Алексић Стефан 16995 VIII домаћи задатак [НМР] 1/2

① редукована QR факторизација $A \in M_{n \times n}$ $\det(A) \neq 0$

$Ax = b$ $\hat{x}$ решење проблема најмањих квадрата

$A\hat{x} = QQ^Tb$? $\|A\hat{x} - b\|^2 = \|b\|^2 - \|Q^Tb\|^2$

$R\hat{x} = Q^Tb$ ← решење система је решење проблема најмањих квадрата

$R\hat{x} = Q^Tb$ / $Q \cdot *$

$QR\hat{x} = QQ^Tb$

$\boxed{A\hat{x} = QQ^Tb}$ $Q \cdot Q^T \neq I$ $Q^TQ = I$

$$\|A\hat{x} - b\|^2 = \|QQ^Tb - b\|^2 = (QQ^Tb - b)^T(QQ^Tb - b) =$$
$$= (QQ^Tb)^T(QQ^Tb) - (QQ^Tb)^Tb - b^TQQ^Tb + b^Tb =$$
$$= b^TQQ^TQQ^Tb - b^TQQ^Tb - b^TQQ^Tb + b^Tb =$$
$$= b^TQQ^Tb - 2b^TQQ^Tb + b^Tb =$$
$$= (Q^Tb)^T(Q^Tb) - 2(Q^Tb)^T(Q^Tb) + b^Tb =$$
$$= \|b\|^2 - \|Q^Tb\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\hat{x} - b\|^2 = \|b\|^2 - \|Q^Tb\|^2}$$

② $Q \in M_{m \times n}$ матрица са ортонормираним колонама $b \in \mathbb{R}^m$
$Q \cdot Q^T \neq I \quad Q^T Q = I$

$\hat{x} = Q^T b$ минимизира $\|Qx - b\|^2$?

$$\|Qx - b\|^2 \geq \|Q\hat{x} - b\|^2$$
$$(Qx-b)^T(Qx-b) \geq (QQ^Tb - b)^T(QQ^Tb - b)$$
$$x^TQ^T \cdot Qx - x^TQ^Tb - b^TQx + \cancel{b^Tb} \geq$$
$$(QQ^Tb)^T QQ^Tb - (QQ^Tb)^Tb - b^T(QQ^Tb) + \cancel{b^Tb}$$
$$x^Tx - 2(Qx) \cdot b \geq b^TQQ^TQQ^Tb - 2(QQ^Tb) \cdot b$$
$$\|x\|^2 - 2(Qx) \cdot b \geq b^TQQ^Tb - 2(b^T)(QQ^Tb)$$
$$\|x\|^2 - 2(Qx)^Tb \geq -b^TQQ^Tb$$
$$\|x\|^2 - 2x^TQ^Tb - b^TQQ^Tb \geq 0$$
$$\|x\|^2 - 2(x) \cdot (Q^Tb) - b^TQQ^Tb \geq 0$$
$$\|x\|^2 - 2 \cdot \|x\| \cdot \|Q^Tb\| \cos(\measuredangle(x, Q^Tb)) - b^TQQ^Tb \geq 0$$

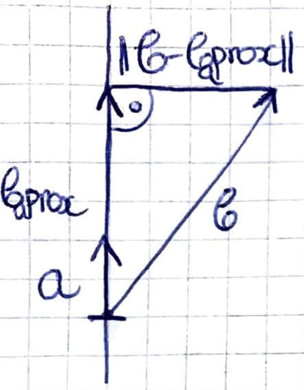
најмања вредност за $\cos(\measuredangle(x, Q^Tb)) = 1$

$$\|x\|^2 - 2\|x\| \|Q^Tb\| - b^TQQ^Tb \geq 0$$
$$\|x\|^2 - 2\|x\|\|Q^Tb\| - (Q^Tb)^T(Q^Tb) \geq 0$$
$$\|x\|^2 - 2\|x\|\|Q^Tb\| - \|Q^Tb\|^2 \geq 0$$
$$(\|x\| - \|Q^Tb\|)^2 \geq 0$$ увек тачно $\Rightarrow$ полазни израз

$$\|Qx - b\|^2 \geq \|Q\hat{x} - b\|^2$$

$\Rightarrow \hat{x} = Q^Tb$ јесте минимизација форме $\|Qx - b\|^2$

(3.) Најбоља апроксимација вектора b (b_{approx}) дуж правца одређеног са a. Најбоља, уколико минимизира норму $\|b - b_{approx}\|$



$\|b - b_{approx}\|$ има минималну вредност када је нормална на b_{approx} вектор

$$\|a\| = 1$$

$$\Rightarrow b_{approx} = \frac{b \cdot a}{a \cdot a} \cdot a = b \circ \frac{a^T a}{\|a\|^2} = b a^T a$$

b_{approx} је пројекција вектора b на правац a.

(4.) $\mu(y) = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$ је решење проблема најмањих квадрата, којим се проналази хоризонтална линија најближа подацима $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

$$\begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \frac{1}{n\|a\|^2 - (e^T a)^2} \cdot \begin{bmatrix} n a^T b - e^T a e^T b \\ \|a\|^2 e^T b - e^T a a^T b \end{bmatrix}$$

$a = [x_1\ x_2 \ldots x_n]^T$

$b = [y_1\ y_2 \ldots y_n]^T$

$e = [1\ 1 \ldots 1]$

Хоризонтална линија $\Rightarrow k = 0$

$$\Rightarrow n a^T b - e^T a e^T b = 0 \quad \Rightarrow \boxed{e^T a = n \frac{a^T b}{e^T b}}$$

$$p = \frac{\|a\|^2 e^T b - e^T a a^T b}{n\|a\|^2 - (e^T a)^2} = \frac{\|a\|^2 e^T b - n \frac{a^T b}{e^T b} \cdot a^T b}{n\|a\|^2 - n^2 \frac{(a^T b)^2}{(e^T b)^2}} =$$

$$= \frac{\left(\|a\|^2 (e^T b)^2 - n (a^T b)^2\right) \cancel{\frac{1}{e^T b}}}{n\|a\|^2 (e^T b)^2 - n^2 (a^T b)^2} \cdot (e^T b)^{\cancel{2}} =$$

$$= 1/n \cdot \frac{\|a\|^2 (e^T b)^2 - n (a^T b)^2}{\|a\|^2 (e^T b)^2 - n (a^T b)^2} \cdot (e^T b) =$$

$$= \frac{e^T b}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \mu(y)$$

5. а) Изразити $\sigma(v+u)$ за сваки од случаја $\rho(v,u)=0$, $\rho(v,u)=1$, $\rho(v,u)=-1$

б) u, v су вектори једнаких параметара $\mu(u)=\mu(v)=\mu$ и $\sigma(u)=\sigma(v)=\sigma$ $\rho(u,v)=\rho$ одредити $\mu(w)$, $\sigma(w)$ за $w=(u+v)/2$ и упоредити $\sigma(w)$ и σ

$$\sigma(v+u)^2 = \frac{(v+u-\mu(v+u)e)^T(v+u-\mu(v+u)e)}{e^Te} =$$

$$* \ \mu(v+u) = \frac{e^T(v+u)}{e^Te} = \frac{e^Tv+e^Tu}{e^Te} = \frac{e^Tv}{e^Te}+\frac{e^Tu}{e^Te} = \mu(v)+\mu(u)$$

$$\sigma(v+u)^2 = \frac{(v+u-(\mu(v)+\mu(u))e)^T(v+u-(\mu(v)+\mu(u))e)}{n}$$

$$= 1/n \cdot (v-\mu(v)e + u-\mu(u)e)^T(v-\mu(v)e+u-\mu(u)e)$$

$$= 1/n \cdot ((v-\mu(v)e)^T(v-\mu(v)e) + (u-\mu(u)e)^T(u-\mu(u)e) + $$
$$+ 2\cdot(v-\mu(v)e)\cdot(u-\mu(u)e))$$

$$= \sigma(v)^2+\sigma(u)^2+ 2/n\ \rho(v,u)\cdot\|\bar{v}\|\cdot\|\bar{u}\|$$
$$= \sigma(v)^2+\sigma(u)^2+2\rho(v,u)\sigma(v)\sigma(u).$$

$$\Rightarrow \sigma(v+u) = \sqrt{\sigma(v)^2+\sigma(u)^2+2\rho(v,u)\sigma(v)\sigma(u)}$$

$$\rho(v,u)=0 \Rightarrow \sigma(v+u)=\sqrt{\sigma(v)^2+\sigma(u)^2}$$
$$\rho(v,u)=1 \Rightarrow \sigma(v+u) = \sqrt{\sigma(u)^2+\sigma(v)^2+2\sigma(v)\sigma(u)}$$
$$= \sqrt{(\sigma(v)+\sigma(u))^2} = \sigma(v)+\sigma(u)$$
$$\rho(v,u)=-1 \Rightarrow \sigma(v+u) = \sqrt{\sigma(v)+\sigma(u)-2\sigma(v)\sigma(u)} =$$
$$= \sqrt{(\sigma(v)-\sigma(u))^2} = \sigma(v)-\sigma(u)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(v,u)=0 \Rightarrow \sigma(v+u)=\sqrt{\sigma(v)^2+\sigma(u)^2}}$$

$$\boxed{\rho(v,u)=1 \Rightarrow \sigma(v+u)=\sigma(v)+\sigma(u)}$$

$$\boxed{\rho(v,u)=-1 \Rightarrow \sigma(v+u)=\sigma(v)-\sigma(u)}$$

Алексић Стефан 16995 VIII домаћи задатак [МИИРЈ 2/2

5. б) $\mu(w) = \mu(1/2(v+u)) = \frac{(1/2(v+u))^T e}{e^T e} = 1/2 \cdot \left(\frac{v^T e}{e^T e} + \frac{u^T e}{e^T e}\right) =$

$= 1/2 \cdot (\mu(v) + \mu(u)) = 1/2(2\mu) = \mu$

$\mu(\alpha v) = \mu(\alpha v) = \frac{\alpha v^T e}{e^T e} = \alpha \mu(v)$

$\sigma(\alpha v)^2 = \frac{(\alpha v - \mu(\alpha v)e)^T(\alpha v - \mu(\alpha v)e)}{n} =$

$= \frac{\alpha(v-\mu(v)e)^T \cdot \alpha(v-\mu(\alpha v)e)}{n}$

$= \alpha^2 \sigma(v)^2$

$\sigma(w)^2 = \sigma(1/2(v+u))^2 = (1/2)^2 \cdot \sigma(v+u)^2 = 1/4 \cdot (\sigma(v)^2 + \sigma(u)^2 + 2\rho(v,u)\sigma(v)\sigma(u))$

$= 1/4 \cdot (\sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2) =$

$= 1/4 \cdot (2\sigma^2(1+\rho)) =$

$= 1/2\,\sigma^2(1+\rho)$

$\Rightarrow \sigma(w) = \sqrt{1/2\,\sigma^2(1+\rho)} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2}\sqrt{1+\rho}$

$-1 \le \rho \le 1 \Rightarrow 0 \le 1+\rho \le 2 \Rightarrow 0 \le \sigma(w) \le \sigma$

$\Rightarrow \boxed{\sigma(w) = \sigma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1+\rho}}$

$\boxed{0 \le \sigma(w) \le \sigma}$