

Univerzitet u Nišu  
Elektronski fakultet

---

---

**Matrični metodi u računarstvu**  
***Korigovan* Projekat 1**

---

---

*Stefan Aleksić 16995*

*02. April, 2020. god.*

## Projekat br. 1

Poznata je  $LU$  dekompozicija regularne matrice  $A = LU \in \mathcal{M}_{n \times n}$ . Regularna matrica  $M$  ima block formu:

$$M = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix},$$

gde su  $v, u \in \mathbb{R}^n$  vektori i  $a \in \mathbb{R}$  nenula skalar. Odrediti  $LU$  faktorizaciju matrice  $M$  u blok formi

$$M = \begin{bmatrix} L & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}, \quad (A = LU) \quad (1)$$

i odrediti potreban broj aritmetičkih operacija za njeno dobijanje. U izrazu (1) pozicije  $\text{---}$  označavaju vektore i skalare koje je potrebno odrediti tako da matrica  $\begin{bmatrix} L & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$  bude donje trougaona, matrica  $\begin{bmatrix} U & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$  bude donje trougaona i važi jednakost (1).

Kako se menja broj potrebnih aritmetičkih operacija u slučaju kada su  $A$  i  $M$  simetrične matrice?

### Rešenje:

Da bismo dobili  $LU$  faktorizaciju matrice  $M$ , koristimo sledeći postupak:

$$M = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{(-u^T A^{-1})} L' = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ u^T A^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & v \\ u^T - u^T A^{-1} A & a - u^T A^{-1} v \end{bmatrix}$$

Element  $a - u^T A^{-1} v \in \mathbb{R}$  nazivamo Šurovim komplementom i označavamo:  $M/A = a - u^T A^{-1} v$ .

$LU$  faktorizacija matrice  $M$  sada izgleda:

$$L' = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} \quad (2)$$

Međutim, dobijene matrice  $L'$  i  $U'$  ne odgovaraju onim koje se traže (iako  $A = IA$ , ali ova faktorizacija je trivijalna). Zato moramo pokušati da na neki drugi način dođemo do tražene faktorizacije. Eventualno da nađemo vezu između klasične  $LU$  i gore tražene faktorizacije.

### 1° Način:

Prvo ćemo označiti elemente blok matrica  $L_M$  i  $U_M$ .

$$M = L_M U_M = \begin{bmatrix} L & \vec{l}_{12} \\ \vec{l}_{21}^T & l_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \vec{u}_{12} \\ \vec{u}_{21}^T & u_a \end{bmatrix}, \quad \vec{l}_{12}, \vec{l}_{21}, \vec{u}_{12}, \vec{u}_{21} \in \mathbb{R}^n, \quad l_a, u_a \in \mathbb{R}$$

S obzirom da su matrice  $L_M, U_M$  donje i gornja trougaone respektivno, odavde možemo da zaključimo da je  $\vec{l}_{12} = \vec{u}_{21} = \vec{0}$ . Hajmo sada da pomnožimo matrice  $L_M$  i  $U_M$ :

$$L_M U_M = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \vec{l}_{21}^T & l_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & \vec{u}_{12} \\ \vec{0}^T & u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LU & L\vec{u}_{12} \\ \vec{l}_{21}^T U & \vec{l}_{21}^T \vec{u}_{12} + l_a u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vec{v} \\ \vec{u}^T & a \end{bmatrix} = M$$

Izjednačavanjem leve i desne matrice dobijamo sistem:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} LU = A \\ L\vec{u}_{12} = v \Rightarrow \vec{u}_{12} = L^{-1}v \\ \vec{l}_{21}^T U = u^T \Rightarrow \vec{l}_{21}^T = u^T U^{-1} \\ \vec{l}_{21}^T \vec{u}_{12} + l_a u_a = a \Rightarrow u^T (U^{-1} L^{-1}) v + l_a u_a = u^T (LU)^{-1} v + l_a u_a = u^T A^{-1} v + l_a u_a = a \end{cases} \quad (3)$$

Iako smo gornjim sistemom opisali skup matrica  $(l_a, u_a \in \mathbb{R})$ , mi možemo na svoju ruku izabrati ono rešenje koje je pogodno za računicu, odnosno ono koje bi bilo najzgodnije po konvenciji. S obzirom da se na glavnoj dijagonali matrice  $L_m$  očekuju jedinice, odnosno

$$\det(L_m) = \det(L)\det(l_a) = 1 \implies l_a = 1 \wedge u_a = a - u^T A^{-1} v = M/A$$

Oдавde konačno dobijamo elemente matrica  $L_M$  i  $U_M$ :

$$L_M = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ u^T U^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} U & L^{-1}v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} \quad (4)$$

Aritmetičke operacije:

Oznaka operacije	Sabiranje/Oduzimanje	Množenje	Deljenje	Ukupno
$\vec{l}_{21}^T U = u^T$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n$	$\mathcal{O}n^2$
$L\vec{u}_{12} = v$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	0	$\mathcal{O}n^2$
$M/A = a - \vec{l}_{21}^T U \vec{u}_{12}$	$n$	$n$	0	$\mathcal{O}n$
Ceo algoritam	$n^2$	$n^2$	$n$	$\mathcal{O}n^2$

**Napomene:**

\*Izraze:  $u^T U^{-1}$  i  $L^{-1}v$  izjednačavamo vektorima  $\vec{l}_{21}^T$  i  $\vec{u}_{12}$  respektivno, a onda izraze računamo kao sisteme jednačina:

$$\vec{l}_{21}^T U = u^T \quad \text{i} \quad L\vec{u}_{12} = v$$

\*S obzirom da matrica  $L$  na glavnoj dijagonali ima jedinice, za sistem  $L\vec{u}_{12} = v$  nije potrebno deljenje.

\*Šurov komplement  $M/A$  oдавde je:

$$M/A = a - u^T A^{-1} v = a - u^T (LU)^{-1} v = a - (u^T U^{-1})(L^{-1}v) = a - \vec{l}_{21}^T U \vec{u}_{12}$$

\*Sve što smo jednom izračunali smatramo pribeležnim, kako se ne bi nagomilavala računanja.

Ukoliko je matrica  $M$ , onda važi:

$$M^T = M \implies M^T = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & (u^T)^T \\ v^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & u \\ v^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} = M$$

$$\iff \begin{cases} A = A^T \\ u = v \\ v^T = u^T \\ a = a \end{cases} \implies \begin{cases} A = A^T \\ v = u \end{cases} \quad (5)$$

Za simetričnu matricu  $A$  važi:

$$A^T = A \implies (LDU')^T = (DU')^T L^T = U'^T D^T L^T = U'^T D L^T = LDU'$$

$$\implies L^T = U' \iff L = U'^T \quad (5.1)$$

Na osnovu (3), (5) i (5.1):

$$L\vec{u}_{12} = v = u = U^T \vec{l}_{21} \implies L\vec{u}_{12} = (DU')^T \vec{l}_{21} = U'^T D \vec{l}_{21} \implies \vec{u}_{12} = L^{-1} L D \vec{l}_{21} \implies \vec{u}_{12} = D \vec{l}_{21}$$

S obzirom da je matrica  $D$  dijagonalna matrica, čiji su elementi jednaki elementima glavne dijagonale matrice  $U$ , za njeno dobijanje nije potrebno nikakvo računanje, dok je za izraz  $\vec{u}_{12} = D \vec{l}_{21}$  potrebno izvršiti samo  $n$  množenja ( $u_{12_i} = d_{ii} \cdot l_{21_i}$ , ( $u_{12_i} \in \vec{u}_{12}$ ,  $d_{ii} \in D_{n \times n}$ ,  $l_{21_i} \in \vec{l}_{21} \forall i = 1, n$ )).

Aritmetičke operacije za simetričnu matricu  $M$ :

Oznaka operacije	Sabiranje/Oduzimanje	Množenje	Deljenje	Ukupno
$\vec{l}_{21}^T U = u^T$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n$	$\mathcal{O}n^2$
$\vec{u}_{12} = D \vec{l}_{21}$	0	$n$	0	$\mathcal{O}n^2$
$M/A = a - \vec{l}_{21}^T U \vec{u}_{12}$	$n$	$n$	0	$\mathcal{O}n$
Ceo algoritam	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+3)}{2}$	$n$	$\mathcal{O}n^2$

## 2° Način:

Primetimo da je prelazak sa  $L'U'$  na  $L_M U_M$  faktorizaciju vrlo jednostavan.

Na osnovu već odrađene  $L'U'$  faktorizacije (2) i izraza:

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} L^{-1} \implies A^{-1} L = U^{-1} L^{-1} L = U^{-1} \quad (6)$$

$$A = LU \implies L^{-1} A = L^{-1} L U = U \quad (7)$$

$$I_L = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{L^{-1}} = \begin{bmatrix} L^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad I_L I_{L^{-1}} = I_{(n+1) \times (n+1)} \quad (8)$$

Dobijamo:

$$M = L'U' = L'IU' = (L'I_L)(I_{L^{-1}}U') = L_M U_M \quad (9)$$

Odnosno u matricnom zapisu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & v \\ u^T & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L L^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} = \\ &= \left( \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \vec{0} \\ u^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \left( \begin{bmatrix} L^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ u^T A^{-1} L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L^{-1} A & L^{-1} v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L & \vec{0} \\ u^T U^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & L^{-1} v \\ \vec{0} & M/A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na osnovu urađene  $L'U'$  faktorizacije (2) i izraza (9) vrlo lako možemo preći sa klasične  $LU$  faktorizacije na onu poput gore tražene u zadatku.