UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Matrični metodi
Primene kroz Python

AUTOR: JOVANA DŽUNIĆ

Niš, 2020

Sadržaj

Poglavlje 1

Spektralna teorija

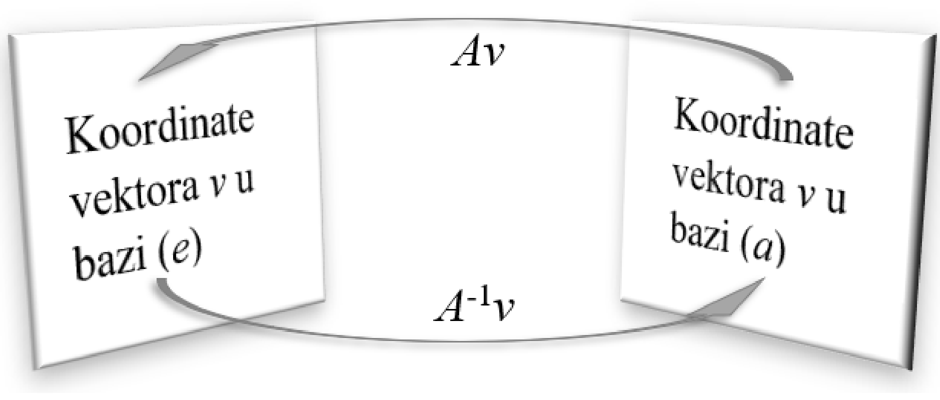
Svaka regularna matrica može se smatrati promenom baze vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$. Ukoliko je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matrica koordinata vektora neke baze $(a):\ a_1, a_2, \ldots, a_n$, prostora $\mathbb{C}^n$ u prirodnoj bazi $(e):\ e_1, e_2, \ldots, e_n$, i vektor v dat koordinatama u bazi (a), što ćemo označavati sa

$$[v]_{(a)} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}_{(a)}^T,$$

onda proizvod

$$A[v]_{(a)} = v_1 \begin{bmatrix} \\ a_1 \\ \\ \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} \\ a_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} \\ a_n \\ \\ \end{bmatrix}$$

predstavlja postupak kojim izračunavamo koordinate vektora v u prirodnoj bazi (e), tj. $[v]_{(e)} \equiv v$. Regularnu matricu A tada nazivamo matricom prelaska sa baze (a) na prirodnu bazu (e) prostora $\mathbb{C}^n$. Inverzna matrica A^{-1} u istom kontekstu predstavlja prelazak sa prirodne baze (e) na bazu (a). Kolone matrice A^{-1} sadrže koordinate vektora prirodne baze (e) izražene u bazi (a). Kada je vektor v predstavljen koordinatama u bazi (e), proizvodom $A^{-1}v \equiv A^{-1}[v]_{(e)}$ izračunavamo koordinate vektora v u bazi (a). Dakle, $A^{-1}v$ predstavlja vektor koeficijenata



Slika 1.1: Promena koordinata sa promenom baze vektorskog prostora

razvoja vektora v u bazi kolona matrice A. Matrice A i A^{-1} tada tumačimo kao odgovarajuće promene baza. U opštem slučaju matrica A može predstavljati matricu prelaska sa baze (a) na neku drugu bazu (b) prostora $\mathbb{C}^n$. Kolone matrice A nose informacije o koordinatama vektora baze (a) izraženim u odnosu na vektore baze (b).

$$a_i = \alpha_{1i} b_1 + \alpha_{2i} b_2 + \cdots + \alpha_{ni} b_n,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrice možemo posmatrati i kao opštije transformacije vektorskog prostora. Svaka kvadratna matrica je način za predstavljanje linearnog operatora $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (dodatak, definicija 12). Za ovakvo predstavljanje neophodan je izbor neke baze (a) prostora $\mathbb{C}^n$. Matrica preslikavanja sadrži informacije o slikama vektora baze (a) organizovane po kolonama. Koordinate slika su date u odnosu na istu bazu (a), $\mathcal{A}a_i = [\mathcal{A}a_i]_{(a)}$ i u potpunosti definišu linearan operator $\mathcal{A}$.

$$A = A\left(\mathcal{A}, (a)\right) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{A}a_1 & \mathcal{A}a_2 & \ldots & \mathcal{A}a_n \end{array}\right]. \tag{1.1}$$

Slika proizvoljnog vektora $v \in \mathbb{C}^n$,

$$v = v_1 a_1 + v_2 a_2 + \cdots + v_n a_n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{(a)}$$

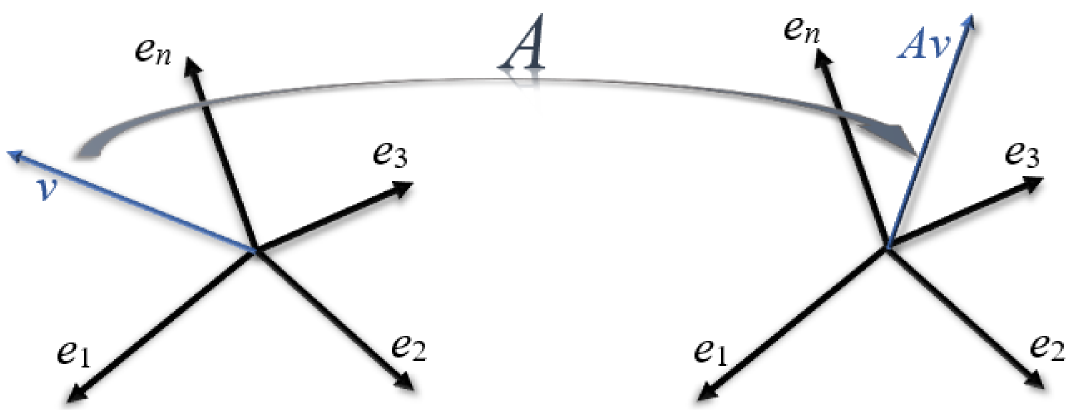
zadatog koordinatama u bazi (a) izračunava se pomoću matrice linearnog operatora $A = A\left(\mathcal{A}, (a)\right)$ zadate takođe u bazi (a). Tada je

$$[\mathcal{A}v]_{(a)} = Av = A(v_1 a_1 + v_2 a_2 + \cdots + v_n a_n) = v_1 A a_1 + v_2 A a_2 + \cdots + v_n A a_n.$$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d] & \mathcal{A}v \arrow[d] \\ {[v]_{(a)}} \arrow[r, "A"] & {[\mathcal{A}v]_{(a)}} \end{tikzcd}$$

Na ovaj način svaka kvadratna matrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ može se posmatrati kao linearna transformacija prostora $\mathbb{C}^n$, posmatranog iz npr. prirodne baze (e), gde je preslikavanje dato sa

$$A : v \to Av.$$



Relacija sličnosti matrica (dodatak definicija 13)

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad A = T^{-1}BT,$$

pronalazi reprezentacije jedne iste linearne transformacije u različitim bazama vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$. Cilj spektralne analize je da se odredi baza vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$ u odnosu na koju matrica reprezentacije (1.1) poseduje osobine pogodne za određenu vrstu izračunavnja. Slične matrice predstavljaju različite bazisne reprezentacije jednog istog linearnog operatora na $\mathbb{C}^n$. Slične matrice zbog toga dele mnoga zajednička svojstva – ona koja su posledica svojstava geometrije same linearne transformacije.

Matrice možemo posmatrati kao preslikavanja, promene baze prostora, prelazak u potprostor. Takođe, matrice predstavljaju skupove vektora ili skupove brojeva i podataka. Kombinacija svih ovih interpretacija koncepta matrice je ključ široke primene linearne algebre. U srži geometrije linearnih transformacija i teorije matrica jeste pitanje šta ti pravougaoni skupovi brojeva govore o posebnim svojstvima samog skupa. Ključni koncept analize kvadratnih matrica jesu sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. Njima opisujemo postojana zajednička svojstva kolekcije brojeva smeštenih unutar matrice.

1.1 Dijagonalizacija kvadratne matrice

Teorija linearnih operatora može se smatrati proučavanjem skupova koji ostaju nepromenjeni pod uticajem linearne transformacije, tj. skupovi S za koje je $\mathcal{A}(S) = S$. U tom postupku presudnu ulogu ima spektralna teorija, analiza sopstvenih vrednosti i vektora matrica. Različiti autori sopstvene vrednosti i vektore još nazivaju i karakteristični ili svojstveni.

Za kvadratnu matricu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ jednakost

$$Av = \lambda v, \; v \neq \overrightarrow{0},$$

definiše (desni) sopstveni vektor v koji odgovara (desnoj) sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$. Zbog toga sopstveni vektori imaju veoma interesantno algebarsko svojstvo, njihovo množenje matricom A svodi se na množenje sopstvenog vektora skalarom λ. Slično, jednakost

$$u^T A = \mu u^T, \; u \neq \overrightarrow{0},$$

opisuje vezu između levog sopstvenog vektora u matrice A i odgovarajuće leve sopstvene vrednosti $\mu \in \mathbb{C}$. Imajući u vidu da je $u^T A = (A^T u)^T$, to levi sopstveni vektori matrice A predstavljaju desne sopstvene vektore matrice A^T. Takođe, s obzirom da je

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I) = P_{A^T}(\lambda),$$

to se skupovi levih i desnih sopstvenih vrednosti matrice A poklapaju. Zbog svega navedenog, teorija i osobine levih sopstvenih vrednosti i vektora je poznata kroz teoriju desnih sopstvenih vrednosti i vektora matrica.

Primer 1. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ kvadratna matrica sa osobinom da je zbir elemenata vrste jednak d u svakoj vrsti te matrice, tj. važi

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = d, \; \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pokazaćemo da je $\lambda = d$ sopstvena vrednost matrice A, a vektor $[1\ 1\ \ldots\ 1]^T \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ odgovarajući sopstveni vektor.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 2. Za realne matrice kompleksne sopstvene vrednosti i kompleksni sopstveni vektori dolaze u konjugovanim parovima, tj.

$$Av = \lambda v \implies A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Primer 3. Neka je $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Tada je $A - \lambda I$ singularna matrica jer je $\det(A - \lambda I) = 0$. Primenom jednakosti za adjungovanu matricu

$$(A - \lambda I) \cdot \mathrm{adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \cdot I = O,$$

dobijamo da je

$$A \cdot \mathrm{adj}(A - \lambda I) = \lambda \, \mathrm{adj}(A - \lambda I).$$

Dakle, sve nenula kolone matrice $\mathrm{adj}(A - \lambda I)$ predstavljaju sopstvene vektore matrice A.

Dijagonalne matrice imaju izvanrednu osobinu da im se sve geometrijske i algebarske karakteristike jednostavno određuju. Sledeća kalsa matrica sa sličnim pogodnostima jesu trougaone matrice. Kroz naredni primer razmotrićemo povoljnosti izračunavanja sa dijagonalnim matricama.

Primer 4. Dijagonalnu matricu sa elementima d_i na glavnoj dijagonali kraće označavamo

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Ova oznaka je u vezi i sa načinom smeštanja dijagonalnih matrica u memoriji računara - pamte se jedino dijagonalani elementi. Na osnovu njih računamo sve bitne karakteristike matrice:

$$\det(\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)) = \prod_{i=1}^{n} d_i,$$

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (d_i - \lambda), \quad \mathrm{Sp}(\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^T = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1}), \quad d_i \neq 0,$$

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^k = \mathrm{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k), \; k \in \mathbb{Z}, \quad d_i \neq 0.$$

Množenje dijagonalne matrice i neke druge matrice je takođe pojednostavljeno. Svodi se na operacije množenja vektora skalarom što je u modernim procesorskim arhitekturama implementirano kao jedna operacija.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_1^T \\ \hline d_2 a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline d_n a_n^T \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} d_1 a_1 & d_2 a_2 & \dots & d_n a_n \end{array}\right].$$

Zbog analize geometrijskih osobina dijagonalne matrice pretpostavićemo da su $d_i \in \mathbb{R}$ i posmatrati matricu kao preslikavanje $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori dijagonalne matrice $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ se jednostavno nalaze. Sopstvenoj vrednosti d_i odgovara sopstveni vektor $e_i,\ i = 1, , 2, \dots, n$, koji je $i-$ti vektor prirodne baze. Dijagonalna matrica, posmatrana kao linearna transformacija prirodne baze (e), slika svaki koordinatni potprostor u njega samog.

$$D\left(\mathcal{L}(e_i)\right) = \mathcal{L}(e_i).$$

Tom prilikom ukoliko je $d_i < 0$, matrica D vrši refleksiju u odnosu na koordinatni početak $i-$tog koordinatnog potprostora. Koeficijent $|d_i|$ opisuje jačinu istezanja ili kontrakcije $i-$tog koordinatnog prostora pod dejstvom D. Kada je $d_i = 1$, matrica D ne menja $i-$ti koordinatni potprostor. Restrikovano na njega D predstavlja identičko preslikavanje.

Ukoliko je neki dijagonalni element matrice $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ jednak nuli, npr. $d_i = 0$, tada je D singularna matrica i nema inverznu matricu. Jezgro $\ker(D)$ singularne matrice D čini suma svih koordinatnih potprostora $\mathcal{L}(e_i)$ za koje je $d_i = 0$.

$$\ker(D) = \sum_{i:\ d_i=0} \mathcal{L}(e_i) = \mathcal{L}\left(\{e_i \mid 1 \le i \le n, d_i = 0\}\right).$$

Ideja iza dijagonalizacije kvadratnih matrica je u tesnoj vezi sa prethodnim primerom. Kada pametno koristimo sopstvene vektore, matrica A se 'pretvara' u dijagonalnu. Neka je data matrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ sa poznatim sopstvenim parovima $\lambda_i, v_i,\ i = 1, 2, \dots, k$. Skup jednakosti $Av_i = \lambda_i v_i\ i = 1, 2, \dots, k$, može se prikazati u matričnom obliku.

$$\begin{aligned} A\left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_k \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_k v_k \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ili kraće zapisano $AV = VD$, gde su $V = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{array}\right]$ i $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$.

Ukoliko je V regularna matrica, tj. kada matrica A poseduje sopstvene vektore $v_1, v_2, \dots, v_n$, koji obrazuju bazu prostora $\mathbb{C}^n$, tada je

$$A\left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Odatle je

$$A = VDV^{-1}, \qquad D = V^{-1}AV. \tag{1.2}$$

Jednakosti (1.2) opisuju dijagonalizaciju kvadratne matrice A, tj njenu spektralnu dekompoziciju. Kada je dijagonalizacija matrice A moguća kažemo da je A slična dijagonalnoj matrici D.

Primetimo da na osnovu (1.2) važi

$$V^{-1}A = DV^{-1},$$

tj. vrste matrice V^{-1} predstavljaju leve sopstvene vektore matrice A.

Jednakost (1.2) pokazuje da prelaskom u bazu (v) : $v_1, v_2, \dots, v_n$, matrica A postaje dijagonalna. To znači da transformacija $u \to Au$ je ista tranformacija kao i $x \to Dx$ ukoliko se posmatra iz adekvatne baze vektorskog prostora.

$$\begin{tikzcd} {[u]_{(e)}} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "V^{-1}"'] & {[Au]_{(e)}} \\ {[u]_{(v)}} \arrow[r, "D"'] & {[Au]_{(v)}} \arrow[u, "V"'] \end{tikzcd}$$

Poznavanjem dijagonalizacije matrice A pojednostavljuje se algebra i geometrija matrice A. Veoma bitno svojstvo jeste da je stepenovanje matrice svedeno na stepenovanje dijagonalne matrice.

$$A^m = (VDV^{-1})^m = VD^mV^{-1}, \; m \in \mathbb{Z}.$$

Ovo ima veliku primenu u izračunavanjima sa rekurentnim relacijama.

Primer 5. Fibonačijev niz definisan je relacijom $a_0 = 0, \; a_1 = 1$ i

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Označimo $u_n = a_{n-1}, \; v_n = a_n (= u_{n+1})$. Tada je $v_{n+1} = a_{n+1} = v_n + u_n$. Od polazne rekurentne formule Fibonačijevog niza formiramo sistem linearnih diferencnih jednačina

$$\begin{cases} v_{n+1} = 1 \cdot v_n + 1 \cdot u_n, \\ u_{n+1} = 1 \cdot v_n + 0 \cdot u_n, \end{cases}$$

koji u matričnom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ u_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_n \\ u_n \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \dots = A^n \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix},$$

gde je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}$ Fibonačijeva matrica. Poznavanjem izraza za stepen matrice A možemo lako računati vrednost proizvoljnog elementa Fibonačijevog niza. Zbog toga potražimo dijagonalizaciju Fibonačijeve matrice A.

Sopstvene vrednosti matrice A su nule karakterističnog polinoma $P_A(\lambda)$, tj. rešenja kvadratne jednačine $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, i glase $\lambda_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Primetimo da na osnovu Vijetovih formula važi da je

$$\lambda_1\lambda_2 = -1, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Odgovarajući sopstveni vektori su $u_{1/2} = \begin{bmatrix} \lambda_{1/2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Dijagonalizacija matrice A glasi

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nalazimo

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tj. $a_n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Primetimo da na osnovu (1.3) važi $A^n = \begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix}$.

Uz pomoć Fibonačijeve matrice i (1.3) možemo dobiti i druge osobine Fibonačijevih brojeva.

Primenom determinante na jednakost $A^n = \begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$, dobijamo

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n.$$

Koristeći asocijativnost za množenje matrica znamo da za stepen matrice važi

$$A^{m+n} = A^m \cdot A^n = A^n \cdot A^m.$$

Na osnovu toga zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix} a_{m+n+1} & a_{m+n} \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m+1} & a_m \\ a_m & a_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Elementi prve kolone matrice A^{m+n} tada glase

$$\begin{aligned} a_{m+n+1} &= a_{m+1}a_{n+1} + a_m a_n, \\ a_{m+n} &= a_m a_{n+1} + a_{m-1}a_n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ove formule su korisne za brzo izračunavanje članova Fibonačijevog niza, videti npr TechBlog. Algoritam brzog dupliranja koristi jednakosti (1.4) za $m = n$,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_n(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n\left(a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n)\right) \\ &= a_n(2a_{n+1} - a_n), \\ a_{2n+1} &= a_{n+1}^2 + a_n^2. \end{aligned}$$

Rekurentne relacije su u tesnoj vezi sa pojmom diskretnog dinamičkog sistema. U matematici dinamički sistem predstavlja praćenje položaja neke tačke u prostoru kroz diskretne vremenske intervale. Stanje sistema u trenutku t_k opisuje se vektorom vrednosti v_k i zakonom prelaska u novo stanje $v_{k+1} = f(v_k)$. Ovim konceptom (matematičkim modelom) može se opisati proizvoljan proces iz inženjerstva ili realnog života čije se 'stanje' prati kroz vreme: surfovanje na webu, vremenske prilike, procesi u industriji, finansijske prilike, raspolaganje resursima (nabavka i potrošnja), dinamika populacije živih bića, širenje virusa, procesi hemijskih reakcija, dinamika čestica, itd.

Linearna algebra bavi se linearnim diskretnim dinamičkim sistemima kod kojih se zakon prelaska u novo stanje sistema zadaje linearnom transformacijom $v_{k+1} = Av_k$ za neku matricu A. Kada primenjujemo linearno preslikavanje $v \to Av$ više puta za redom dobijemo diskretan dinamički sistem. Najčešće želimo da shvatimo dugoročno ponašanje sistema pokušavajući da izvedemo neke zaključke. To se postiže prateći orbite tačaka

$$v_1 = Av_0,\ v_2 = Av_1 = A^2v_0,\ \dots\ v_{n+1} = Av_n = A^{n+1}v_0.$$

Poznavanje opšte formule za stepen matrice A u tome igra ključnu ulogu.

Primer 6. Na stolu se nalaze posude A, B i C jednakih zapremina. U početnom trenutku posude A i B ispunjene su vodom, redom $3/4$ i $1/4$ svoje zapremine, dok je posuda C prazna. Jedan korak presipanja sastoji se u sledećem:

- Iz posude A se prelije jednaka količina vode u posude B i C, tako da A ostane prazna.
- Iz posude B prelije se jednaka količina vode u posude A i C, tako da B ostane prazna.
- Iz posude C presipa se jednaka količina vode u posude A i B, tako da C ostane prazna.

Potrebno je odrediti najmanji broj koraka koji je neophodno napraviti da bi odnos količine vode u posudama A i B bio veći od 2, a manji od $2 + \dfrac{1}{2^{2018}}$.

Postupak presipanja opisaćemo nizovima vrednosti A_k, B_k, C_k - udeo zapremine ispunjene vodom odgovarajuće posude posle k koraka. Početno stanje je $A_0 = \frac{3}{4}, B_0 = \frac{1}{4}, C_0 = 0$.

Opisujemo jedan korak presipanja po etapama. Prva etapa je presipanje iz A u B i C. Ukoliko je stanje u posudama dato sa A_k, B_k i C_k, prvu etapu možemo opisati sa:

$$\begin{matrix} A'_k = 0, \\ B'_k = B_k + \frac{1}{2}A_k, \\ C'_k = \frac{1}{2}A_k \end{matrix} \iff \begin{bmatrix} A'_k \\ B'_k \\ C'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{bmatrix}.$$

Slično tome, druga etapa presipanja (iz B u A i C) može se predstaviti kao:

$$\begin{bmatrix} A''_k \\ B''_k \\ C''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A'_k \\ B'_k \\ C'_k \end{bmatrix}.$$

Treća etapa daje konačan sadržaj posuda posle jednog koraka presipanja, te važi:

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \\ C_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A''_k \\ B''_k \\ C''_k \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}A_{k+1}\\B_{k+1}\\C_{k+1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&0&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1/2&0\\0&0&0\\0&1/2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_k\\B_k\\C_k\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5/8&3/4&0\\3/8&1/4&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_k\\B_k\\C_k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

S obzirom da nas zanima odnos sadržaja posuda A i B, možemo se ograničiti na praćenje nizova A_k i B_k :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}A_{k+1}\\B_{k+1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5/8&3/4\\3/8&1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_k\\B_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/8&3/4\\3/8&1/4\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}A_{k-1}\\B_{k-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5/8&3/4\\3/8&1/4\end{bmatrix}^{k+1}\begin{bmatrix}A_0\\B_0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Kako matrica $M = \begin{bmatrix}5/8&3/4\\3/8&1/4\end{bmatrix}$ ima spektralnu dekompoziciju

$$M = \begin{bmatrix}5/8&3/4\\3/8&1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3&1/3\\1/3&-2/3\end{bmatrix},$$

to je

$$\begin{aligned}M^k &= \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1/8\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1/3&1/3\\1/3&-2/3\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+(-1/8)^k & 2-2\,(-1/8)^k\\ 1-(-1/8)^k & 1+2\,(-1/8)^k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Na osnovu spektralne dekompozicije matrice M možemo odrediti $\lim\limits_{k\to\infty} M^k$, tj. predvideti da li će doći do uravnoteženja sadržaja posuda A i B vremenom.

$$\exists \lim_{k\to\infty} M^k = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix} \iff \exists \lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1/8\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da će odnos sadržaja posuda A i B težiti odnosu $2:1$.

Stanje u posudama A i B posle k koraka glasi

$$A_k = 1/3\left(2+(-1/8)^k\right)A_0 + 2/3\left(1-(-1/8)^k\right)B_0,$$
$$B_k = 1/3\left(1-(-1/8)^k\right)A_0 + 1/3\left(1+2(-1/8)^k\right)B_0.$$

Traženi odnos sadržaja posuda A i B posle k koraka je

$$t_k = \frac{A_k}{B_k} = \frac{1/3\left(2+(-1/8)^k\right)t_0 + 2/3\left(1-(-1/8)^k\right)}{1/3\,(1-(-1/8)^k)\,t_0 + 1/3\,(1+2(-1/8)^k)},$$

gde je $t_0 = \dfrac{3/4}{1/4} = 3$ odnos sadržaja na početku. Zbog toga je $t_k = \dfrac{8+(-1/8)^k}{4-(-1/8)^k} \to 2, k\to\infty$.

Za paran broj koraka $k = 2n$ važi

$$\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{8 + (-1/8)^{2n}}{4 - (-1/8)^{2n}} = \frac{8 + 2^{-6n}}{4 - 2^{-6n}} = \frac{2 \cdot (4 - 2^{-6n}) + 3 \cdot 2^{-6n}}{4 - 2^{-6n}} \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{2^{-6n}}{4 - 2^{-6n}} > 2. \end{aligned}$$

Za neparan broj koraka $k = 2n + 1$ važi

$$\begin{aligned} t_{2n+1} &= \frac{8 + (-1/8)^{2n+1}}{4 - (-1/8)^{2n+1}} = \frac{8 - 2^{-6n-3}}{4 + 2^{-6n-3}} = \frac{2 \cdot (4 + 2^{-6n-3}) - 3 \cdot 2^{-6n-3}}{4 + 2^{-6n-3}} \\ &= 2 - 3 \cdot \frac{2^{-6n-3}}{4 + 2^{-6n-3}} < 2. \end{aligned}$$

Zaključujemo: važiće $2 < t_k < 2 + \frac{1}{2^{2018}}$ za paran broj koraka $k = 2n$, i potrebno je da odredimo najmanje $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{3}{4 - 2^{-6n}} 2^{-6n} < \frac{1}{2^{2018}} = 2^{-2018}$. Kako je $\frac{3}{4 - 2^{-6n}} < 1$ za $n \in \mathbb{N}$, to sledi da je $6n \geq 2018$, tj. $n > 336$. Najmanji broj potrebnih koraka presipanja je $k = 2 \cdot 337 = 674$.

Dijagonalizacija matrice je polazni korak za pojednostavljeno izračunavanje funkcija čiji su argumenti matrice. Naime, za svaku funkciju f koja dozvoljava Tejlorov, tj. Maklorenov razvoj, važi

$$f(A) = V f(D) V^{-1},$$

gde je $f(D) = \mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n))$.

Primer 7. Poznajući stepeni razvoj eksponencijalne funkcije

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!},$$

možemo definisati eksponencijalnu funkciju na skupu kvadratnih matrica.

$$e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

Ukoliko je poznata spektralna dekompozicija matrice A, to značajno pojednostavljuje izračunavanje e^A.

Zbog svih navedenih prednosti postojanja dijagonalizacije matrice A poželjno je posedovati kriterijum na osnovu koga se može utvrditi da li je data kvadratna matrica A slična dijagonalnoj matrici. U nastavku su dati pojedini razultati u vezi ovog problema.

Karakteristični polinom matrice A uobičajeno se definiše sa

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Monični karakteristični polinom kvadratne matrice A tada glasi

$$M_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (-1)^n P_A(\lambda).$$

Jednačina $\det(\lambda I - A) = 0$ je karakteristična jednačina matrice A. Sopstvene vrednosti matrice A su nule njenog karakterističnog polinoma.Karakteristične polinome možemo faktorisati na osnovu poznavanja spektra matrice

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda), \\ M_A(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n). \end{aligned}$$

Primer 8. Karakteristični polinom matrice A je

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Zamenom $\lambda = 0$, dobijamo

$$\det(A) = P_A(0) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Algebarska mnogostrukost (višestrukost) sopstvene vrednosti λ, u oznaci $AM(\lambda)$, je njena višestrukost kao nule karakterističnog polinoma.

Primer 9. Sopstvene vrednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ su $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 0, -2\}$. Sopstvena vrednost $\lambda = 0$ je algebarske višestrukosti $AM(0) = 2$, a sopstvena vrednost $\lambda = -2$ je proste algebarske višestrukosti, $AM(-2) = 1$.

Skup vektora $\ker(A - \lambda I)$ naziva se sopstveni potprostor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. On predstavlja skup svih sopstvenih vektora matrice A koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ, proširen nula-vektorom. Geometrijska mnogostukost sopstvene vrednosti λ, u oznaci $GM(\lambda)$, je dimenzija potprostora $\ker(A - \lambda I)$.

$$GM(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I)).$$

Za svaku sopstvenu vrednost λ važi $AM(\lambda) \geq GM(\lambda)$. Matrica A poseduje spektralnu dekompoziciju akko za svaku sopstvenu vrednost λ važi jednakost mnogostrukosti, tj.

$$AM(\lambda) = GM(\lambda), \ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A).$$

Primer 10. Matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ poseduje jednu sopstvenu vrednost $\lambda = 0$ algebraske višestrukosti $AM(0) = 2$.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Geometrijsku višestrukost sopstvene vrednosti dobijamo nalaženjem sopstvenih vektora.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = 0.$$

Zbog toga je $\ker(A) = \mathcal{L}(e_1)$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, pa je $GM(0) = \dim\ker(A) = 1 < 2 = AM(0)$. Matrica A ne poseduje dijagonalizaciju.

Posledica 1. *Ukoliko su sve sopstvene vrednosti matrice A proste onda ona poseduje spektralnu dekompoziciju.*

Dijagonalizacija i regularnost (invertibilnost) matrica nisu povezani. Različite spektralne karakteristike matrice opisuju ova dva koncepta. Regularnost matrica je u tesnoj vezi sa sopstvenim vrednostima s obzirom da važi

$$\exists A^{-1} \iff \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0 \iff \lambda_i \neq 0, \forall i.$$

Dijagonalizacija matrica je sa druge strane uslovljena postojanjem baze prostora $\mathbb{C}^n$ sastavljene od sopstvenih vektora te matrice.

Sopstvene vrednosti matrica imaju veliki uticaj kako na brzinu izračunavanja tako i na pouzdanost izračunavanja u konačnoj aritmetici. Kada je neka od sopstvenih vrednosti λ matrice A veoma bliska nuli, 'kraći' vektori odgovarajućeg sopstvenog potprostora $\ker(A - \lambda I)$ slikaju se veoma blizu nula-vektora, tj. dolazi do kontrahovanja sopstvenog potprostora. To čini matricu A skoro singularnom. Zbog toga kažemo da sopstvene vrednosti opisuju blizinu matrice A skupu singularnih matrica. Narednim primerom ilustrovaćemo kako ovakva situacija utiče na numerička izračunavanja u konačnoj aritmetici.

Primer 11. Sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + \quad y &= 3, \\ 2x + 1.001y &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

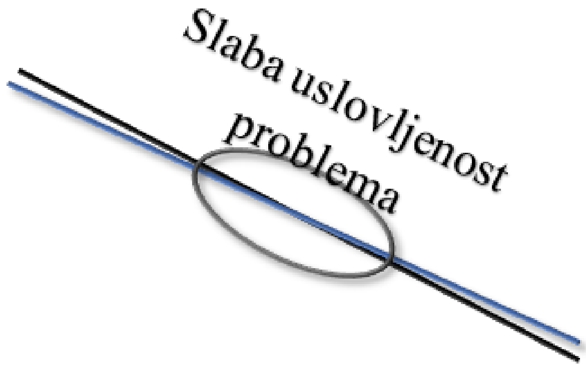
ima rešenje $x = 1501.5,\ y = -3000$. Malom promenom koeficijenata (0.1%) u sistemu dobijamo ogromne promene u rešenju sistema (50%). Tako npr. sistem

$$\begin{aligned} 2x + \quad y &= 3, \\ 2x + 1.002y &= 0 \end{aligned}$$

ima rešenje $x = 751.5,\ y = -1500$.

Ovakve situacije opisuju slabo uslovljen problem zadat sistemom linearnih jednačina (1.5). Njihova karakteristika je da greške ulaznih podataka imaju ogroman uticaj na greške izlaznih podataka. Slaba uslovljenost sistema (1.5) je posledica male sopstvene vrednosti matrice sistema, $\lambda \approx 6.7 \cdot 10^{-4}$.

Geometrijski posmatrano, rešenje sistema jednačina (1.5) predstavlja presek dve prave u ravni. Ove dve prave imaju veoma bliske koeficijente pravaca što dovodi do slabe uslovljenosti sistema jednačina (1.5).



Kada numeričkim metodama rešavamo slabo uslovljene probleme dobijenim rezultatima ne treba verovati. Razlog leži u greškama zaokruživanja koje su nezaobilazna komponenta aritmetike u konačnoj preciznosti. Greške zaokruživanja su ekvivalenetne uvođenju malih grešaka u ulazne podatke matematičkog modela ili postavke problema. Kod slabo uslovljenih problema to rezultira velikim promenama u vrednosti rešenja, samim tim i do velikih grešaka izlaznih rezultata.

Kod sistema linearnih jednačina determinanta matrice sistema D može pružiti dobar uvid u uslovljenost problema definisanog tim sistemom. Ovo svojstvo može se uočiti kao posledica Kramerovih formula za izraz rešenja,

$$x_i = \frac{D(x_i)}{D}.$$

Ukoliko je detreminanta sistema bliska nuli, male promene u vrednosti determinante D imaju ogroman efekat na njenu recipročnu vrednost. Kako je detreminanta matrice proizvod sopstvenih vrednosti matrice, to su neke od sopstvenih vrednosti takođe bliske nuli.

1.1.1 Pitanja i zadaci

1. Neka su A i B slične matrice. Dokazati:
   a) A^2 je slična B^2.
   b) Ako je A regularna matrica, onda je i B regularna.
   c) Ako je A slična matrici C, onda je i B slična matrici C.
   d) Ako A može da se dijagonalizuje, onda može i B.
2. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Važi $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ akko $\lambda + \mu \in \mathrm{Sp}(A + \mu I)$. Dokazati.
3. Neka su $u, v \in \mathbb{R}^n$, vektori. Odrediti sopstvene vrednosti i determinantu matrice $I + uv^T$.
4. Neka je $E \in \mathcal{M}_{10\times 10}$ matrica sa svim jedinicama. Naći sopstvene vrednosti matrice $A = I_{10} + 2019E$. Odrediti $\det(A)$ i A^{-1}.
5. Dokazati da slične matrice imaju jednake determinante.
6. Slične matrice imaju jednake karakteristične polinome. Dokazati.
7. Slične matrice imaju jednake minimalne polinome. Dokazati.
8. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tada se karakteristični polinomi matrica AB i BA poklapaju.
9. Neka matrice A i B imaju istovremenu dijagonalizaciju matricom T, tj. važi da je
$$A = T^{-1} D_A T, \quad \text{i} \quad B = T^{-1} D_B T,$$
gde su D_A i D_B dijagonalne matrice. Dokazati da tada važi $AB = BA$.
10. Ako je $A = T^{-1}BT$ i v sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Dokazati da je tada Tv sopstveni vektor matrice B koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ.
11. Neka je matrica A sa različitim sopstvenim vrednostima. Ukoliko je $AB = BA$ tada matrice A i B 'čuvaju' jedna drugoj sopstvene potprostore,
$$Av = \lambda v \iff Bv = \mu v.$$
12. Ako je $A = VDV^{-1}$ spektralna dekompozicija matrice A, pokazati da su tada vektori kolone matrice V^{-1} levi sopstveni vektori matrice A.
13. Neka je $Au = \lambda u$ i $v^H A = \mu v^H$ za $\lambda \neq \mu$. Pokazati da je tada $v^H u = 0$.
14. Pokazati da su sve sopstvene vrednosti matrice $A^H A$ $(A \in \mathcal{M}_{m\times n})$ nenegativne.
15. Ako je zbir elemenata svake vrste regularne matrice A jednak konstanti a, dokazati da je zbir elemenata svake vrste njene inverzne matrice jednak $1/a$. Dokazati analogno tvrđenje za kolone.

16. Data je blok dijagonalna matrica

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \ A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_i}.$$

Dokazati da je $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A_{11}) \cup \mathrm{Sp}(A_{22})$.

17. Neka je $A = T^{-1}DT$ dijagonalizacija matrice A. Dijagonalizirati blok matricu $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$.

18. Matrica A je singularna akko $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Dokazati.

19. Za matricu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ su λ i u sopstveni par. Pokazati da je u sopstveni vektor matrice $\mathrm{adj}(A)$.

20. Neka su $u, v \in \mathbb{C}^n, u \neq \overrightarrow{0}$, i $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Pretpostavimo da je $Au = \lambda u$ i neka je $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Orediti sopstvene vrednosti matrice $A + uv^H$?

21. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, ako je $A = \begin{bmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

22. Populacija jednog regiona migrira između istoka i zapada na sledeći način: svake godine 50% populacije istoka odlazi na zapad i 25% populacije zapada odlazi na istok. Ukoliko se trend migracije nastavi u narednim godinama kakav trend očekujemo u brojnosti populacije na istoku? Za početno stanje uzeti vektor $\begin{bmatrix} istok_0 & zapad_0 \end{bmatrix}$, gde je $istok_0 + zapad_0 = 1$.

23. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ realna ili kompleksna matrica, $A = [a_{ij}]$. Dokazati sledeća tvrđenja.

a) Ako je $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tada postoji sopstveni vektor u matrice A sa komponentama $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}^T$, takav da je

$$\|u\|_1 = \max_{1\le i\le n} |u_i| = 1.$$

b) Ako je u sopstveni vektor $\|u\|_1 = 1$, i indeks i je takav da je $|u_i| = 1$, dokazati da je tada

$$(\lambda - a_{ii})u_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}u_j.$$

c) Neka je λ sopstvena vrednost matrice A. Tada je za neki indeks i tačno

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

d) Sopstvene vrednosti matrice A nalaze se u uniji Geršgorinovih diskova D_i,

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

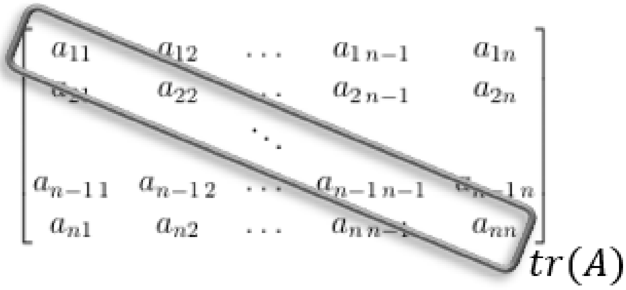
e) Sopstvene vrednosti matrice A nalaze se u uniji Geršgorinovih diskova D_i,

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}| \right\}.$$

1.2 Trag matrice

Nad kvadratnim matricama definisane su veoma korisne skalarne funkcije kao što su determinanta, norma i trag. Sve navedene skalarne funkcije su u tesnoj vezi sa sopstvenim vrednostima matrice - skalarnim karakteristikama kvadratne matrice. U ovom odeljku predstavljamo osobine funkcije trag matrice.

Definicija 1. Trag kvadratne matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ je zbir njenih dijagonalnih elemenata, tj. $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.



Primer 12. Trag matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ iznosi $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 + 3 = 6$.

Odredićemo trag jedinične i nula-matrice reda n.

$$\mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)) = n,$$
$$\mathrm{tr}(O) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(0, 0, \dots, 0)) = 0.$$

Primer 13. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ reda n karakteristični polinom glasi

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, matrice A su nule karakterističnog polinoma. Zbog toga faktorizacija polinoma $P_A(\lambda)$ glasi

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda). \tag{1.7}$$

Primetimo da za $\lambda = 0$ jednačina (1.7) postaje $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Razvijanjem desne strane u jednakosti (1.7) dobijamo Vijetove formule

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \cdots + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Potražimo koeficijent uz $(-\lambda)^{n-1}$ iz (1.6). Laplasovim razvojem po prvoj koloni determinante u (1.6) nalazimo

$$P_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ & & \ddots & & \\ a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,n-1} - \lambda & a_{n-1\,n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \sum_{k=2}^{n} a_{k1} A_{k1}(\lambda). \tag{1.8}$$

Kako su svi kofaktori $A_{k1}(\lambda),\ k=2,\dots,n$, polinomi stepena ne većeg od $n-2$ (nedostaju im članovi $a_{11}-\lambda$ i $a_{kk}-\lambda$), to se traženi koeficijent nalazi u prvom sabirku Laplasovog razvoja (1.8). Nastavljajući Laplasov razvoj na kofaktoru A_{11}, dolazimo do zaključka da je koeficijent uz $(-\lambda)^{n-1}$ karakterističnog polinoma isti kao koeficijent uz $(-\lambda)^{n-1}$ u proizvodu dijagonalnih elemenata $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$. Zbog toga je

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

Na osnovu Teoreme o spektralnom preslikavanju (3), znamo da su sopstvene vrednosti matrice $A^k,\ k\in\mathbb{N}$ jednake $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\dots,\lambda_n^k$. Tada je

$$\operatorname{tr}(A^k)=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k.$$

Posledica 2. *Slične matrice imaju jednak tragove.*

DOKAZ: Neka su A i B slične matrice i važi da je $A=T^{-1}BT$. S obzirom da je

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=\det(A-\lambda I)=P(T^{-1}BT-\lambda I)=\det(T^{-1}BT-\lambda T^{-1}T)\\&=\det(T^{-1})\det(B-\lambda I)\det(T)=P_B(\lambda),\end{aligned}$$

to slične matrice imaju iste spektre. Zbog toga su i tragovi sličnih matrica jednaki. □

Ovu osobinu još formulišemo u obliku: trag matrice je invarijantan u odnosu na promenu baze vektorskog prostora. Sledećom teoremom date su još neke osobine traga matrice. Dokaz teoreme ostavljen je kao laka vežba za čitaoca.

Teorema 1. *Neka su $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}$ i α,β skalari. Tada važe sledeće jednakosti.*

a) $\operatorname{tr}(A^T)=\operatorname{tr}(A)$.

b) $\operatorname{tr}(A^H)=\overline{\operatorname{tr}(A)}$.

c) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.

d) $\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha\operatorname{tr}(A)$.

e) $\operatorname{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\operatorname{tr}(A)+\beta\operatorname{tr}(B)$.

f) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

Kao direktnu posledicu osobina a) i f) prethodne teoreme uočavamo da za trag matrice važi

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(A^TB)=\operatorname{tr}(B^TA)=\operatorname{tr}(BA)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij},\tag{1.9}$$

gde je $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$. Zbog (1.9) trag matrice smatra se skalarnim proizvodom (dodatak, definicija 6) na vektorskom prostoru realnih matrica. Slično, na prostoru kompleksnih matrica izraz

$$\operatorname{tr}(A^HB)=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{a_{ij}}b_{ij},\tag{1.10}$$

predstavlja kompleksni skalarni proizvod, dodatak definicija 7.

Definisanje norme na prostoru matrica nosi specifične zahteve interpretacije samih matrica. Ukoliko matrice posmatramo kao elemente vektorskog prostora $\mathcal{M}_{m\times n}$ dimenzije $mn\times 1$, onda je celokupna priča o normi vektora 9 primenljiva i za matrice kao dugačke liste elemenata. Norme tog tipa nazivamo matrične član-po-član norme.

Primer 14. Frobenijusova norma matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ je primer produžene Euklidove norme L_2, videti 10.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^H A)}.$$

Na skupu realnih matrica Frobenijusova norma glasi

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Frobenijusova norma je indukovana norma skalarnim proizvodom (1.10), odnosno (1.9) u slučaju realnih matrica.

Ukoliko označimo kolone matrice A sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{array}\right],$$

Frobenijusova norma može opisati i L_2 normu ove kolekcije vektora. Gramova matrica $A^T A$ na glavnoj dijagonali sadrži kvadrate normi vektora kolona a_i. Zbog toga je

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|^2}.$$

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ imamo da je $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 13 \end{bmatrix}$. Tada je

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{19}.$$

Frobenijusova norma se slaže sa standardnom normom vektora na sledeći način

$$\|Ax\| \le \|A\|_F \|x\|. \tag{1.11}$$

Zaista, ukoliko označimo $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $x = [x_i]_{n\times 1}$ tada je $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, tj.

$$Ax = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix}.$$

Zbog toga imamo da je $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2$. Imajući u vidu

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|x\|^2,$$

lako dolazimo do nejednakosti

$$\|Ax\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|x\|^2 = \|A\|_F^2\|x\|^2.$$

Nejednakost (1.11) odatle jednostavno sledi.

Još jedno lepo svojstvo Frobenijusove norme je da ostaje nepromenjena pod uticajem unitarne tranformacije (ortogonalne u slučaju realnih matrica). Neka je $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ unitarna matrica, tj. važi $Q^HQ = QQ^H = I$. Tada je

$$\|QA\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}\left((QA)^HQA\right)} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^HQ^HQA)} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^HA)} = \|A\|_F.$$

Posmatranje matrica kao skupova vektora donosi različite nove mogućnosti za definisanje matrične norme. Matrice kao skupovi vektora-vrsta ili vektora-kolona mogu koristiti vektorsku narmu za svaki od vektora skupa. Na dobijeni vektor normi ponovo možemo primeniti neku vektorsku normu iz definicije 10.

Primer 15. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ na svaku od kolona možemo primeniti npr. L_1 normu. Rezultat je vektor-vrsta normi svake od kolona, $v = \begin{bmatrix} 1+|-1| & 2+0 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Sada na vektor v možemo primeniti, npr. L_2 normu i to proglasimo normom matrice A,

$$\|A\|_{12} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}.$$

Slično, možemo izračunati $L_{2,1}$ normu matrice A, da bi smo utvrdili $L_{1,2} \neq L_{2,1}$.

Kombinacija L_1 i L_∞ norme daje $L_{1,\infty}$ matričnu normu koja računa maksimalnu sumu modula komponenti vektora-kolona matrice. U slučaju matrice A

$$\|A\|_{1,\infty} = \|v\|_\infty = 5.$$

Ako dva puta primenimo L_∞ normu (videti 10) dobijamo odgovarajuću član po član $L_{\infty,\infty}$ normu za matrice.

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}, \quad \|A\|_{\infty,\infty} = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}.$$

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ je tada $\|A\|_{\infty,\infty} = 3$.

1.2.1 Pitanja i zadaci

1. Koristeći trag matrice pokazati da ne postoje kvadratne matrice za koje je $AB - BA = I$.
2. Odrediti $\operatorname{tr}(A^HA)$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
3. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definisana sa $f(x) = \det(xA + I)$, $x \in \mathbb{R}$. Dokazati da je $f'(0) = \operatorname{tr}(A)$.
4. Izračunati $\operatorname{tr}(AB - BA)$, gde su $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
5. Dokazati da izraz $A \cdot B = \operatorname{tr}(A^HB)$ predstavlja kompleksni skalarni proizvod na prostoru kvadratnih kompleksnih matrica reda n.

6. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ projekcija (idempotentna matrica), tj. $A^2 = A$. Pokazati da su sopstvene vrednosti matrice A jednake 0 ili 1. Zbog čega je I jedina regularna idempotentna matrica?

7. Kvadratna matrica A je nilpotentna ukoliko postoji prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = O$. Pokazati da su sve sopstvene vrednosti nilpotentne matrice jednake 0. Odrediti jedinu nilpotentnu projekciju (idempotentnu matricu).

1.3 Norma matrica

Definisanje norme na prostoru matrica nosi specifične zahteve interpretacije samih matrica. Za primenu matrica veoma je bitna operacija množenja. Zbog toga su napravljeni pokušaji definisanja norme matrica koja bi se slagala sa ovom operacijom, tj. da poseduje osobinu multiplikativnosti $\|AB\| = \|A\|\,\|B\|$. Poseban naglasak je na operaciji množenja matrice i vektora. Međutim, najbolji postignut rezultat jeste submultiplikativnost norme matrica,

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|.$$

Jedan od primera submultiplikativne norme je norma matrica indukovana vektorskom normom. Indukovana matrična norma ima osobine

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|, \text{ a posebno } \|Av\|_V \le \|A\|\,\|v\|_V, \tag{1.12}$$

gde je $\|\cdot\|_V$ neka norma vektora. Indukovanu matričnu normu definisaćemo za sada na skupu kvadratnih matrica.

Definicija 2. Matrična norma $\|\cdot\|$ indukovana vektorskom normom $\|\cdot\|_V$ definisana je sa

$$\|A\| = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} = \max_{\|v\|_V=1} \|Av\|_V.$$

Ovako definisana norma ispunjava uslove N1-N3 definicije 9 kao i uslov (1.12). Drugim rečima, matrična norma $\|A\|$ opisuje maksimalno istezanje vektora sa jedinične sfere pod dejstvom matrice A.

Primer 16. U svakoj indukovanoj matričnoj normi je $\|I\| = 1$ i $\|O\| = 0$.

$$\|I\| = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{\|Iv\|_V}{\|v\|_V} = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = 1.$$
$$\|O\| = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{\|Ov\|_V}{\|v\|_V} = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{0}{\|v\|_V} = 0.$$

Teorema 2. *Neka je A regularna matrica. Za indukovanu matričnu normu važi da je*

$$\|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}.$$

DOKAZ: Neka je v nenula vektor.

$$\|v\|_V = \|A^{-1}Av\|_V \le \|A^{-1}\|\,\|Av\|_V \le \|A^{-1}\|\,\|A\|\,\|v\|_V$$
$$\Longrightarrow\ 1 \le \|A^{-1}\|\,\|A\| \ \Longrightarrow\ \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}.$$

U nastavku koristićemo istu oznaku za normu vektora $\|\cdot\|_V$ i njom indukovanu normu matrica. Iz konteksta moćiće da se protumači o kojoj je reč.

Primer 17. Neka je A regularna matrica i A^{-1} njena inverzna matrica. Tada važi

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\sup\limits_{v\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|A^{-1}v\|}{\|v\|}} = \inf_{v\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|v\|}{\|A^{-1}v\|} = \inf_{v\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|AA^{-1}v\|}{\|A^{-1}v\|}. \tag{1.13}$$

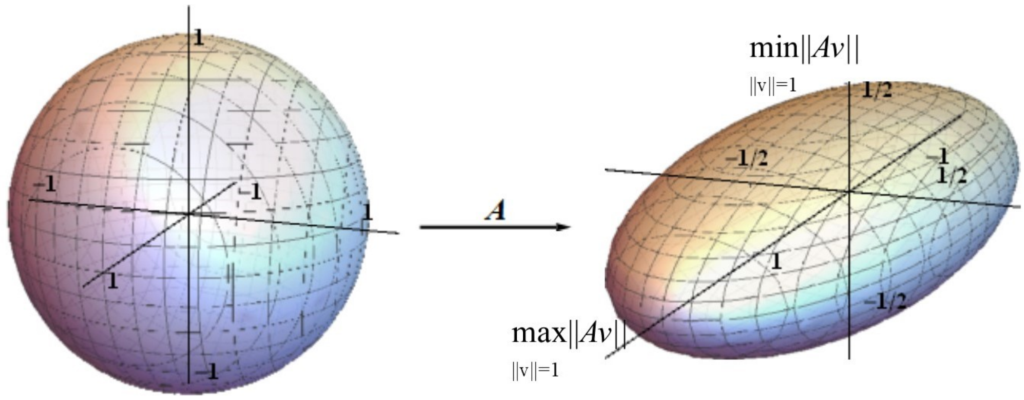
Uvedimo oznaku $u = A^{-1}v$. S obzirom da je A regularna matrica to je

$$v \neq \overrightarrow{0} \iff A^{-1}v \neq \overrightarrow{0} \iff u \neq \overrightarrow{0}.$$

Jednakost (1.13) tada postaje

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \inf_{u\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \min_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

Drugim rečima, vrednost $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ pokazuje nam u kojoj meri regularna matrica A najviše kontrahuje vektore sa jedinične sfere.



Najznačajnije indukovane matrične norme su u tesnoj vezi sa najčešće korišćenim vektorskim normama 10.

Primer 18. Matrična norma indukovana L_1 vektorskom normom nosi istu oznaku:

$$L_1 : \|A\|_1 = \sup_{v\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{\|v\|_1=1} \|Av\|_1 .$$

Uvedimo oznake kolona matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i komponenata jediničnog vektora $v \in \mathbb{C}^n$.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\right], \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Tada, kako je $\|v\|_1 = 1 \iff \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i| = 1$, to je

$$\|Av\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} v_i a_i\right\|_1 \overset{\mathrm{N3}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|v_i a_i\|_1 \overset{\mathrm{N2}}{=} \sum_{i=1}^{n} |v_i| \, \|a_i\|_1 \leq \max_i \|a_i\|_1 \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \max_i \|a_i\|_1.$$

Zbog toga za matricu $A = [a_{ij}]$ važi

$$\|A\|_1 = \max_{\|v\|_1=1} \|Av\|_1 = \max_i \|a_i\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1.14}$$

L_1 matrična norma predstavlja maksimalnu sumu modula komponenti vektora-kolona matrice A, tj. ekvivalentna je $L_{1,\infty}$ normi.

Primer 19. Slično prethodnom primeru, pokazaćemo da je L_∞ norma matrice A ekvivalentna $\|A^T\|_{1,\infty}$. Neka je $v \in \mathbb{C}^n$ jedinični vektor u odnosu na L_∞ normu,

$$\|v\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i| = 1.$$

Posmatramo podelu matrice A na vektore-vrste, $A = \left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_n^T \end{array}\right]$. Tada je

$$\|Av\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} a_1^T v \\ a_2^T v \\ \vdots \\ a_n^T v \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |a_i^T v| = \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} v_j|$$
$$\overset{|v_j|\le 1}{\le} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

L_∞ matrična norma predstavlja maksimalnu sumu modula komponenti vektora-vrsta matrice A.

Primer 20. Za izvođenje izraza L_2 matrične norme koristićemo Švarcovu nejednakost

$$|v^T u| \le \|v\|_2 \|u\|_2, \quad \forall v, u \in \mathbb{C}^n. \tag{1.15}$$

Koristićemo podelu matrice A na vektore-vrste, $A = \left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_n^T \end{array}\right]$, i jedinični vektor v

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} = 1.$$

Tada je

$$\|Av\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} a_1^T v \\ a_2^T v \\ \vdots \\ a_n^T v \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i^T v|^2} \overset{(1.15)}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_2^2 \|v\|_2^2} = \|v\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_2^2}$$
$$\overset{\|v\|_2=1}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_2^2}.$$

L_2 matrična norma predstavlja maksimalna po modulu sopstvenu vrednost matrice $A^H A$; naziva se još i spektralna norma.

Teorema 3. *Ako je Q unitarna matrica reda n i A proizvoljna kvadratna matrica reda n tada je*

$$\|A\|_2 = \|QA\|_2.$$

Za $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ najznačajnije matrične norme su:

L_1: $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_1} = \min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$

L_2: $\|A\|_2 = \rho(A^H A) = \max\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda \in Sp(A^H A)\},$

$\dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \min\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda \in Sp(A^H A)\},$

L_∞: $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

Norma matrica igra veliku ulogu u ispitivanju stabilnosti izračunavanja. U te svrhe, koristićemo osnovne pojmove iz teorije grešaka uvedene u prethodnom odeljku.

Primer 21. Pretpostavimo da je potrebno izračunati Av, ali nam v nije tačno dato. To može biti posledica grešaka zaokruživanja, merenja ili prethodnih numeričkih izračunavanja. Umesto sa tačnom vrednošću v raspolažemo sa $v+\varepsilon$. Zbog toga je apsolutna greška ulaznog podatka data sa $\|\varepsilon\|$. Želimo da procenimo uticaj greške ε na izračunavanje Av. Apsolutna greška izračunavanja je data izrazom

$$\|A(v+\varepsilon) - Av\| = \|A\varepsilon\| \le \|A\|\,\|\varepsilon\|.$$

Norma matrice predstavlja grubu procenu koeficijenta proporcionalnosti između apsolutne greške izračunavanja Av i apsolutne greške ulaznog podatka v.

Za procenu relativne greške $\dfrac{\|A(v+\varepsilon) - Av\|}{\|Av\|}$ izračunavanja Av, pretpostavimo regularnost matrice A. Tada je

$$\frac{\|A(v+\varepsilon) - Av\|}{\|Av\|} \le \frac{\|A\|\,\|\varepsilon\|}{\|Av\|} = \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\varepsilon\|}{\|A^{-1}\|\,\|Av\|}.$$

$$\|A^{-1}\|\,\|Av\| \ge \|A^{-1}Av\| = \|v\| \Longrightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|\,\|Av\|} \le \frac{1}{\|v\|}.$$

$$\Longrightarrow \frac{\|A(v+\varepsilon) - Av\|}{\|Av\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\varepsilon\|}{\|v\|}$$

Relativna greška rezultata $\dfrac{\|A(v+\varepsilon) - Av\|}{\|Av\|}$ je proporcionalna relativnoj grešci $\dfrac{\|\varepsilon\|}{\|v\|}$ ulaznih podataka. Gornja granica koeficijenta proporcionalnosti data je izrazom

$$\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$$

i naziva se kondicioni broj matrice A. Predstavlja grubu procenu koeficijenta uvećanja relativne greške u izračunavanjima.

1.3.1 Pitanja i zadaci

1. Dokazati $\|A+B\|_F^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\,\mathrm{tr}(AB)$.

2. Dokazati da indukovana matrična norma

$$\|A\| = \sup_{v\neq\overrightarrow{0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{\|v\|=1} \|Av\|,$$

   zadovoljava osobine norme N1-N3 definicije 9.

3. Pokazati da je $\rho(A) \leq \|A\|$, gde je $\|\cdot\|$ bilo koja indukovana norma matrica.

4. Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ proizvoljna podmatrica matrice A.

   [a)] Opisati transformacione matrice T_1 i T_2 kojima se dobija $T_1AT_2 = B$.

   [b)] Iskoristiti proizvod $T_1AT_2 = B$ za dokaz tvrđenja $\|B\| \leq \|A\|$, gde je $\|\cdot\|$ bilo koja indukovana norma matrica.

5. Neka je $A = uv^T$. Pokazati da je $\|A\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$. Da li isto tvrđenje važi i za Frobenijusovu normu, tj. $\|A\|_F = \|u\|_2\|v\|_2$? Dokazati ili dati kontraprimer.

Dodatak

Definicija 1. Uređena četvorka $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, sa osobinama

- $V \neq \emptyset$, i $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ je polje,
- $+ : V \times V \to V, \quad (V, +)$ je Abelova grupa,
- $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$,
- $\forall v, u \in V$ i $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ važe sledeće jednakosti

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 1 \cdot v = v, & \text{b)} & \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \mu) v, \\ \text{c)} & (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v & \text{d)} & \lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u, \end{array}$$

predstavlja vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Elemente skupa V nazivamo vektorima, a elemente polja $\mathbb{K}$ skalarima. Operacija $+$ zove se sabiranje vektora, a operacija $\cdot$ množenje vektora skalarom.

Definicija 2. Podskup $P \subset V$ vektorskog prostora V nad poljem skalara $\mathbb{K}$ predstavlja potprostor ako je $(P, \mathbb{K}, +, \cdot)$ prostor u odnosu na restrikcije operacija $+$ i $\cdot$ na podskup P.

Teorema 1. *Podskup $P \subset V$ vektorskog prostora V je potprostor akko*

$$\forall v, u \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}:\ \lambda v + \mu u \in P.$$

Definicija 3. Skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ je linearno nezavisan ukoliko $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ važi

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_k = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k.$$

Definicija 4. Skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ je potpun ukoliko $\forall v \in V\ \exists \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$ tako da je

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Definicija 5. Svaki potpun, linearno nezavisan skup vektora prostora V predstavlja bazu u V. Broj elemenata baze naziva se dimenzija prostora V.

Teorema 2. *Ako je skup od n vektora $n-$dimenzionalnog prostora V linearno nezavisan, onda taj skup vektora predstavlja bazu u V. Ako je skup od n vektora $n-$dimenzionalnog prostora V potpun, onda je taj skup baza u V.*

Definicija 6. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{R}$. Preslikavanje $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ naziva se skalarni proizvod na V ukoliko za svaka tri vektora $u, v, w \in V$ i proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, ima osobine:

S1: $u \cdot v = v \cdot u$;

S2: $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$;

S3: $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$;

S4: $u \cdot u > 0, u \neq \overrightarrow{0}$.

Definicija 7. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\cdot : V \times V \to \mathbb{C}$ naziva se skalarni proizvod na V ukoliko za svaka tri vektora $u, v, w \in V$ i proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{C}$, ima osobine:

U1: $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$;

U2: $(\alpha u) \cdot v = \overline{\alpha}(u \cdot v)$;

U3: $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$;

U4: $u \cdot u > 0, u \neq \overrightarrow{0}$.

Definicija 8. Standardni skalarni proizvod realnih vektora $u, v \in \mathbb{R}^n$ dat je sa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

što se u matričnom obliku može predstaviti i na sledeći način:

$$u \cdot v = v^T u = u^T v.$$

Definicija 9. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_+$ naziva se norma na V ukoliko ima osobine:

N1: $\|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}, \quad \forall v \in V$;

N2: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|, \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{C}$;

N3: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$.

Norma indukovana skalarnim proizvodom:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}\,.$$

Definicija 10. Najznačajnije norme vektora su: za $v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$,

L_1: $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, poznata još i kao Manhetn norma ili taksi norma,

L_2: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, Euklidova norma

L_p: $\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \; p \geq 1$

L_∞: $\|v\|_\infty = \max\limits_k\{|x_k|\}$.

Definicija 11. Za date vektore $u, v \in \mathbb{R}^n$, njihovo rastojanje je

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Definicija 12. Neka je $(b):\ \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza $n-$dimenzionalnog vektorskog prostora V i $\mathcal{A} : V \to V$, linearan operator na prostoru V. Koordinate slika $\mathcal{A}b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, smeštene u kolone matrice formiraju matricu A. Matrica A naziva se matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu (b).

Definicija 13. Dve matrice A i B su slične ukoliko postoji regularna matrica T takva da važi

$$A = T^{-1}BT, \text{ tj. } TA = BT.$$

Za matricu A kažemo da se može dijagonalizirati ukoliko je slična nekoj dijagonalnoj matrici.

Teorema 3. *(Teorema o spektralnom preslikavanju) Neka je $f(x)$ neki polinom i A kvadratna matrica. Ukoliko je u_λ sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ matrice A, tada je u_λ sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $f(\lambda)$ matrice $f(A)$.*

Definicija 14. Monični polinom $\mu(t)$ najmanjeg stepena koji ima osobinu $\mu(A) = O$, gde je O nula matrica odgovarajućeg reda, naziva se minimalni polinom matrice A.

Teorema 4. *Svaka kvadratna matrica A ima jedinstven minimalni polinom $\mu_A(\lambda)$.*

Teorema 5. *Ukoliko za polinom $f(x)$ važi da je $f(A) = O$ za neku kvadratnu matricu A, tada minimalni polinom matrice A deli $f(x)$.*

Posledica 1. *Minimalni polinom matrice deli njen karakteristični polinom.*

Teorema 6. *Svaka nula karakterističnog polinoma matrice je nula i njegovog minimalnog polinoma.*

Posledica 2. *Nule minimalnog i karakterističnog polinoma matrice se poklapaju i razlikuju se eventualno u redu višestrukosti.*

Literatura

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2009.

[2] M. A. Kovačević, G. V. Milovanović, and R. Ž. Đorđević. *MATEMATIKA I*. SVEN, Niš, Srbija, 2009.

[3] Lloyd N. Trefethen and III David Bau. *Numerical linear algebra*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, 1997.

[4] T. Shores. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2000.