Domaći zadatak br. 2

1. Data je LU faktorizacija matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Opisati, bez izračunavanja, koje elementarne operacije nad vrstama su upotrebljene za dovođenje matrice A na gornje trougaoni oblik. Voditi računa o redosledu navođenja operacija.

2. Neka su $a_i \neq 0$ međusobno različiti brojevi. Odrediti LU faktorizaciju sledećih Vandermondovih matrica.

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{bmatrix}.$$

   Opisati uočenu pravilnost.

3. Da li su sledeće tvrđenje tačna?

   - Kvadratna matrica A koja ima neki element glavne dijagonale jednak nuli je singularna matrica.

   - Ukoliko je neki pivot element matrice A u LU faktorizaciji jednak nuli, matrica A je singularna.

   Obrazložiti odgovore.

4. Data je LU faktorizacija matrice A sa

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline a_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 \\ \hline l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \end{bmatrix}.$$

   Dokazati da važi

$$\begin{aligned} L(a_1) &= L(u_1), \\ L(a_1, a_2) &= L(u_1, u_2), \\ L(a_1, a_2, a_3) &= L(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

   Opisati i dokazati analogno tvrđenje za kolone matrica A i L.

5. Neka je A regularna matrica i u, v vektori takvi da važi $1+v^T A^{-1} u \neq 0$. Dokazati formulu Šermana i Morisona

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$