} \; ?$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} a & v^T \\ v & I - \frac{vv^T}{1-a} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & v^T \\ (v^T)^T & I - \frac{(vv^T)^T}{1-a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & v^T \\ v & I - \frac{vv^T}{1-a} \end{bmatrix} = Q$$

$$QQ^T = Q^2 = \begin{bmatrix} a & v^T \\ v & I - \frac{vv^T}{1-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v^T \\ v & I - \frac{vv^T}{1-a} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + v^T v & av^T + v^T - \frac{v^T v v^T}{1-a} \\ va + v - \frac{vv^T v}{1-a} & vv^T + \left(I - \frac{vv^T}{1-a}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + v^T v & av^T + v^T - \frac{v^T v v^T}{1-a} \\ va + v - \frac{vv^T v}{1-a} & vv^T + I - 2\frac{vv^T}{1-a} + \frac{vv^T vv^T}{(1-a)^2} \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + v^T v = 1 \;\# \quad (1)} \; w$$

$$\boxed{av^T + v^T - \frac{v^T v}{1-a} v^T = 0 \quad (2)} \; w$$

$$\left(a + 1 - \frac{1-a^2}{1-a}\right) v^T = 0$$

$$a + 1 - \frac{(1+a)\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}} = 0$$

$$\cancel{a} + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{a} = 0$$

$$0 = 0 \; w$$

$$\boxed{va + v - v\frac{v^T v}{1-a} = 0 \quad (3)} \; w$$

$$v\left(a + 1 - \frac{v^T v}{1-a}\right) = 0$$

$$a + 1 - \frac{1-a^2}{1-a} = 0$$

$$a + 1 - \frac{\cancel{(1-a)}(1+a)}{\cancel{(1-a)}} = 0$$

$$a + 1 - 1 - a = 0$$

$$0 = 0 \; w$$

$$\boxed{vv^T + \cancel{I} - 2\frac{vv^T}{1-a} + \frac{vv^T vv^T}{(1-a)^2} = \cancel{I} \quad (4)} \; w$$

$$vv^T\left(1 - \frac{2}{1-a} + \frac{1-a^2}{(1-a)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{1} - \cancel{a} - \cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{a}}{1-a} = 0$$

$$0 = 0 \; w$$

(1), (2), (3), (4)

$$\Rightarrow QQ^T = I$$

4.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_z(30^\circ) = R_z(\pi/6) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & 0 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Матрица ротације за 3D простор омогућава ротацију свих вектора, правилом десне руке, у односу на правац чији вектори остају непомични, Кажемо да се врши ротација око тог правца.

Матрица ротације у 2D простору за угао θ

$$R_{2D}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Правац око ког вршимо ротацију сликамо у самог себе (остаје фиксиран), тако да ће врсте/колоне испуњавати јединичним векторима.

Матрице ротације око x, y, z -оса за угао θ

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$