UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Matrični metodi
Primene kroz Python

AUTOR: JOVANA DŽUNIĆ

Niš, 2020

Predgovor

To me, mathematics, computer science, and the arts are insanely related. They're all creative expressions.
– Sebastijan Trun[1]

'Matrični metodi' je kurs primenjene linearne algebre koncentrisan na rad sa matricama - matrična algebra i transformacije u službi primene. U centru pažnje je dekompozicija matrica na podmatrice ili na faktore i prednosti ovakvog pristupa. Kurs predstavlja nastavak izučavanja matrične algebre, spektralne teorije matrica i linearnih operatora započete u okviru predmeta Matematika 1, iz prvog semestra osnovnih akademskih studija na Elektronskom fakultetu Univerziteta u Nišu. Matrični metodi su kolekcija široko primenljivih koncepata i tehnika rada nad vektorima i matricama. U okviru kursa akcenat je na razvoju geometrijske intuicije obrađenih tema i njihove primene. Smatram da će takav pristup pomoći usvajanju koncepata primenjene linearne algebre. Tekst pred Vama je prateća skripta ovog kursa.

Oblast proučavanja kursa Matrični metodi pripada oblasti primenjene linearne algebre. Sama upotreba teorijskih rezultata u praktične svrhe je gotovo uvek dodirna tačka "različitih" oblasti primenjene matematike i drugih naučnih disciplina. Naš svet i Kosmos nisu linearni. Metodi linearne algebre opisuju lokalno fizički svet oko nas ili pretvaraju svet podataka u informacije. Poput skiciranja portreta nizom ravnih poteza, matrice i vektori nose skice informacija koje čekaju da se pretoče u jasnu sliku. Da bi se ovladalo konceptima linearne algebre neophodno je razviti intuiciju za dimenziju, uglove, rastojanje, prostornost i kretanje. Usvajanje koncepata linearne algebre podrazumeva i razumevanje kada možemo 'razmišljati linearno'. "U prirodi srećemo puno različitih lepih krivih. Ipak, poput horizonta, ukoliko krive oko nas posmatramo na određeni način one mogu izgledati linearno" [1].

Matrice i vektori su osnovni elementi izračunavanja linearne algebre. Ova skripta predstavlja kolekciju znanja iz oblasti matrične i linearne algebre sa akcentom na primenama kroz poznate algoritme i jednostavne matematičke modele. Tekst je sa jakom orijentacijom ka numeričkim algoritmima i primenjenoj matematici u kojima matrična dekompozicija igra centralnu ulogu. Sve tri komponente – teorija, izračunavanja u konačnoj preciznosti i primene – zastupljene su u obrađenim temama.

U okviru kursa predstavljena je klasa numeričkih algoritama zasnovanih na transformacijama matrica. Predstavljeni numerički algoritmi smatraju se najznačajnijim algoritmima modernog doba, videti npr. Cornell i Nick Higham. Navode se kao ključne tačke koje su dovele do velikih prekretnica u industriji i tehnologiji 20. veka. Nezaobilazna su komponenta razvoja veštačke inteligencije i obrade velikih skupova podataka, što su glavni pravci istraživanja i razvoja u 21. veku (Roberts, 5 tehnologija).

Iako će problemi razmatrani u okviru kursa pokrivati široku paletu primena, obrađeni matematički apart je veoma limitiranog obima. Mali broj bazičnih ideja linearne algebre kombinovan

[1] Sebastian Thrun (1967 –) – nemački pronalazač, preduzetnik i naučnik

je na veliki broj načina sa željom da se ukaže na moć elementarnih koncepata i još važnije, na moć ideja - kako postojeće znanje kombinovati za stvaranje novih rezultata. Posebna snaga ljudskog uma jeste sposobnost pronalaženja obrazaca, zakonitosti i uspostavljanje veza između naizgled nepovezanih koncepata. Ova osobina omogućava naučno-tehnološki napredak, interdisciplinarnost, umetnost i mnoštvo drugih ljudskih kreativnih sklonosti i napora. Kroz Matrične metode cilj je da se produži matematički poligon za vežbu te bitne osobine uma budućih inženjera naprednih tehnologija. "Matematika je sistem razmišljanja, i svaki problem na ovom svetu može imati koristi od razmišljana", [2].

Još jedna osobina kursa Matrični metodi jeste akcenat na primenjenoj matematici kao eksperimentalnoj nauci. Ova karakteristika može se uočiti kroz određene primere, vežbe na računarima i projekte. Savremeni matematički softveri i kompjuterski jezici visokog nivoa predstavljaju savršene laboratorije za matematičke eksperimente. Rastuća moć računara, specijalizovani programski paketi i razvoj kompjuterskih jezika visokog nivoa ubrzali su i olakšali izračunavanja velikog obima, manipulaciju algebarskim izrazima, grafičko predstavljanje i primenu numeričkih algoritama. Zbog toga je nastavnim programom Matričnih metoda predviđeno upoznavanje studenata sa bibliotekama i ugrađenim funkcijama programskog jezika Python specijalizovanih za rad sa matricama, numeričke algoritme i grafički prikaz. Namera je da se koncentracija slušalaca kursa preusmeri sa izračunavanja na kreativnost i razvoj ideja kroz izučavane koncepte. U skladu sa tim se na kraju poglavlja skripte nalaze teme i smernice za projektne zadatke. Nadam se da će projekti i spoljašnji linkovi podstaknuti polaznike kursa na sopstveno istraživanje i širenje skupa projektnih problema u skladu sa ličnim interesovanjima.

Kroz sadržaj kursa provlače se ideje i koncepti matematičkog modelovanja sa ciljem razvoja veština budućih inženjera na ovom polju. Matematičkim modelima opisujemo svet oko nas, stičemo uvid u kauzalnost i numeričke karakteristike objekata ili svojstava koja proučavamo. Programom kursa predviđeno je izučavanje matematičkih metoda koji su veoma korisni za takav tip analize. Tri bitna metoda se provlače kroz sadržaj obrađenih tema: numerički, grafički i teorijski. Numerički metodi tiču se konkretnih numeričkih podataka, njihove obrade i interpretacije. Izračunavanja sama po sebi nisu cilj, već donošenje zaključaka na osnovu produkovanih rezultata. Grafički metod koristi slikovnu ili prostornu reprezentaciju za pomoć u razumevanju i saopštavanju utvrđenih relacija. Treća kategorija metoda, ovde klasifikovana kao teorijska, spada u kategoriju analitičkih ili simboličkih metoda. Kako numerički metod koristi numeričke algoritme, grafički metod koristi teoriju grafova i funkcija, tako teorijski metod upošljava matematička sredstva za manipulaciju relacijama i obrascima. Ovi alati obično ukuljučuju promenljive, nepoznate i operacije nad njima, kao i razumevanje finesa i povezanosti matematičkih objekata.

U okviru kursa, kulminacija razrade teme matematičkog modelovanja je predstavljanje lanaca Markova. Ovaj stohastički model je izvanredan primer tačke stapanja matematičkih disciplina. Kroz niz primera studenti će se upoznati sa širokim spektrom mogućih primena ovog jednostavnog modela. Želja je da budući inženjeri sagledaju matematičko modelovanje kao alat multidisciplinarnosti i lakše usvoje matematiku kao jezik svoje discipline. Nadam se da će čitaocima skripte ona postati koristan trajni član biblioteke ili liste referenci u daljem profesionalnom radu.

Proučavnje matematike na inženjerskim studijama ima za cilj, između ostalog, podučavanje budućih inženjera jasnom i konciznom izražavanju svojih misli i argumenata. Pisanje izveštaja i odbrana projekata u okviru kursa Matrični metodi jedan je od načina kojim će se studenti podučavati izražavanju svojih ideja, definisanju i proveri stavova ili uzročno-posledičnih veza.

Skripta je organizovana u okviru tematskih celina: osnovni elementi algebre matrica, specijalne vrste matrica karakteristične za inženjersku primenu i efikasne algoritme, različiti tipovi dekompozicije matrica sa njihovim posebnim svojstvima, numerički algoritmi kroz teorijski i praktičan prikaz. Poslednje poglavlje tiče se lanaca Markova, njihovih osnovnih svojstava i primena. Odeljci u poglavljima praćeni su pitanjima i zadacima za uvežbavanje i dublje razumevanje obrađenog gradiva. Na kraju skripte nalaze se dodaci koji sadrže definicije termina i važnija tvrđenja iz kursa Matematika 1. Plavim slovima u okviru teksta skripte označeni su linkovi na spoljašnje sadržaje kojima se pristupa klikom miša. Za pristup na neke od njih potrebna je internet konekcija. Na Moodle platformi Elektronskog fakulteta nalazi se i preporuka dodatnih sadržaja za učenje ili dalje istraživanje.

* * * * *

Uvođenje i oblikovanje kursa Matrični metodi u računarstvu proisteklo je iz specifičnosti potreba u matematičkom obrazovanju studenata modula Računarstvo i informatika osnovnih akademskih studija Elektronskog fakulteta Univerziteta u Nišu. Matrični metodi je izborni predmet namenjen obrazovanju naprednih inženjera i korisnika informacionih tehnologija sa orijentacijom ka analizi podataka i mašinskom učenju. Sadržaj i inspiracija za kurs zasnovani su na mnoštvu izvanrednih knjiga, stručnih časopisa i e-izvora navedenih u okviru literature date na kraju skripte. Poseban uticaj imale su svakako knjige [1], [3] i [4]. U izboru i obradi tema referenca su bili kursevi sličnog sadržaja sa svetski poznatih Univerziteta kao što su MIT, Stanford University, Cornell University, ali i sve popularniji on-line kursevi kao što su Coursera, Brilliant i mnogi drui.

Izvanrednu pomoć prilikom izrade skripte u sugestijama i revizijama radnog materijala dugujem dr Marjanu Matejiću, docentu Univerziteta u Nišu sa kojim rado sarađujem u okviru Katedre za matematiku Elektronskog fakulteta. Posebna zahvalnost za sjajne ideje i korekcije tokom izrade skripte ide koleginicama sa iste Katedre, prof. dr Lidija Rančić i prof. dr Slađana Marinković bez čije podrške i pomoći realizacija ovog projekta ne bi bila moguća. Najveća zahvalnost i zasluga pripadaju mom mentoru, prof. dr Miodragu Petkoviću koji me je uveo u fanatastičnu avanturu zvanu Matematika! Najvažniji uticaj imala je moja porodica. Oni su me naučili pravom značenju i smislu života, šta taj put čini vrednim na kraju.

U Nišu,

Jovana Džunić

Sadržaj

Poglavlje 1

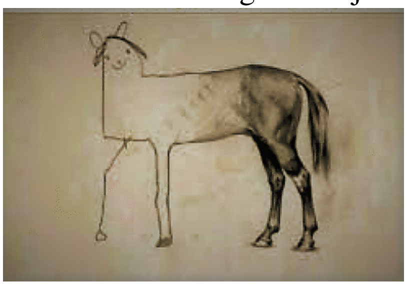
Uvod

Think geometrically, prove algebraically.

– Džon Tejt[1]

Matrice i vektori su matematičke strukture podataka od velikog praktičnog značaja. Možemo ih posmatrati pojednostavljeno kao liste ili tabele podataka. Međutim, moć ovih objekata dolazi sa operacijama koje definišemo nad njima, a ne nužno sa vrednostima koje sami objekti nose. Ukoliko matrice posmatramo kao liste podataka, operacije koje vršimo nad njima su u službi informacija koje želimo iz podataka da dobijamo. Interpretaciju ovih operacija, samim tim i razloge njihove primene, najprirodnije analiziramo kroz grafičko predstavljanje, kada je to moguće.

Priča o vektorima počinje geometrijom u ravni i geometrijom u prostoru, ili popularno zvanom u 2D i 3D. Boljom spoznajom društva, prirode i fizičkog sveta oko nas, tehničko-tehnološkim razvojem, vektori i matrice većih dimenzija dobijaju na primeni i značaju. Geometrijske definicije i osobine su razvijane na osnovu 2D i 3D prostora. Te modele geometrije koristimo za ispitivanje prostora i geometrija više dimenzija. Nemoguće je vizuelno demonstrirati kako bi prostor sa 100 dimenzija izgledao ili tačnost tvrđenja u njemu. Prelazak iz 2D u 3D pruža grubu skicu (videti sliku) šta znači dodavanje dimenzija. Ukoliko stavimo na stranu vizuelnu percepciju, postupak povećanja dimenzije je veoma jednostavan - nadovezujemo element na postojeću listu podataka. Postupak širenja operacija i osobina prirodno prati postupak povećanja dimenzije.



Razvoj operacija nad vektorima i matricama doveo je do ultimativnog sredstva ispitivanja prostora velikih dimenzija i odnosa objekata u njemu. Specifičnosti problema u kojima su odgovarajući podaci nastali diktiraju operacije i algoritme za izvlačenje informacija.

U nastavku poglavlja podsetićemo se elemenata vektorske i matrične algebre konačne dimenzije.

[1]John Tate (1925–) – američki matematičar

1.1 Algebra vektora

Vektore $n-$dimenzionalnog vektorskog prostora (dodatak definicija 1) označavaćemo matricom-kolonom ili matricom-vrstom, tj. sa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix},$$

gde su x_k realni ili kompleksni brojevi. Obično se matrice-kolone zovu desni vektori ili vektori desne notacije, dok su matrice-vrste levi vektori. Desna notacija odgovara temama koje se tiču funkcija nad vektorima jer proizvodi Ax odgovaraju standardnoj matematižv ckoj notaciji primene funkcije A na vektor x. Sa druge strane, leva notacija je uobičajena za primene kao što su teorija grafova, slučajni procesi, kompjuterska grafika i sl. Operacija transponovanja matrica omogućava analogiju između leve i desne vektorske notacije. Realne i kompleksne brojeve jednim imenom zvaćemo skalari ili jednostavno brojevi.

Primer 1. Za vektor $\begin{bmatrix} 2.23 \\ \pi \end{bmatrix}$ rećićemo da je iz $\mathbb{R}^2$. Slično za vektor $\begin{bmatrix} 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$ rećićemo da je iz $\mathbb{C}^2$. Analogno ćemo tretirati vektore leve notacije. Tako je $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Realni i kompleksni vektorski prostori imaju puno sličnosti ali i razlika koje su posledica svojstava skupova $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ i operacija definisanih na njima. Tokom kursa ukazivaćemo na ove aspekte kroz obrađene teme.

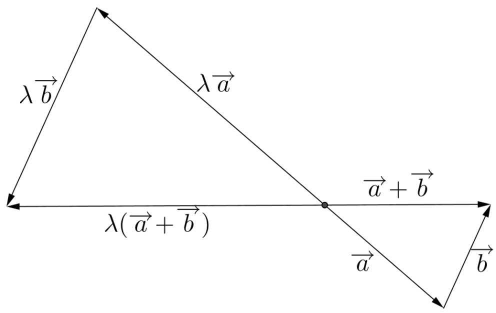
Linearne kombinacije su okosnica rada u linearnoj algebri. Za skup vektora $v_1, v_2, \dots, v_k$ i brojeve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

je izraz u kome učestvuju gradivne komponente vektorskog prostora: vektori, skalari i dve operacije nad njima:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \end{bmatrix},$$
$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \dots & \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Prilikom rada sa vektorima zgodno je imati na umu geometrijsku interpretaciju ovih operacija.

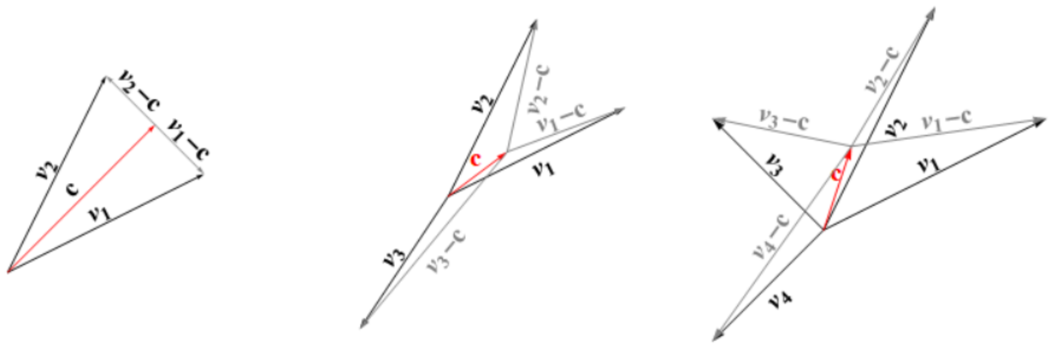


Slika 1.1: Sabiranje i skaliranje vektora

Primer 2. Centar ili sredina skupa vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$, je vektor $c = c(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ čije je predstavljanje

$$c = \frac{1}{k}v_1 + \frac{1}{k}v_2 + \cdots + \frac{1}{k}v_k. \tag{1.1}$$

Centar skupa vektora je uopštenje aritmetičke sredine brojeva. Posebno svojstvo centra opisano je izrazom $(v_1 - c) + (v_2 - c) + \cdots + (v_k - c) = \mathbf{0}$. Dakle, vektori razlika $v_i - c$ se međusobno anuliraju.



Slika 1.2: Centar skupa od $2, 3$ i 4 vektora

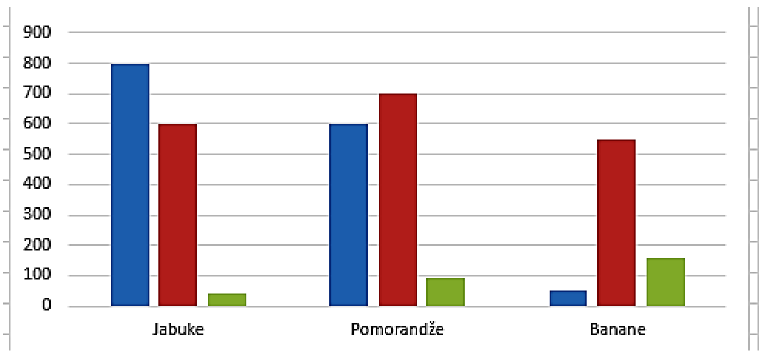
Ovo uvodno poglavlje je usko povezano sa geometrijskom interpretacijom u 2D i 3D. Vredi pomenuti da u realnim situacijama takav način povezivanja nije niti očigledan, niti uvek moguć. U opštem slučaju koordinate $n-$dimenzionalnog vektora nose geometrijske osobine i značenje u zavisnosti od izabrane baze, tj. koordinatnog sistema. Za konkretnu upotrebu vektora ključno je poznavanje konteksta u kome su upotrebljeni i izbora reprezentacije. Jedino tako se pruža dublji uvid u rezultate i njihovu kvalitetniju interpretaciju.

Primer 3. Unos trodimenzionalnih vektora mogu biti datumi numeričkog oblika

$$\begin{bmatrix} dan & mesec & godina \end{bmatrix}.$$

Bez obzira što nad ovim vektorima možemo da izvodimo sve navedene operacije vektorskog prostora, jer su njihovi unosi brojevi, smisao i svrha operacija nad vektorima u ovom slučaju nemaju realnu interpretaciju.

Primer 4. Komponente vektora $v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{nj} \end{bmatrix}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ predstavljaju dnevne količine prodaje n artikala u k uzastopnih dana u jednoj prodavnici. Negativne vrednosti komponenti označavaju nabavku pojedinih artikala, a pozitivne vrednosti označavaju prodaju. Oduzimanjem ovih vektora od vektora početnog stanja može se pratiti dnevno stanje artikala u prodavnici, prosečna brzina prodaje, itd. Za grafički prikaz ovakvih podataka pogoduju dijagrami (grafikoni). Na slici je dat jedan primer stubastog (trakastog) dijagrama.



Ovi jednostavni primeri pokazuju da realna primena vektora kao lista podataka doseže mnogo dalje od vektorskih prostora i standardnih operacija nad njima ili njihove uobičajene geometrijske interpretacije.

Ukoliko je

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, \tag{1.2}$$

za vektor v kažemo da je predstavljen preko vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$, ili rastavljen na te vektore. Jednakost (1.2) takođe ukazuje na linearnu zavisnost (dodatak, definicija 3) vektora $v, v_1, v_2, \ldots, v_k$. Kada je rastavljanje (1.2) jedinstveno po skalarima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, za vektore $v_1, v_2, \ldots, v_k$ kažemo da su linearno nezavisni.

Primer 5. Nula vektor, u oznaci $\overrightarrow{0}$, uvek ima predstvljanje preko bilo kog skupa vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ trivijalnom linearnom kombinacijom, tj.

$$\overrightarrow{0} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_k. \tag{1.3}$$

Kada je (1.3) jedini način predstavljanja nula vektora preko skupa vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$, onda su $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno nezavisni. Jedan od najvažnijih problema u primenjenoj linearnoj algebri jeste opis svih predstavivih vektora skupom $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Tako dolazimo do najpraktičnijeg opisa konačnodimenzionalnog potprostora (dodatak, definicija 2).

Lineal ili razapinjanje je skup:

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \,\big|\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ su proizvoljni skalari}\}.$$

U slučaju da rastavljanje (1.2) postoji za svaki vektor v vektorskog prostora V i jedinstveno je po skalarima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, za svaki vektor v, onda za vektore $v_1, v_2, \ldots, v_k$ kažemo da čine bazu vektorskog prostora V (dodatak, definicija 5). Dimenzija V iznosi k, što označavamo sa $\dim(V) = k$, (dodatak, teorema 2). Koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ linearne kombinacije (1.2) nazivaju se koordinate vektora v u odnosu na izabranu bazu $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Primer 6. Vektorski prostori od interesa za ovaj kurs su:

a) $\mathbb{R}^n$ nad poljem skalara $\mathbb{R}$, dimenzije n. Prirodna ili kanonska baza glasi

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \; e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \; \ldots, e_n = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

b) $\mathbb{C}^n$, dimenzija zavisi da li se posmatra nad poljem skalara $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. U slučaju $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$ kanonska baza je ista kao za $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Dimenzija u ovom slučaju je $\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) = n$.

Kada posmatramo $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$ kanonska baza sastoji se od vektora

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n,\; i\, e_1,\; i\, e_2, \ldots,\; i\, e_n\}.$$

Zbog toga je $\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}) = 2n$.

c) $\mathcal{M}_{m\times n}$ skup svih matrica sa m vrsta i n kolona, dimenzije je mn kada posmatramo ovaj prostor nad poljem skalara odakle su elementi matrica. Kanonsku bazu tada čine matrice $\{E_{ij} \,\big|\, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, koje imaju sve nule osim jedinice na mestu ij.

d) $\mathbb{P}_n[t]$ skup svih algebarskih polinoma promenljive t stepena ne većeg od n, dimenzije je $n + 1$. Jedna baza sastoji se od polinoma $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.

e) $\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Linearnim kombinacijama baze vektorskog prostora opisujemo sve vektore tog prostora ili neke njegove podskupove. Lineal nad vektorima $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je najmanji potprostor koji sadrži ove vektore, tj. najmanji potprostor razapet nad vektorima $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Maksimalan broj linearno nezavisnih vektora skupa $v_1, v_2, \ldots, v_k$ određuje dimenziju lineala.

Definicija 1. Ukoliko je P vektorski potprostor dimenzije k, $n-$dimenzionalnog prostora V, tada je kodimenzija potprostora P jednaka $n - k$,

$$\operatorname{codim}(P) = \dim(V) - \dim(P).$$

Osnovne operacije nad vektorima prirodno se uopštavaju na operacije nad skupovima vektora i naravno vektorske potprostore.

Definicija 2. Za dva potprostora P_1 i P_2 suma potprostora definisana je sa

$$P_1 + P_2 = \{u + v \,\big|\, u \in P_1, v \in P_2\}.$$

Ukoliko su P_1 i P_2 takvi da je $P_1 \cap P_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, tada se za sumu ovih potprostora kaže da je njihova direktna suma, što označavamo sa

$$P_1 \oplus P_2.$$

Kada je $V = P_1 \oplus P_2$, kažemo da potprostori P_1 i P_2 razapinju prostor V. P_1 je direktna dopuna potprostora P_2 do V. Važi da je

$$\operatorname{codim}(P_1) = \dim(P_2) \quad \text{i} \quad \operatorname{codim}(P_2) = \dim(P_1).$$

Primer 7. Po analogiji sa geometrijom u 2D i 3D, potprostore dimenzije 1 zvaćemo prave, potprostore kodimenzije 1 zvaćemo hiperravni.

U 2D dve prave koje se seku razapinju ravan. U 3D ravan i prava koja je prodire razapinju prostor. Hiperravan i prava su međusobne direktne dopune u $n-$dimenzionalnom prostoru. Primetimo da unija ovih potprostora ne daje ceo prostor. Međutim linearne kombinacije nihovih elemenata popunjavaju ceo prostor.

Jedan od načina za opisisvanje i određivanje direktne dopune potprostora je preko njegove baze. Neka je $P_1 = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ sa bazom $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potprostor $n-$dimenzionalnog prostora V. Skup $v_1, v_2, \ldots, v_k$ može se dopuniti do baze prostora V, npr.

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n.$$

Tada je $P_2 = \mathcal{L}(v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n)$ direktna dopuna potprostora P_1 do V. Primetimo da izbor dopune nije jednoznačno određen, samim tim vektorski potprostor P_1 može imati više različitih potprostora za direktnu dopunu.

Posledica 1. *Bilo koja particija baze vektorskog prostora V definiše njegovo razbijanje na direktnu sumu potprostora.*

Teorema 1. *Sledeći iskazi su ekvivalentni.*

a) $P_1 + P_2$ *je direktna suma.*

b) Ako je $u + v = \overrightarrow{0}$ *za* $u \in P_1$ *i* $v \in P_2$ *tada je* $u = v = \overrightarrow{0}$.

c) Za proizvoljan vektor $x \in P_1 + P_2$ *postoje jedinstveni vektori* $u \in P_1$ *i* $v \in P_2$ *za koje je* $x = u + v$.

d) $\dim(P_1 + P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2)$.

1.1.1 Pitanja i zadaci

1. Opisati geometrijski (linija, ravan ili prostor) sve linearne kombinacije sledećih vektora.

$$\text{a)} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

2. Izračunati $v_1 + v_2 + v_3$, ako su

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix}-3\\1\\-2\end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}.$$

Da li su v_1, v_2, v_3 linearno nezavisni vektori?

3. Odrediti vektore v_1 i v_2 tako da zadovoljavaju jednakosti

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad v_1 - v_2 = \begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Ovo je problem sa koliko nepoznatih i koliko jednačina?

4. Neka su $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ polja kompleksnih, realnih i racionalnih brojeva redom. Odrediti da li su sledeći parovi vektorski prostori. Naći jednu bazu i dimenziju vektorskih prostora.

   a) $\mathbb{C}$ nad poljem $\mathbb{C}$.

   b) $\mathbb{C}$ nad poljem $\mathbb{R}$.

   c) $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{C}$.

   d) $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$.

   e) $\mathbb{Q}$ nad poljem $\mathbb{R}$.

   f) $S = \{a + b\sqrt{2} \big| a, b \in \mathbb{Q}\}$ nad poljem $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

5. Odrediti jednu bazu i dimenziju sledećih prostora matrica.

   a) Skup svih kvadratnih matrica kompleksnih brojeva dimenzije n, nad poljem $\mathbb{C}$.

   b) Skup svih kvadratnih matrica kompleksnih brojeva dimenzije n, nad poljem $\mathbb{R}$.

   c) Skup svih kvadratnih matrica realnih brojeva dimenzije n, nad poljem $\mathbb{C}$.

   d) Skup svih simetričnih realnih matrica dimenzije n, nad poljem $\mathbb{R}$.

   e) Skup svih dijagonalnih realnih matrica dimenzije n, nad poljem $\mathbb{R}$.

   f) Skup svih donje trougaonih realnih matrica dimenzije n, nad poljem $\mathbb{R}$.

6. Neka vektori $\{v_1, v_2, v_3\}$ predstavljaju bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i neka je

$$v_4 = -v_1 - v_2 - v_3.$$

   Dokazati da za svaki vektor $u \in \mathbb{R}^3$ postoje jedinstveni skalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \quad \text{i} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

   Uopštiti ovo tvrđenje na $n-$dimenzionalni prostor.

7. Posmatramo k vektora $n-$dimenzionalnog vektorskog prostora. Odgovoriti na pitanja pod a), b) i c) u svakom od sledećih slučajeva: $k < n$; $k = n$ i $k > n$.

   a) Da li su vektori linearno nezavisni?

   b) Da li su vektori baza $n-$dimenzionalnog prostora?

   c) Da li vektori razapinju $n-$dimenzionalni prostor?

8. Neka su vektori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearno nezavisni. Da li su sledeći skupovi vektora linearno nezavisni?

   a) $v_1, -v_2, 2v_3, \pi v_4$.

   b) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1$.

   c) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1$.

   d) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 - v_1$.

   e) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1$.

   f) $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

9. Ispitati tačnost sledećih iskaza.

   a) Ako skup vektora sadrži nula-vektor onda je taj skup linearno zavisan.

   b) Ako su $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno nezavisni vektori i v_{k+1} nije njihova linearna kombinacija, onda je skup vektora $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ linearno nezavisan.

   c) Ako vektor v_{k+1} nije linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$, onda je skup vektora $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ linearno nezavisan.

   d) Ako je vektor x linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ i linearna kombinacija vektora $u_1, u_2, \ldots, u_p$, onda je svaki od vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearna kombinacija vektora $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

   e) Ako u skupu vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ bilo kojih $k - 1$ vektora je linearno nezavisno, tada su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno nezavisni.

10. Ako je P potprostor vektorskog prostora V takav da postoji samo jedan potprostor U za koji je $P \oplus U = V$, onda je $P = V$. Dokazati.

1.2 Matrična algebra

Matrice osim što predstavljaju tabele podataka ili pravougaone šeme brojeva

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

mogu se tretirati i kao elementi vektorskog prostora dimenzije $m \cdot n$. Operacije koje skup $\mathcal{M}_{m\times n}$ matrica reda $m \times n$ čine vektorskim prostorom su množenje skalarom i sabiranje dve matrice. Obe operacije definisane su pokomponentno, tj.

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ & & \dots & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 8. Potražimo najmanji potprostor odgovarajućeg prostora matrica koji sadrži

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skup matrica u slučaju pod a) razapinje prostor svih dijagonalnih matrica reda 2. Skup pod b) predstavlja sve matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \\ a & b \end{bmatrix}$, a pod c) $\begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Veoma važna interpretacija matrica koja u mnogome pojašnjava operacije i funkcije nad njima je da matrice možemo posmatrati i kao kolekcije vektora: skup njihovih vektora-kolona ili vektora-vrsta. Tako matricu A, datu sa (1.5), možemo 'razbiti' na dva skupa vektora:

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ovi skupovi vektora definišu (razapinju) veoma važne prostore matrice A : prostor kolona u oznaci $\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}(\text{kolone } A)$ i prostor vrsta - $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{L}(\text{vrste } A) = \mathcal{L}(\text{kolone } A^T)$. Prostor kolona matrice A naziva se još i prostor slika te matrice. Tako prostor vrsta matrice A možemo zvati i prostor slika matrice A^T. U okviru Matematike 1 (videti [5]) pokazano je da je

$$\dim \mathcal{L}(\text{kolone } A) = \dim \mathcal{L}(\text{vrste } A),$$

tj. $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^T))$. Ove dimenzije definišu rang matrice A, u oznaci $\operatorname{rang}(A)$. Matrica je punog ranga ukoliko je $\operatorname{rang}(A) = \min\{m, n\}$. Matrica je punog ranga vrsta kada je

$\operatorname{rang}(A) = m$, a punog ranga kolona u slučaju $\operatorname{rang}(A) = n$. Defekt matrice A je kodimenzija prostora kolona te matrice, tj.

$$\operatorname{def}(A) = \operatorname{codim}(\mathcal{R}(A)) = n - \operatorname{rang}(A).$$

Primer 9. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, prostor kolona je

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

jer su vektori linearno zavisni (proporcionalne koordinate). Zbog toga je $\operatorname{rang}(A) = 1$ i $\operatorname{def}(A) = 2 - 1 = 1$. Prostor vrsta matrice A je lineal isključivo nad prvom vrstom, jer su preostale vrste nula-vektori.

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

Primer 10. Opisaćemo prostor kolona zbira matrica $A + B$. Neka su kolone matrice A vektori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i kolone matrice B vektori $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A+B) \quad &= \mathcal{L}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\
&= \{\lambda_1(a_1 + b_1) + \lambda_2(a_2 + b_2) + \cdots + \lambda_n(a_n + b_n) \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} \\
&\subset \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_2 + \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_2 \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}\} \\
&= \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B).
\end{aligned}$$

Osobine osnovnih operacija nad matricama su već poznate od ranije. U ovom odeljku upoznaćemo se sa različitim interpretacijama operacije množenja dve matrice koje su možda manje poznate.

Najpoznatije množenje dve matrice je Kejlijev proizvod dve matrice.

Napomena 1. Množenje matrica je moguće ako je ispoštovano pravilo unutrašnjeg indeksa tj.

$$\begin{bmatrix} m & \text{vrsta} \\ n & \text{kolona} \end{bmatrix}_{m \times \underline{n}} \cdot \begin{bmatrix} n & \text{vrsta} \\ p & \text{kolona} \end{bmatrix}_{\underline{n} \times p} = \begin{bmatrix} m & \text{vrsta} \\ p & \text{kolona} \end{bmatrix}_{m \times p}.$$

Zbog toga, u opštem slučaju, množenje matrica nije komutativna operacija.

Najznačajniji primeri množenja dve matrice svakako su:

1. Unutrašnji proizvod dva vektora:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

   Kada su komponente vektora realni brojevi ovaj proizvod se može tumačiti i kao standardni skalarni proizvod dva vektora. Matricu dimenzije 1×1 tretiramo kao skalar.

2. Spoljašnji proizvod dva vektora:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_nb_2 \\ & & \dots & \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \\ b_2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \\ \dots \\ b_n\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} & a_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} & \dots & a_n \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ova operacija poznata je i kao tenzorski proizvod dva vektora. Sve vrste su jednake linearnoj kombinaciji jednog vektora. Takođe, sve kolone su skaliran jedan vektor. Ovom operacijom dobija se matrica ranga 1.

3. Matrica puta vektor (desna notacija):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jednakost $b = Ax$, možemo tumačiti na dva načina u kojima matrica A ima aktivnu ili pasivnu ulogu. Prvo tumačenje je da matrica A transformiše vektor x u vektor b. S obzirom da za operacije nad matricama važi

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,$$

to Ax predstavlja linearnu transformaciju vektora x u vektor b. Jasno, matrica A ovde ima aktivnu ulogu. Drugo tumačenje je da jednakost $b = Ax$ označava da je vektor b nastao linearnom kombinacijom kolona matrice A, tj. $b \in \mathcal{R}(A)$. Ovom prilikom matrica A ima pasivnu ulogu jer se nad njom vrši transformacija. Koeficijenti linearne kombinacije nalaze se u vektoru x.

4. Vektor puta matrica (leva notacija):

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} +$$

$$+y_2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} + \dots + y_m \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

je linearna kombinacija vektora-vrsta matrice. Kako je $(yA)^T = A^T y^T$, sve rečeno za desno množenje vektorom analogno se prenosi na levo množenje.

Primer 11. Dati su vektori u, v i matrice A i B. Utvrditi transformacije ovih matrica koje su definisane proizvodima Au i vB, gde su

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 12. Jednakost $Ax = b$ predstavlja matrični zapis sistema linearnih jednačina. Diskusija rešenja sistema može se pojasniti linearnim kombinacijama. Ukoliko $b \notin \mathcal{R}(A)$, sistem jednačina nema rešenja. Rešenje postoji samo kada $b \in \mathcal{R}(A)$. Jedinstvenost rešenja zavisi od linearne nezavisnosti kolona matrice A. Dakle, rešenje je jedinstveno ukoliko je $\operatorname{def}(A) = 0$.

Proizvod dve matrice može se tumačiti preko bilo koje od prethodno navedenih 'operacija'. Svako od tumačenja ima svoju primenu u numeričkim algoritmima koje ćemo razmatrati u okviru Matričnih metoda.

Neka su $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ dve matrice date svojim elementima,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

Proizvod matrica definisan je u smeru AB i možemo ga tumačiti na sledeće načine.

1. Množenje matrica $C = AB$ definisano je zadavanjem elemenata rezultujuće matrice $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}$ jednakostima

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \\ &= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tj. svaki element rezultujuće matrice je unutrašnji proizvod odgovarajuće vrste matrice A i kolone matrice B. Svi parovi vrsta-kolona unutrašnjih proizvoda čine elemente matrice C. Za ovakvu definiciju množenja ključno je predstavljanje matrica u obliku

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

2. Proizvod AB preko spoljašnjeg proizvoda vektora dat je sa

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \end{bmatrix} + \\ &\quad \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gornja jednakost može se lako proveriti. Naime, u prvom sabirku (prvom spoljašnjem proizvodu) na mestu ij nalazi se član $a_{i1}b_{1j}$. U drugom sabirku na mestu ij nalazi se član $a_{i2}b_{2j}$. Nastavljajući postupak do poslednjeg $n-$tog sabirka dobijamo sve elemente zbira $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Proizvod AB predstavlja zbir n spoljašnjih proizvoda odgovarajućih parova proizvoda kolona$\cdot$vrsta. Proizvod je predstavljen kao zbir n matrica ranga 1.

3. Rastavljanjem matrice B na kolone možemo analizirati proizvod AB uz pomoć 'operacije' matrica$\cdot$vektor.

$$AB = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} & \dots & A \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Prva kolona rezultujuće matrica dobija se u proizvodu matrice A i prve kolone matrice B, i tako redom. Množenje dve matrice može se tumačiti kao p linearnih kombinacija kolona matrice A.

4. Interpretacija leve notacije je analogna (putem transponovanja) desnoj. Za potrebe leve notacije matrica A se predstavlja preko vektora-vrsta.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} B \\ \dots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} B \end{bmatrix}.$$

Primer 13. Da bi smo pokazali da jedinična matrica I ne menja ostale činioce u proizvodu, dovoljno je pokazati da je $Iv = v$ za proizvoljni vektor v. Na osnovu interpretacija množenja 3. i 4. važiće da je $I_m A = AI_n = A$ za proizvoljnu matricu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Analogno se može pokazati da za nula-matricu $O \in \mathcal{M}_{m\times n}$ važi da je $O = OA = BO$ za proizvoljne matrice A i B, gde je ista oznaka korišćena za nula-matrice moguće različitih dimenzija.

Primer 14. Opisaćemo kako proizvodi AT_j transformišu matricu A gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu analize operacije matrica$\cdot$vektor zaključujemo: transformacionim matricama T_j kada množimo zdesna vršimo linearne kombinacije nad kolonama matrice. Koeficijenti linearnih kombinacija dati su kolonama transformacionih matrica.

AT_1 : prva kolona proizvoda glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Druga kolona nastaje množenjem nula-matricom te je i ona nula-kolona. Treća kolona je ponovljena treća kolona matrice A.

AT_2 : prva i druga kolona menjaju mesta, treća kolona se udvostručuje.

AT_3 : druga kolona prelazi na prvo mesto, treća kolona prelazi na drugo mesto i jedna kolona matrice se gubi.

Primer 15. Svaka elementarna transformacija matrice A, tj. transformacija jednog od sledećih tipova:

a) zamena mesta dveju vrsta (kolona);

b) množenje vrste (kolone) brojem c različitim od nule;

c) dodavanje jednoj vrsti (koloni) druge vrste (kolone) pomnožene brojem c,

može da se dobije množenjem matrice A nekom regularnom matricom T sleva za transformacije vrsta, odnosno zdesna za transformacije kolona.

a) Neka je $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ i A' matrica koja se dobija zamenom mesta $i-$toj i $j-$toj vrsti matrice A. Označimo sa I_{ij} matricu koju dobijamo iz jedinične matrice $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}$ zamenom mesta $i-$toj i $j-$toj vrsti. Tada je $A' = I_{ij}A$.

Za transformacije kolona najpre transformišemo jediničnu matricu $I_m \in \mathcal{M}_{m\times m}$ u matricu I_{ij} zamenom mesta $i-$toj i $j-$toj koloni. Tada je AI_{ij} tražena transformisana matrica A.

Analogno, tražena transformaciona matrica T za transformacije b) i c) dobija se iz jedinične matrice primenom odgovarajuće elementarne transformacije na nju.

Primer 16. Proizvodi

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\cdot A \qquad \text{i} \qquad A\cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

vrše skaliranje redom vrsta i kolona matrice A koeficijentima λ_k.

Primer 17. Eksplicitna formula podmatrice date matrice A takođe se može dobiti osnovnim operacijama nad matricama. Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i neka su dati skupovi indeksa vrsta $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le m$ i indeksa kolona $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_q \le n$. Formiramo matrice

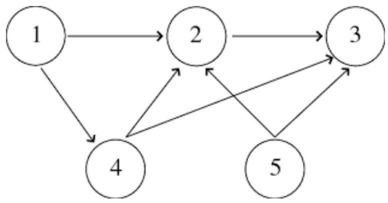
$$E = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \dots & e_{i_p}\end{bmatrix} \quad \text{i} \quad F = \begin{bmatrix} e_{j_1} & e_{j_2} & \dots & e_{j_q}\end{bmatrix},$$

čije su kolone navedeni vektori kanonske baze. Tada je E^TAF podmatrica matrice A koja se nalazi u preseku njenih vrsta $\{i_1, \dots, i_p\}$ i kolona $\{j_1, \dots, j_q\}$.Šta više, ako je $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, tada $A + EBF^T$ zamenjuje podmatricu E^TAF matricom $E^TAF + B$.

Primer 18. Graf je grafički model koji se sastoji od čvorova i veza između čvorova, $G = (C, V)$ gde je C skup čvorova, a V skup veza. U okviru Matematike 1 koristili smo ga za grafički prikaz relacija na konačnim skupovima. Ukoliko čvorove grafa označimo brojevima $1, 2, \dots, n$ skup veza u grafu možemo predstaviti matricom susedstva $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Komponenta ij matrice M registruje postojanje potega iz čvora i u čvor j. Postoje različite notacije susedstva čvorova u grafu. Jedna od najjednostavnijih je

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{postoji veza od } i \text{ ka } j,\\ 0, & \text{ne postoji veza od } i \text{ ka } j.\end{cases}$$

Primer grafa i odgovarajuće matrice susedstva:



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf može predstavljati postupak prelaska stanja nekog sistema, tj. dinamiku promene. Vektor stanja sistema formiramo po sličnom kriterijumu, 0 ako se sistem ne nalazi u datom stanju. Za primer prethodnog grafa izaberimo vektor stanja $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tj. da se nalazimo u trećem čvoru grafa.

$$v_1 M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovakav rezultat sugeriše da iz čvora tri sistem ne menja stanje. Takav čvor ponekad zovemo završni čvor. Protumačiti sledeće proizvode u kontekstu karakteristika sistema opisanog grafom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.1 Pitanja i zadaci

1. Neka je matrica $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}$. Na B primenjujemo sledeće transformacije: 1) udvostručimo drugu kolonu; 2) prepolovimo treću vrstu; 3) dodamo drugoj vrsti prvu; 4) zamenimo mesta prvoj i četvrtoj koloni; 5) oduzmemo prvu vrstu od svih ostalih; 6) zamenimo četvrtu kolonu trećom; 7) obrišemo prvu kolonu tako da se broj kolona smanji za 1.

   a) Zapisati rezultujuću matricu kao proizvod osam matrica, računajući kao jednu od njih matricu B.

   b) Zapisati rezultujuću matricu kao proizvod tri matrice ABC.

2. Naći matricu S koja će za vrednost izraza AS dati zbir elemenata duž svake vrste matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

3. Naći matricu S koja će za vrednost izraza vS vratiti vektor

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_1 + v_2 & v_1 + v_2 + v_3 & \dots & v_1 + \dots + v_n \end{bmatrix},$$

   za dati vektor $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$.

4. Za dati skup vektora $A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ & & & \end{array}\right]$ opisati centar ovog skupa

$$c = c(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n},$$

matričnim operacijama.

5. Ako je I_{ij} matrica koja se dobija iz jedinične matrice I međusobnom zamenom njene $i-$te i $j-$te vrste, dokazati da je

$$I_{ij}^2 = I, \qquad I_{ij}^T = I_{ij}, \qquad I_{ik}I_{kj}I_{ji} = I_{kj}.$$

6. Neka je $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matrica čiji je $(i,j)-$element jednak 1, a svi ostali su 0. Za $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ odredi $AE_{ij},\ E_{ij}A,\ E_{ij}AE_{kl}$.

7. Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ takva da je $A^TA = O$. Da li je tada i $A = O$?

8. Neka je

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obrnuta ili kontra identična-matrica ili matrica refleksije. Dokazati da je $S^T = S$ i $S^2 = I$. Odrediti SAS za $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

9. Neka je T kvadratna matrica i x vektor takav da postoji $m \in \mathbb{N}$ za koji važi da je $T^m x = 0$ i $T^{m-1}x \neq 0$. Dokazati da su $x, Tx, T^2x, \dots, T^{m-1}x$ linearno nezavisni vektori.

10. Odrediti rang matrice

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2\lambda+1 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & 6-2\lambda & \mu \end{bmatrix}; \qquad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1-\sqrt{6} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

11. Za koju vrednost parametra a je rang matrice A jednak 3?

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & a \end{bmatrix}$$

12. Odredi rang matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$, gde su $a_{ij} = i + j$.

13. Neka su $a_k, b_k, c_k, d_k,\ (k = 1, 2, 3)$ kompleksni brojevi i

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

a) Dokazati da se A može predstaviti u obliku

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix},$$

kao i u obliku

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Na osnovu reprezentacije iz (a) dokazati da je $\det A = O$.

c) Dokazati analogna tvrđenja za matricu $A = PQ$, gde je $P \in \mathcal{M}_{m\times n}, Q \in \mathcal{M}_{n\times m}$ za $m > n$.

d) Dokazati tvrđenje. Da bi matrica $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ imala rang jedan, neophodno je i dovoljno da se A može predstaviti u obliku $A = uv^T$, gde su $u \in \mathbb{R}^m$ i $v \in \mathbb{R}^n$ nenula vektori.

14. Odrediti rang sledećih matrica

$$\text{a)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ & & & \dots & \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b)} \qquad A = \begin{bmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \dots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_n+1 \\ & \dots & & \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \dots & a_n^2+1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Analitička geometrija

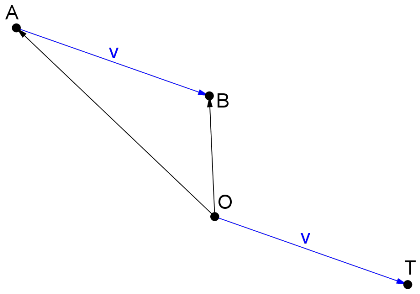
Analitička geometrija pored vektora i baze koristi pojam tačke i koordinatnog sistema. Dodavanjem tačaka vektorskom prostoru širimo polazni skup objekata i operacija nad njima. Vektorski prostor proširen skupom tačaka i operacijom tačka+vektor (translacija) predstavlja afini prostor. Dimenzija vektorskog prostora definiše dimenziju odgovarajućeg afinog prostora. Analitička geometrija je zapravo geometrija afinih prostora.

Osobine operacije translacije (tačka+vektor) su intuitivne ukoliko posmatramo tačke preko njihovih vektora položaja. Za rad u afinim prostorima neophodan je izbor koordinatnog početka O. Koordinatni (referentni) sistem sastoji se od početne tačke i baznih vektora vektorskog prostora. Svaki vektor $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ zadat listom od n brojeva možemo tumačiti kao tačku odgovarajućeg $n-$dimenzionalnog afinog prostora. U tom slučaju tačka $T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ je zadata vektorom položaja, tj. radijus vektorom ili vezanim vektorom koji počinje u koordinatnom početku O, a završava se u tački T. Svakoj tački afinog prostora odgovara tačno jedan određen radijus vektor u odnosu na izabrani koordinatni sistem.

Afini prostor prirodno širi skup operacija vektorskog prostora na skup tačaka.

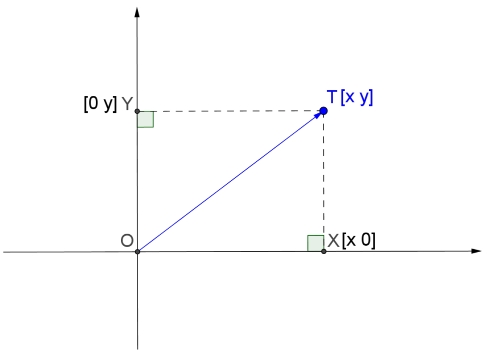
$$T + \overrightarrow{0} = T, \quad (T+u)+v = T+(u+v),$$
$$\lambda T = \lambda \overrightarrow{OT}.$$

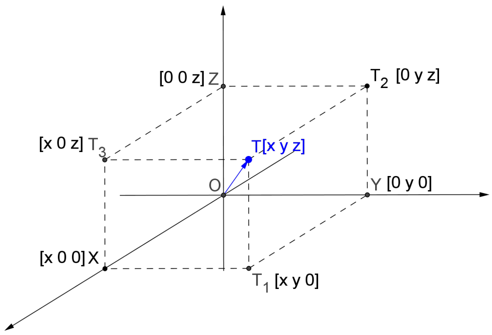
Za proizvoljne dve tačke A i B postoji jedinstven vektor v takav da je $B = A + v$. Vektor v obično zovemo slobodan vektor i označavamo ga još i sa $\overrightarrow{AB}$. Koordinate slobodnog vektora $v = \overrightarrow{AB}$ mogu se odrediti kao razlika koordinata vektora položaja krajnje i početne tačke.



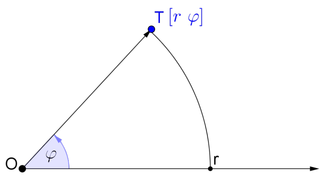
$$
\begin{aligned}
v &= \overrightarrow{OT} = T \\
&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
&= B - A \\
B &= A + v
\end{aligned}
$$

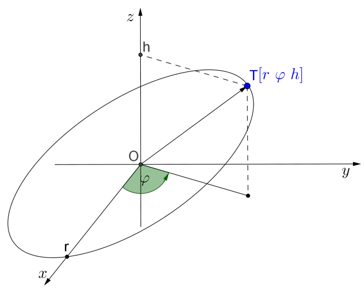
U 2D i 3D geometriji uobičajeno je da se uvodi Dekartov pravougli koordinatni sistem i tačke i vektori obeležavaju listom realnih brojeva dužine 2 ili 3. Koordinate tačaka predstavljaju rastojanje tačke od koordinatnih osa ili koordinatnih ravni.

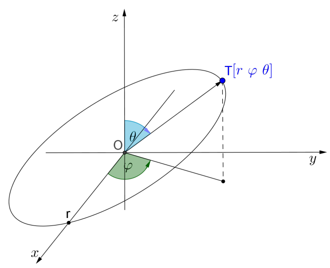




Za krive i površi vrlo često su pogodnije polarne koordinate u 2D, a cilindrične i sferne koordinate u 3D.







Različit izbor koordinata i sistema koristan je za različite primene. Više o ovim sistemima može se naći na Wikipedia.

Prelazak sa vektorskih na afine prostore postiže se širenjem skupa objekata kojima radimo. Ovim postupkom širi se i skup operacija, mogućih interpretacija i akcija nad tim objektima. Razmatranje operacija u okviru afinih potprostora bliže je geometrijskoj interpretaciji:

- dodavanje vektora predstavlja translaciju ili akumulaciju,
- množenje vektora skalarom je skaliranje - kontrahovanje ili izduživanje duž zadatog pravca.

Ključna razlika između vektorskih i afinih prostora može se opisati sledećim primerima: svaka prava ili ravan predstavlja afini potprostor, dok su vektorski potprostori jedino prave i ravni koje prolaze kroz koordinatni početak (sadrže nula vektor). Afini potprostor je bilo koji vektorski prostor transliran u neku tačku. Rešenje homogenog sistema linearnih jednačina je vektorski potprostor. Rešenje nehomogenog sistema je afin potprostor.

Vektorski prostori tiču se rada sa slobodnim vektorima, linearnim kombinacijama i linearnim preslikavanjima. Baza je jedna od glavnih karakteristika vektorskog prostora. Afini prostori uvode koordinatni sistem koji osim vektora baze sadrži i koordinatni početak, posebno izdvojenu tačku. Afini prostor barata kako slobodnim tako i vezanim vektorima i tačkama. Translacija je svojstvo afinog, ali ne i vektorskog prostora. U vektorskom prostoru promena baze tiče se jedino skupa vektora. U afinom prostoru promena koordinatnog sistema podrazumeva i mogućnost pomeranja koordinatnog početka.

Operacije nad vektorima (linearne kombinacije) su sredstvo kretanja kroz prostor. Njima možemo opisivati neke karakteristične skupove prostora. Najznačajniji podskupovi su tzv. geometrijske primitive. U nastavku odeljka podsetićemo se geometrijskih primitiva koje se mogu opisati linearnim kombinacijama.

1.3.1 Kolinearnost i komplanarnost

Pojam kolinearnosti i komplanarnosti, pre svega, definiše se za tačke.

Definicija 3. Skup tačaka je kolinearan ukoliko sve tačke tog skupa leže na istoj pravoj. Skup tačaka je komplanaran ukoliko sve tačke leže u istoj ravni.

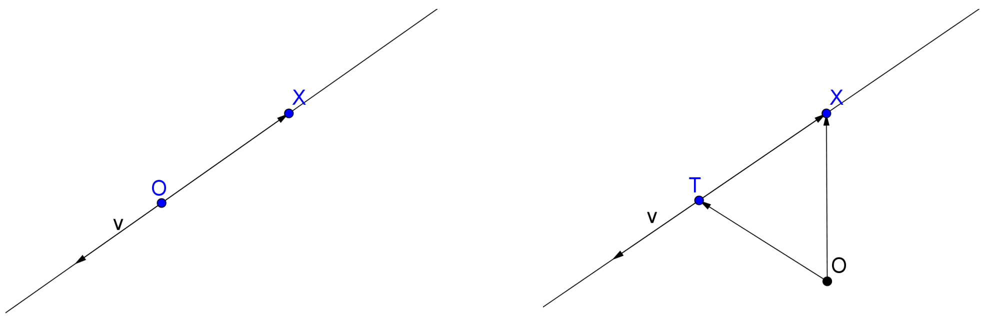
Na osnovu aksioma (Euklidske geometrije) svake dve tačke su kolinearne, svake tri tačke jesu komplanarne. Kolinearnost i komplanarnost se kao svojstva veoma jednostavno prenose na vektore afinog prostora. Kolinearne tačke u parovima određuju kolinearne vektore, komplanarne tačke definišu komplanarne vektore. Jedan vektor je uvek kolinearan sa samim sobom, dva vektora su uvek komplanarna. Posredstvom linearnih kombinacija pojmovi kolinearnosti i komplanarnosti prenose se sa tačaka i vektora položaja na slobodne vektore. Među slobodnim vektorima kolinearnost postaje paralelnost.

Definicija 4. Dva vektora su kolinearna ukoliko su linearno zavisna. Tri vektora su komplanarna ukoliko su linearno zavisna.

Kolinearnost i komplanarnost jednostavno se proširuju na brojnije skupove vektora, videti zadatke 1. i 2. Pojmovi kolinearnosti i komplanarnosti služe za opis pravih i ravni kako u analitičkoj geometriji (2D i 3D) tako i u svakom drugom afinom prostoru.

Primer 19. Prava kroz koordinatni početak čiji je pravac određen vektorom v sadrži sve tačke X čije se koordinate mogu opisati relacijom $X = \lambda v$, za neki skalar λ.

Prava koja prolazi kroz tačku T i pravac joj je određen vektorom v sadrži sve tačke X takve da je vektor $\overrightarrow{TX}$ kolinearan sa vektorom v. Koordinate tačke X mogu se opisati relacijom $X = T + \lambda v$, za neki skalar λ. Došlo je do translacije prave iz prvog dela primera u tačku T. Sve tačke prave dobijaju se linearnom kobinacijom tačke T (vektora položaja $\overrightarrow{OT}$) i vektora v pri čemu je skalar uz vektor T fiksiran i iznosi 1. Zbog toga u matričnoj notaciji jednačina prave glasi $X = \begin{bmatrix} v & | & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$, gde su v i T vektori-kolone, kao i X, dok su λ i 1 skalari. U levoj notaciji, gde su X, v i T vektori-vrste, ova jednakost glasi $X = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hline T \end{bmatrix}$.

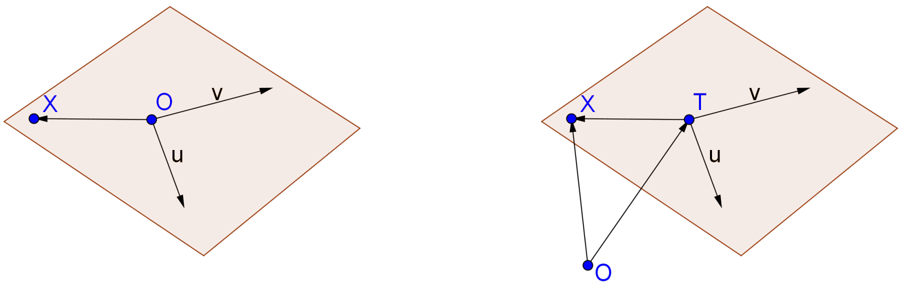


Slika 1.3: Prava: Vektorski i afini prostor

Primer 20. Ravan kroz koordinatni početak koja sadrži dva nekolinearna vektora u i v, sadrži sve tačke X čije se koordinate mogu opisati relacijom u levoj notaciji

$$X = \alpha u + \beta v = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \left[\frac{u}{v} \right],$$

za neke vrednosti skalara α i β.



Slika 1.4: Ravan: Vektorski i afini prostor

Ravan koja prolazi kroz tačku T i sadrži dva nekolinearna vektora u i v, sadrži sve tačke X takve da je vektor $\overrightarrow{TX}$ komplanaran sa vektorima u i v. Koordinate tačke X mogu se opisati relacijom

$$X = T + \alpha u + \beta v = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \hline v \\ \hline T \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

za neke vrednosti skalara α i β. Ovu relaciju možemo tumačiti na dva načina: aktivni i pasivni pristup. Aktivni pristup je da smo koordinatni sistem (O, u, v) translirali u tačku T. Sve koordinate za opisivanje afinog potprostora ravni su oblika $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}$. Pasivnim pristupom afinu ravan sagledavamo kao poseban podskup prostora vrsta matrice $\begin{bmatrix} u \\ \hline v \\ \hline T \end{bmatrix}$.

Primer 21. U $n-$dimenzionalnom prostoru hiperravan kroz koordinatni početak predstavlja skup svih linearnih kobinacija od $n-1$ linearno nezavisnih vektora. Translacijom hiperravan možemo postaviti u bilo koju tačku tog prostora.

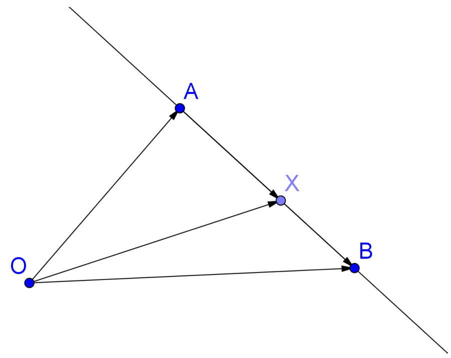
Na osnovu analiziranih primera primećujemo da opisivanje afinih prostora zahteva jednu komponentu više u odnosu na odgovarajuće pojmove vektorskih prostora. Operacija translacije zahteva koordinatu više u matričnim izračunavanjima. Koordinate oblika $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$ nazivaju se homogene koordinate (videti još grafika ili alas) imaju veliki značaj u kompjuterskoj grafici i kompjuterskom vidu. U matematici izučavaju se u okviru oblasti projektivne i diferencijalne geometrije.

1.3.2 Konveksne kombinacije

Množenje vektora v skalarom $\lambda \in [0, 1]$ daje vektor $u = \lambda v$ istog pravca i smera ali ne veće dužine u odnosu na vektor v. Ova osobina koristi se za definisanje unutrašnjih i spoljašnjih tačaka skupova. U tome važnu ulogu imaju specijalne linearne kombinacije.

Primer 22. Jednačina prave kroz dve tačke A i B glasi $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}$. Ukoliko želimo da opišemo samo tačke sa duži AB potrebno je ograničiti opseg parametra λ. Naime, sve tačke X duži AB obrazuju vektore $\overrightarrow{AX}$ istog smera kao $\overrightarrow{AB}$ ali ne veće dužine. Zbog toga su sve tačke duži AB date sa

$$X = A + \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \lambda \in [0, 1].$$



Odnos dužina duži je $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$.
Jednačinu duži možemo još zapisati kao

$$X = A + \lambda(B - A) = (1 - \lambda)A + \lambda B, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Primetimo da je $0 \geq \lambda, 1 - \lambda \leq 1$ i $\lambda + 1 - \lambda = 1$.
U matričnoj notaciji tačke duži opisuju se jednkošću

$$X = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Prethodni primer daje povod za uvođenje narednih definicija.

Definicija 5. Podskup S afinog prostora je konveksan ukoliko za svaka dve tačke skupa S duž koja ih spaja cela pripada skupu S, tj.

$$\forall X, Y \in S \text{ i } \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)X + \lambda Y \in S.$$

Definicija 6. Konveksna kombinacija je linearna kombinacija tačaka (ili vektora)

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_k T_k$$

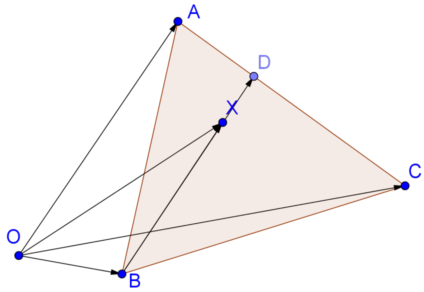
u kojoj su svi skalari negativni ($\lambda_i \geq 0$) i važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Neka je S konačan skup taačka, $S = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$. Konveksno zatvorenje skupa S je skup svih konveksnih kombinacija tačaka ovog skupa,

$$\operatorname{conv}(S) = \{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_k T_k \mid \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1\}.$$

Neke od osobina ovog skupa prepoznaćemo kroz primere koji slede.

Primer 23. Najznačajnija figura u geometriji ravni je svakako trougao. Ukoliko je trougao dat svojim temenima A, B i C, sve tačke ove slike možemo opisati odgovarajućim jednačinama.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BX} &= \mu\overrightarrow{BD},\ \mu \in [0,1]\\
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\\
\overrightarrow{AD} &= \lambda\overrightarrow{AC},\ \lambda \in [0,1]\\
\implies D &= B + \overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AC}\\
&= B + A - B + \lambda(C - A)\\
&= (1-\lambda)A + \lambda C,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies X &= B + \mu(D - B) = (1-\mu)B + \mu D = (1-\mu)B + \mu((1-\lambda)A + \lambda C)\\
&= (1-\lambda)\mu A + (1-\mu)B + \lambda\mu C.
\end{aligned}$$

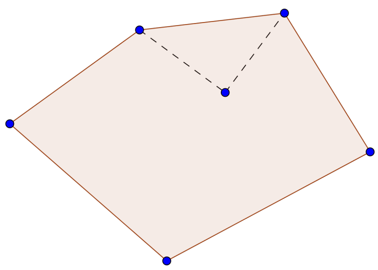
S obzirom da je $(1-\lambda)\mu + 1 - \mu + \lambda\mu = 1$ i $(1-\lambda)\mu, 1-\mu, \lambda\mu \geq 0$, tačke trougla opisane su konveksnom kombinacijom temena trougla. Dakle, tačke trougla mogu se opisati konveksnom linearnom kombinacijom

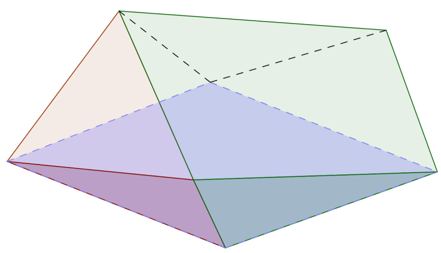
$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Sve tačke van trougla ABC opisane su istom linearnom kombinacijom za preostale vrednosti parametara α, β i γ.

Skup tačaka trougla odgovara svim konveksnim linearnim kobinacijama temena. Trougao je konveksno zatvorenje skupa od tri tačke - temena trougla. Trougao je najmanji konveksan skup koji sadrži te tri tačke.

Prethodni primer sugeriše sledeće zaključke: konveksno zatvorenje tačaka u ravni je maksimalan poligon ($n-$tougao) čija su temena neke od tačaka skupa. U 3D prostoru odgovarajući skup je poliedar. U više dimenzija, odgovarajući termin je politop.





1.3.3 Pitanja i zadaci

1. Vektori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ su kolinearni ukoliko je $\dim \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = 1$. Dokazati.
2. Vektori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ su komplanarni ukoliko je $\dim \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = 2$. Dokazati.
3. Odrediti koordinate tačke T duži AB koja deli duž AB u odnosu $\lambda : \mu$.
4. Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke. Dokazati ekvivalenciju: tačke A, B, C, D su komplanarne akko $D = (1-\lambda-\mu)A + \lambda B + \mu C$, za neke skalare λ i μ.
5. Opisati sve tačke paralelograma određenog vektorima u i v.

6. Opisati sve tačke težišne linije AA_1 trougla ABC zadatog svojim temenima.

7. Dokazati da se težišne linije trougla seku u tački $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$, gde su A, B i C vektori položaja temena tog trougla.

8. Neka je ABC trougao i A_1, B_1, C_1 središta ivica BC, CA, AB redom. Dokazati da je $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.

9. Neka je $ABCD$ paralelogram i M proizvoljna tačka prostora. Ako je O presečna tačka dijagonala paralelograma dokazati da je $4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

10. Opisati sve tačke tetraedra zadatog temenima A, B, C, D.

11. Težište figure sa temenima $A_1, A_2, \ldots, A_k$ definiše se kao tačka T za koju važi $\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \cdots + \overrightarrow{TA_k} = 0$. Dokazati da je $T = \frac{1}{k}(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)$. Matričnim operacijama opisati težišta objekata čija su temena data
a) kolonama matrice, b) vrstama matrice.

12. Neka su $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tačke prostora i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ realni brojevi za koje važi $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = \lambda \neq 0$. Dokazati da postoji jedinstvena tačka P takva da je
$$\lambda_1\overrightarrow{PP_1} + \lambda_2\overrightarrow{PP_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{PP_k} = \overrightarrow{0}.$$
Dokazati da važi
$$P = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k).$$
Tačka P zove se baricentrično središte tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_k$ opterećenih sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. U slučaju kada skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ predstavljaju mase materijalnih tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_k$, tačku P zovemo centar mase tog sistema.

1.4 Skalarni proizvod i norma

Operacija koja uvodi uglove i dužine u vektorske prostore je skalarni proizvod. Skalarni proizvod koji odgovara našem poimanju 2D i 3D prostora naziva se standardni skalarni proizvod. Ukoliko su $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $u = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vektori kompleksnog $n-$dimenzionalnog vektorskog prostora, skalarni proizvod definiše se sa
$$v \cdot u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \cdots + \overline{x_n}y_n. \tag{1.7}$$

U matričnoj notaciji
$$v \cdot u = \overline{v}^T u = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \ldots & \overline{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \cdots + \overline{x_n}y_n.$$

Primer 24. Izračunati skalarne proizvode $v \cdot u$ i $u \cdot v$, vektora

$$v = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$v \cdot u = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{i}\,(1+i) + \overline{1-i}\,(-1) + \overline{2}\,0 = (1+i)(-1-i) = -(1+i)^2 = -2i.$$

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix} = \overline{1+i}\,i + \overline{-1}\,(1-i) + \overline{0}\,2 = (1-i)(-1+i) = -(1-i)^2 = 2i.$$

Zbog kraćeg matričnog označavanja uvedena je oznaka za operaciju konjugovanog transponovanja i pojam je definisan na skupu matrica.

Definicija 7. Matrica $\overline{A}^T$ naziva se konjugovano-transponovana matrica i označava A^H ili A^*.

Primer 25. Odredićemo matrice $A^T, (A^T)^T, A^H, (A^H)^H, (A^T)^H, (A^H)^T$, za datu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \\ 0 & 2 & 3+i \\ 1+i & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 1+i \\ 2-i & 2 & 1 \\ 1-i & 3+i & -2 \end{bmatrix}, \qquad A^H = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1-i \\ 2+i & 2 & 1 \\ 1+i & 3-i & -2 \end{bmatrix},$$

$$(A^T)^T = A, \qquad (A^H)^H = A,$$

$$(A^T)^H = \overline{((A^T)^T)} = \overline{A}, \qquad (A^H)^T = (\overline{(A^T)})^T = \overline{((A^T)^T)} = \overline{A}.$$

Operacija konjugovanog transponovanja 'slaže' se sa operacijama množenja nad matricama kao i ostale operacije stepene notacije.

$$\begin{array}{ccc} (A+B)^T = A^T + B^T & (A+B)^H = A^H + B^H & (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T & (\lambda A)^H = \overline{\lambda} A^H & (\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1} \\ (AB)^T = B^T A^T & (AB)^H = B^H A^H & (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \end{array}$$

Zahvaljujući tome, matrična notacija skalarnog proizvoda je u potpunosti saglasna sa njegovim osobinama.

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v) \cdot w &= (\lambda u + \mu v)^H w & w \cdot (\lambda u + \mu v) &= w^H(\lambda u + \mu v) \\ &= (\overline{\lambda} u^H + \overline{\mu} v^H) w & &= \lambda (w^H u) + \mu (w^H v) \\ &= \overline{\lambda}(u^H w) + \overline{\mu}(v^H w) & &= \lambda w \cdot u + \mu w \cdot v \\ &= \overline{\lambda}(u \cdot w) + \overline{\mu}(v \cdot w) \end{aligned}$$

Napomena 2. Skalarni proizvod kompleksnih vektora nije komutativna operacija.

$$v \cdot u = \overline{u \cdot v}.$$

U slučaju kada su u i v dva realna $n-$dimenzionalna vektora, standardni skalarni proizvod svodi se na matrični zapis

$$v \cdot u = v^T u = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{1.8}$$

Realni skalarni proizvod je bilinearna (dvostruko linearna) funkcija, tj. linearan je i po levom i po desnom vektoru.

$$(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda(u \cdot w) + \mu(v \cdot w), \qquad w \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda(w \cdot u) + \mu(w \cdot v).$$

Napomena 3. Skalarni proizvod realnih vektora jeste komutativna operacija.

Definicija 8. Za dati skup vektora $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ Gramova matrica je matrica svih skalarnih proizvoda vektora ovog skupa, tj.

$$G(v_1, v_2, \dots, v_m) = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_m \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_m \\ & & \dots & \\ v_m \cdot v_1 & v_m \cdot v_2 & \dots & v_m \cdot v_m \end{bmatrix}.$$

Ukoliko je A matrica čije su kolone vektori $v_1, v_2, \dots, v_m$, tada je

$$G(v_1, v_2, \dots, v_m) = A^H A.$$

Gramove matrice, tačnije izrazi oblika $A^T A$ za realne ili $A^H A$ za kompleksne matrice, veoma se često javljaju kao elementi u izračunavanjima. Takođe nose dodatne informacije o skupu vektora $v_1, v_2, \dots, v_m$. Osobine Gramove matrice obrađivaćemo kroz poglavlja koja slede.

Osim svog geometrijskog značenja, norma vektora je jedna vrednost koja nosi puno informacije o skupu vrednosti unutar vektora. Norma (dužina) vektora može se izračunati (definisati,9) preko skalarnog proizvoda. Norma indukovana skalarnim proizvodom glasi

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Za standardni skalarni proizvod (1.7), odgovarajuću normu zovemo Euklidova norma. Eksplicitni izraz za Euklidovu normu preko koordinata vektora glasi

$$\|v\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Kada su koordinate realni brojevi nema potrebe pisati oznaku za moduo, tj.

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Vektore norme jednake 1 nazivamo normirani ili jedinični vektori. Za njih važi $v \cdot v = 1$. U nekim situacijama pogodno je imati vektor istog pravca i smera kao i polazni vektor v samo jedinične norme. To se postiže postupkom normiranja vektora

$$v^* = \frac{1}{\|v\|} v.$$

Primer 26. Prirodna baza (1.4) prostora $\mathbb{R}^n$ sastoji se od jediničnih vektora.

Dve najvažnije nejednakosti skalarnog proizvoda jesu

- Švarcova[2] nejednakost[3]: $|v \cdot u| \leq \|v\| \, \|u\|$,
- nejednakost trougla: $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

Primer 27. Za vektore $v = (a, b)$ i $u = (b, a)$ sa realnim komponentama, Švarcova nejednakost glasi

$$|v \cdot u| = |2ab| \leq \|v\| \, \|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2.$$

Zamenom $x = a^2, y = b^2$ Švarcova nejednakost svodi se na poznati odnos aritmetičke i geometrijske sredine

$$2\sqrt{xy} \leq x + y \iff \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Uopštenje na n sabiraka se analogno izvodi.

Primer 28. Centar $c = c(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ skupa vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ realnog vektorskog prostora V ima još jedno zanimljivo svojstvo. Kažemo da centar (1.1) skupa vektora ima svojstvo minimalnosti zbira kvadrata rastojanja, tj. zadovoljava jednakost

$$\sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2 = \min_{v \in V} \sum_{i=1}^{k} \|v_i - v\|^2. \tag{1.9}$$

Jednakost (1.9) ekvivalentna je nejednakosti koju ćemo dokazati

$$\forall v \in V, \qquad \sum_{i=1}^{k} \|v_i - v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \|v_i - v\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} (v_i - v) \cdot (v_i - v) = \sum_{i=1}^{k} (v_i - c + c - v) \cdot (v_i - c + c - v) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\|v_i - c\|^2 + (v_i - c) \cdot (c - v) + (c - v) \cdot (v_i - c) + \|c - v\|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2 + k\|c - v\|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} (c - v) \cdot (v_i - c) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2 + k\|c - v\|^2 + 2(c - v) \cdot \sum_{i=1}^{k} (v_i - c) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2 + k\|c - v\|^2 + 2(c - v) \cdot \vec{0} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2 + k\|c - v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \|v_i - c\|^2.
\end{aligned}$$

U poslednjem redu, jednakost očigledno važi akko $\|c - v\|^2 = 0$, tj. kada je $v = c$. Time je (1.9) dokazana.

[2] Karl Hermann Amandus Schwarz, (1843–1921), nemački matematičar

[3] u literaturi poznata i kao Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost

Ugao α između dva nenula vektora v i u definišemo relacijom

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot u}{\|v\| \, \|u\|} \,. \tag{1.10}$$

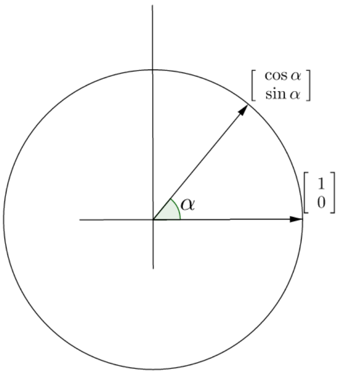
Koja nejednakost omogućava ovu definiciju?

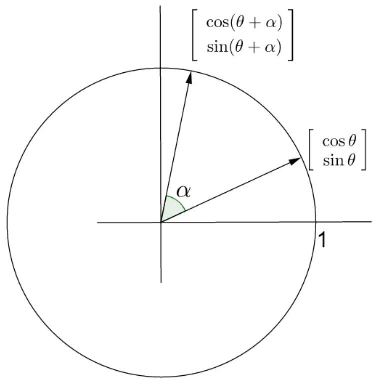
Napomena 4. Jednakošću (1.10) računamo uglove i u kompleksnim vektorskim prostorima, videti npr. Wiki. Međutim, u okviru kursa koristićemo (1.10) isključivo za realne vektore.

Kosinus ugla između vektora $v, u \in \mathbb{R}^n$ prilično dobro može da opiše sličnost između vrednosti odgovarajućih kordinata ovih vektora. Primetimo da je $\cos\alpha > 0$ kada je $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Geometrijski to znači usmerenost vektora u isti poluprostor. Vrednost $\cos\alpha = 1$ označava kolinearnost dva vektora, tj. najmanje uglovno odstupanje. Numerički posmatrano, izraz $v \cdot u$ sadrži više pozitivnih sabiraka, tj. koordinata istog znaka. Otud se u velikom broju primera koristi kosinusna mera sličnosti:

$$sim(v, u) = \frac{v \cdot u}{\|v\| \, \|u\|}.$$

Primer 29. Za jedinične vektore v i u važi da je $v \cdot u = \cos\alpha$.

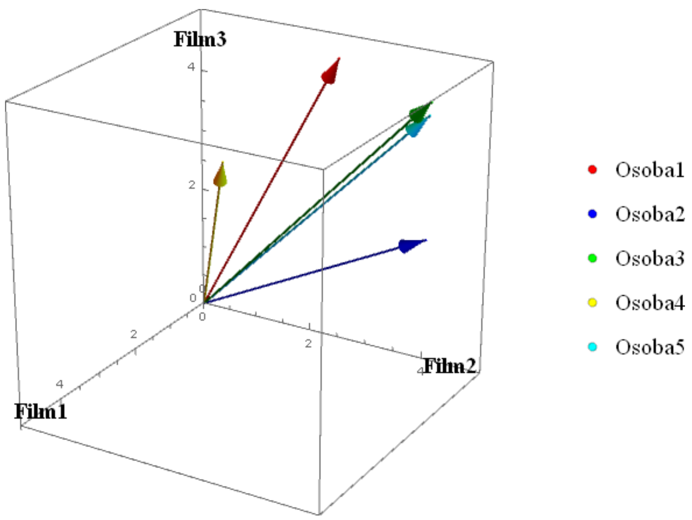




Primer 30. Uporedićemo ukuse petoro učesnika ankete na osnovu njihovih ocena 3 filma: Film1, Film2 i Film3. Anketom se traže celobrojne ocene za tri filma od 0 do 5, 0-loše, 5-odlično. Rezultati ankete dati su sledećom tabelom.

	Osoba1	Osoba2	Osoba3	Osoba4	Osoba5
Film1	1	0	2	1	0
Film2	3	4	5	1	4
Film3	5	2	5	3	4

Ukus svake anketirane osobe možemo predstaviti vektorom ocena za tri filma - kolone date tabele. Na osnovu tih vektora možemo dati grafički prikaz vektora ukusa, da izračunamo međusobno rastojanje ukusa Euklidovim rastojanjem ili uglovnim rastojanjem.



$\|\text{Osoba}_i - \text{Osoba}_j\|$	Osoba1	Osoba2	Osoba3	Osoba4	Osoba5
Osoba1	0	$\sqrt{11}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{3}$
Osoba2	$\sqrt{11}$	0	$\sqrt{14}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{4}$
Osoba3	$\sqrt{5}$	$\sqrt{14}$	0	$\sqrt{21}$	$\sqrt{6}$
Osoba4	$\sqrt{8}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{21}$	0	$\sqrt{11}$
Osoba5	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{11}$	0

$\cos\angle(\text{Osoba}_i, \text{Osoba}_j)$	Osoba1	Osoba2	Osoba3	Osoba4	Osoba5
Osoba1	1	0.83	0.97	0.97	0.96
Osoba2	0.83	1	0.91	0.67	0.95
Osoba3	0.97	0.91	1	0.90	0.96
Osoba4	0.97	0.67	0.90	1	0.85
Osoba5	0.96	0.95	0.96	0.85	1

$\angle(\text{Osoba}_i, \text{Osoba}_j)$	Osoba1	Osoba2	Osoba3	Osoba4	Osoba5
Osoba1	0^o	33.74^o	14.96^o	14.46^o	17.02^o
Osoba2	33.74^o	0^o	24.09^o	47.61^o	18.43^o
Osoba3	14.96^o	24.09^o	0^o	25.49^o	15.79^o
Osoba4	14.46^o	47.61^o	25.49^o	0^o	31.48^o
Osoba5	17.02^o	18.43^o	15.79^o	31.48^o	0^o

Anketirane osobe su tokom anketiranja postale prijatelji. Kojim prijateljima bi ste preporučili da zajedno gledaju filmove?

Na sličan način, možemo analizirati karakteristike filmova upotrebljenih u anketi. Svaki film opisaćemo vektorom ocena anketiranih osoba - vrste date tabele. Grafički pristup koordinatnim sistemom nije pogodan u ovoj situaciji jer je prikaz 5D. Ipak, operacije Euklidske geometrije pružaju uvid. Srednja ocena je težište odgovarajućih tačaka sa koordinatnih osa Osoba_k. Prosečnu ocenu možemo tumačiti kao ocenu kvaliteta filma. Euklidsko i uglovno rastojanje može ukazati na sličnost u žanrovima ili nekim drugim karakteristikama.

$\|\text{Film}_i - \text{Film}_j\|$	Film1	Film2	Film3
Film1	0	$\sqrt{45}$	$\sqrt{49}$
Film2	$\sqrt{45}$	0	$\sqrt{12}$
Film3	$\sqrt{49}$	$\sqrt{12}$	0

$\|\text{Film}_i - \text{Film}_j\|$	Film1	Film2	Film3
Film1	1	0.70	0.83
Film2	0.70	1	0.92
Film3	0.83	0.92	1

$\angle(\text{Film}_i, \text{Film}_j)$	Film1	Film2	Film3
Film1	0^o	45.71^o	34.23^o
Film2	45.71^o	0^o	22.94^o
Film3	34.23^o	22.94^o	0^o

	Film1	Film2	Film3
Prosečna ocena	0.8	3.4	3.8

Prikazane tabele su veoma pojednostavljena analiza podataka. Karakteristike filmova ne moraju biti jedino ocene gledalaca. U opis mogu ući budžet, glavni glumci i još mnogo relevantnih stavki. Ocene gledalaca imaju težinu jedino u velikom broju jer su podložne subjektivnosti. Više o realnom problemu iz ove oblasti možete naći na Netflix.

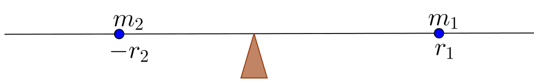
Izraz za skalarni proizvod može naći primenu u realnom životu i van geometrijske interpretacije. Potrebno je uočavati izraze oblika (1.7), odnosno (1.8).

Primer 31. Neka su $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \end{bmatrix}$ cene k artikala, i $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{bmatrix}$ količina prodatih komada po artiklu, tada je 'zarada' jednaka skalarnom proizvodu ova dva vektora,

$$c_1p_1 + c_2p_2 + \dots + c_kp_k.$$

Primer 32. Na $x-$osi na poziciji 0 nalazi se oslonac. Sa različitih strana oslonca na pozicijama r_1 i $-r_2$ postave se redom mase m_1 i m_2. Osa će biti u ravnoteži ukoliko su momenti sile u ravnoteži, tj. ako je

$$m_1r_1 - m_2r_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 & -r_2 \end{bmatrix} = 0.$$



Primer 33. Jednostavniji oblik definicije rada u fizici daje se sa pretpostavkom konstantne sile i pravolinijske putanje. Pod takvim uslovima mehanički rad se definiše kao skalarni proizvod vektora sile i vektora pomeraja.

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}$$

Osim Euklidske, norme vektora mogu poprimiti i drugačiji oblik, dok god su ispunjene osobine norme:

N1: $\|v\| \geq 0,\ \|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0},$

N2: $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|,$

N3: $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|.$

Najznačajnije norme vektora su:
za $v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$,

L_1: $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, poznata još i kao Manhetn norma ili taksi norma,

L_2: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, Euklidova norma,

L_p: $\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$,

L_∞: $\|v\|_\infty = \max_k\{|x_k|\}$.

Primer 34. Neka su dati vektori

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 4i \end{bmatrix}$$

Izračunaćemo L_1, L_2 i L_∞ normu vektora u i w.

$\|u\|_1 = 2+1+4+2 = 9, \quad \|u\|_2 = \sqrt{4+1+16+4} = 5, \quad \|u\|_\infty = 4,$

$\implies \|u\|_\infty < \|u\|_2 < \|u\|_1.$

$\|w\|_1 = |1+i| + |1-i| + 1 + |4i| = 5 + 2\sqrt{2}, \quad \|w\|_2 = \sqrt{2+2+1+16} = \sqrt{21},$

$\|w\|_\infty = 4 \implies \|w\|_\infty < \|w\|_2 < \|w\|_1.$

Odredićemo rastojanje vektora u i v u odnosu na svaku od ovih normi.

$$u - v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\|u-v\|_1 = 1+2+5+3 = 11, \quad \|u-v\|_2 = \sqrt{1+4+25+9} = \sqrt{39}, \quad \|u-v\|_\infty = 5.$

Primer 35. Da bismo bolje razumeli razlike u geometiriji koju proizvode, prikazaćemo u 2D i 3D geometriji jedinične sfere u odnosu na norme L_1, L_2 i L_∞, tri norme najčešće u praktičnoj upotrebi. Prikazane su i $L_{3/2}$, L_4 norme kao prelazni oblici između najistaknutijih normi u upotrebi. Za 3D primere koristićemo oznaku za vektor $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$.

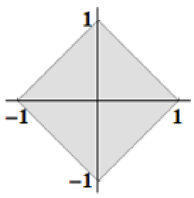
L_1 jedinična sfera: $S_1 = \{v \mid \|v\|_1 = 1\} = \{v \mid |x| + |y| + |z| = 1\}$

$L_{3/2}$ jedinična sfera: $S_1 = \{v \mid \|v\|_1 = 1\} = \{v \mid \left(|x|^{3/2} + |y|^{3/2} + |z|^{3/2}\right)^{2/3} = 1\}$

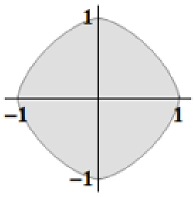
L_2 jedinična sfera: $S_1 = \{v \mid \|v\|_2 = 1\} = \{v \mid (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 1\}$

L_4 jedinična sfera: $S_1 = \{v \mid \|v\|_1 = 1\} = \{v \mid (|x|^4 + |y|^4 + |z|^4)^{1/4} = 1\}$

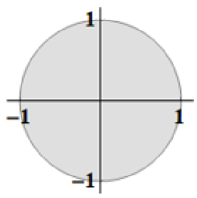
L_∞ jedinična sfera: $S_1 = \{v \mid \|v\|_\infty = 1\} = \{v \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$



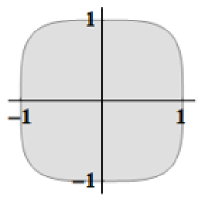
L_1 norma



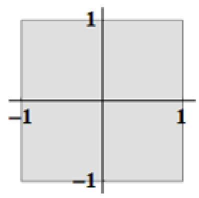
$L_{3/2}$ norma



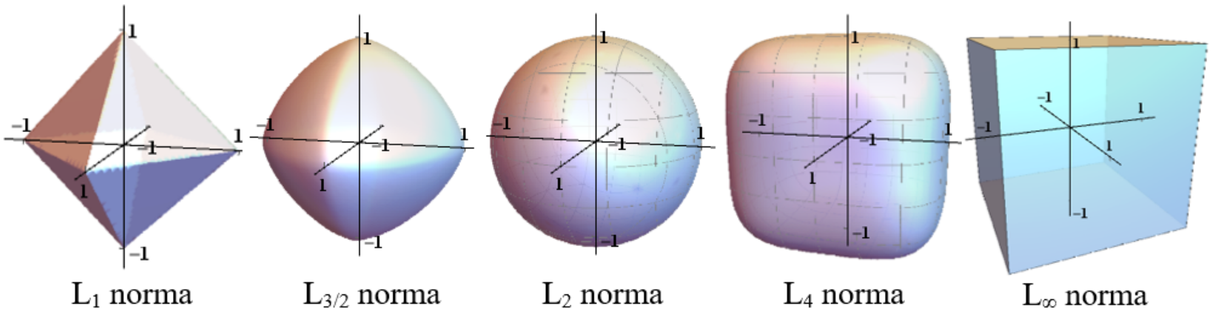
L_2 norma



L_4 norma



L_∞ norma



Svaka od navedenih normi indukuje odgovarajuće rastojanje nad vektorima $d(v, u) = \|v - u\|$.

U cilju praćenja kvaliteta neke numeričke procedure, normom vektora opisujemo bliskost rezultata ciljanom ishodu.

Definicija 9. Za realnu ili kompleksnu vrednost a aproksimacija je neka vrednost x. Apsolutna greška aproksimacije je $\Delta x = |x - a|$. Relativna greška aproksimacije je data sa $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$.

Apsolutna greška daje meru odstupanja približne vrednosti x od a, dok relativna greška pokazuje meru koliko je to odstupanje bitno u odnosu na meru aproksimacije x. Ovaj uvid nam pomaže da osnovne pojmove teorije grešaka proširimo na skupove vrednosti, tj. vektore.

Definicija 10. Za vektor vrednosti $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ aproksimacija je neki vektor vrednosti $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$. (Apsolutna) Greška aproksimacije glasi $\Delta x = \|x - a\|$. Relativna greška aproksimacije je tada $\delta x = \dfrac{\Delta x}{\|x\|}$.

Primer 36. Norma vektora pruža osnovno sredstvo za definisanje i analizu konvergencije u vektorskom prostoru. Za niz vektora $\{v_k\} \subset \mathbb{C}^n$ kažemo da konvergira ka vektoru $v \in \mathbb{C}^n$ ako $\|v - v_k\| \to 0$, $k \to \infty$, tj. ako apsolutna greška niza aproksimacija teži nuli.

$$v_k \to v, \; k \to \infty \iff \|v - v_k\| \to 0, \; k \to \infty.$$

Može se činiti da ovakva definicija zavisi od izbora norme na vektorskom prostoru. Ipak, to nije slučaj jer su norme 'ekvivalenetne' za kriterijum konvergencije. Naime,

$$\forall i, j \in \{i, 2, \infty\}, \; i \neq j, \quad \|v\|_i \leq \alpha_{ij} \|v\|_j, \quad [\alpha_{ij}] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \infty \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \infty \end{array} & \begin{bmatrix} & \sqrt{n} & n \\ 1 & & \sqrt{n} \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{array}.$$

1.4.1 Pitanja i zadaci

1. Kada u Švarcovoj nejednakosti važi jednakost?

2. Kada u nejednakosti trougla važi jednakost?

3. Diskutovati ugao između vektora v i u na osnovu znaka $v \cdot u$. U 2D pikazati proizvoljna dva vektora v i u za koje je $v \cdot u < 0$.

4. Neka je $v = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$. Odrediti sve vektore u za koje važi da je $v \cdot u = 5$. Odrediti najkraći od takvih vektora.

5. Izaberi proizvoljna tri broja x, y, z takve da je $x + y + z = 0$ i nisu svi istovremeno 0. Odredi ugao između vektora $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ i $u = \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix}$. Dokazati da jednakost $v \cdot u = -1/2 \, \|v\| \, \|u\|$, ne zavisi od vrednosti x, y, z.

6. Koristeći Švarcovu nejednakost dokazati nejednakost trougla.

7. Ako za dva vektora $v, u \in \mathbb{R}^n$ važi da je $\|v - u\| = \|v + u\|$ čemu je jednako $v \cdot u$?

8. Dokazati da se sve tri simetrale uglova u trougla seku u jednoj tački. Data su temena trougla A, B, C i poznate su dužine a, b, c naspramnih strana temenima,

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB.$$

   Dokazati da je tada centar upisane kružnice S dat sa

$$S = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}.$$

9. Dokazati da je zbir kvadrata dužina dijagonala paralelograma jednak zbiru kvadrata dužina sve četiri njegove strane.

10. Neka su data dva konačna skupa vektora $S_1, S_2 \subset \mathbb{C}^n$. Matričnim operacijama opisati istovremeno sve vrednosti skalarnih proizvoda

$$v \cdot u, \quad v \in S_1, u \in S_2.$$

    Kako ti proizvodi izgledaju u matričnoj notaciji kada su $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$.

11. Dokazati da za sve vektore v iz $\mathbb{C}^n$ važi da je

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1.$$

12. Neka je A kompleksna kvadratna matrica reda n i $u, v \in \mathbb{C}^n$. Dokazati da je

$$(Au) \cdot v = u \cdot (A^H v).$$

1.5 Ortogonalnost

Najvažniji pojam definisan skalarnim proizvodom je ortogonalnost.

Definicija 11. Dva vektora v i u su ortogonalna, u oznaci $v \perp u$, kada je $v \cdot u = 0$.

$$v \perp u \iff v \cdot u = 0.$$

Još od šezdesetih godina prošlog veka, najpouzdaniji algoritmi numeričke linearne algebre su bazirani na ortogonalnosti na ovaj ili onaj način. Ortogonalnost pruža mogućnost jednostavnog izračunavanja koordinata, generalizaciju Pitagorine teoreme u n dimenzija, izračunavanja najkraćeg rastojanja skupova tačaka itd. U ovom odeljku podsetićemo se glavnih pojmova.

Veoma značajne baze u izračunavanjima predstavljaju ortonormirane baze vektorskih prostora. Skalarni proizvod dva vektora ortonormirane baze iznosi 0 ili 1. Prirodna baza (1.4) je ortonormirana baza. Koordinate vektora v u odnosu na ortonormiranu bazu $b_1, b_2, \dots, b_n$ nazivaju se Furijeove[4] koordinate vektora i važi da je

$$\begin{aligned} v &= (v \cdot b_1)b_1 + (v \cdot b_2)b_2 + \cdots + (v \cdot b_n)b_n \\ &= \|v\|(\cos\alpha_1 b_1 + \cos\alpha_2 b_2 + \cdots + \cos\alpha_n b_n), \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n \\ &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Tada je jednakošću

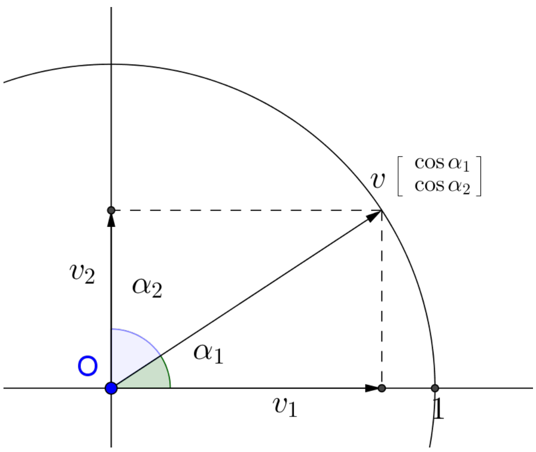
$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \\ &= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2, \end{aligned}$$

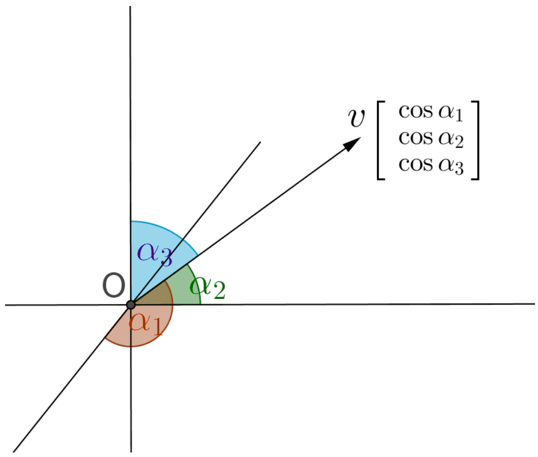
dato uopštenje Pitagorine teoreme.

Ukoliko je i vektor v normiran, svaka od koordinata λ_k u izrazu (1.11)

$$\lambda_k = v \cdot b_k = \|v\| \, \|b_k\| \cos\alpha_k \overset{\|v\|=\|b_k\|=1}{=} \cos\alpha_k$$

predstavlja kosinus ugla koji vektor v zaklapa sa koordinatnom osom b_k.





Teorema 2. *Ako je vektor v ortogonalan na vektore $u_1, u_2, \dots, u_k$, tada je v ortogonalan na sve vektore potprostora razapetog vektorima $u_1, u_2, \dots, u_k$.*

$$v \perp u_i,\ i = 1, 2, \dots, k \implies \forall u \in \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_k),\ v \perp u.$$

DOKAZ: $u \in \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_k) \iff u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$.
$\implies v \cdot u = v \cdot (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 (v \cdot u_1) + \lambda_2 (v \cdot u_2) + \cdots + \lambda_k (v \cdot u_k) = 0.\square$

Prethodnom teoremom pokazali smo da je ortogonalnost vektora na skup dovoljno proveriti na 'bazi' tog skupa - tj. na maksimalnom linearno nezavisnom podskupu.

Definicija 12. Dva skupa vektora S_1 i S_2 su ortogonalna, u oznaci $S_1 \perp S_2$, ako je za svaka dva vektora

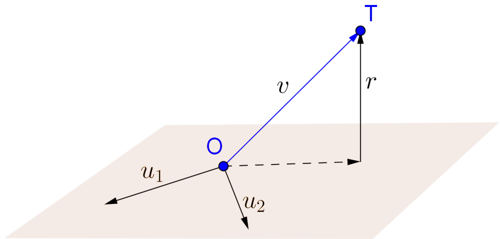
$$v \in S_1, u \in S_2, \quad v \cdot u = 0. \tag{1.12}$$

Za konačne skupove vektora S_1 i S_2 realnog vektorskog prostora V provera ortogonalnosti svodi se na množenje matrica. Neka je M_1 matrica čije su kolone vektori skupa S_1 i M_2 matrica čije su kolone vektori skupa S_2. Rezultati svih skalarnih proizvoda vektora ova dva skupa, tj. proizvodi (1.12) su komponente proizvoda matrica $M_1^T M_2$. U slučaju kompleksnih vektora ovi proizvodi dati su izrazom $M_1^H M_2$.

[4]Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768– 1830), francuski matematičar

Primer 37. Sve skalarne proizvode vektora konačnog skupa S dobijamo proizvodom M^TM, tj. M^HM u kompleksnom vektorskom prostoru, gde je M matrica čije su kolone koordinate vektora skupa S.

Primer 38. Tačka T data je radijus vektorom v. Potražimo ortogonalno rastojanje tačke T od prostora razapetog ortonormiranim vektorima $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Problem se može analizirati prema sledećoj skici.



Vektor rastojanja r je komponenta vektora v ortogonalna na $\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Polazeći od relacije

$$r = v - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \cdots - \lambda_k u_k$$

iz uslova ortogonalnosti $u_j \cdot r = 0,\ \forall j = 1, 2, \ldots, k$ nalazimo $\lambda_j = u_j \cdot v$. Ukoliko je $v \in \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, mora biti $r = \overrightarrow{0}$.

Neka je U matrica čije su kolone redom vektori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, a $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$, kolona nepoznatih koeficijenata. Uslove orotogonalnosti $u_j \cdot r = 0,\ \forall j = 1, 2, \ldots, k$ možemo predstaviti u matričnoj formi $U^Hr = O \iff U^H(v - U\Lambda) = O$. Zbog ortonormiranosti skupa $u_1, u_2, \ldots, u_k$, važi da je $U^HU = I_k$. Tada je

$$U^Hv = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & u_1^H & \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} & u_2^H & \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} & u_k^H & \end{bmatrix} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} u_1^Hv \\ \\ u_2^Hv \\ \vdots \\ u_k^Hv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Linearna kombinacija $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ kao transformacija kolona matrice U, tada glasi

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = U\Lambda = UU^Hv.$$

Zbog toga je vektor rastojanja r u matričnom obliku moguće izračunati sa

$$r = v - UU^Hv = (I - UU^H)v. \tag{1.13}$$

Definicija 13. Rastojanje tačke sa radijus vektorom v od skupa $S \subset V$ je

$$d(v, S) = \min_{u \in S} d(v, u) = \min_{u \in S} \|v - u\|.$$

Teorema 3. *Rastojanje vektora $v \in V$ od vektorskog potprostora $P \subset V$ je ortogonalno rastojanje.*

DOKAZ: Neka je $P = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_k)$, gde su $u_1, u_2, \dots, u_k$ ortonormirani vektori. Na osnovu primera 38 znamo da je $v = r + \sum_{j=1}^{k}(u_j \cdot v)u_j = r + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$ predstavlja ortogonalnu dekompoziciju vektora v. Vektor r je ortogonalan na P i njegova dužina predstavlja ortogonalno rastojanje v od P. Neka je $u \in P$ proizvoljan vektor. Odredimo rastojanje $d(v, u)$. Kako je $u \in P$, to postoje skalari α_j za koje je

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k.$$

Potražimo vektor $v - u$ i uporedimo njegovu dužinu sa vektorom r.

$$v - u = r + (\lambda_1 - \alpha_1)u_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)u_2 + \cdots + (\lambda_k - \alpha_k)u_k,$$

što je ortogonalna dekompozicija. Zbog uopštene Pitagorine teoreme važi da je

$$\|v - u\|^2 = \|r\|^2 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j - \alpha_j|^2 \geq \|r\|^2. \square$$

Dekompozicija vektora na ortogonalne komponente je uvod u dekompoziciju prostora na ortogonalne potprostore.

Definicija 14. Neka je P potprostor vektorskog prostora V. Ortogonalni komplement $P^\perp \subset V$ prostora P je skup svih vektora ortogonalnih na P.

Primer 39. Za skupove vektora S_1 i S_2 važi: $S_1 \perp S_2 \implies S_1 \cap S_2 \subset \{\overrightarrow{0}\}$. Zaista, neka je vektor $v \in S_1 \cap S_2$. To znači da je $v \perp v \iff v \cdot v = 0 \iff \|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}$.

Posledica 2. *a) Suma ortogonalnih potprostora je uvek direktna suma.*
b) $P^\perp$ je potprostor V i važi da je $P \oplus P^\perp = V$.
c) Za svaki vektor $v \in V$ postoji jedintveno razlaganje $v = u_1 + u_2$, gde su vektori $u_1 \in P,\ u_2 \in P^\perp$.

Primer 40. Pored prostora vrsta i kolona, za matricu A su veoma važna još dva prostora: levo i desno jezgro matrice. (Desno) jezgro matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ je skup

$$\ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \,\big|\, Av = \overrightarrow{0}\}.$$

Levo jezgro matrice je $\ker(A^T) = \{v \in \mathbb{R}^m \,\big|\, vA = \overrightarrow{0}\}$.

Desno jezgro čine svi vektori ortogonalni na vrste matrice A. Zbog toga je

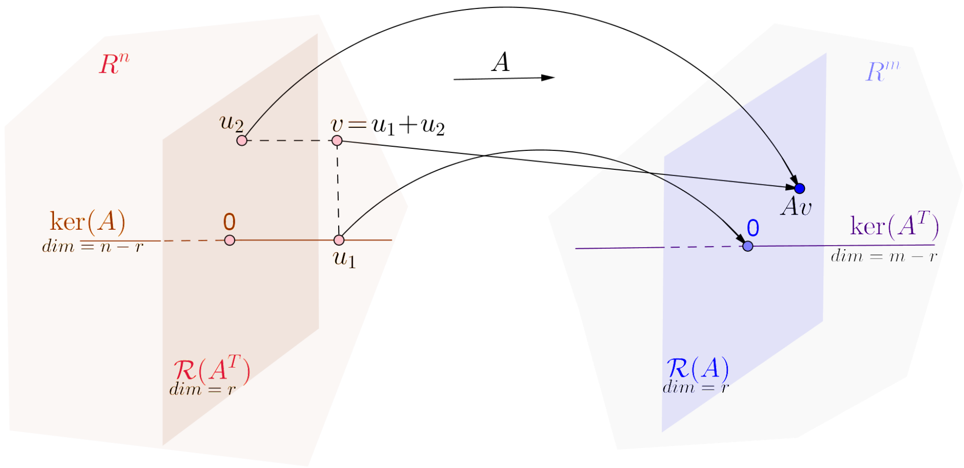
$$\mathcal{R}(A^T)^\perp = \ker(A), \quad \mathcal{R}(A^T) \oplus \ker(A) = \mathbb{R}^n.$$

Analogno dobijamo da je $\mathcal{R}(A)^\perp = \ker(A^T), \quad \mathcal{R}(A) \oplus \ker(A^T) = \mathbb{R}^m$.

Zaključujemo: ako je $\operatorname{rang}(A) = r$ tada je

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(A^T) = r, \quad \dim\ker(A) = n - r \quad \dim\ker(A^T) = m - r.$$

Zbog toga se svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ može na jedinstven način razbiti na ortogonalne komponente $v = u_1 + u_2,\ u_1 \in \ker(A), u_2 \in \ker(A)^\perp$. Onda je $Av = Au_2$.



Okosnica dekompozicija matrica kojima ćemo se u okviru kursa baviti data je narednom teoremom.

Teorema 4. *Matrica $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ je ranga r akko se može predstaviti u obliku proizvoda $A = BC$, gde su $B \in \mathcal{M}_{m\times r}$ i $C \in \mathcal{M}_{r\times n}$ matrice punog ranga.*

DOKAZ: Tvrđenje je oblika ako i samo ako i dokazujemo ga u dva smera.
$\underline{\Longrightarrow:}$ Neka je matrica $A \in M_{m\times n}$ ranga r data svojim kolonama

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\right].$$

Neka bazu prostora $\mathcal{R}(A)$ čine kolone $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$. Označimo sa B matricu sastavljenu od ovih kolona, $B \in \mathcal{M}_{m\times r}$. Primetimo da je $\operatorname{rang}(B) = r$. Tada se svaka kolona matrice A može predstaviti kao linearna kombinacija ovih r kolona.

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = c_{11}\begin{bmatrix} a_{i_1} \end{bmatrix} + c_{21}\begin{bmatrix} a_{i_2} \end{bmatrix} + \dots + c_{r1}\begin{bmatrix} a_{i_r} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} = c_{12}\begin{bmatrix} a_{i_1} \end{bmatrix} + c_{22}\begin{bmatrix} a_{i_2} \end{bmatrix} + \dots + c_{r2}\begin{bmatrix} a_{i_r} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{r2} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_2 \end{bmatrix} \\
\qquad\vdots \\
\begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix} = c_{1n}\begin{bmatrix} a_{i_1} \end{bmatrix} + c_{2n}\begin{bmatrix} a_{i_2} \end{bmatrix} + \dots + c_{rn}\begin{bmatrix} a_{i_r} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{rn} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} c_n \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \Longleftrightarrow A = BC,$$

gde je $C \in \mathcal{M}_{r\times n}$ matrica sastavljena od kolona c_j. Primetimo da je $c_{i_1} = e_1,\ c_{i_2} = e_2, \dots, c_{i_r} = e_r$, pa je $\operatorname{rang}(C) = r$. Ovim je završen dokaz direktnog smera tvrđenja.
$\underline{\Longleftarrow:}$ Pretpostavimo sada da je $A = BC$, gde su $B \in \mathcal{M}_{m\times r}$ i $C \in \mathcal{M}_{r\times n}$ matrice punog ranga r. Predstavimo matrice A, B, C preko njihovih kolona.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{array}\right] = BC. \qquad (1.14)$$

Kolone matrice B su linearno nezavisne i njihovim linearnim kombinacijama se dobijaju sve kolone matrice A. Zbog toga je $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, tj. $\mathrm{rang}(A) \leq \mathrm{rang}(B) = r$. Takođe, jednakost (1.14) znači da su kolone c_i koordinate vektora a_i u bazi (b). Kako matrica C ima r linearno nezavisnih kolona to i ih isto toliko ima i A. $\square$

Dokaz teoreme 4 u direktnom smeru opisuje "teorijski" algoritam dobijanja dekompozicije $A = BC$. Za realizaciju takvog algoritma pre svega neophodno je poznavanje baze prostora kolona matrice A, što nije jednostavan zadatak. Zatim, postupak izračunavanja koordinata ostalih vektora kolona u toj bazi sprovodi se rešavanjem sistema linearnih jednačina za svaki od vektora. Svaka od navedenih stavki ovog teorijskog algoritma je računski veoma zahtevna. Numerički algoritmi kojima ćemo se baviti dizjnirani su da istovremeno određuju vektore baze (registruju linearnu zavisnost) i izračunavanje koordinata u odnosu na generisanu bazu. Izbor algoritma za određivanje baze je u tesnoj vezi sa izborom tipa vektora u samoj bazi: trougaona, ortogonalna ili ortonormirana baza. Cilj je pojednostavljeno izračunavanje koordinata ostalih vektora kolona.

Veoma važna posledica poznavanja dekompozicije $A = BC$, za $B \in \mathcal{M}_{m\times r}$, $C \in \mathcal{M}_{r\times n}$ i $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(C) = R$ jeste poznavanje ključnih potprostora matrice A.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \mathcal{R}(B), & \ker(A) &= \ker(C), \\ \mathcal{R}(A^T) &= \mathcal{R}(C^T), & \ker(A^T) &= \ker(B^T). \end{aligned}$$

Primer 41. Matrica A data je proizvodom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LR.$$

Na osnovu date faktorizacije odredićemo sva četiri prostora koja definiše matrica A.

Uočimo najpre da je $\mathrm{rang}(R) = 2$ pa je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = L_1 R_1,$$

dekompozicija A na matrice punog ranga.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(L_1) &= L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right), \\ \ker(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp &= L\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right), \\ \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(R_1^T) &= L\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}^T\right), \\ \ker(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp &= L\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right). \end{aligned}$$

1.5.1 Pitanja i zadaci

1. Ispitati tačnost sledećih tvrđenja.

   a) U 2D: ako je vektor v ortogonalan na vektore u i w, onda su u i w paralelni među sobom.

b) U 3D: ako je vektor v ortogonalan na vektore u i w, onda su u i w paralelni među sobom.

c) Ako je vektor v ortogonalan na vektore u i w, onda je v ortogonalno na $3u - w$.

d) Ako su v i u jedinični ortogonalni vektori realnog vektorskog prostora, onda je $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

2. Odrediti ugao između realnih vektora v i u ako se zna da je $v + u$ ortogonalno na $7v - 5u$ i $v - 4u$ ortogonalno na $7v - 2u$.

3. Odrediti ugao između vektora v i u u 3D koji sa koordinatnim osama zaklapaju uglove $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, redom.

4. Neka je S 6-dimenzionalni potprostor 9-dimenzionalnog vektorskog prostora V.

   a) Koje su moguće dimenzije potprostora ortogonalnih na S?

   b) Šta su moguće dimenzije ortogonalnog komplementa $S^{\perp}$?

   c) Koja je najmanja dimenzija matrice A čiji je prostor vrsta potprostor S?

5. Jednačina $x - 3y - 4z = 0$ opisuje ravan α u 3D.

   a) Koje matrice $A \in \mathcal{M}_{1\times 3}$ je ravan α jezgro?

   b) Odrediti bazu v_1, v_2 ravni α.

   c) Odrediti bazu ortogonalne dopune $\alpha^{\perp}$.

   d) Predstaviti vektor $v = [645]$ kao direktnu sumu vektora $v_1 \in \alpha$ i $v_2 \in \alpha^{\perp}$.

6. Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački.

7. Odrediti rastojanje tačke T, zadate vektorom položaja v, od prostora $\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, gde su $u_1, u_2, \ldots, u_k$ linearno nezavisni vektori.

8. Interpretirati proizvode $A^T A$ i $A^H A$ u kontekstu skalarnih proizvoda na odgovarajućim vektorskim prostorima.

9. Ukoliko su vektori v i u vektorskog prostora dati koordinatama u bazi $b_1, b_2, \ldots, b_n$, dati matrični izraz skalarnog proizvoda $v \cdot u$.

10. Odrediti rastojanje tačke $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ od ravni α koja prolazi kroz koordinatni početak i razapeta je vektorima $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Kako bi se promenio rezultat ako bi ravan α bila translirana iz koordinatnog početka u tačku $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$?

Dodatak

Definicija 1. Uređena četvorka $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, sa osobinama

- $V \neq \emptyset$, i $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ je polje,
- $+ : V \times V \to V, \quad (V, +)$ je Abelova grupa,
- $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$,
- $\forall v, u \in V$ i $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ važe sledeće jednakosti

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 1 \cdot v = v, & \text{b)} & \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \mu) v, \\ \text{c)} & (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v & \text{d)} & \lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u, \end{array}$$

predstavlja vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Elemente skupa V nazivamo vektorima, a elemente polja $\mathbb{K}$ skalarima. Operacija $+$ zove se sabiranje vektora, a operacija $\cdot$ množenje vektora skalarom.

Definicija 2. Podskup $P \subset V$ vektorskog prostora V nad poljem skalara $\mathbb{K}$ predstavlja potprostor ako je $(P, \mathbb{K}, +, \cdot)$ prostor u odnosu na restrikcije operacija $+$ i $\cdot$ na podskup P.

Teorema 1. *Podskup $P \subset V$ vektorskog prostora V je potprostor akko*

$$\forall v, u \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \ \lambda v + \mu u \in P.$$

Definicija 3. Skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ je linearno nezavisan ukoliko $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ važi

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_k = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k.$$

Definicija 4. Skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ je potpun ukoliko $\forall v \in V \ \exists \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$ tako da je

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Definicija 5. Svaki potpun, linearno nezavisan skup vektora prostora V predstavlja bazu u V. Broj elemenata baze naziva se dimenzija prostora V.

Teorema 2. *Ako je skup od n vektora $n-$dimenzionalnog prostora V linearno nezavisan, onda taj skup vektora predstavlja bazu u V. Ako je skup od n vektora $n-$dimenzionalnog prostora V potpun, onda je taj skup baza u V.*

Definicija 6. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{R}$. Preslikavanje $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ naziva se skalarni proizvod na V ukoliko za svaka tri vektora $u, v, w \in V$ i proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, ima osobine:

S1: $u \cdot v = v \cdot u$;

S2: $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$;

S3: $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$;

S4: $u \cdot u > 0, u \neq \overrightarrow{0}$.

Definicija 7. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\cdot : V \times V \to \mathbb{C}$ naziva se skalarni proizvod na V ukoliko za svaka tri vektora $u, v, w \in V$ i proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{C}$, ima osobine:

U1: $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$;

U2: $(\alpha u) \cdot v = \overline{\alpha}(u \cdot v)$;

U3: $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$;

U4: $u \cdot u > 0, u \neq \overrightarrow{0}$.

Definicija 8. Standardni skalarni proizvod realnih vektora $u, v \in \mathbb{R}^n$ dat je sa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

što se u matričnom obliku može predstaviti i na sledeći način:

$$u \cdot v = v^T u = u^T v.$$

Definicija 9. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_+$ naziva se norma na V ukoliko ima osobine:

N1: $\|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}, \quad \forall v \in V$;

N2: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|, \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{C}$;

N3: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$.

Norma indukovana skalarnim proizvodom:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}\,.$$

Definicija 10. Najznačajnije norme vektora su: za $v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$,

L_1: $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, poznata još i kao Manhetn norma ili taksi norma,

L_2: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, Euklidova norma

L_p: $\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \ p \geq 1$

L_∞: $\|v\|_\infty = \max_k \{|x_k|\}$.

Definicija 11. Za date vektore $u, v \in \mathbb{R}^n$, njihova udaljenost je

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Literatura

[1] Tim Chartiere. *When life is linear*. MAA, Washington DC 20090-1112, P.O. BOX 91112, 2015.

[2] Ben Orlin. *MATH with bad drawings*. Hachette Book Group, New York, NY 10104, 2018.

[3] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2009.

[4] Lloyd N. Trefethen and III David Bau. *Numerical linear algebra*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, 1997.

[5] M. A. Kovačević, G. V. Milovanović, and R. Ž. Đorđević. *MATEMATIKA I*. SVEN, Niš, Srbija, 2009.