UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Matrični metodi
Primene kroz Python

AUTOR: JOVANA DŽUNIĆ

Niš, 2020

Sadržaj

Poglavlje 1

Dekompozicija matrica

Dekompozicija ili faktorizacija matrica je predstavljanje matrice u obliku proizvoda jednostavnijih matrica ili matrica sa posebnim svojstvima. Jasno je da za svaku matricu postoji trivijalna dekompozicija $A = AI = IA$. Međutim, postoji mnogo drugih načina da se matrica predstavi u obliku proizvoda matrica. Svaka od faktorizacija vrši se sa ciljem postizanja pogodnosti prilikom rešavanja određene vrste problema, tj. bržeg i tačnijeg dolaženja do željenih informacija. Dekompozicije matrica igraju veliku ulogu u numeričkim algoritmima linearne algebre. Predstavljaju zajedničku bazu izračunavanja različitim numeričkim postupcima. Time dekompozicija matrica postaje platforma svih ostalih izračunavanja na osnovu koje se može lakše pristupiti rešavanju šireg skupa problema. Fokusiranjem na nekolicinu dekompozicija umesto na veliki broj različitih problema, softverski inženjeri uspevaju da proizvedu veoma efikasne pakete za rad sa matricama. Efekat primene dekompozicije ogleda se u smanjenju broja računskih operacija, povećanju pouzdanosti u izračunavanjima, povećanju brzine izvršenja algoritma i efikasnije upotrebe memorijskog prostora. Pristup dekompozicije matrica često omogućava lakše prepoznavanje ekvivalencije različito opisanih algoritama. Još jedna veoma važna karakteristika ovakvog pristupa jeste lakše praćenje greške izračunavanja.

Dekompozicija matrice je u opštem slučaju 'skupa' operacija za izvršenje. Za kvadratne matrice reda n broj potrebnih aritmetičkih operacija je reda n^3. Međutim, jednom dobijena dekompozicija može se više puta koristiti za probleme u kojima se pojavljuje polazna matrica. Shodno tome, početna cena dekompozicije matrice se višestruko isplati.

U okviru kursa bavićemo se različitim svojstvima obrađenih dekompozicija. Time se stiče uvid u mogućnosti primene dekompozicija matrica i van okvira numeričkih algoritama obrađenih tokom samog kursa.

1.1 LU dekompozicija

LU dekompozicija kvadratne matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ je njeno predstavljanje u obliku proizvoda $A = LU$, gde je L donje trougaona matrica (lower triangular), a U je gornje trougaona (upper triangular). U literaturi je još poznata i kao LR faktorizacija (left-right triangular decomposition) ili kao trougaona dekompozicija. Pre samog postupka predstavićemo prednosti poznavanja LU dekompozicije neke matrice.

Primer 1. Determinanta trougaone matrice je proizvod elemenata na glavnoj dijagonali. Trougaona matrica je regularna akko su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Ukoliko je poznata trougaona dekompozicija $A = LU$ matrice A tada je

$$\det(A) = \det(L)\det(U).$$

Matrica A je regularna akko su takve obe trougaone matrice L i U.

Primer 2. Kvadratna matrica A ima trougaonu dekompoziciju

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu LU faktorizacije zaključujemo da je matrica A singularna pa joj je bar jedna sopstvena vrednost jednaka 0. Teorema Silvestera 6 garantuje da matrice LU i UL imaju jednake sve sopstvene vrednosti. Kako je $UL = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, postupak određivanja karakterističnog polinoma i sopstvenih vrednosti je pojednostavljen.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+\lambda-1).$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{0, -1/2 \pm \sqrt{5}/2\}$.

LU dekompozicija matrice A sugeriše i dekompoziciju punog ranga ove matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L_1 U_1.$$

Na osnovu nje, primenom teoreme 6 dobija se

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(L_1U_1 - \lambda I_3) = (-\lambda)\det(U_1L_1 - \lambda I_2) \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+\lambda-1). \end{aligned}$$

Primer 3. LU faktorizacija nije rezervisana isključivo za kvadratne matrice. Pravougaona matrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ data je proizvodom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU.$$

Na osnovu poznate faktorizacije određujemo bitne karakteristike matrice A.

S obzirom da je $\det(L) = 1$ lako je naći inverznu matricu L^{-1}. Na osnovu njenog blok oblika imamo

$$L = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & O_{1\times 2} \\ C_{2\times 1} & I_2 \end{bmatrix} \implies L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & O_{1\times 2} \\ -C_{2\times 1} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Faktor L je regularna matrica = punog ranga. Zbog toga L predstavlja izomorfizam (definicija 7) koji slika skup linearno nezavisnih vektora u isti takav (teorema 9). Drugim rečima, regularna matrica u proizvodu čuva rang matrica činilaca. Dakle,

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(U) = 2 \implies \mathrm{def}(A) = \mathrm{def}(U) = 4 - 2 = 2.$$

Predstavljajući proizvod LU preko spoljašnjih proizvoda vektora dobijamo

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = L_1U_1
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da se matrica A može predstaviti u obliku proizvoda dve pravougaone matrice L_1 i U_1 koje su punog ranga. Šta više, odatle lako dobijamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(L_1) &= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),\\
\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U_1^T) &= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right).
\end{aligned}
$$

Jezgro matrice A čine svi vektori koji su ortogonalni na vrste matrice A, tj.

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = LUx = \overrightarrow{0}\}.$$

Dakle,

$$LUx = \overrightarrow{0} \iff L^{-1}LUx = L^{-1}\overrightarrow{0} \iff Ux = \overrightarrow{0} \iff U_1x = \overrightarrow{0},$$

pa je $\ker(A) = \ker(U) = \ker(U_1)$.

$$U_1x = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad + 2x_4 = 0\\ \qquad\quad x_3 - x_4 = 0\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 2x_4\\ x_3 = x_4\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Uočavamo vezu između koeficijenata elementarnih transformacija nad kolonama matrice U_1 i izraza za vektore jezgra matrice A.

$$
\begin{aligned}
\ker(U_1) &= \left\{\begin{bmatrix}-3x_2 - 2x_4 & x_2 & x_4 & x_4\end{bmatrix}^T \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right).
\end{aligned}
$$

Slično, levo jezgro matrice A, $\ker(A^T)$, je skup vektora ortogonalnih na prostor kolona matrice A tj. ortogonalnih na kolone matrice L_1.

$$L_1^Tx = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} x_1 \;\; +2x_2 \;\; +5x_3 = 0\\ \qquad\; x_2 \qquad\;\; = 0\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3\\ x_2 = 0\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\implies \ker(A) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Primer 4. Neka je dat trougaoni sistem linearnih jednačina, $u_{ii} \neq 0$,

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1\,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= b_1, \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2\,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= b_2, \\ u_{33}x_3 + \cdots + u_{3\,n-1}x_{n-1} + u_{3n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ u_{n-1\,n-1}x_{n-1} + u_{n-1\,n}x_n &= b_{n-1}, \\ u_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Prebrojaćemo aritmetičke operacije potrebne za rešavanje trougaonog sistema linearnih jednačina (1.1).

- Izračunavanje vrednosti nepoznate $x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}}$ troši jedno deljenje.
- $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - u_{n-1\,n}x_n}{u_{n-1\,n-1}}$, 1 deljenje, 1 množenje i 1 operacija $\pm$.
- $x_{n-2} = \dfrac{b_{n-2} - (u_{n-2\,n}x_n + u_{n-2\,n-1}x_{n-1})}{u_{n-2\,n-2}}$, 1 deljenje, 2 množenja i 2 operacije $\pm$.

  $\vdots$
- $x_{n-k} = \dfrac{b_{n-k} - (u_{n-k\,n}x_n + u_{n-k\,n-1}x_{n-1} + \cdots + u_{n-k\,n-k+1}x_{n-k+1})}{u_{n-k\,n-k}}$, 1 deljenje, k množenja i k operacija $\pm$.

  $\vdots$
- $x_1 = \dfrac{b_1 - (u_{1\,n}x_n + u_{1\,n-1}x_{n-1} + \cdots + u_{1\,2}x_2)}{u_{11}}$, 1 deljenje, $n-1$ množenja i $n-1$ operacija $\pm$.

Ukupan broj operacija dat je tabelom.

Deljenja	Množenja	Sabiranja/ oduzimanja	Ukupno
n	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	n^2

Ukoliko je poznata trougaona faktorizacija sistema jednačina $Ax = b \iff LUx = b$, rešavanje polaznog sistema možemo svesti na rešavanje dva trougaona sistema. Uvedimo smenu $y = Ux$. Tada je $Ax = b \iff Ly = b,\ Ux = y$. Broj potrebnih operacija za rešavanje dva trougaona sistema linearnih jednačina je $2n^2$. Ukoliko je neka od matrica L ili U sa jedinicama na glavnoj dijagonali štedi se na operaciji deljenja, pa je broj potrebnih operacija za rešavanje takvog sistema jednak $2n^2 - n = \mathcal{O}(2n^2)$, gde je $\mathcal{O}$ simbol Landaua.

Primer 5. Prikazaćemo jedan jednostavan metod enkripcije poruka. Ukoliko kvadratna matrica $A = [a_{ij}]$ ima samo celobrojne vrednosti $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, i $\det(A) = \pm 1$, tada i matrica A^{-1} sadrži isključivo celobrojne vrednosti. Takve matrice su pogodne za postupak šifrovanja i dešifrovanja poruka.

U prvom koraku šifrovanja svakom slovu dodeli se različita celobrojna vrednost. Uvedu se i celobrojne oznake za specijalne simbole kao što su razmak, zarez, tačka i slično. Jedan primer dodele dat je tabelom.

	A	B	V	G	D	Đ	E	Ž	Z
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5
I	J	K	L	Lj	M	N	Nj	O	P
-5	6	-6	7	-7	8	-8	9	-9	10
R	S	T	Ć	U	F	H	C	Č	Dž
-10	11	-11	12	-12	13	-13	14	-14	15
Š	.	?	!						
-15	16	-16	17						

Tada rečenica "Stiglo je proleće. Kada će leto i raspust?" postaje niz brojeva:

11,-11,-5,-2,7,-9,0,6,4,0,10,-10,-9,7,4,12,4,16,0,-6,1,3,
1,0,12,4,0,7,4,-11,-9,0,-5,0,-10,1,11,10,-12,11,-11,-16

Dobijeni brojevi smeštaju se u matricu $B \in \mathcal{M}_{6\times 7}$. Za enkripciju poruke množi se matrica B regularnom matricom A, npr. sa leve strane $AB = C$. Matrica C predstavlja šifrovanu polaznu poruku. Da bi poruka C bila dešifrovana neophodno je množenje matrice C sa A^{-1}, tj. $A^{-1}C = A^{-1}AB = B$. Matrica A se bira da bude što jednostavnija - sa celobrojnim vrednostima i determinante 1 ili -1 kako bi i A^{-1} bila sa celobrojnim vrednostima.

Zbog dugoročne zaštite podataka enkripcionu matricu A je potrebno često menjati. To podrazumeva postojanje jednostavnog metoda za generisanje matrice A pogodnih osobina. Generisanje takve matrice postaje jednostavno upotrebom LU dekompozicije. Matricu A dobijamo kao proizvod dve trougaone matrice sa celobrojnim vrednostima koje za dijagonalne elemente imaju isključivo ± 1 vrednosti. Na primer,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & -5 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & -6 & -5 & 14 & 11 \\ 1 & -2 & -7 & -5 & 15 & 9 \\ 4 & 2 & -4 & -2 & 9 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 11 & -11 & -5 & -2 & 7 & -9 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 10 & -10 & -9 & 7 \\ 4 & 12 & 4 & 16 & 0 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 12 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & -11 & -9 & 0 & -5 & 0 & -10 \\ 1 & 11 & 10 & -12 & 11 & -11 & -16 \end{bmatrix}.$$

Tada šifrovana poruka glasi

$$C = AB = \begin{bmatrix} 18 & -10 & 3 & -68 & 12 & -45 & -76 \\ 19 & 49 & 45 & -78 & 30 & -82 & -87 \\ 36 & -82 & -28 & -202 & 21 & -80 & -224 \\ 67 & -139 & -55 & -284 & 42 & -121 & -350 \\ 25 & -174 & -78 & -302 & 31 & -48 & -350 \\ 76 & -119 & -57 & -148 & 21 & -96 & -190 \end{bmatrix}.$$

Ključ ove enkripcije je matrica $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 112 & -22 & -37 & -3 & 10 & -4 \\ -108 & 21 & 36 & 3 & -10 & 4 \\ 190 & -39 & -62 & -2 & 15 & -9 \\ -63 & 13 & 20 & 1 & -5 & 3 \\ 56 & -12 & -18 & 0 & 4 & -3 \\ -17 & 4 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

Kroz prethodne primere razmatrali smo neke moguće primene trougaone faktorizacije matrice. Ostaje otvoreno pitanje postupka dobijanja same trougaone dekompozicije. Za datu kvadratnu matricu A potrebno je definisati postupak (numerički algoritam) kojim će se dobiti LU faktorizacija matrice A. Takođe, veoma važno pitanje je u kojim situacijama definisani postupak može proizvesti traženo rešenje i sa kojom tačnošću. Drugim rečima, neophodno je poznavati ograničenja numeričkog algoritma.

1.1.1 Postupak LU faktorizacije

Trougaona dekompozicija neke matrice nije jednoznačno određena. Ukoliko je poznata jedna faktorizacija $A = LU$, tada je i $A = (aL)(\frac{1}{a}U)$, $a \neq 0$, takođe trougaona dekompozicija matrice A. Ukoliko je D regularna dijagonalna matrica, tada je $A = (LD)(D^{-1}U)$ još jedna trougaona dekompozicija. Tip dekompozicije zavisi od konačne upotrebe dobijenog proizvoda i od vrste matrice koja se faktoriše. Ipak, postoji nekoliko strategija faktorizacije koje se većinski primenjuju u praksi.

1. Dulitlova faktorizacija. Dijagonalni elementi donje trougaone matrice L postavljaju se na vrednost 1. Trougaona matrica sa jedinicama na glavnoj dijagonali zove se unitrougaona matrica.

2. LDU dekompozicija. Trougaone matrice L i U su unitrougaone, dok je D dijagonalna.

3. Dekompozicija Čoleskog, $L = U^T$.

Trougaona dekompozicija Dulitla je u tesnoj vezi sa Gausovim postupkom eliminacije, mogu se smatrati ekvivalentnim postupcima. Elementarne transformacije vrsta imaju ključnu ulogu u ovom postupku. Predstavićemo ideju na primeru matrice male dimenzije.

Primer 6. Dulitlova dekompozicija matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times3}$ data je sledećom jednakošću.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU.$$

Množenjem matrica na desnoj strani dobijamo

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\l_{21}u_{11}&l_{21}u_{12}+u_{22}&l_{21}u_{13}+u_{23}\\l_{31}u_{11}&l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}&l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}.$$

Ukoliko elementarnim transformacijama vrsta transformišemo matricu A na trougaoni oblik uočavamo pravilnost među koeficijentima.

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\l_{21}u_{11}&l_{21}u_{12}+u_{22}&l_{21}u_{13}+u_{23}\\l_{31}u_{11}&l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}&l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot(-l_{21})\ \cdot(-l_{31})\\+\\+\end{matrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\cdot(-l_{32})\\+\end{matrix}\to\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}$$

Prethodni primer je pokazni za postupak LU dekompozicije u opštem slučaju. Dulitlova dekompozicija je način registrovanja celokupnog postupka dovođenja matrice na trougaoni oblik elementarnim transformacijama vrsta. Matrica L nosi informacije o koeficijentima upotrebljenim za transformacije vrsta kroz operaciju oduzimanja. Matrica U predstavlja stepenastu formu vrsta matrice A. Dijagonalni elementi matrice U su izabrani (pivot) elementi kojima se anuliraju pozicije u matrici A ispod njih.

Za opisivanje postupka LU dekompozicije u opštem slučaju koristićemo blok notaciju. Tom prilikom prebrojaćemo i potrebne aritmetičke operacije u postupku Dulitlove dekompozicije za matricu dimenzije $n\times n$. Ključna jednakost jeste blok LU dekompozicija data sa

$$M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&O\\CA^{-1}&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\O&M/A\end{bmatrix},\qquad M/A=D-CA^{-1}B,$$

tačnije, njen specijalni oblik kada je regularni blok A samo skalar a :

$$M=\begin{bmatrix}a&v^T\\u&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&O\\\frac{1}{a}u&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&v^T\\\vec{0}&M/a\end{bmatrix},\qquad M/a=D-\frac{1}{a}uv^T,\ u,v,\vec{0}\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{1.2}$$

Neka je M realna kvadratna matrica čiju trougaonu dekompoziciju tražimo. Njen skalarni i blok oblik dati su sa:

$$M=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\&&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&v_1^T\\u_1&D_1\end{bmatrix},\quad u_1=\begin{bmatrix}a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},v_1=\begin{bmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{1n}\end{bmatrix},D_1=\begin{bmatrix}a_{22}&\dots&a_{2n}\\&\ddots&\\a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Postupak dovođenja na trougaoni oblik možemo posmatrati kao iterativnu proceduru sukcesivnog predstavljanja matrice M u obliku proizvoda

$$M=L_1U_1=L_1L_2U_2=\dots=L_1L_2\cdots L_{n-1}U_{n-1},$$

gde su L_k donje trougaone matrice, a U_k je blok gornje trougaona matrica. Na ovaj način se marica M opisuje proizvodom donje trougaone matrice $L_1L_2\cdots L_k$ i blok gornje trougaone matrice U_k koja se kroz iteracije dovodi na gornje trougaoni oblik $U_{n-1}=U$. Dakle, matrice L_k vrše popravljanje matrice U_{k-1} u U_k, prelaskom sa blok trougaone ka trougaonoj matrici. Na kraju postupka je

$$M=LU,\qquad L=L_1L_2\cdots L_{n-1},\qquad U=U_{n-1}.$$

Jedna iteracija postupka LU dekompozicije sastoji se od eliminacije elemenata prve kolone ispod glavne dijagonale donjeg dijagonalnog bloka M_k matrice U_k. U prvoj iteraciji to je postupak prelaska prikazan sa:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \to U_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ \vec{0} & M_1 \end{bmatrix}.$$

Tom prilikom generiše se jedna kolona matrice L i jedna vrsta matrice U. Na osnovu (1.2) imamo da je

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_1 & O_{1\times(n-1)} \\ \widehat{l}_1 & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ O_{(n-1)\times 1} & M_1 \end{bmatrix} = L_1 U_1, \qquad \widehat{l}_1 = \frac{1}{a} u_1. \end{aligned}$$

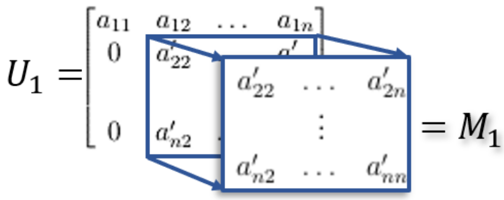
Primetimo da je matrica L_1 donje trougaona, dok je U_1 blok gornje trougaona. Ukoliko uvedemo oznaku

$$l_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{l}_1 \end{bmatrix},$$

i vektore standardne baze prostora $\mathbb{R}^n$ označimo sa e_k, tada je L_1 rezultat ažuriranja ranga 1 jedinične matrice. Primetimo i ortogonalnost vektora l_1 i e_1,

$$L_1 = I_n + l_1 e_1^T, \qquad e_1^T l_1 = 0. \tag{1.3}$$

U narednoj iteraciji ekvivalentan postupak razlaganja primenjuje se na blok M_1 matrice U_1. Dimenzija bloka M_1 je za jedan manja od dimenzija matrice M i U_1, tj. matrica prve iteracije



Primenjujući (1.2) na $M_1 = \widehat{L_2}\widehat{U_2}$ dobijamo

$$U_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ O_{(n-1)\times 1} & M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ O_{(n-1)\times 1} & \widehat{L_2}\widehat{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & \widehat{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ O_{(n-1)\times 1} & \widehat{U_2} \end{bmatrix} = L_2 U_2,$$

gde su

$$\widehat{L_2} = \begin{bmatrix} I_1 & O_{1\times(n-2)} \\ \widehat{l}_2 & I_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \widehat{U_2} = \begin{bmatrix} a'_{22} & v_2^T \\ O_{(n-2)\times 1} & M_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & \widehat{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & v_1^T \\ O_{(n-1)\times 1} & \widehat{U_2} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & O_{1\times(n-2)} \\ 0 & 1 & O_{1\times(n-2)} \\ \hline O_{(n-2)\times 1} & \widehat{l}_2 & I_{n-2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & & v_1^T \\ \hline 0 & a'_{22} & v_2^T \\ \cline{2-3} O_{(n-2)\times 1} & O_{(n-2)\times 1} & M_2 \end{array}\right] \\ &= L_2 U_2. \end{aligned}$$

Zamenjujući poslednji rezultat u izraz za $M = L_1U_1$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
M = L_1L_2U_2 &= \begin{bmatrix} I_1 & O_{1\times(n-1)} \\ \widehat{l}_1 & I_{n-1} \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & O_{1\times(n-2)} \\ 0 & 1 & O_{1\times(n-2)} \\ \hline O_{(n-2)\times 1} & \widehat{l}_2 & I_{n-2} \end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & & v_1^T \\ \hline 0 & a'_{22} & v_2^T \\ \cline{2-3} O_{(n-2)\times 1} & O_{(n-2)\times 1} & M_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & O_{1\times(n-2)} \\ \cline{1-1} & 1 & O_{1\times(n-2)} \\ \cline{2-3} \widehat{l}_1 & \widehat{l}_2 & I_{n-2} \end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & & v_1^T \\ \hline 0 & a'_{22} & v_2^T \\ \cline{2-3} O_{(n-2)\times 1} & O_{(n-2)\times 1} & M_2 \end{array}\right]. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Uvođenjem oznake

$$
l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{l}_2 \end{bmatrix},
$$

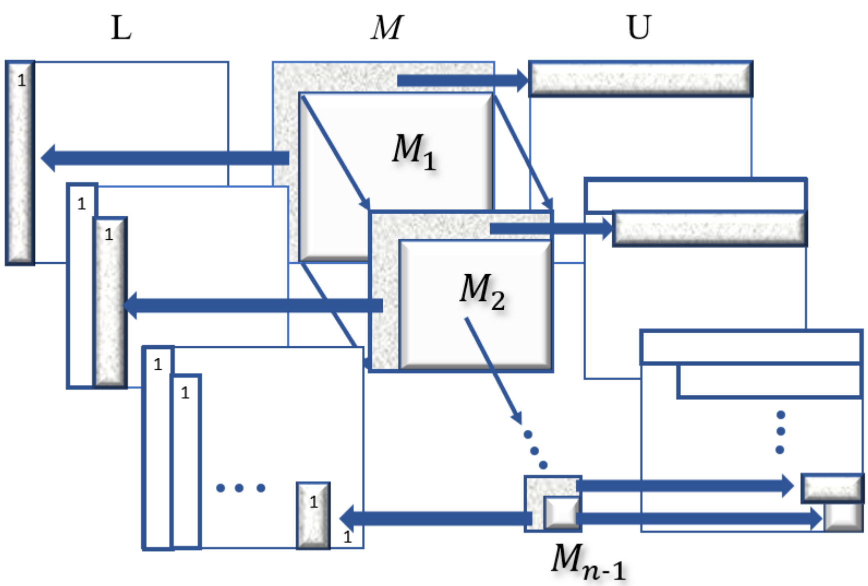
po ugledu na (1.3), i matrica L_2 može se jednostavno opisati uz pomoć spoljašnjeg proizvoda vektora i važe ortogonalnosti

$$
L_2 = I_n + l_2e_2^T, \qquad e_1^Tl_2 = e_2^Tl_2 = 0. \qquad (1.5)
$$

Na osnovu (1.3) i (1.5) možemo jednostavno algebarski da potvrdimo rezultat iz (1.4).

$$
\begin{aligned}
L_1L_2 &= (I_n + l_1e_1^T)(I_n + l_2e_2^T) = I_n + l_1e_1^T + l_2e_2^T + (l_1e_1^T)(l_2e_2^T) \\
&= I_n + l_1e_1^T + l_2e_2^T + l_1(e_1^Tl_2)e_2^T = I_n + l_1e_1^T + l_2e_2^T + O_n = I_n + l_1e_1^T + l_2e_2^T \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & O_{1\times(n-2)} \\ \cline{1-1} & 1 & O_{1\times(n-2)} \\ \cline{2-3} \widehat{l}_1 & \widehat{l}_2 & I_{n-2} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Postupak eliminacije kolone i smanjivanja dimenzije problema nastavlja se sve do dolaska na matricu dimenzije 1×1.

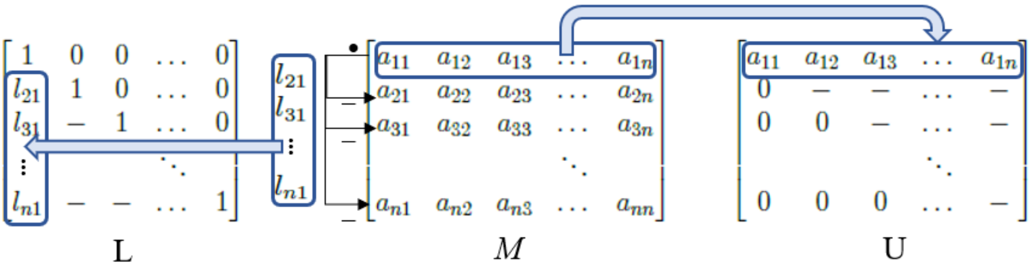


Jednakosti (1.2) i

$$
L_k = I_n - l_ke_k^T, \quad e_j^Tl_k = 0, \; j = 1, \ldots, k,
$$

omogućavaju tačno algebarsko izvođenje opisanog algoritma.

Potražićemo broj aritmetičkih operacija upotrebljenih prilikom eliminacije elemenata prve kolone matrice M. Najpre je potrebno računati koeficijente $l_{k1} = \dfrac{a_{k1}}{a_{11}},\ k = 2, \ldots, n$, sa $n-1$ deljenja. Element kojim delimo zovemo pivot ili vodeći element. U prvoj iteraciji je to a_{11}. Koeficijenti l_{k1} obrazuju prvu kolonu matrice L ispod jedinične dijagonale. Prva vrsta matrice M čini prvu vrstu matrice U.



Dobijenim koeficijentom l_{k1} množimo prvu vrstu i oduzimamo je od $k-$te, $k = 2, 3, \ldots, n$. U matričnom zapisu

$$U_1 = L_1^{-1}M = (I_n - l_1 e_1^T)M = M - l_1 v_1^T = M - \begin{bmatrix} 0 \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Odatle je $M = U_1 + l_1 v_1^T$, tj. ažuriranje ranga 1 matrice M.

Primetimo da su rezultati unutar prve kolone matrice U_1 (nule na pozicijama $(k, 1)$) unapred poznati. Iz tog razloga odgovarajuća izračunavanja nije potrebno vršiti. Aritmetičke operacije preduzimamo nad elementima kolone 2 i nadalje. Množenje prve vrste je zapravo $n-1$ pojedinačnih množenja. Oduzimanje dve vrste je $n-1$ pojedinačnih oduzimanja.

$$\begin{array}{cc|cccc|cl} [& a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} &] & \cdot l_{k1} \\ & & \downarrow - & \downarrow - & \ldots & \downarrow - & & \\ [& 0 & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} &] & , k = 2, 3, \ldots, n. \end{array}$$

Ukupan broj operacija za $n-1$ vrsta dat je tabelom.

Deljenja	Množenja	Sabiranja/ oduzimanja	Ukupno
$n-1$	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$(n-1)(2n-1)$

Dobijeni rezultat i iterativni opis LU dekompozicije olakšavaju prebrojavanje ukupnog broja operacija algoritma. Za matricu dimenzije $n \times n$ broj operacija u jednoj eliminaciji (duž prve kolone) iznosi $f(n) = (n-1)(2n-1)$. Tada je za matricu $k \times k$ broj aritmetičkih operacija $f(k) = (k-1)(2k-1) = 2k^2 - 3k + 1,\ k = 2, 3, \ldots, n$. Računska cena ukupne LU procedure je

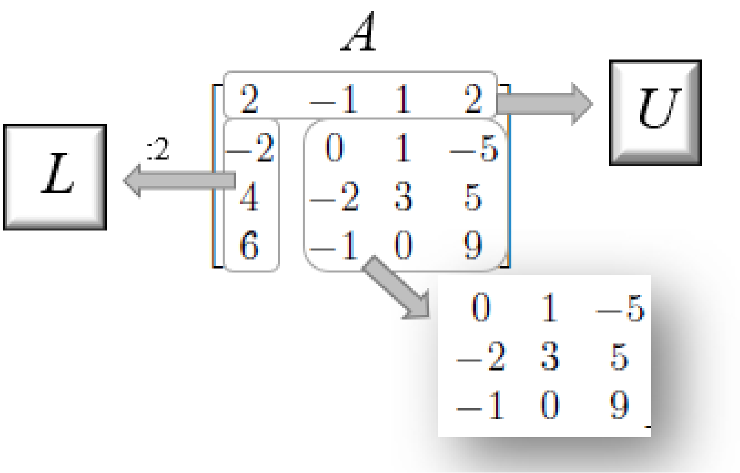
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} (2k^2 - 3k + 1) = \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n.$$

Broj operacija je reda veličine $\mathcal{O}\left(\dfrac{2}{3}n^3\right)$.

Primer 7. Odredićemo trougaonu dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Iteracija 1: Prva kolona matrice L dobija se deljenjem elemenata prve kolone matrice A prvim pivot elementom $a_{11} = 2$. Prva vrsta matrice A je prva vrsta matrice U.



Slika 1.1: Određeni elementi LU faktorizacije posle I iteracije

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/2 & 1 & 0 & 0 \\ 4/2 & - & 1 & 0 \\ 6/2 & - & - & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & 1 & 0 \\ 3 & - & - & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}.$$

Zbog uštede memorijskog prostora elementi matrice L mogu se smestiti u transformisanu matricu A ispod glavne dijagonale, na mesto kreiranih nula. Gornje trougaoni deo matrice A se u procesu eliminacije transformiše u matricu U.

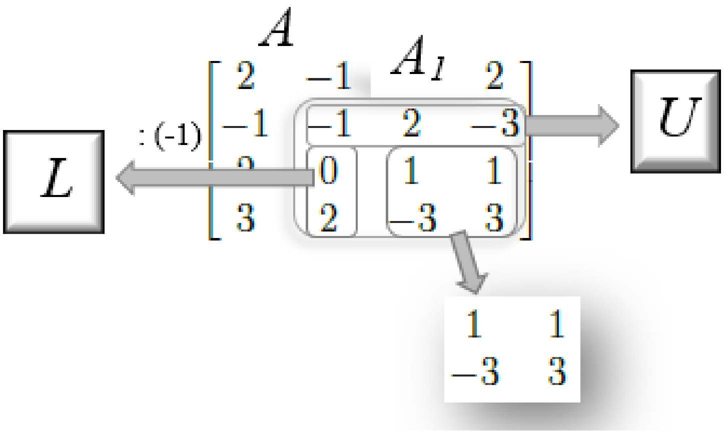
U nastavku procedure vršimo ažuriranje ranga 1 podmatrice dimenzije 3 smeštene u donjem desnom uglu matrice A.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} = A_1.$$

Iteracija 2: Sadržaj izmenjene matrice A je:

$$\left[\begin{array}{r|rrr} 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right].$$

U drugoj iteraciji pivot element je na poziciji $(2, 2)$ i iznosi -1. Druga kolona matrice L ispod glavne dijagonale dobija se deljenjem elemenata prve kolone matrice A_1 pivot elementom. Druga vrsta matrice U počevši od glavne dijagonale popunjava se elementima prve vrste matrice A_1.



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & - & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}.$$

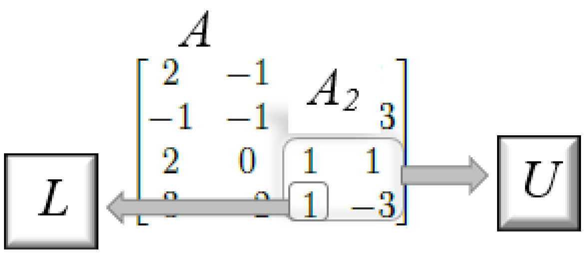
Vršimo ažuriranje ranga 1 podmatrice dimenzije 2 smeštene u donjem desnom uglu matrice A_1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = A_2.$$

Iteracija 3: Sadržaj izmenjene matrice A je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Poslednji pivot element je na poziciji $(3,3)$ i iznosi 1. Na osnovu njega određujemo preostale elemente matrica L i U.



Transformisana matrica $A_{LU} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ u sebi sadrži sve potrebne informacije LU dekompozicije. U donje trougaonom delu bez glavne dijagonale su elementi matrice L. Gornje trougaoni deo, uključujući glavnu dijagonalu, sadrži elemente matrice U. Dobili smo trougaonu dekompoziciju $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Opisani postupak u literaturi je poznat kao Dulitlova dekompozicija. Za LDU dekompoziciju izdvajamo dijagonalne elemente matrice U i svaku vrstu U podelimo odgovarajućim dijagonalnim elementom. Rezultat je unitrougaona matrica U'.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DU'.$$

Tada je $A = LDU'$ dekompozicija matrice u kojoj učestvuju dve unitrougaone matrice i jedna dijagonalna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu LDU dekompozicije matrice A druge trougaone dekompozicije se lako dobijaju: dekompozicija Kroua data je izrazom $A = (LD)U'$, dok je predstavljena Dulitlova dekompozicija $A = L(DU')$.

Primetimo da ukoliko je $A = LU$, tada je $A^T = U^T L^T$. Drugim rečima, dekompoziciju matrice A sa unitrougaonom matricom U možemo dobiti Dulitlovim postupkom sprovedenim nad matricom A^T. Zaključujemo da je trougaona dekompozicija sa unitrougaonom matricom U vezana za elementarne transformacije kolona matrice A.

1.1.2 Izbor pivot elementa

Osnovni problem prilikom izvođenja algoritma LU dekompozicije jeste nula ili veoma mala vrednost pivot elementa u nekom iteracionom koraku. U takvoj situaciji vršimo zamenu mesta vrsta matrice A sa ciljem postavljanja bolje vrednosti na pivot poziciju. Ovakav postupak opisuje se jednakošću $PA = LU$, gde je P permutaciona matrica i naziva se LU faktorizacija sa delimičnim izborom pivot elementa. Tada je $A = P^T LU$. Zapis permutacionom matricom služi za dokazivanje algebarskih svojstava algoritma. U praksi se množenje permutacionom matricom ne koristi već se registruje permutacija niza indeksa vrsta ili se vrši fizička zamena mesta vrsta. Koji je pristup efikasniji zavisi od konkretne arhitekture računara na kojoj se algoritam realizuje. Kod implementacije na računaru, uobičajena strategija za izbor pivot elementa je maksimalnost modula. Time se postiže stabilnost izračunavanja u aritmetici konačne preciznosti.

Definicija 1. Permutaciona matrica reda n je svaka matrica dobijena nekom permutacijom vrsta ili kolona jedinične matrice I_n.

S obzirom da kolone (vrste) permutacione matrice čine svi vektori e_k standardne baze, to je svaka permutaciona matrica P ortogonalna, tj. važi

$$PP^T = P^T P = I_n.$$

Pretpostavimo da je u $(k+1)-$om koraku LU dekompozicije matrice $M = L_1 \cdots L_k U_k$ potrebno zameniti pivot element na poziciji $(k+1, k+1)$ zamenom mesta dve vrste u bloku M_k matrice U_k.

$$M = (L_1 \cdots L_k)U_k = \widetilde{L_k}U_k, \quad \widetilde{L_k} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 & \\ & & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{L_{(n-k)\times k}} & I_{n-k} \end{array}\right],$$

$$U_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2k} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{M_k} \end{array}\right].$$

Zamena vrsta odnosi se na vrstu $k+1$ i jednu od vrsta $k+2,\dots,n$, kako se ne bi narušila prethodno ostvarena trougaona struktura vodećeg bloka matrice U_k.

Označimo sa $P_k \in \mathcal{M}_{n-k}$ permutacionu matricu koja vrši odgovarajuću zamenu vrsta u bloku M_k. Tada je

$$\begin{aligned}
M = \widetilde{L_k}U_k &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{L_{(n-k)\times k}} & I_{n-k} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{M_k} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{L_{(n-k)\times k}} & P_k^T P_k \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{M_k} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{L_{(n-k)\times k}} & P_k^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{P_k M_k} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{P_k^T P_k L_{(n-k)\times k}} & P_k^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{P_k M_k} \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & P_k^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{P_k L_{(n-k)\times k}} & I_{n-k} \end{array}\right] \\
&\quad \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{P_k M_k} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Zaključujemo da za permutacionu matricu $P = \begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & P_k \end{bmatrix}$ važi

$$PM = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O_{k\times(n-k)} \\ l_{k1} & \dots & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{P_k L_{(n-k)\times k}} & I_{n-k} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O_{(n-k)\times k}} & \multicolumn{3}{c}{P_k M_k} \end{array}\right],$$

tj. iste permutacije vrsta je potrebno sprovesti nad matricom M i odgovarajućim blokom matrice $\widetilde{L_k}$ kako bi se zadržala trougaona struktura konačnog izraza. Smeštanje LU faktorizacije u jednu matricu ovaj postupak naročito olakšava. Cele vrste transformisane matrice A u tom postupku menjaju mesta.

Primer 8. Potražimo LU faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Nakon prvog procesa eliminacije dobijena je vrednost 0 na poziciji $(2,2)$. Ona ne može biti izabrana za novi pivot element. Zbog toga vršimo zamenu mesta druge i treće vrste.

$$\to \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \_ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \_ & \_ & 1 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & \_ & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}$$

U preostalom procesu faktorizacije postupak eliminacije se nastavlja bez nula pivota sve do poslednjeg koraka.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & \_ & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo konačnu faktorizaciju

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

koja predstavlja faktorizaciju polazne matrice sa odgovarajućom permutacijom vrsta.

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = PA.$$

1.1.3 LU i sistemi linearnih jednačina

Jedna od primena LU faktorizacije kvadratnih matrica je u postupku rešavanja sistema linearnih jednačina. Cilj je obezbediti lakše izračunavanje rešenja za niz sistema jednačina $Ax_k = b_k$, dakle gde svi sistemi imaju zajedničku matricu sistema. LU faktorizacija matrica koristi se i za određivanje numeričkog ranga matrica i diskusiju rešenja sistema linearnih jednačina.

Primer 9. Koristeći LU faktorizaciju rešićemo sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 4x_3 &= 6, \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 16x_3 &= 14. \end{aligned}$$

LU faktorizacija matrice sistema glasi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 10 & -2 \\ 4 & 2 & 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Za rešavanje sistema jednačina uvodimo oznake $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $y = Ux$ i $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$. Time se polazni problem svodi na rešavanje dva trougaona sistema

$$Ly = b \quad \text{i} \quad Ux = y.$$

Najpre se rešava sistem $Ly = b$ po nepoznatom vektoru y. Sistem u matričnom obliku eksplicitno glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Polazeći od prve jednačine komponente rešenja y glase redom:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ y_2 &= b_2 - l_{21}y_1, \\ y_3 &= b_3 - (l_{31}y_1 + l_{32}y_2) = b_3 - \begin{bmatrix} l_{31} & l_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ y_4 &= b_4 - (l_{41}y_1 + l_{42}y_2 + l_{43}y_3) = b_4 - \begin{bmatrix} l_{41} & l_{42} & l_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

U sledećoj etapi rešava se sistem $Ux = y$, koji eksplicitno u matričnom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

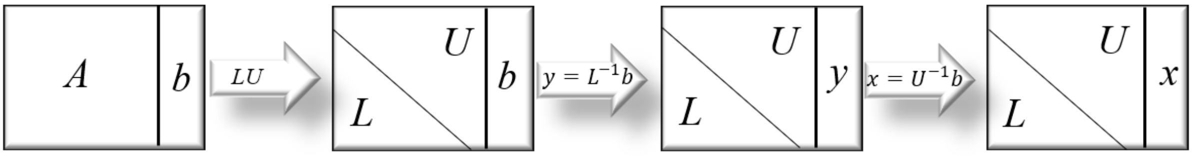
Polazeći od poslednje jednačine, komponente rešenja x dobijaju se 'unazad'.

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{y_4}{u_{44}}, \\ x_3 &= \frac{1}{u_{33}}(y_3 - u_{34}y_4), \\ x_2 &= \frac{1}{u_{22}}(y_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4)) = \frac{1}{u_{22}}\left(y_2 - \begin{bmatrix} u_{23} & u_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right), \\ x_1 &= \frac{1}{u_{11}}(y_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4)) = \frac{1}{u_{11}}\left(y_2 - \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Uobičajen postupak implementacije prikazanog postupka podrazumeva upotrebu jedne matrice za smeštaj svih podataka. Proširena matrica sistema $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ koristi blok A za smeštaj LU faktorizacije na način već opisan u primeru 7. Slobodna kolona, tj. blok b koristi se za smeštaj rešenja. Opis sledi u nastavku.

Jednakosti (1.6) ukazuju da se prilikom rešavanja $Ly = b$ jednom upotrebljene komponente vektora b u nastavku izračunavanja više ne koriste dok se prethodno dobijene vrednosti y stalno upotrebljavaju. Detaljnije posmatrano, komponenta b_1 koristi se samo prilikom izračunavanja

y_1. Zbog toga smeštaj vrednosti y_1 može koristiti poziciju b_1. Slično, komponenta b_2 se ne koristi po izračunavanju y_2. Zbog toga y_2 možemo tretirati kao ažuriranu vrednost pozicije b_2. Nastavljajući na isti način za sve komponente bloka b, ovaj blok postaje kolona slobodnih članova za naredni trougaoni sistem $Ux = y$. Analogna analiza i postupak primenjuju se i na implementaciju rešenja sistema $Ux = y$ na osonvu jednakosti (1.7). Jedina razlika je u smeru popunjavanja blok kolone. Šematski prikaz opisanog postupka dat je u nastavku.



Slika 1.2: Šema rešenja sistema

Primer 10. Potražićemo LDU dekompoziciju Vandermondove matrice $V_4 = V_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$V_4 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \_ & 1 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \_ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \_ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{bmatrix} \ | : (x_2 - x_1) \quad , D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \_ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}$$

$$V_4 \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} & \_ & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \\ 0 & 0 & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2) & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_1 + x_2 + x_4) \end{bmatrix} \ | : (x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$V_4 \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2) & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_1 + x_2 + x_4) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(x_1 - x_4)(x_4 - x_2) \\ + \end{matrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} & \frac{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_4 \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \end{bmatrix}.$$

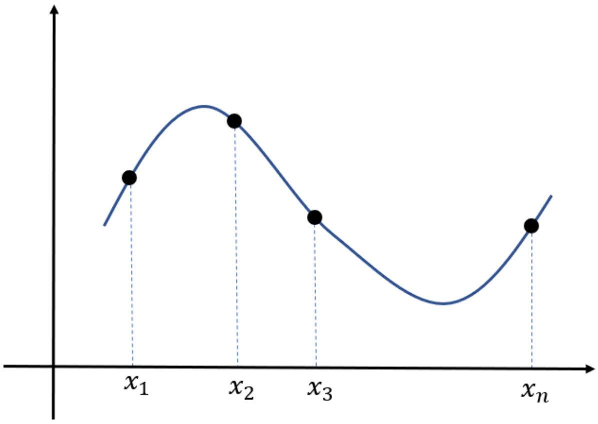
Konačna dekompozicija matrice $V_4 = LDU$ pogodno je da se posmatra u obliku $V_4 = (LD)U$ kako bi se izgubili razlomci u izrazu za matricu L.

$$V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & 0 \\ 1 & x_4 - x_1 & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2) & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \end{bmatrix}$$
$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu dobijene dekompozicije odredićemo polinom $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, najviše trećeg stepena, koji zadovoljava jednakosti $P(x_k) = y_k,\ k = 1, 2, 3, 4$. Postavljeni problem predstavlja klasičan interpolacioni problem - provlačenje glatke krive kroz unapred zadate tačke (x_k, y_k). Koordinate x_k nazivaju se interpolacioni čvorovi, a jednakosti $P(x_k) = y_k$ predstavljaju interpolacione uslove.

Interpolacioni uslovi opisuju sistem linearnih jednačina čijim rešavanjem se dobijaju nepoznati koeficijenti a, b, c, d polinoma P.

$$P(x_k) = y_k,\ k = 1, 2, 3, 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1, \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = y_2, \\ ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = y_3, \\ ax_4^3 + bx_4^2 + cx_4 + d = y_4. \end{cases} \tag{1.8}$$



Slika 1.3: Interpolacija

Uvodeći oznake

$$V_4 = V_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

interpolacioni uslovi (1.8) dobijaju matrični oblik $V_4p = (LD)(Up) = f$. Najpre rešavamo trougaoni sistem $(LD)s = f$ za $s = Up$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)(x_3-x_2) & 0 \\ 1 & x_4-x_1 & (x_4-x_1)(x_4-x_2) & (x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 \equiv y[1], \\ s_2 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y[2]-y[1]}{x_2-x_1} \equiv y[1,2], \\ s_3 &= \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - y[1,2]}{x_3-x_2} = \frac{y[1,3]-y[1,2]}{x_3-x_2} \equiv y[1,2,3], \\ s_4 &= \frac{\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1} - y[1,2]}{x_4-x_2} - y[1,2,3]}{x_4-x_3} = \frac{\frac{y[1,4]-y[1,2]}{x_4-x_2} - y[1,2,3]}{x_4-x_3} \\ &= \frac{y[1,2,4]-y[1,2,3]}{x_4-x_3} = y[1,2,3,4]. \end{aligned}$$

Uvedene oznake $y[1,\ldots,k]$ nazivaju se podeljene razlike i skraćuju zapis dobijenih izraza.

U sledećoj etapi rešava se trougaoni sistem $Up = s$,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 & x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[1,2] \\ y[1,2,3] \\ y[1,2,3,4] \end{bmatrix}.$$

Dolazimo do koeficijenata polinoma P koji glase

$$\begin{aligned}
a &= y[1,2,3,4],\\
b &= y[1,2,3] - (x_1 + x_2 + x_3)a,\\
c &= y[1,2] - (x_1 + x_2)b - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)a,\\
d &= y[1] - x_1c - x_1^2b - x_1^3a.
\end{aligned}$$

Za navedeni problem interpolacije, promenom baze prostora polinoma mogu se interpolacioni uslovi odmah dovesti na sistem jednačina u trougaonom obliku. Baza kojom se ova relaksacija omogućava naziva se Njutnova baza. Za konkretni primer, Njutnova baza glasi

$$1,\ x - x_1,\ (x - x_1)(x - x_2),\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \tag{1.9}$$

Potražićemo koeficijente polinoma $P(x)$ u odnosu na bazu (1.9), tj. tražićemo koeficijente c_k za

$$P(x) = c_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + c_1(x - x_1) + c_0.$$

Interpolacioni uslovi (1.8) dobijaju oblik

$$\begin{cases}
c_0 = y_1,\\
c_1(x_2 - x_1) + c_0 = y_2,\\
c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + c_1(x_3 - x_1) + c_0 = y_3,\\
c_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) + c_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) + c_1(x_4 - x_1) + c_0 = y_4.
\end{cases} \tag{1.10}$$

Rešavanjem trougaonog sistema (1.10) nalazimo

$$\begin{aligned}
c_0 &= y[1],\\
c_1 &= y[1,2],\\
c_2 &= y[1,2,3],\\
c_3 &= y[1,2,3,4].
\end{aligned}$$

Dobijeni polinom

$$P(x) = y[1] + y[1,2](x - x_1) + y[1,2,3](x - x_1)(x - x_2) + y[1,2,3,4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

predstavlja Njutnov oblik interpolacionog polinoma P. Primetimo da je zbog jedinstvenosti rešenja sistema (1.8) interpolacioni polinom P jedinstven. Izborom različitih baza prostora polinoma samo se menja oblik zapisa, ali ne i sam interpolacioni polinom.

Postupak izračunavanja i upotrebe memorijskog prostora LU faktorizacije prikazan u primeru 9 primenljiv je i u situaciji kada je potebno simultano rešavanje više sistema linearnih jednačina sa zajedničkom matricom sistema.

Primer 11. Koristeći LU faktorizaciju sa delimičnim izborom pivot elementa rešićemo istovremeno sisteme jednačina koji imaju iste matrice sistema:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 2\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &=& 1\\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &=& -1\\
-x_1 + x_2 + 4x_3 &=& 3\\
x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_5 &=& 2
\end{array}, \qquad
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 3\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &=& 3\\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &=& 9\\
-x_1 + x_2 + 4x_3 &=& -3\\
x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_5 &=& 13
\end{array}.$$

U matričnom zapisu ove sisteme možemo istovremeno beležiti sa

$$AX=B,\quad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\-1&-1&2&2&2\\1&1&-2&2&2\\-1&1&4&0&0\\1&-1&-4&0&5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&3\\1&3\\-1&9\\3&-3\\2&13\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\\x_{41}&x_{42}\\x_{51}&x_{52}\end{bmatrix}.$$

Dobijen je transformisan sistem $LUX=B$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\-1&0&-1&1&0\\1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&5&1&1\\0&0&-3&1&1\\0&0&0&4&4\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\\x_{41}&x_{42}\\x_{51}&x_{52}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\3&-3\\-1&9\\1&3\\2&13\end{bmatrix}.$$

Prva faza rešavanja transformisanog sistema jeste nalaženje Y iz trougaonog sistema $LY=B$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\-1&0&-1&1&0\\1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\\y_{31}&y_{32}\\y_{41}&y_{42}\\y_{51}&y_{52}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\3&-3\\-1&9\\1&3\\2&13\end{bmatrix}.$$

Obe kolone rešenja matrice Y paralelno izračunavamo:

$$y_{11}=b_{11},\ y_{12}=b_{12}$$
$$\iff \begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\end{bmatrix},$$

$$y_{21}=b_{21}-l_{21}y_{11},\ y_{22}=b_{22}-l_{21}y_{12}$$
$$\iff \begin{bmatrix}y_{21}&y_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}-l_{21}\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\end{bmatrix},$$

$$y_{31}=b_{31}-\begin{bmatrix}l_{31}&l_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\y_{21}\end{bmatrix},\ y_{32}=b_{32}-\begin{bmatrix}l_{31}&l_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{12}\\y_{22}\end{bmatrix},$$
$$\iff \begin{bmatrix}y_{31}&y_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_{31}&l_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\end{bmatrix},$$

$$y_{41}=b_{41}-\begin{bmatrix}l_{41}&l_{42}&l_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{bmatrix},\ y_{42}=b_{42}-\begin{bmatrix}l_{41}&l_{42}&l_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\end{bmatrix},$$
$$\iff \begin{bmatrix}y_{41}&y_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{41}&b_{42}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_{41}&l_{42}&l_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\\y_{31}&y_{32}\end{bmatrix},$$

$$y_{51}=b_{51}-\begin{bmatrix}l_{51}&l_{52}&l_{53}&l_{54}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\\y_{41}\end{bmatrix},\ y_{52}=b_{52}-\begin{bmatrix}l_{51}&l_{52}&l_{53}&l_{54}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\\y_{42}\end{bmatrix},$$
$$\iff \begin{bmatrix}y_{51}&y_{52}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{51}&b_{52}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_{51}&l_{52}&l_{53}&l_{54}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\\y_{31}&y_{32}\\y_{41}&y_{42}\end{bmatrix}.$$

Slično dobijamo rešenje X iz trougaonog sistema $UX = Y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ -3 & 6 \\ 0 & 12 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} / u_{55},$$

$$\begin{bmatrix} x_{41} & x_{42} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} - u_{45} \begin{bmatrix} x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} \right) / u_{44},$$

$$\begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{34} & u_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} \right) / u_{33},$$

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{23} & u_{24} & u_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} \right) / u_{22},$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} \right) / u_{11}.$$

Rešenje oba sistema čitamo iz kolona matrice X :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najbitnija primena simultanog rešavanja sistema jednačina jeste određivanje inverzne matrice.

Napomena 1. Računanje inverzne matrice je skupa operacija i u numeričkim algoritmima se izbegava kad god je to moguće.

Primer 12. Koristeći LU faktorizaciju odredićemo inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -9 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je A^{-1} rešenje simultanog sistema jednačina $AX = I$.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$LY = I, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$UX = Y, \quad X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -37 & 18 & -16 & 7 & -4 \\ -14 & 7 & -5 & 2 & -2 \\ 25 & -11 & 11 & -4 & 3 \\ 17 & -8 & 7 & -3 & 2 \\ 10 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opisani postupak LU faktorizacije određuje trougaonu faktorizaciju i u slučaju singularnih matrica kao i pravougaonih matrica. U tom slučaju LU faktorizacija nam omogućava određivanje numeričkog ranga matrice. Naglašavamo da se radi o numeričkom rangu jer aritmetika u konačnoj preciznosti može uneti greške relevantne za konačan zaključak.

Primer 13. Faktorizacija matrice iz primera 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

omogućava čitanje njenog ranga, $\mathrm{rang}(A) = 2$.

LU faktorizaciju pravougaone matrice dimenzije $n \times m$ u slučaju $n \leq m$, podrazumeva da je matrica $L \in \mathcal{M}_{n\times n}$ kvadratna, dok je $U \in \mathcal{M}_{n\times m}$ pravougaona matrica.

Primer 14. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Tačnost faktorizacije

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

može se proveriti izračunavanjem.

Zaključke obrađene teme možemo dati kroz sledeća tvrđenja.

Teorema 1. *Ako je matrica $A = LU$ regularna matrica, gde je L donje unitrougaona matrica i U gornje trougaona matrica, tada je ova faktorizacija jedinstvena.*

DOKAZ: Pretpostavimo da je $LU = \widetilde{L}\widetilde{U}$, gde su sve matrice u proizvodu regularne i $\widetilde{L}$ je unitrougaona. Imajući u vidu da proizvod trougaonih matrica istog tipa je trougaona matrica istog tipa, kao i da inverzna matrica trougaone ostaje istog tipa, jednakost

$$\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1} \tag{1.12}$$

označava jednakost donje trougaona i gornje trougaone matrice. Zaključujemo da su oba proizvoda u (1.12) dijagonalne matrice. Kako su L i $\widetilde{L}^{-1}$ unitrougaone to je $\widetilde{L}^{-1}L = I$. Zbog toga je $L = \widetilde{L}$ i $U = \widetilde{U}$. □

Posledica 1. *Matrica A je regularna akko postoji permutaciona matrica P tako da važi*

$$PA = LDU,$$

gde je L donje unitrougaona kvadratna matrica, D je regularna dijagonalna matrica i U je gornje unitrougaona kvadratna matrica.

Posledica 2. *Matrica $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ je ranga r ukoliko postoji permutaciona matrica $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$, donje unitrougaona kvadratna matrica $L \in \mathcal{M}_{m\times m}$, i gornje trougaona matrica $U \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ranga r tako da važi*

$$PA = LU.$$

1.2 Dekompozicija Čoleskog

Trougaona dekompozicija matrica je veoma koristan algoritam. Postaje još efikasniji ukoliko rastavljana matrica poseduje neku pogodnost u unutrašnjoj strukturi. Tako faktorizacija Čoleskog $A = LL^T$ umesto određivanja dve trougaone matrice, problem faktorizacije svodi na određivanje jedne trougaone matrice, L ili L^T. Ograničenje ovakvog algoritma ogleda se u sledeća dva uslova.

- Matrica A mora biti simetrična. Zaista, iz uslova $A = LL^T$ nalazimo da je
$$A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A.$$
- Proces dekompozicije uključuje izračunavanje kvadratnog korena izraza koji sadrže elemente matrice A. Zbog toga je neophodno da odgovarajući izrazi budu pozitivni.

Drugi uslov uspešne realizacije faktorizacije Čoleskog je u tesnoj vezi sa sopstvenim vrednostima matrice $A = LL^T$. Neka su λ i v sopstvena vrednost i sopstveni vektor koji odgovaraju matrici A, tj $Av = \lambda v$. U opštem slučaju vektor v može biti kompleksan, te je izraz za izračunavanje njegove norme $\|v\|^2 = v^H v$. Tada je

$$\begin{aligned}
&v^H(Av) = v^H(\lambda v) = \lambda\|v\|^2,\\
&v^H(Av) = v^H(LL^Tv) \overset{L^T=L^H}{=} v^H(LL^Hv) = (v^HL)(L^Hv) = (L^Hv)^H(L^Hv) = \|L^Hv\|^2 \geq 0,\\
&\qquad \Longrightarrow \lambda\|v\|^2 \geq 0 \Longrightarrow \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Matrice A sa svojstvom $\mathrm{Sp}(A) \geq 0$ nazivaju se pozitivno semidefinitne matrice. U slučaju da matrica A ima strogo pozitivne sopstvene vrednosti naziva se pozitivno definitna matrica. Više o tome biće reči u okviru teme o simetričnim matricama.

Primer 15. Za simetričnu matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ dekompozicija Čoleskog koristi donje trougaonu matricu $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$. Tada uslov $A = LL^T$ postaje

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}.$$

Prvi neophodan uslov za realizaciju dekompozicije Čoleskog je $a_{kk} > 0$. Izjednačavnjem elemenata u prvoj koloni matrica A i LL^T nalazimo

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 &\implies\quad l_{11} &= \sqrt{a_{11}}\,, \\ a_{21} &= l_{11}l_{21} &\implies\quad l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}}\,, \\ a_{31} &= l_{11}l_{31} &\implies\quad l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}}\,. \end{aligned}$$

Izjednačavanje elemenata nastavljamo duž ostalih kolona matrica A i LL^T.

$$\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2 &\implies\quad l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}\,, \\ a_{32} &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} &\implies\quad l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}, \\ a_{33} &= l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 &\implies\quad l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}\,. \end{aligned}$$

Uslovi pozitivnosti glase: $a_{11} > 0$,

$$\begin{aligned} & a_{22} - l_{21}^2 > 0 \iff a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}^2}{a_{11}} > 0 \implies a_{11}a_{22} - a_{21}^2 > 0 \\ & \iff \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ & a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2 > 0 \iff a_{33} - \frac{a_{31}^2}{a_{11}} - \frac{\left(\dfrac{a_{11}a_{32} - a_{21}a_{31}}{a_{11}}\right)^2}{\dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}^2}{a_{11}}} > 0 \\ & \implies a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}^2a_{33} - a_{13}^2a_{22} - a_{11}a_{23}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} > 0 \\ & \iff \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Definicija 2. Vodeći minor reda k matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ je determinanta podmatrice u preseku prvih k redova i kolona, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ & & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Definicija 3. Simetrična matrica je pozitivno definitna ako su svi glavni minori pozitivni.

Da bi simetrična matrica imala Čoleski dekompoziciju neophodno je da bude pozitivno definitna. Formule za dekompoziciju Čoleskog u opštem slučaju glase:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sqrt{a_{ii}^2 - \left\| \begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{i\,i-1} \end{bmatrix} \right\|^2} & , i = j, \\ \dfrac{a_{ij}}{l_{jj}} - \dfrac{1}{l_{jj}} \begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{i\,j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{j1} \\ l_{j2} \\ \dots \\ l_{j\,j-1} \end{bmatrix} & , i > j, \\ 0 & , i < j. \end{cases}$$

Primer 16. Odredićemo LL^T dekompoziciju matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = 2, \\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 1, \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = -4, \\
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 11.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $A = LL^T$, za $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Za LDU faktorizaciju simetričnih matrica pozitivna definitnost nije neophodna. Ukoliko za regularnu simetričnu matricu A važi da je $A = LDU$, onda je $L = U^T$. Zaista, zbog simetričnosti matrice A važi:

$$LDU = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T.$$

Kako je LDU dekompozicija jednoznačno određena (posledica 1), potvrđujemo da je $L = U^T$.

Primer 17. Odredićemo LDU dekompoziciju matrice A koja nije pozitivno definitna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \quad \cdot(-4) \\ + \\ + \end{matrix} \implies L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & \_ & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & \_ & \_ \\ 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & -9 & -17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-9/8) \\ + \end{matrix} \implies L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 9/8 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & \_ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & -55/8 \end{bmatrix} \implies L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 9/8 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & -55/8 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -55/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DL^T.$$

Dakle, za regularnu simetričnu matricu A postupak LDU dekompozicije, tj. LDL^T dekompozicije svodi se na izračunavanje elemenata matrice L i skladištenje pivot elemenata u dijagonalne elemente matrice D.

Za LDL^T dekompoziciju sa izborom pivot elementa teži se očuvanju simetričnosti celokupne strukture. Svaka permutacija vrsta praćena je odgovarajućom permutacijom kolona. Konačan izraz dekompozicije tada glasi

$$PAP^T = LDL^T.$$

Pristup LDL^T dekompozicijom može se primeniti i u slučaju singularnih simetričnih matrica. Kod ovakvih matrica u postupku LDL^T dekompozicije kada se pojavi pivot element jednak nuli, odgovarajući dijagonalni element matrice D se postavlja da bude nula. Dijagonalna matrica D svojim nenula elementima registruje rang faktorisane matrice.

Primer 18. Simetrična matrica A poseduje sledeću LDL^T dekompoziciju:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu gornjeg izraza dobija se dekompozicija matrice A punog ranga.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Pitanja i zadaci

1. Za date matrice L i U odrediti $A = LU$ i $\det(A)$.

   a) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3/5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$;

   b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Odrediti LU faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \\ -3 & -10 & 11 & -8 \\ 4 & 14 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Naći trougaonu dekompoziciju trodijagonalne matrice 10×10

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & \ddots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Koristeći LU faktorizaciju rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

5. Koristeći LU faktorizaciju rešiti simultano sisteme jednačina.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -14 & 22 \\ 36 & -18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$

6. Koristeći LU faktorizaciju odrediti inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

7. Odrediti broj aritmetičkih operacija potrebnih za simultano rešavanje sistema jednačina $AX = B$, gde su $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, primenom LU faktorizacije.

8. Dekompozicija Čoleskog matrice A kao rezultat dala je matricu $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Odrediti $\det(A)$, a zatim i samu matricu A.

9. LU dekompozicija simetrične matrice A kao rezultat dala je matricu $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Odrediti A.

10. Odrediti matrice L i U tako da važi $A = LU$ koristeći LU faktorizaciju i koristeći dekompoziciju Čoleskog.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

11. Odrediti koeficijente polinoma trećeg stepena koji prolazi kroz tačke $(0, 10),\ (1, 35),\ (3, 31)$ i $(4, 2)$.

12. Odrediti polinom četvrtog stepena koji prolazi kroz tačke $(0, 1),\ (0.75, -0.25)$ i $(1, 1)$, a u tačkama $x = 0$ i $x = 1$ ima vrednost drugog izvoda jednak nuli.

Dodatak

Definicija 1. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Bilo koja matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ & \dots & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_r} \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m \\ 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n \end{matrix},$$

naziva se podmatrica matrice A.

Teorema 1. *Determinanta matrice reda n ima sledeće osobine:*

(a) $\det(A^T) = \det(A)$;

(b) $\det(kA) = k^n \det(A), \qquad k \in \mathbb{R}$;

(c) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$; *(Koši[1]-Bineova[2] formula)*

(d) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$;

(e) $\det(S^{-1}AS) = \det(A)$;

(f) $(\det A)\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n$;

(g) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

Definicija 2. Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji matrica X takva da je $XA = AX = I$, tada se X naziva inverzna matrica matrice A i označava A^{-1}. Za matricu koja ima inverznu matricu kažemo da je regularna ili invertibilna.

Definicija 3. Minor elementa a_{ij} determinante matrice $A = \left[a_{ij}\right]$ je determinanta D_{ij} koja se dobija iz $\det(A)$ izostavljanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone. Algebarski kofaktor elementa a_{ij} je tada $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

Definicija 4. Adjungovana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ je matrica algebarskih kofaktora elemenata a_{ji}.

Teorema 2. *(Laplasov[3] razvoj) Determinanata $D = \left|a_{ij}\right|_{i,j=1}^{n}$ može se pomoću kofaktora njenih elemenata razložiti na sledeće načine*

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \qquad D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) francuski matematičar

[2] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) francuski matematičar

[3] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749–1827) francuski matematičar i astronom

Teorema 3. *Za savako $i, j = 1, 2, \ldots, n$ važi*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_i^j, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_i^j,$$

gde je $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ *Kronekerova*[4] *delta.*

Teorema 4. *Za kvadratnu matricu A važi da je $A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A) \cdot I$. Ako je $\det A \neq 0$, tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Teorema 5. *Operacija T transponovanja matrica ima osobine*

$$\begin{aligned} &(A + B)^T = A^T + B^T \\ &(\lambda A)^T = \lambda A^T, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ &(AB)^T = B^T A^T \\ &(A^n)^T = (A^T)^n, \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Definicija 5. Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako je $Ax = \lambda x$ (λ skalar) gde je x ne-nula vektor, kažemo da je x sopstveni (karakteristični) vektor koji odgovara sopstvenoj (karakterističnoj) vrednosti λ matrice A. Skup svih sopstvenih vrednosti matrice A naziva se spektar matrice i označava $\operatorname{Sp}(A)$.

Definicija 6. Karakteristični polinom kvadratne matrice A definiše se kao

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Teorema 6. *(Silvesterova teorema za determinante) Ako su $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $m \geq n$, tada je*

$$\det(AB - \lambda I_m) = (-\lambda)^{m-n} \det(BA - \lambda I_n),$$

gde I_m i I_n označavaju jedinične matrice odgovarajućeg reda.

Teorema 7. *(Kroneker*[5]*-Kapelijev*[6] *stav*[7]*) Sistem jednačina $Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ ima rešenja akko je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}([A\ b]) = r$. Ukoliko je $r = n$, sistem ima jedinstveno rešenje (određeno npr. Kramerovim formulama). Za $r < n$ sistem se može rešiti po r nepoznatih tako da preostalih $n - r$ nepoznatih mogu uzimati proizvoljne vrednosti iz $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.*

Teorema 8. *Homogen sistem jednačina $Ax = O$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $x, O \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, gde je $O = [0\ 0 \ldots 0]^T$, ima samo trivijalno rešenje $x = O$ akko je $\operatorname{rang} A = n$. U slučaju $\operatorname{rang} A = r < n$ prostor rešenja sistema je dimenzije $n - r$.*

Posledica 1. *Kvadratni sistem jednačina ima jedinstveno rešenje akko je determinanta matrice sistema različita od 0, tj. akko je matrica sistema regularna.*

[4]Leopold Kronecker (1823–1891) nemački matematičar
[5]Leopold Kronecker (1823–1891) nemački matematičar
[6]Alfredo Capelli (1855–1910) italijanski matematičar
[7]poznat i kao Ruš-Kapeli stav

Definicija 7. Preslikavanje $f : U \to V$ vektorskog prostora U u vektorski prostor V je homomorfizam ili linearno preslikavanje ukoliko važi:

$$\forall u, v \in U, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Kada je homomorfizam f bijekcija nazivamo ga izomorfizam prostora U i V.

Teorema 9. *Izomorfizam slika skup linearno nezavisnih vektora u linearno nezavisan skup.*

Teorema 10. *Izomorfizam slika bazu u bazu.*

Literatura

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2009.

[2] M. A. Kovačević, G. V. Milovanović, and R. Ž. Đorđević. *MATEMATIKA I*. SVEN, Niš, Srbija, 2009.

[3] Lloyd N. Trefethen and III David Bau. *Numerical linear algebra*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, 1997.

[4] T. Shores. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2000.