UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Matrični metodi
Primene kroz Python

AUTOR: JOVANA DŽUNIĆ

Niš, 2020

Sadržaj

Poglavlje 1

Blok matrice

Jedna od najznačajnijih operacija u algebri matrica je mogućnost rastavljanja matrice na manje delove i da se pritom zadrži oblik izraza za standaradne operacije. Sastavni delovi matrice predstavljaju podmatrice i nazivaju se blokovi, a postupak rastavljanja na podmatrice je razbijanje na blokove. U praksi blok matrice su korisne za ubrzavanje algoritama jer omogućavaju paralelizaciju procesa izračunavanja i utiču na smanjenje u komunikaciji internih memorija računara. Karakteristične su za digitalnu obradu slika i njihovu kompresiju. Sa druge strane, blok matrice su veoma pogodne za kratku notaciju matematičkih formula i olakšavaju dokaze teorema.

Na početku kursa matrice smo posmatrali kao skupove pogodno izabaranih vektora: vektora-kolona i vektora-vrsta. Time smo napravili uvod u grupisanje podataka unutar matrica. Veoma često grupisanje podataka po drugačijem kriterijumu pogoduje razumevanju i rešavanju realnih problema. U tom kontekstu matrice možemo posmatrati kao kolekcije pogodno izabranih podmatrica.

Matrica A je razbijena na blokove ako su njeni elementi jednom linijom ili mrežom horizontalnih i vertikalnih linija podeljeni na pravougaone podmatrice. Blokovi su dobijene manje podmatrice polazne matrice A. Za označavanje blokova koristimo ponovo dva indeksa. Tako u bloku A_{ij} je i indeks blokovske vrste, a j indeks blokovske kolone. Broj blokovskih vrsta μ i broj blokovskih kolona ν određuju dimenziju blokovske matrice $\mu \times \nu$.

Primer 1. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Primer razbijanja matrice A na blokove dat je na sledeći način:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right].$$

Blokovi matrice A su podmatrice:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Koristeći dobijene blokove matricu A zapisujemo na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis predstavlja blok matricu A, njeni elementi su matrice A_{ij}, a ne brojevi. Blokovska matrica A je dimenzije 2×3, dok je polazna (skalarna) matrica A dimenzije 4×4.

Primer 2. Na matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ uočavamo delove koje možemo kraće da obeležavamo uobičajenom notacijom. Tako je blok zapis matrice A blokovske dimenzije 1×2 :

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}.$$

Primer 3. Sistemi linearnih jednačina se za implementaciju i efikasno rešavanje zapisuju u matričnom obliku

$$Ax = b.$$

Za predstavljanje sistema u algoritmima za nalaženje rešenja koristimo blok zapis proširene matrice sistema

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix}.$$

U opštem slučaju, ukoliko je matrica $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ podeljena u blokove deljenjem njenih redova u μ nepraznih podskupova i deljenjem njenih kolona u ν nepraznih podskupova, onda se ona može zapisati na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \dots & A_{\mu\nu} \end{bmatrix},$$

gde su A_{ij}, $i \in \{1, 2, \dots, \mu\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ blokovi matrice A. Za blok matricu A tada kažemo da je dimenzije $\mu \times \nu$ čiji su elementi blokovi A_{ij} dimenzija $m_i \times n_j$, i važi $m_1 + m_2 + \dots + m_\mu = m$, $n_1 + n_2 + \dots + n_\nu = n$. Primetimo da podmatrice duž iste blokovske kolone imaju jednak broj kolona. Takođe, podmatrice duž iste blokovske vrste imaju jednak broj vrsta. Podmatrice A_{ii}, gde je $1 \leq i \leq \min\{\mu, \nu\}$, predstavljaju dijagonalne blokove.

Različite vrste matrica, kao što su kvadratna, dijagonalna, trougaona i sl. imaju svoje blokovske analogone. Blok matrica blokovske dimenzije $\mu \times \mu$ je kvadratna blok matrica. Poznavanje dimenzija dijagonalnih blokova kvadratne blok matrice u potpunosti definiše dimenzije svih blok elemenata. Slično kvadratnoj blok matrici, definišu se i druge specijalne vrste blok matrica.

Definicija 1.

- Matrica A je blok gornje trougaona ako su svi blokovi ispod dijagonalnih blokova nula-matrice.
- Matrica A je blok donje trougaona ako su svi blokovi iznad dijagonalnih blokova nula-matrice.

- Matrica A je blok dijagonalna ako su svi blokovi van dijagonalnih blokova nula-matrice.

Primer 4. Primer blok gornje trougaone matrice

$$\left[\begin{array}{c|cc|ccc} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Primer 5. Žordanov blok dimenzije n je gornje trougaona matrica $n \times n$ oblika

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Žordanov blok dimenzije 1 je matrica $J_1(\lambda) = [\lambda]$. Žordanova blok forma je blok dijagonalna matrica sa Žordanovim dijagonalnim blokovima

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & O & \dots & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \dots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gde su vandijagonalni elementi O pravougaone nula-matrice ne obavezno istih dimenzija.

U praktičnim primenama po značaju ističu se tri vrste razbijanja matrica na blokove: razbijanje na kolone, na vrste i na blok matricu drugog reda. Neke primene razbijanja na kolone i vrste upoznali smo kroz operacije nad matricama i vektorima. Razbijanje matrica na blok matricu drugog reda osnova je podeli pa vladaj algoritama sa matricama.

U uvodnom poglavlju videli smo mogućnosti izračunavanja vršenjem operacija nad matricama u slučaju blok podele na vektore. U nastavku, razmatraćemo blok-operacije nad matricama na primeru blok matrica 2×2. Rezultati se jednostavno uopštavaju na blokovske matrice većih dimenzija.

1.1 Operacije nad blok matricama

U slučaju blokovske podele 2×2, matricu A tipa $m \times n$ jednom pravom paralelnom vrstama i jednom pravom paralelnom kolonama razbijamo na četiri podmatrice,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Blok A_{11} naziva se vodeći blok. Ukoliko je podmatrica A_{11} kvadratna dimenzije $p \times p$, tada je $\det(A_{11})$ glavni minor dimenzije p matrice A.

Notacija blok matrica podržava osnovnu algebru matrica. Operacije nad blok matricama su prirodno produženje operacija nad skalarnim matricama. Mogućnost sprovođenja operacija nad pojedinačnim blokovima uslovljena je slaganjem dimenzija tih blokova. Uslov izvršivosti svake od operacija svodi se na uobičajene uslove jednakosti dimenzija.

Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ data konstanta tada je:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}.$$

Zbir blok matrica u blok formi je moguć jedino ako su odgovarajući blokovi matrice istog tipa. Blokovska podela koja omogućava takvu primenu operacije naziva se konformna podela matrica za sabiranje. U tom slučaju važi jednakost:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}.$$

Proizvod blok matrica 2×2 je takođe blok matrica istog tipa. Izraz za prozvod dat je sa:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Blokovsko množenje (1.1) je moguće izvesti jedino ako je definisan svaki od proizvoda u izrazu. Da bi množenje matrica A i B moglo da se sprovede u blok formi neophodno je da se podela u blokove po kolonama matrice A slaže sa podelom u blokove po vrstama matrice B - pravilo unutrašnjeg indeksa za svako blokovsko množenje. Ukoliko su ispunjeni svi ovi uslovi, kažemo da su matrice A i B konformno podeljene u blokove za operaciju množenja. U praksi se najčešće koristi konformna podela u kojoj su odgovarajući dijagonalni blokovi kvadratne matrice istog tipa. Time se postiže konformnost za sve aritmetičke operacije.

Primer 6. Dovršićemo konformno razbijanje matrica A i B na blok matrice reda 2, tj. napravićemo razbijanje tako da blokovsko množenje u proizvodu AB bude moguće. Neophodno je obezbediti poklapanje unutrašnjih indeksa blokova u blokovskom proizvodu.

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Konformno razbijanje matrice B u blok matricu reda 2, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, moguće je izvesti na nekoliko načina. Da bi smo lakše sagledali odnos indeksa blokova koristićemo predstavljanje proizvoda matrica preko spoljašnjeg proizvoda vektora:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Prva blokovska kolona $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \\ 7 \end{array}\right]$ matrice A sadrži jednu skalarnu kolonu, to i prva blokovska vrsta $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}$ matrice B mora sadržati jednu skalarnu vrstu da bi se obezbedila jednakost unutrašnjih indeksa. Slično, druga blokovska kolona $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{array}\right]$ sadrži dve skalarne kolone. Toliko skalarnih vrsta mora sadržati druga blokovska vrsta $\begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ matrice B. Tako dolazimo do mogućih konformnih razbijanja matrice B :

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right].$$

Primer 7. U slučaju blok podele matrica-vektor $\begin{bmatrix} A & v \end{bmatrix}$ koristimo i notaciju $\begin{bmatrix} A & | & v \end{bmatrix}$, gde je A matrica i v vektor. Tada je proizvod

$$\begin{bmatrix} A & v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \\ v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A & A^T v \\ v^T A & v^T v \end{bmatrix}.$$

Pojam konformne podele matrica se lako uopštava na veće blokovske dimenzije. Ona omogućava množenje matrica po istim pravilima koja važe za množenje običnih skalarnih matrica. Osnovna razlika je u nedostatku komutativnosti u proizvodu blokova. Potrebno je strogo voditi računa o redosledu činilaca.

Primer 8. Množenje dve skalarne matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ troši mnp množenja i $m(n-1)p$ sabiranja, tj. troši $\mathcal{O}(2mnp)$ aritmetičkih operacija. Vreme izvršenja operacije AB može se smanjiti paralelizacijom procesa izračunavanja. Sa druge strane, kada su dimenzije matrica velike, komunikacija između memorija računara postaje još jedan značajan faktor u vremenu izvršenja proizvoda AB. Uprošćeno gledano, memorija računara je podeljena na brzu (keš) i sporu (ostale) memoriju, mereno vremenom potrebnim za komunikaciju sa procesorom. Operacije nad podacima se najbrže obavljaju kada su oni smešteni u brzoj memoriji jer se iz nje najbrže čitaju. Brzina memorije je obrnuto korelisana sa raspoloživim memorijskim prostorom. Zbog toga se teži što efikasnijoj upotrebi raspoloživog prostora brze memorije.

Različite blokovske podele mogu predstavljati različite strategije smeštaja elemenata matrica u brzu memoriju računara. Cilj je obezbediti što bolju lokalnost podataka i time smanjiti broj komunikacija između memorija računara.

Da bi se izvršila neka blokovska operacija neophodno je da se blokovi operandi smeste u brzu memoriju računara, a da se rezultat po izvršenju smešta u sporu memoriju. Daćemo veoma pojednostavljeno poređenje broja prenosa brza-spora memorija za različite načine blokovske podele.

- $$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline & & \dots & \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{bmatrix},$$

  $$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \end{bmatrix}.$$

  $$AB = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & \dots & A_{11}B_{1p} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & \dots & A_{21}B_{1p} \\ & & \dots & \\ A_{m1}B_{11} & A_{m1}B_{12} & \dots & A_{m1}B_{1p} \end{bmatrix},$$

  rezultat je matrica koja sadrži $m \times p$ skalarnih proizvoda vrsta-kolona, broj pristupa memoriji za čitanje operanada je $\mathcal{O}(mp)$. Ukoliko je potrebno svaki rezultat $A_{ik}B_{kj}$ smestiti u sporu memoriju računara, to je još mp pristupa.

- $A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \end{bmatrix},$

  $B = \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \hline & & \dots & \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix}.$

  $AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \dots + A_{1n}B_{n1}.$

  Zbir n spoljašnjih proizvoda vrsta-kolona ima $2n + 1$ memorijskih pristupa.

- $B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \end{bmatrix}.$

  $AB = A \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_{11} & AB_{12} & \dots & AB_{1p} \end{bmatrix}.$

  Broj memorijskih pristupa je $2p + 1$.

- $A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline & & \dots & \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{bmatrix}. \; AB = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \\ \vdots \\ A_{m1}B \end{bmatrix}.$

  Broj memorijskih pristupa je $2m + 1$.

- $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \; AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$

  Broj pristupa memoriji računara je 20.

Primer 9. Opisaćemo algoritam za množenje dve blok matrice koji je predložio Štrasen u radu [1]. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

blok matrice reda $2n$ gde su svi blokovi kvadratne matrice reda n. Njihov proizvod je matrica istog tipa

$$C = AB = A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Prema formuli (1.1) izračunavanje matrice C koristi 8 proizvoda blokova $n \times n$. Broj množenja blok matrica može se smanjiti na 7 uz povećan broj sabiranja blokova. Postupak predviđa uvođenje međurezultata

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}),\\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11},\\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}),\\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}),\\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22},\\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}),\\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}).
\end{aligned}$$

Tada se matrica C dobija sa

$$C = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}.$$

Zbog kraćeg zapisa u nastavku koristićemo označavanje blok matrica bez naznaka indeksa blokova. Indeksi u blokovima, ukoliko postoje, označavaće dimenziju odgovarajućeg bloka.

Izračunavanje determinante kvadratne matrice jedan je od bitnijih elemenata u analizi svojstava neke matrice. Blok matrice se mogu upotrebiti za relaksaciju izračunavanja i u ovom domenu. Na primeru matrica drugog reda proverićemo mogućnost izračunavaja determinanti kvadratnih matrica razbijenih na blokove.

Primer 10. Neka su I_m i I_n jedinične matrice dimenzija m i n, redom, i O nula matrica odgovarajuće dimenzije. Imajući u vidu da su $\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I_m & O \\ Y & I_n \end{bmatrix}$ trougaone matrice i blok-trougaone, to je

$$\begin{vmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & O \\ Y & I_n \end{vmatrix} = 1 = \det(I_m)\det(I_n).$$

Primer 11. Neka su I i A kvadratne matrice i O nula matrica odgovarajuće dimenzije. Laplasovim razvojem se lako pokazuje da je

$$\begin{vmatrix} I & X \\ O & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & Y \\ O & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & O \\ Z & A \end{vmatrix} = \det(A).$$

Naredna teorema pokazuje da se determinanta trougaone blok matrice sa kvadratnim dijagonalnim blokovima izračunava slično determinanti trougaonih skalarnih matrica.

Teorema 1. *Neka su $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i $D \in \mathcal{M}_{m\times m}$. Tada je*

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D).$$

DOKAZ: Tvrđenje se može dobiti na osnovu primera 11 i primene Koši-Bineove formule na determinante sledećih matrica

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & D \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ O & I_m \end{bmatrix}. \square$$

Teorema 1 sugeriše da je za izračunavanje determinanti blok matrica u opštem obliku potrebna njihova transformacija na blok trougaone matrice. Time se i u ovom domenu povlači analogija sa klasičnim postupcima izračunavanja determinanti. Elementarne transformacije vrsta ili kolona skalarnih matrica moguće je predstaviti proizvodom matrica. Transformacija vrsta matrice A dobija se pred-množenjem (množenjem sa leve strane) matrice A transformacionom matricom dobijenom iz jedinične matrice I. Transformacije kolona dobijaju se post-množenjem (množenjem sa desne strane) matrice A odogovarajućom transformacionom matricom.

Slično skalarnim matricama, elementarne transformacije blok-vrsta ili blok-kolona predstavljaju se množenjem blok matrica. Da bi transformacija mogla da se izvrši neophodna je regularnost bar jednog od blokova.

Primer 12. Neka su matrice M i T date u blok formi:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad , \qquad T = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix},$$

gde su M i T konformno blokovski podeljene za množenje i poseduju dijagonalne kvadratne blokove. Tada je

$$TM = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XA+YC & XB+YD \\ ZA+UC & ZB+UD \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Tražimo transformacionu matricu T koja će M dovesti na trougaoni oblik, npr. gornje trougaonu blok matricu. Da bismo u proizvodu TM dobili blok gornje trougaonu matricu neophodno je da donji levi blok rezultata (1.2) bude nula matrica, tj. da važi jednakost

$$ZA + UC = O \iff ZA = -UC. \tag{1.3}$$

Ukoliko je gornja jednakost (1.3) rešiva po nekom od blokova činilaca Z ili U, možemo opisati T kao transformaciju vrsta matrice M kojima se ona dovodi na blok donje trougaonu matricu.

Pretpostavimo da je blok A regularna matrica. Tada je na osnovu (1.3)

$$Z = -UCA^{-1}, \qquad T = \begin{bmatrix} X & Y \\ -UCA^{-1} & U \end{bmatrix}.$$

Transformacionu matricu T obično biramo tako da ispunjava sledeće osobine:

- matrica T je jednostavna za formiranje,
- determinanta matrice T je jednostavna za izračunavanje.

Navedeni uslovi su ispunjeni za blok-trougaonu matricu T čiji dijagonalni blokovi imaju mogućnost lakog izračunavanja determinante. Jedan od takvih primera je blok transformacija jedinične matrice

$$T = \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Tako dobijamo

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Izraz

$$M/A = D - CA^{-1}B \tag{1.5}$$

naziva se Šurov[1] komplement bloka A matrice M.

Transformacijom kolona trougaone matrice iz (1.4) možemo dobiti dijagonalnu blok matricu.

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Na osnovu (1.6) zaključujemo da je

$$\det(M) = \det(A)\det(M/A) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B). \tag{1.7}$$

Formula (1.7) može se naći u literaturi kao Šurova jednakost za determinante, [2].

Inverzna matrica može se iskazati u blok formi, takođe. Jednakost (1.6) i u ovom procesu ima značajan udeo. Počinjemo proučavanje inverzije blok matrica na jednostavnijim primerima.

Primer 13. Inverzna matrica blok matrice $T = \begin{bmatrix} I & Y \\ O & I \end{bmatrix}$ je blok matrica $T^{-1} = \begin{bmatrix} I & -Y \\ O & I \end{bmatrix}$. Analogno, za $T = \begin{bmatrix} I & O \\ Z & I \end{bmatrix}$ je $T^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -Z & I \end{bmatrix}$. Na osnovu (1.4) tada važi da je

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

što predstavlja blok trougaonu dekompoziciju matrice M. Nastavljajući na isti način, na osnovu (1.6) važi

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Gornja jednakost predstavlja blok LDU faktorizaciju matrice A.

Primer 14. Neka je sistem jednačina $Mx = b$ dat u blok formi

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

sa regularnim blokom A. Na osnovu (1.8) blok sistem (1.9) postaje

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + A^{-1}Bx_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - CA^{-1}b_1 \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} x_1 & = A^{-1}(b_1 - Bx_2), \\ (M/A)x_2 & = b_2 - CA^{-1}b_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle, veličina skupa rešenja sistema (1.9) zavisi od rešenja druge blok jednačine

$$(M/A)x_2 = b_2 - CA^{-1}b_1.$$

[1]Isai Šur (1875 – 1941) Issai Schur – jevrejsko-nemački matematičar

Na osnovu prethodnog primera zaključujemo da jednakost (1.8) pruža puno dodatnih informacija o matrici M.

1. $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(M/A)$.
2. $\operatorname{def}(M) = \operatorname{def}(M/A)$.
3. $\exists M^{-1} \iff \exists (M/A)^{-1}$.

Primer 15. U nekim primenama prisutna je potreba za rešavanjem niza sistema linearnih jednačina $A_k x_k = b_k,\ k \in \mathbb{N}$, gde su $A_k \in \mathcal{M}_{n_k \times n_k},\ x_k, b_k \in \mathcal{M}_{n_k \times 1}$ i $n_k < n_{k+1}$. Dakle, u nizu se dimenzija sistema inkrementira. Razmatramo sukcesivne sisteme $A_k x_k = b_k$ i $A_{k+1} x_{k+1} = b_{k+1}$ povezane sa

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k & u_k \\ v_k & a_k \end{bmatrix}, \qquad b_{k+1} = \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix},$$

gde je $a_k \in \mathcal{M}_{p_k \times p_k},\ n_k + p_k = n_{k+1}$. Ukoliko uvedemo oznaku $x_{k+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, na osnovu rezultata primera 14 imamo

$$\begin{bmatrix} A_k & u_k \\ v_k & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_{k+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^{-1} b_k - A_k^{-1} u_k y_2 \\ (A_{k+1}/A_k)^{-1}(c_k - v_k A_k^{-1} b_k) \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $A_k^{-1} b_k = x_k$, onda je

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} x_k - A_k^{-1} u_k y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k^{-1} u_k y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k^{-1} u_k \\ I \end{bmatrix} y_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_k \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k^{-1} u_k \\ I \end{bmatrix} (A_{k+1}/A_k)^{-1}(c_k - v_k x_k). \end{aligned}$$

Predstavljeni primeri sugerišu postupak određivanja inverzne matrice neke blok matrice $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Ključnu ulogu ima blok LDU faktorizacija (1.8) matrice M.

Primer 16. Neka su

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

međusobno inverzne matrice date konformno u blok formi, tj.

$$MM^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{bmatrix}.$$

Primetimo da opisana konformnost za množenje podrazumeva sledeći odnos dimenzija dijagonalnih blokova:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M}_{n \times p} &\Longrightarrow X \in \mathcal{M}_{p \times n}, \\ D \in \mathcal{M}_{m \times q} &\Longrightarrow U \in \mathcal{M}_{q \times m}. \end{aligned}$$

Kada su dijagonalni blokovi matrice M kvadratne matrice, tj. $A \in \mathcal{M}_{n \times n}, D \in \mathcal{M}_{m \times m}$, tada se blokovi A i U iz (1.10) nazivaju komplementarni blokovi. Slično D i X iz (1.10) su komplementarni blokovi.

Pretpostavimo $n = p$ i da je blok $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ regularna matrica. Na osnovu (1.8) imamo

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}\right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & O \\ O & M/A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & (M/A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $U = (M/A)^{-1}$, tj. blok U je regularna matrica kada je komplementarni blok A regularna matrica.

Napomenimo da izvedene formule za Šurov komplement M/A analogno važe i za M/D kada je blok D regularna matrica u $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Posledica 1. *Neka je* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *sa regularnim blokom* D*. Tada je*

a) $\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{bmatrix}$,

b) $M/D = A - BD^{-1}C$,

c) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M/D & O \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}$,

d) $M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$.

Posledica 2. *Neka je* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *sa regularnim dijagonalnim blokovima* A *i* D*. Tada je*

$$M/A = D - CA^{-1}B, \quad M/D = A - BD^{-1}C,$$
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Naredna tvrđenja pokazuju koliko blok matrice i operacije nad njima pojednostavljuju dokaze teorema i skraćuju notaciju. Takođe daju veoma bitne informacije o rang 1 ažuriranjima matrica.

Teorema 2. *(Lema o determinanti matrice) Neka je* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *regularna matrica i* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *vektori (matrice-kolone). Tada važi*

$$\det(A + uv^T) = (1 + v^T A^{-1}u)\det(A), \qquad \det(A + uv^T) = \det(A) + v^T \operatorname{adj}(A)u.$$

DOKAZ: Posmatramo najpre slučaj kada je $A = I$. Primenom determinante na matričnu jednakost

$$\begin{bmatrix} I & O \\ v^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + uv^T & u \\ O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -v^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & u \\ O & 1 + v^T u \end{bmatrix},$$

dolazimo do $\det(I+uv^T)=1+v^Tu$. Tada opšti slučaj dobijamo iz

$$\det(A+uv^T)=\det(A)\det\left(I+(A^{-1}u)v^T\right)=\det(A)(1+v^TA^{-1}u).$$

Druga jednakost u lemi je tada jednostavna posledica.

$$\begin{aligned}\det(A+uv^T) &= \det(A)(1+v^TA^{-1}u)=\det(A)+\det(A)(v^TA^{-1}u)\\ &= \det(A)+\det(A)v^T\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right)u\\ &= \det(A)+v^T\operatorname{adj}(A)u. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 3. *(Silvesterova teorema za determinante) Ako su $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ i $B\in\mathcal{M}_{n\times m}$, $m\geq n$, tada je*

$$\det(AB-\lambda I_m)=(-\lambda)^{m-n}\det(BA-\lambda I_n),$$

gde I_m i I_n označavaju jedinične matrice odgovarajućeg reda.

DOKAZ: Primetimo da važe sledeće matrične jednakosti

$$\begin{bmatrix} I_m & A\\ O & \lambda I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\lambda I_m & A\\ B & -I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AB-\lambda I_m & O\\ \lambda B & -\lambda I_n\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_m & O\\ B & \lambda I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\lambda I_m & A\\ B & -I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\lambda I_m & A\\ O & BA-\lambda I_n\end{bmatrix}.$$

Izračunavanjem i izjednačavanjem determinanti matrica u ovim jednakostima dolazimo do jednakosti iz teoreme. Na osnovu dokazanog možemo tvrditi da se karakteristični polinomi matrica AB i BA poklapaju do na višestrukost sopstvene vrednosti $\lambda=0$. $\square$

1.1.1 Pitanja i zadaci

1. Koristeći blok matrice, izračunati M^2 ako je

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&3\end{bmatrix}.$$

2. Neka je $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$. Koji potprostori su jednaki za sledeće matrice?

$$\text{a) } [A],\ \begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix},\quad \text{b) } \begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}A&A\\A&A\end{bmatrix}.$$

3. Odrediti izraz za determinantu reda $2n$,

$$D = \det \begin{bmatrix} \alpha I_n & A_n \\ A_n & \alpha I_n \end{bmatrix}, \qquad \text{gde je} \qquad A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}.$$

4. Neka je data matrica u blok formi $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sa kvadratnim dijagonalnim blokovima istih dimenzija. Neka je blok A regularna matrica koja komutira sa C. Dokazati da je tada

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

5. Neka je M kvadratna matrica data u blok formi $M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}$, sa kvadratnim vodećim blokom A. Sa O su označene nula matrice ne obavezno istih dimenzija. Dokazati da je

$$M^n = \begin{bmatrix} A^n & A^{n-1}B \\ O & O \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. Data je matrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix},$$

koja je razbijena na četiri bloka $A, B, O, I \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Ispitati da li je tačna jednakost

$$M^k = \begin{bmatrix} A^k & (A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I)B \\ O & I \end{bmatrix}.$$

7. Ako je $A \in \mathcal{M}_{m\times m},\ B \in \mathcal{M}_{m\times n},\ C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $k \in \mathbb{N}$, dokazati formulu

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A^k & A^{k-1}B + A^{k-2}BC + \cdots + ABC^{k-2} + BC^{k-1} \\ O & C^k \end{bmatrix}.$$

8. Neka je

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix},$$

blok gornje trougaona matrica drugog reda sa kvadratnim dijagonalnim blokovima. Dokazati da je M regularna matrica akko su matrice A i D regularne i da važi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

9. a) Neka je $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ blok dijagonalna matrica sa regularnim dijagonalnim blokovima. Dokazati da je tada $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$.

b) Naći inverze sledećih matrica.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

10. Neka je $A(a) = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$. Odredi inverznu matricu matrice $M = \begin{bmatrix} A(a) & A(b) \\ O_{2\times 2} & A(c) \end{bmatrix}$.

11. Dokazati da ako su A i B dve blok trougaone matrice istog tipa s jednakim redovima odgovarajućih dijagonalnih blokova, tada je njihov proizvod AB takođe blokovsko-trougaona matrica istog tipa sa istim redovima dijagonalnih blokova.

12. Neka je $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ blok matrica, gde je A regularna kvadratna matrica reda n. Dokazati da je rang matrice M jednak n akko je $D = CA^{-1}B$.

Literatura

[1] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numer. Math.*, 13:354–356, 1969.

[2] ed. F. Zhang. *The Schur complement and its Applicatinos*. Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2005.