Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet

Matrični metodi u računarstvu
Korigovan Projekat 1

Stefan Aleksić 16995

02. April, 2020. god.

Projekat br. 1

Poznata je LU dekompozicija regularne matrice $A = LU \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Regularna matrica M ima block formu:

$$M = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix},$$

gde su $v, u \in \mathbb{R}^n$ vektori i $a \in \mathbb{R}$ nenula skalar. Odrediti LU faktorizaciju matrice M u blok formi

$$M = \begin{bmatrix} L & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}, \quad (A = LU) \tag{1}$$

i odrediti potreban broj aritmetičkih operacija za njeno dobijanje. U izrazu (1) pozicije __ označavaju vektore i skalare koje je potrebno odrediti tako da matrica $\begin{bmatrix} L & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ bude donje trougaona, matrica $\begin{bmatrix} U & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ bude donje trougaona i važi jednakost (1).
Kako se menja broj potrebnih aritmetičkih operacija u slučaju kada su A i M simetrične matrice?

Rešenje:

Da bismo dobili LU faktorizaciju matrice M, koristimo sledeći postupak:

$$M = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(-u^TA^{-1})\cdot\ +} \to L' = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ u^TA^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & v \\ u^T - u^TA^{-1}A & a - u^TA^{-1}v \end{bmatrix}$$

Element $a - u^TA^{-1}v \in \mathbb{R}$ nazivamo Šurovim komplementom i označavamo: $M/A = a - u^TA^{-1}v$.
LU faktoriracija matrice M sada izgleda:

$$L' = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \vec{0} \\ u^TA^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} \tag{2}$$

Međutim, dobijene matrice L' i U' ne odgovaraju onim koje se traže (iako $A = IA$, ali ova faktorizacija je trivijalna). Zato moramo pokušati da na neki drugi način dođemo do tražene faktorizacije. Eventualno da nađemo vezu između klasične LU i gore tražene faktorizacije.

1° Način:

Prvo ćemo označiti elemente blok matrica L_M i U_M.

$$M = L_MU_M = \begin{bmatrix} L & \overrightarrow{l_{12}} \\ \overrightarrow{l_{21}}^T & l_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \overrightarrow{u_{12}} \\ \overrightarrow{u_{21}}^T & u_a \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{l_{12}}, \overrightarrow{l_{21}}, \overrightarrow{u_{12}}, \overrightarrow{u_{21}} \in \mathbb{R}^n, \quad l_a, u_a \in \mathbb{R}$$

S obzirom da su matrice L_M, U_M donja i gornja trougaona respektivno, odavde možemo da zaključimo da je $\overrightarrow{l_{12}} = \overrightarrow{u_{21}} = \vec{0}$. Hajmo sada da pomnožimo matrice L_M i U_M:

$$L_MU_M = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \overrightarrow{l_{21}}^T & l_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \overrightarrow{u_{12}} \\ \vec{0}^T & u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LU & L\overrightarrow{u_{12}} \\ \overrightarrow{l_{21}}^TU & \overrightarrow{l_{21}}^T\overrightarrow{u_{12}} + l_au_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vec{v} \\ \vec{u}^T & a \end{bmatrix} = M$$

Izjednačavanjem leve i desne matrice dobijamo sistem:

$$\iff \begin{cases} LU = A \\ L\overrightarrow{u_{12}} = v \implies \overrightarrow{u_{12}} = L^{-1}v \\ \overrightarrow{l_{21}}^TU = u^T \implies \overrightarrow{l_{21}}^T = u^TU^{-1} \\ \overrightarrow{l_{21}}^T\overrightarrow{u_{12}} + l_au_a = a \implies u^T(U^{-1}L^{-1})v + l_au_a = u^T(LU)^{-1}v + l_au_a = u^TA^{-1}v + l_au_a = a \end{cases} \tag{3}$$

Iako smo gornjim sistemom opisali skup matrica ($l_a, u_a \in \mathbb{R}$), mi možemo na svoju ruku izabrati ono rešenje koje je pogodno za računicu, odnosno ono koje bi bilo najzgodnije po konvenciji. S obzirom da se na glavnoj dijagonali matrice L_m očekuju jedinice, odnosno

$$det(L_m) = det(L)det(l_a) = 1 \implies l_a = 1 \land u_a = a - u^T A^{-1} v = M/A$$

Odavde konačno dobijamo elemente matrica L_M i U_M:

$$L_M = \begin{bmatrix} L & \overrightarrow{0} \\ u^T U^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} U & L^{-1}v \\ \overrightarrow{0} & M/A \end{bmatrix} \tag{4}$$

Aritmetičke operacije:

Oznaka operacije	Sabiranje/Oduzimanje	Množenje	Deljenje	**Ukupno**
$\overrightarrow{l_{21}}^T U = u^T$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n	$\boldsymbol{n^2 \implies \mathcal{O}n^2}$
$L\overrightarrow{u_{12}} = v$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	0	$\boldsymbol{n^2 - n \implies \mathcal{O}n^2}$
$M/A = a - \overrightarrow{l_{21}}^T \overrightarrow{u_{12}}$	n	n	0	$\boldsymbol{2n \implies \mathcal{O}2n}$
Ceo algoritam	n^2	n^2	n	$\boldsymbol{2n^2 + n \implies \mathcal{O}2n^2}$

Napomene:

*Izraze: $u^T U^{-1}$ i $L^{-1}v$ izjednačavamo vektorima $\overrightarrow{l_{21}}^T$ i $\overrightarrow{u_{12}}$ respektivno, a onda izraze računamo kao sisteme jednačina:

$$\overrightarrow{l_{21}}^T U = u^T \quad \text{i} \quad L\overrightarrow{u_{12}} = v$$

*S obzirom da matrica L na glavnoj dijagonali ima jedinice, za sistem $L\overrightarrow{u_{12}} = v$ nije potrebno deljenje.
*Šurov komplement M/A odavde je:

$$M/A = a - u^T A^{-1} v = a - u^T (LU)^{-1} v = a - (u^T U^{-1})(L^{-1}v) = a - \overrightarrow{l_{21}}^T \overrightarrow{u_{12}}$$

*Sve što smo jednom izračunali smatramo pribeleženim, kako se ne bi nagomilavala računanja.

Ukoliko je matrica M, onda važi:

$$M^T = M \implies M^T = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & (u^T)^T \\ v^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & u \\ v^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} = M$$

$$\iff \begin{cases} A = A^T \\ u = v \\ v^T = u^T \\ a = a \end{cases} \implies \begin{cases} A = A^T \\ v = u \end{cases} \tag{5}$$

Za simetričnu matricu A važi:

$$A^T = A \implies (LDU')^T = (DU')^T L^T = U'^T D^T L^T = U'^T D L^T = LDU'$$

$$\implies L^T = U' \iff L = U'^T \tag{5.1}$$

Na osnovu (3), (5) i (5.1):

$$L\overrightarrow{u_{12}} = v = u = U^T\overrightarrow{l_{21}} \implies L\overrightarrow{u_{12}} = (DU')^T\overrightarrow{l_{21}} = U'^T D\overrightarrow{l_{21}} \implies \overrightarrow{u_{12}} = L^{-1}LD\overrightarrow{l_{21}} \implies \overrightarrow{u_{12}} = D\overrightarrow{l_{21}}$$

S obzirom da je matrica D dijagonalna matrica, čiji su elementi jednaki elementima glavne dijagonale matrice U, za njeno dobijanje nije potrebno nikakvo računanje, dok je za izraz $\overrightarrow{u_{12}} = D\overrightarrow{l_{21}}$ potrebno izvršiti samo n množenja ($u_{12_i} = d_{ii} \cdot l_{21_i}$, ($u_{12_i} \in \overrightarrow{u_{12}}, d_{ii} \in D_{n\times n}, l_{21_i} \in \overrightarrow{l_{21}}\ \forall i = \overline{1,n}$)).

Aritmetičke operacije za simetričnu matricu M:

Oznaka operacije	Sabiranje/Oduzimanje	Množenje	Deljenje	**Ukupno**
$\overrightarrow{l_{21}}^T U = u^T$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n	$\boldsymbol{n^2 \implies \mathcal{O}n^2}$
$\overrightarrow{u_{12}} = D\overrightarrow{l_{21}}$	0	n	0	$\boldsymbol{n \implies \mathcal{O}n}$
$M/A = a - \overrightarrow{l_{21}}^T\overrightarrow{u_{12}}$	n	n	0	$\boldsymbol{2n \implies \mathcal{O}2n}$
Ceo algoritam	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+3)}{2}$	n	$\boldsymbol{n^2+3n \implies \mathcal{O}n^2}$

2° Način:

Primetimo da je prelazak sa $L'U'$ na $L_M U_M$ faktorizaciju vrlo jednostavan.
Na osnovu već odrađene $L'U'$ faktorizacije (2) i izraza:

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} \implies A^{-1}L = U^{-1}L^{-1}L = U^{-1} \tag{6}$$

$$A = LU \implies L^{-1}A = L^{-1}LU = U \tag{7}$$

$$I_L = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{L^{-1}} = \begin{bmatrix} L^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad I_L I_{L^{-1}} = I_{(n+1)\times(n+1)} \tag{8}$$

Dobijamo:

$$M = L'U' = L'IU' = (L'I_L)(I_{L^{-1}}U') = L_M U_M \tag{9}$$

Odnosno u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} LL^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I_{n\times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} L^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ u^T A^{-1}L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L^{-1}A & L^{-1}v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ u^T U^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & L^{-1}v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix}$$

Na osnovu urađene $L'U'$ faktorizacije (2) i izraza (9) vrlo lako možemo preći sa klasične LU faktorizacije na onu poput gore tražene u zadatku.