① $u = [-2\ 1\ 3\ -1]^T$ а) $\text{project}_v u$ в) $\text{project}_{v^\perp} u$

$v = [1\ 4\ 0\ -1]^T$ б) $\text{project}_u v$ г) $\text{project}_{u^\perp} v$

а) $$\text{project}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \cdot v = \frac{-2+4+0+1}{1+16+0+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 3/18 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [1/6\ 2/3\ 0\ -1/6]^T$$

б) $$\text{project}_u v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} \cdot u = \frac{-2+4+0+1}{4+1+9+1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3/15 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [-2/5\ 1/5\ 3/5\ -1/5]^T$$

в) $$\text{project}_{v^\perp} u = u - \text{project}_v u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 0 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/6 \\ 1/3 \\ 3 \\ -5/6 \end{bmatrix} = [-13/6\ 1/3\ 3\ -5/6]^T$$

г) $$\text{project}_{u^\perp} v = v - \text{project}_u v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} = [7/5\ 19/5\ -3/5\ -4/5]^T$$

② V – векторски простор разапет векторима v_1, v_2

$v_1 = [1\ -1\ 1\ 0]^T \quad v_2 = [0\ 1\ 1\ 0]^T$

а) одредити базне векторе потпростора $V^\perp$ (u_1, u_2)

$u_1 = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \quad u_2 = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4] \quad x_i, y_i \in R\ i=1,4$

$v_1 \cdot u_1 = 0$

$v_2 \cdot u_1 = 0$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -x_3}$

$x_1 - (-x_3) + x_3 = 0$

$\boxed{x_1 = -2x_3}$

$u_1 = [-2x_3\ -x_3\ x_3\ x_4]^T$

$x_3 \in R$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_1 = [1\ -1\ 1\ 0]^T \quad V_2 = [0\ 1\ 1\ 0]^T$

$U_1 = [-2\ -1\ 1\ 1] \quad U_2 = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]$

$V_1 \circ U_2 = 0$

$V_2 \circ U_2 = 0$

$U_1 \circ U_2 = 0$

$y_1 - y_2 + y_3 = 0 \quad \boxed{y_1 = -2y_3}$

$y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow \boxed{y_2 = -y_3}$

$-2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0$

$-2(-2y_3) - (-y_3) + y_3 + y_4 = 0$

$4y_3 + 2y_3 + y_4 = 0$

$\boxed{y_4 = -6y_3}$

$U_2 = [-2y_3\ \ -y_3\ \ y_3\ \ -6y_3]^T$

$y_3 \in R$

$$U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

б) Матрица ортогоналне пројекције на V (P)

P je облика $X(X^TX)^{-1}X^T$ где je $X = [V_1 \mid V_2]$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (X^TX)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

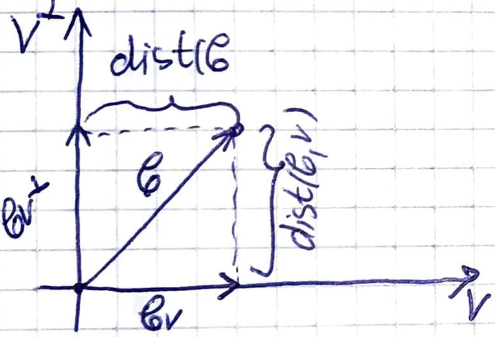
$$P = X(X^TX)^{-1}X^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{4\times2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{2\times2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

г) $b = [0\ -1\ 0\ 1]^T$ Растојање b од V? Вектор из V најближи b?
Растојање b од $V^\perp$? Вектор из $V^\perp$ најближи b?

Уколико извршимо пројекцију вектора b на V добијамо вектор из потпростора V, који је најближи вектору b, а његов модуо ће онда бити растојање вектора b од потпростора $V^\perp$. Слично важи и за $V^\perp$.



$$\text{project}_V b = P\cdot b = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1/6 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ← вектор $\in V$ најближи вектору b

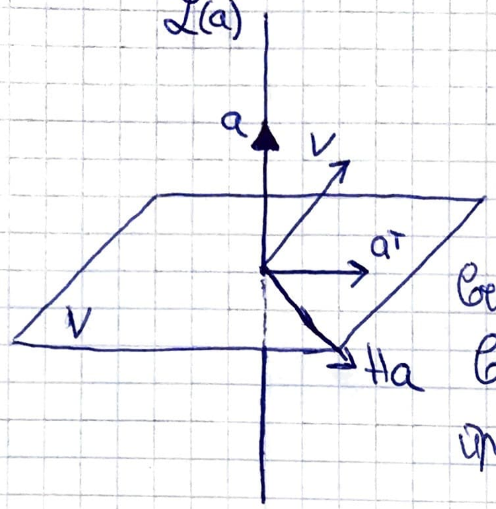
$$\text{distance}(b, V^\perp) = \|\text{project}_V b\| = 1/6\sqrt{4+25+1} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

$$\text{project}_{V^\perp} b = b - \text{project}_V b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/6 \\ -1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ← вектор $\in V^\perp$ најближи вектору b

$$\text{dist}(b, V) = \|\text{project}_{V^\perp} b\| = 1/6\sqrt{4+1+1+36} = \boxed{\sqrt{42}/6}$$

③ Улога $\frac{aa^T}{a^Ta}$ у Хаусхолдеровој рефлексији

$H_a = I - 2\frac{aa^T}{a^Ta}$



За хиперраван V и њеном базом a^T, око које вршимо рефлексију, једина компонента вектора која бива промењена је заправо пројекција вектора v на вектор a, нормалан вектор правца равни (V) a^T. Ту компоненту вектора v умањујемо за 2 дужине пројекције $\text{project}_a v$.

$$v - H_a v = (I - H_a)v = \begin{bmatrix} 0_{n-1\times n-1} & 0_{n-1\times 1} \\ 0_{1\times n-1} & 2 \end{bmatrix} v$$

H_a је онда $I - 2\frac{aa^T}{a^Ta}$

④ P је ортогонална пројекција. Показати да је $\|x\| = \|Px\|$ акко $x \in \mathcal{R}(P)$

$P^2 = P \quad PP^T = I$

$x \in \mathcal{R}(P) \Rightarrow \exists a : Pa = x \Rightarrow \|Pa\| = \|x\|$

$\|Px\| = \|PPa\| = \|P^2 a\| = \|Pa\| = \|x\| \Rightarrow \|Px\| = \|x\|$

$\Rightarrow x \in \mathcal{R}(P) \Rightarrow \|Px\| = \|x\| \quad (1)$

Акко је P ортогонална пројекција, онда је то и $I-P$

$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$

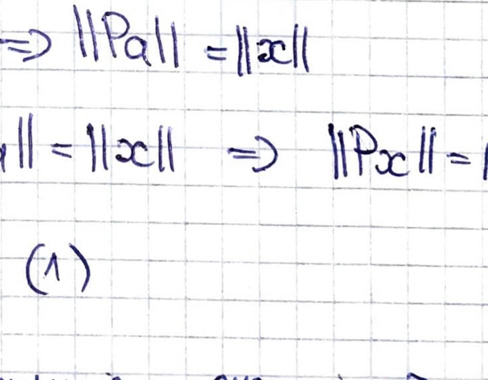
$\|x\| = \|Px\| \Rightarrow \|x\|^2 = \|Px\|^2$

$\Rightarrow \|(I-P)x\|^2 = 0$

$\Rightarrow (I-P)x = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(I-P)$

$\ker(I-P) = \mathcal{R}(I-(I-P)) \Rightarrow \ker(I-P) = \mathcal{R}(P) \Rightarrow x \in \mathcal{R}(P) \quad (2)$



На основу 1 и 2 $\Rightarrow \|x\| = \|Px\| \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(P)$

5. $P = I - uu^T \quad u \in \mathbb{R}^n$

$R(P) = ?$ $\quad rang(P) = ?$ Доказати да је $rang(P) = n-1$

Доказати да је P сингуларна матрица

Уколико узмемо вектор $v \in \mathbb{R}^n$ и на њега применимо P

$Pv = v - uu^T v$, можемо да приметимо да је uu^T пројекција на праву који има вектор u ($\mathcal{L}(u)$).

Даље можемо да закључимо да је простор слика матрице P ортогонална допуна вектора u у односу на $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow R(P) = u^T$

$R(P) \oplus R(I-P) = \mathbb{R}^n$

$R(P) \oplus R(I-(I-uu^T)) = \mathbb{R}^n$

$R(P) \oplus R(uu^T) = \mathbb{R}^n \quad / \dim$

$\dim(R(P)) \oplus \dim(R(uu^T)) = \dim(\mathbb{R}^n)$

$rank(P) + \overset{1}{rank(uu^T)} = n$

$\boxed{rank(P) = n-1}$

$\Rightarrow P$ је сингуларна матрица (није пуне димензије)