# Matrični metodi u računarstvu

Osnovno o kursu

# Ključne reči

- Dekompozicija matrica
- Numerički algoritmi
- Matematičko modeliranje

# Dekompozicija matrica

- Blok matrice
- LU dekompozicija
- QR dekompozicija
- Spektralna dekompozicija
- SVD dekompozicija

# Prednosti Dekompozicije

- Rešava ne jedan, već više problema
- Mogućnost ponovne upotrebe  dekompozicije
- Mogućnost brze izmene dekompozicije u slučaju promene polazne matrice

# Specijalne vrste matrica

- Dijagonalne i trougaone
- Simetrične
- Ortogonalne

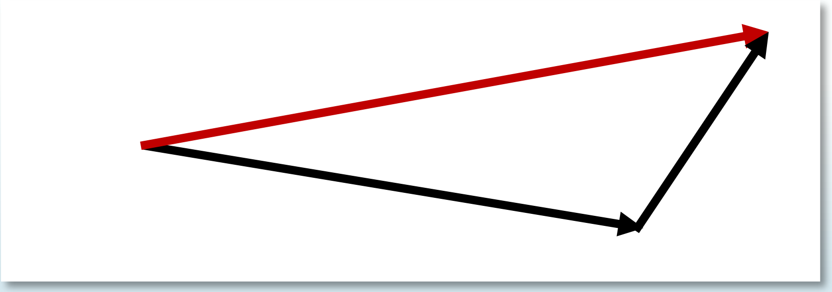
# Vektorska i matrična algebra

Rekapitulacija

# Vektori i operacije nad njima

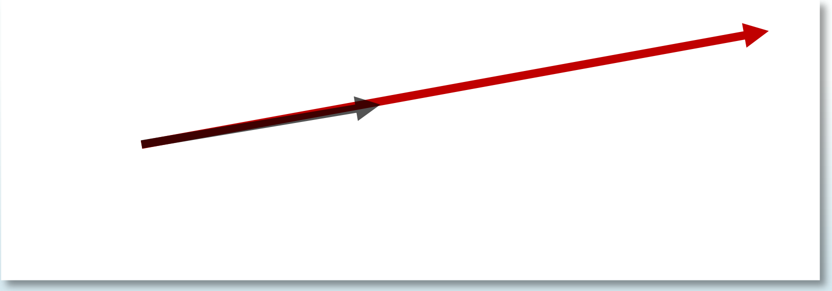
## Sabiranje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$



## Skaliranje

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$



# Vektori i operacije nad njima

## Linearna kombinacija

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

## Predstavljanje vektora

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

## Lineal

$$L(v_1, v_2, \cdots, v_k)$$

$$= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \,|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$$

## Linearna nezavisnost

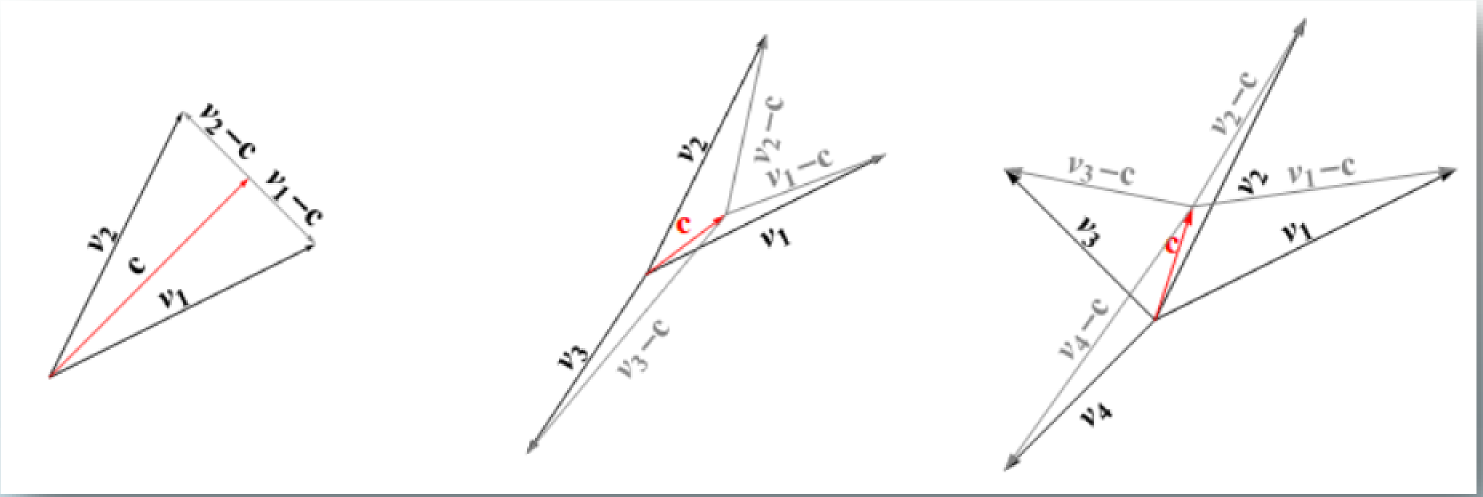
$$\vec{0} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k$$

# Vektori i operacije nad njima

Primer: Centar skupa vektora $v_1, v_2, \dots, v_k$

$$c = c(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k} v_1 + \frac{1}{k} v_2 + \cdots + \frac{1}{k} v_k = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_k}{k}$$



# Vektori i operacije nad njima

**Standardni skalarni proizvod**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

**Euklidova norma vektora**

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

# Vektori i operacije nad njima

## Osobine realnog skalarnog proizvoda i norme vektora

$$v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$$

$$v_1 \cdot (v_2 + v_3) = v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_3$$

$$(\alpha v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (\alpha v_2) = \alpha (v_1 \cdot v_2)$$

$$\|v\| = 0 \iff v = o$$

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

$$\|\alpha v_1\| = |\alpha| \, \|v_1\| , \alpha \in R$$

$$|v_1 \cdot v_2| \leq \|v_1\| \, \|v_2\| \quad \overset{v_1, v_2 \neq o}{\Rightarrow} \quad -1 \leq \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \, \|v_2\|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos \measuredangle (v_1, v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \, \|v_2\|}$$

# Vektori i operacije nad njima

Ortogonalnost : $\boxed{\boldsymbol{v_1} \perp \boldsymbol{v_2} \iff \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0}} \iff \cos\measuredangle(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = 0$

Kolinearnost : $v_1 = \alpha v_2 \iff v_1 \cdot v_2 = \pm\|v_1\|\|v_2\| \iff v_1 || v_2$

Normiran vektor ili jedinični vektor $v \iff \|v\| = 1$

$$\text{normiranje: } v^* = \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow \|v^*\| = 1 \text{ za } v \neq o$$

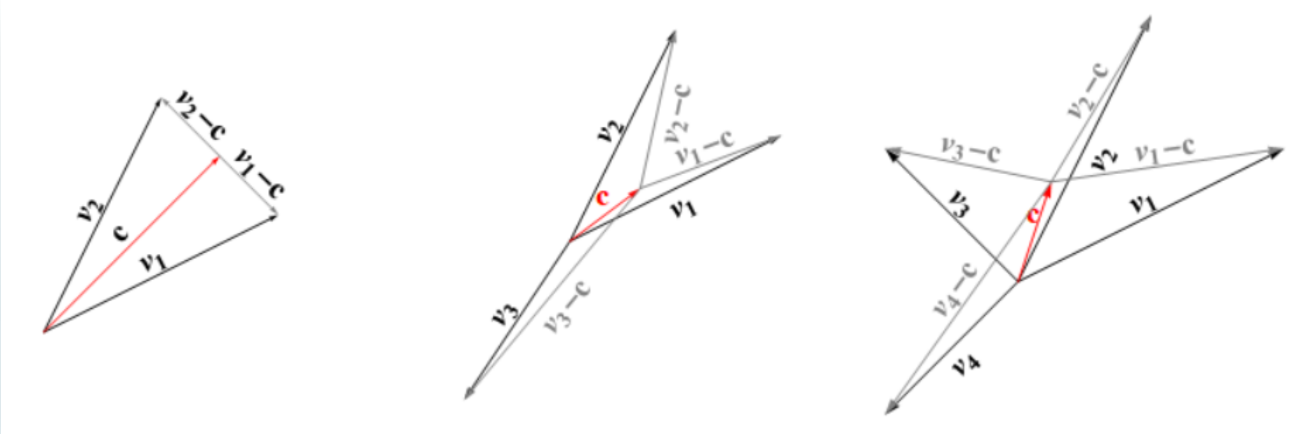
# Vektori i operacije nad njima

Primer: Centar skupa vektora $v_1, v_2, \ldots, v_k$

$$c = c(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \frac{1}{n} v_1 + \frac{1}{n} v_2 + \cdots + \frac{1}{n} v_n = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} \, ,$$

$$(v_1 - c) + (v_2 - c) + \cdots + (v_n - c) = o \, .$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i, c)^2 = \min_{u \in V} \sum_{i=1}^{n} d(v_i, u)^2$$



# Vektori i operacije nad njima

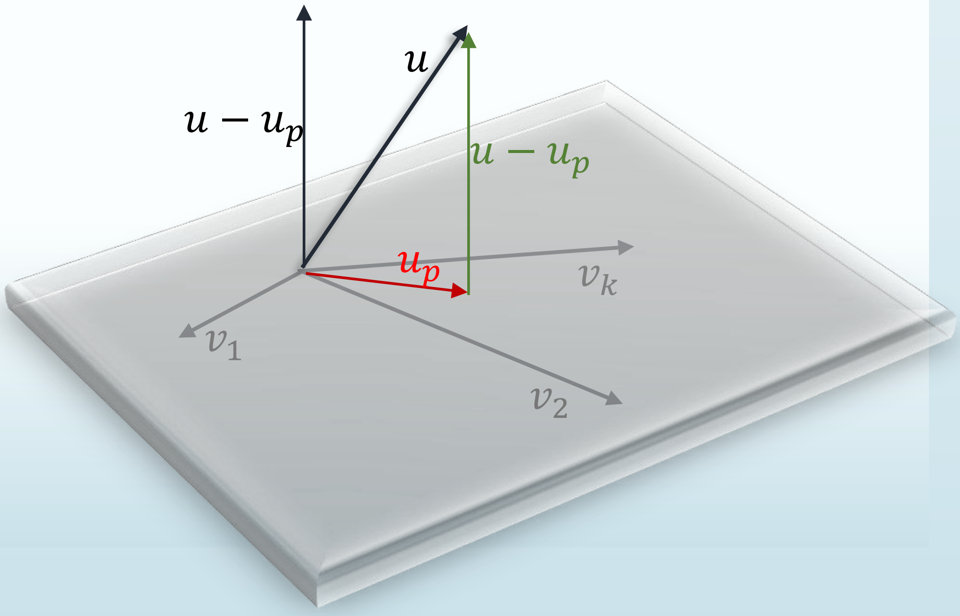
**Primer:** Ortogonalno rastojanje vektora $u$ od potprostora $L(v_1, v_2, \dots, v_k)$

Neka je $v_1, v_2, \dots, v_k$ ortonormirana baza potprostora $L(v_1, v_2, \dots, v_k) \subset R^n$ i $u \in R^n$. Označimo

$$u_p = (u \cdot v_1)v_1 + (u \cdot v_2)v_2 + \cdots + (u \cdot v_k)v_k.$$

Vektor $u_p$ ima osobine:

1. $u_p \in L(v_1, v_2, \dots, v_k)$
2. $u - u_p \perp L(v_1, v_2, \dots, v_k)$
3. $d(u, u_p) = \min\limits_{v \in L(v_1, v_2, \dots, v_k)} d(u, v)$

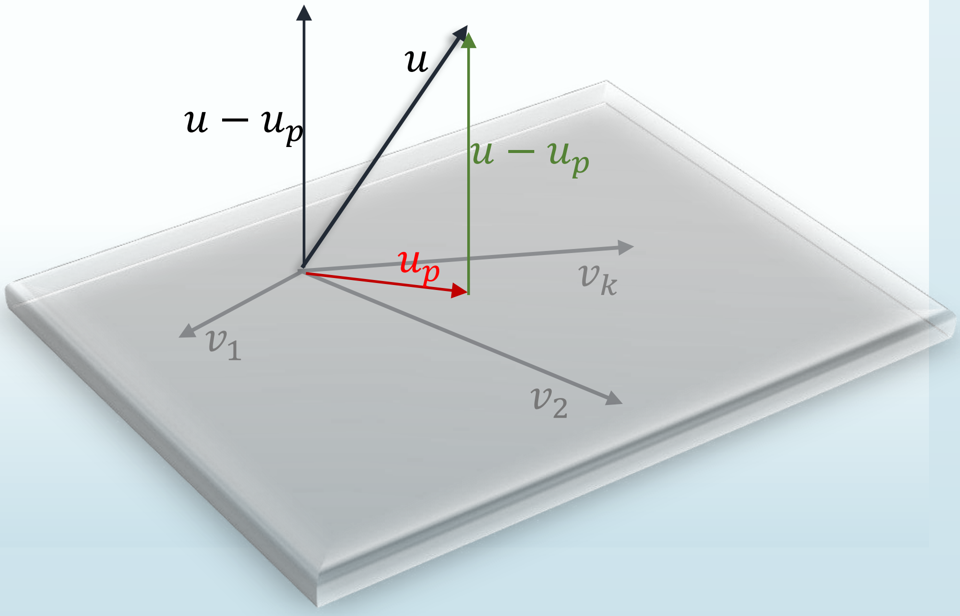


# Vektori i operacije nad njima

**Primer:** Ortogonalno rastojanje vektora $u$ od potprostora $L(v_1, v_2, \dots, v_k)$

Vektor $u_p$ zovemo ortogonalna projekcija vektora $u$ na potprostor $L = L(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Time definišemo $\boldsymbol{d(u, L) = d(u, u_p) = \|u - u_p\|}$



# Vektori i operacije nad njima

**Primer:** Kada je $\cos\alpha = \cos\measuredangle(v_1, v_2) > 0$?

$\cos\alpha > 0 \iff \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tj. $v_i$ pripada poluprostoru koji određuju $v_j$ i normalna hiperravan na $v_j$ $(i \neq j)$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} > 0 \iff x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n > 0$$

Vektori $v_1$ i $v_2$ imaće ‘sličnije’ usmerenje ukoliko parovi komponenti $x_1, y_1$ i $x_2, y_2$ i… i $x_n, y_n$ imaju isti znak ili ako dominantne vrednosti komponenti imaju isti znak.

# Ortogonalni potprostori

**Definicija.** Ortogonalni komplement nepraznog skupa vektora $S \subset R^n$, u oznaci $S^\perp$ je skup svih vektora ortogonalnih istovremeno na sve vektore skupa $S$.

$$S^\perp = \{u \in R^n | u \cdot v = 0,\ \forall v \in S\}.$$

**Teorema.** Ortogonalni komplement $S^\perp$ skupa vektora $S \neq \emptyset$ je vektorski potprostor.

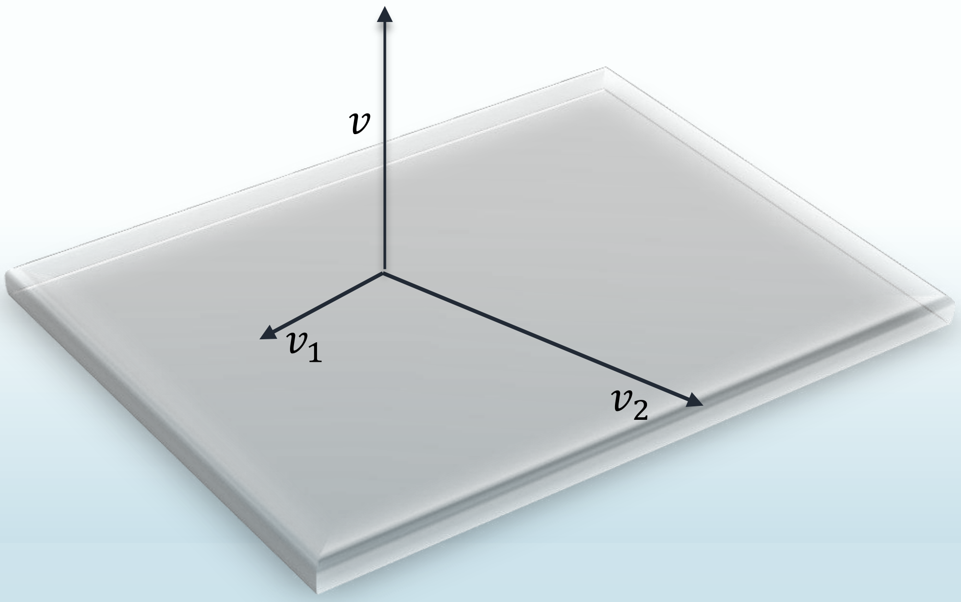
**Posledica.** Neka su $v_1, v_2, \dots, v_k \in R^n$. Tada

a) $(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}^\perp)^\perp = L(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

b) $L(v_1, v_2, \dots, v_k) \oplus L(v_1, v_2, \dots, v_k)^\perp = R^n$.

# Ortogonalni potprostori

Primer: Ortogonalni komplement $\{v\}^{\perp}$ jednog ne-nula vektora $v = (a, b, c)$ su svi vektori $u = (x, y, z)$ za koje važi $v \cdot u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + cz = 0$. Dakle $\{v\}^{\perp} = \{(x, y, z) | ax + by + cz = 0\}$ je vektorski potprostor kodimenzije 1, tj. predstavlja ravan.



# Zadaci

1. Dati geometrijsku interpretaciju (tačka, prava,ravan,3D prostor) sledećih lineala

a) $L([1 \quad 2 \quad 3], [-2 \quad -4 \quad -6])$ b) $L([0 \quad 0 \quad 0])$

c) $L([1 \quad 0 \quad -1], [0 \quad -2 \quad 1])$ d) $L([1 \quad 1 \quad 0], [0 \quad -2 \quad 3], [-1 \quad -3 \quad 3])$

2. Izračunati $2v_1 - v_2 + v_3$. Na osnovu toga reći da li su vektori $v_1, v_2, v_3$ linearno nezavisni. Odrediti bazu i dimenziju prostora $L(v_1, v_2, v_3)$.

$$v_1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T, v_2 = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 1]^T, v_3 = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3]^T.$$

3. Ako su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno nezavisni, kakvi su vektori $v_1, v_2, v_3$, linearno nezavisni ili zavisni ? Kakav bi bio odgovor pod uslovom da su $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno zavisni?

# Zadaci

4. Neka je $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ skup od $k$ vektora vektorskog prostora $V$ dimenzije $n$. Sledeću tabelu popuniti odgovorima DA, NE, MOŽDA u zavisnosti od iskaza i odnosa brojeva $k$ i $n$.

| $\boldsymbol{k < n}$ | $\boldsymbol{k = n}$ | $\boldsymbol{k > n}$ | **Iskazi** |
|---|---|---|---|
| | | | Skup $S$ je linearno nezavisan. |
| | | | Skup $S$ je baza vektorskog prostora $V$. |
| | | | Skup $S$ je baza nekog vektorskog prostora. |
| | | | $\dim\big(L(v_1, \dots, v_k)\big) = k$ |
| | | | $\dim\big(L(v_1, \dots, v_k)\big) = n$ |

# Zadaci

5. Za tri broja $x, y, z$ važi da je $x + y + z = 0$ i nisu svi istovremeno 0. Za vektore $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ i $u = \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix}$, dokazati da jednakost $-1/2 = \frac{v \cdot u}{\|v\| \, \|u\|}$, ne zavisi od vrednosti $x, y, z$.

# Matrična algebra

2. čas

# Matrice

Matrica vrsta

Matrica kolona

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \in M_{1\times n}$$

$$A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

# Množenje: matrica·vektor

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

# Množenje: matrica·vektor

$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix}$$

# Matrice kao skupovi vektora

**Primer.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}.$$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m \times n}$

Prostor kolona matrice $A$

$$R(A) = \{Ax | x \in R^n\} \subseteq R^m, \qquad rang(A) = dim\big(R(A)\big)$$

$rang(A)$ je broj linearno nezavisnih kolona matrice $A$

# Matrice kao skupovi vektora

**Primer.** $v = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T$ , $u = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]^T$

$$A = v\,u^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} u_1 v & u_2 v & \cdots & u_m v \end{array}\right]$$

$$rang(A) = 1$$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$

Prostor vrsta matrice $A$

$$R(A^T) = \{A^T x | x \in R^m\} \subseteq R^n, \qquad rang(A^T) = dim\big(R(A^T)\big)$$

$rang(A^T)$ je broj linearno nezavisnih vrsta matrice $A$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$

$$rang(A) = rang(A^T)$$

- Matrica je punog ranga ukoliko je $rang(A) = min\{m, n\}$
  - Punog ranga vrsta kada je $rang(A) = m$,
  - Punog ranga kolona kada je $rang(A) = n$.

# Matrično množenje

Skalarni proizvod dva vektora

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a \cdot b = a^T b = b^T a}$$

# Matrično množenje

Oznaka matrice preko podmatrica kolona i podmatrica vrsta:

$$Ax = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \hline v_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_m^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} v_1^T x \\ v_2^T x \\ \vdots \\ v_m^T x \end{bmatrix}$$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$

Jezgro matrice

$$N(A) = \{x \in R^n | Ax = \vec{0}\} \subseteq R^n, \qquad def(A) = dim(N(A))$$

$$N(A) = (R(A^T))^{\perp}$$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}$

Jezgro matrice

$$N(A) = \{x \in R^n | Ax = \vec{0}\} \subseteq R^n, \qquad def(A) = dim(N(A))$$

$$N(A) = (R(A^T))^{\perp} \Rightarrow N(A) \oplus R(A^T) = R^n$$

# Matrice kao skupovi vektora

$A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}$

Jezgro matrice

$$N(A) = \{x \in R^n | Ax = \vec{0}\} \subseteq R^n, \qquad def(A) = dim(N(A))$$

$$N(A) = (R(A^T))^{\perp} \Rightarrow N(A) \oplus R(A^T) = R^n$$

$$N(A^T) = (R(A))^{\perp} \Rightarrow N(A^T) \oplus R(A) = R^m$$

# Matrice kao skupovi vektora

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistem jednačina će imati rešenja ukoliko $b \in R(A)$. Rešenje će biti jedinstveno ukoliko su kolone matrice $A$ linearno nezavisne

# Matrice kao skupovi vektora

$$Ax = b$$

- Sistem jednačina će imati rešenja ukoliko $b \in R(A)$.
- Rešenje će biti jedinstveno ukoliko su kolone matrice $A$ linearno nezavisne.
- Rešenje će biti jedinstveno ukoliko je $N(A) = \{\vec{0}\}$.

# Proizvod matrica

Množenje matrica

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ \hline v_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_m^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} v_1^T u_1 & v_1^T u_2 & \cdots & v_1^T u_k \\ v_2^T u_1 & v_2^T u_2 & \cdots & v_2^T u_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_m^T u_1 & v_m^T u_2 & \cdots & v_m^T u_k \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} v_1^T B \\ \hline v_2^T B \\ \hline \vdots \\ \hline v_m^T B \end{bmatrix}$$

# Matrice kao skupovi vektora

**Primer.** $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline v_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} u_3 & u_1 & u_2 \end{array}\right]$$

# Matrice kao skupovi vektora

**Primer.** $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2v_1 - v_2 \\ \hline 2v_1 + v_2 + v_3 \\ \hline v_3 - v_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2u_1 + 2u_2 & u_2 - u_1 - u_3 & u_2 + u_3 \end{array}\right]$$

# Matrični zapis operacija nad vektorima

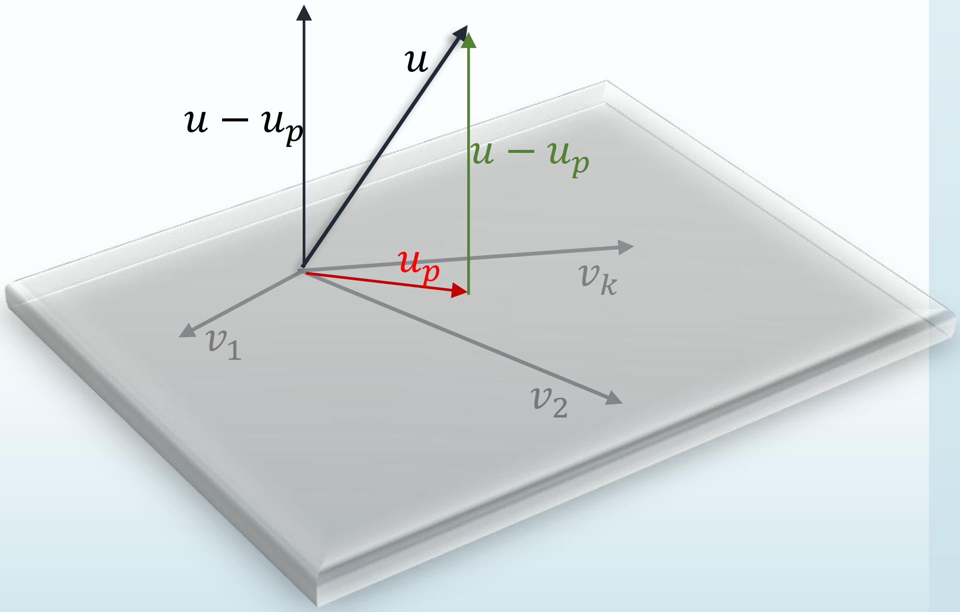
**Primer:** Ortogonalno rastojanje vektora $u$ od potprostora $L(v_1, v_2, \dots, v_k)$

Neka je $v_1, v_2, \dots, v_k$ ortonormirana baza potprostora $L(v_1, v_2, \dots, v_k) \subset R^n$ i $u \in R^n$. Označimo

$$u_p = (u \cdot v_1)v_1 + (u \cdot v_2)v_2 + \cdots + (u \cdot v_k)v_k.$$

$$V^T u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix}^T u = \begin{bmatrix} v_1^T u \\ v_2^T u \\ \vdots \\ v_k^T u \end{bmatrix}$$

$$V(V^T u) = (V V^T) u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T u \\ v_2^T u \\ \vdots \\ v_k^T u \end{bmatrix} = u_p$$



# Matrice kao skupovi vektora

**Teorema 1.** Matrica $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m\times n}$ je ranga $r$ akko postoje matrice punog ranga $B \in M_{m\times r}$ , $C \in M_{r\times n}$ takve da je $A = BC.$

# Proizvod matrica

Množenje matrica

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} h_1^T \\ \hline h_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline h_n^T \end{array}\right]$$

$$= w_1 h_1^T + w_2 h_2^T + \cdots + w_n h_n^T$$

# Zadaci

1. Matričnim množenjem predstaviti sledeće linearne kombinacije

   a) $3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$,

   b) $3\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$.

2. Odrediti matricu $T=\left[t_{ij}\right]$ koja

$$\begin{bmatrix}\_? & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\_? & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\\x_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\_? & \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & \_ & \_\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3-x_1\\x_4-x_2\\x_1-x_3\\x_2-x_4\end{bmatrix}.$$

# Zadaci

3. Kako bi izgledao matrični izraz za istovremeno izračunavanje vrednosti nekoliko polinoma

$$P_i(x) = a_{in}x^n + a_{i\,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{i1}x + a_{i0}, \qquad i = \overline{1,m}$$

   u više različitih tačaka $x = w_1, x = w_2, \dots, x = w_m$?

4. Da bi matrica $A$ imala rang 1 neophodno je i dovoljno da se može predstaviti u obliku spoljašnjeg proizvoda dva nenula vektora. Dokazati.

5. Odrediti rang sledećih matrica.

   a) $A = [j + n(i-1)],\ \ i,j = \overline{1,n}$ ,   b) $A = \left[a_i a_j + 1\right],\ \ i,j = \overline{1,n}$ .

6. Ukoliko su vektori $v$ i $u$ vektorskog prostora dati koordinatama u bazi $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dati matrični izraz skalarnog proizvoda $v \cdot u$.

# Zadaci

7. Neka su $u_1, \cdots, u_k$ i $v_1, \cdots, v_{n-k}$ baze prostora ortogonalnih komplemenata $P$ i $P^\perp$, $P \oplus P^\perp = R^n$. Za date matrice $U = \left[\begin{array}{c|c|c} u_1 & \cdots & u_k \end{array}\right]$ i $V = \left[\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_{n-k} \end{array}\right]$ izračunati $U^T V$ i $V^T U$.

# Zapamtiti

Skalarni proizvod dva realna vektora: $u \cdot v = u^T v = v^T u$

$$\|u\|^2 = u^T u$$

Matrica ranga 1: $u\, v^T$ ili $v\, u^T$

$$(w\, u^T)v = w(u^T v) = (u^T v)w$$