Árvore de Steiner

Alunos: Mariana Tavares, Wellington Silva
Professor: Rodolfo Oliveira

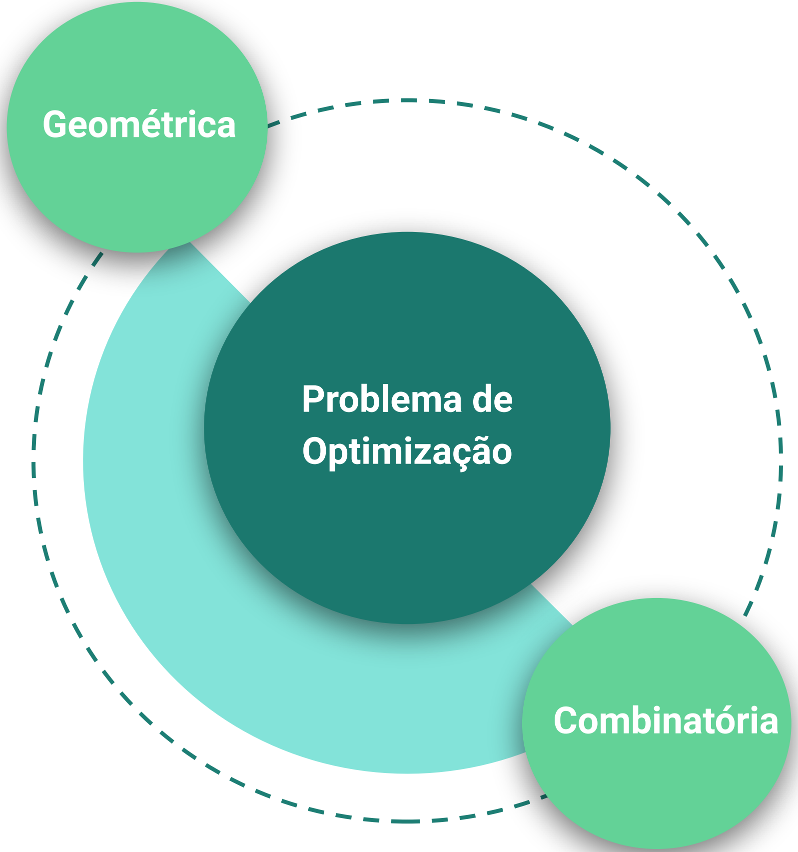
Sumário

- Justificativa
- Objetivo
- Problema clássico de Fermat
- Problema de Steiner
- Árvore Geradora Minimal
- Árvore de Steiner
- Aplicação

Justificativa

"Dado um conjunto finito de pontos num espaço métrico, encontrar uma rede de comprimento mínimo que conecte todos os pontos desse conjunto".

Justificativa



Objetivo

Identificar uma rede de comprimento mínimo que conecte todos os pontos de um determinado conjunto, finito, num espaço métrico devidamente especificado.

Problema de Fermat

- Visa a determinação de um ponto que minimize a distância aos de vértices de um triângulo.
- Antecessor do Problema de Steiner.
- Enunciado:

"*Dados três pontos do plano, encontrar um quarto ponto tal que a soma da sua distância aos três pontos dados é mínima.*"

Linha do tempo - Problema de Fermat

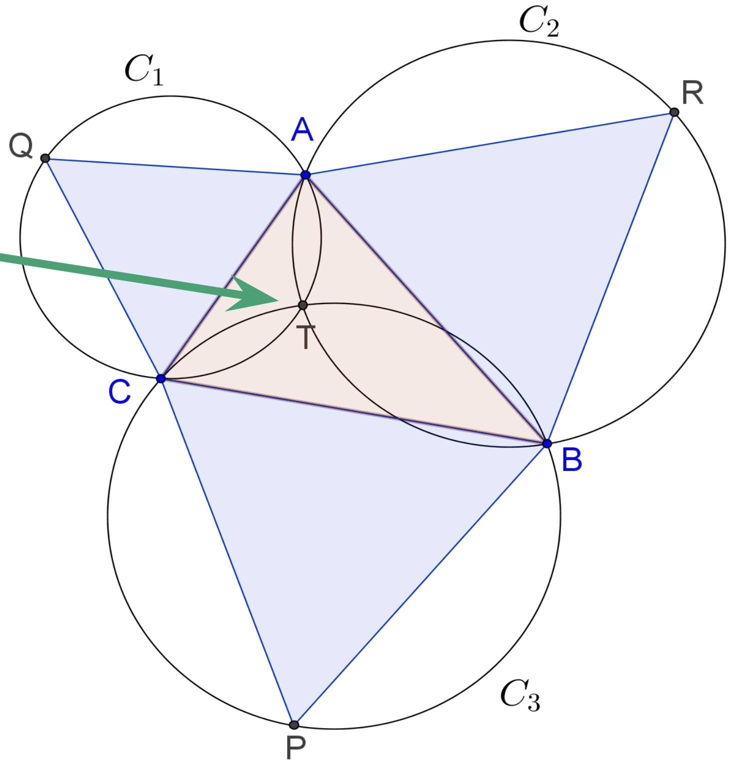
- **1637** — Methodus ad disquirendam maximam et minimam - Pierre de Fermat
- **1640** — Ponto de Torricelli - Evangelista Torrice
- **1750** — Segmentos da Reta de Simpson - Thomas Simpson
- **1834** — Descoberta da falha de Torricelli e Simpson em um ponto P > 119º - Franz Heinen
- **1834-1863** — Problema/Ponto de Steiner - Jakob Steiner

Ponto de Torricelli - Problema de Fermat

- O ponto de interseção das três circunferências, era o ponto procurado no Problema de Fermat.
- No entanto, esta solução geométrica nem sempre é o ponto que minimiza as distâncias.

Ponto de Torricelli - Problema de Fermat

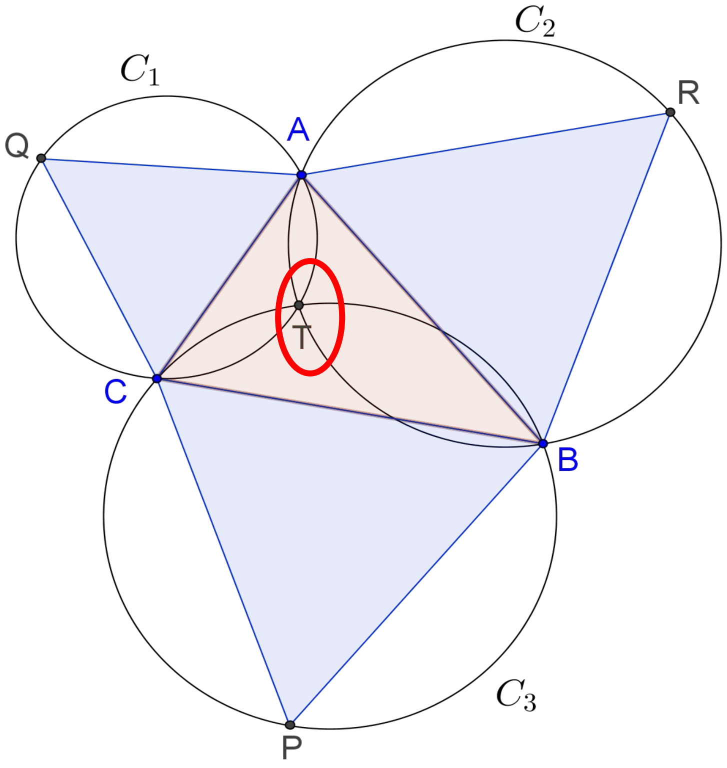
Ponto isogônico



Resolução Geométrica do Problema de Fermat, proposta por Torricelli

Ponto de Torricelli - Problema de Fermat

Realmente é a solução?



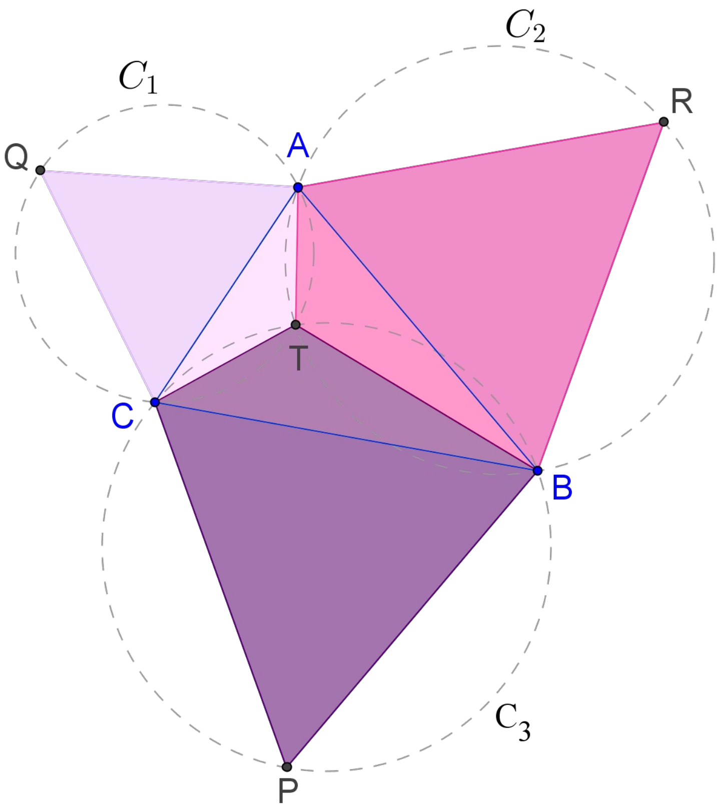
Resolução Geométrica do Problema de Fermat, proposta por Torricelli

Heinen acentua a solução de Torricelli - Problema de Fermat

Se um dos ângulos do triângulo formado pelos três pontos dados for igual ou superior a 120º, o ponto que minimiza a soma das distâncias é o vértice desse ângulo, caso contrário, a solução é o ponto de Torricelli.

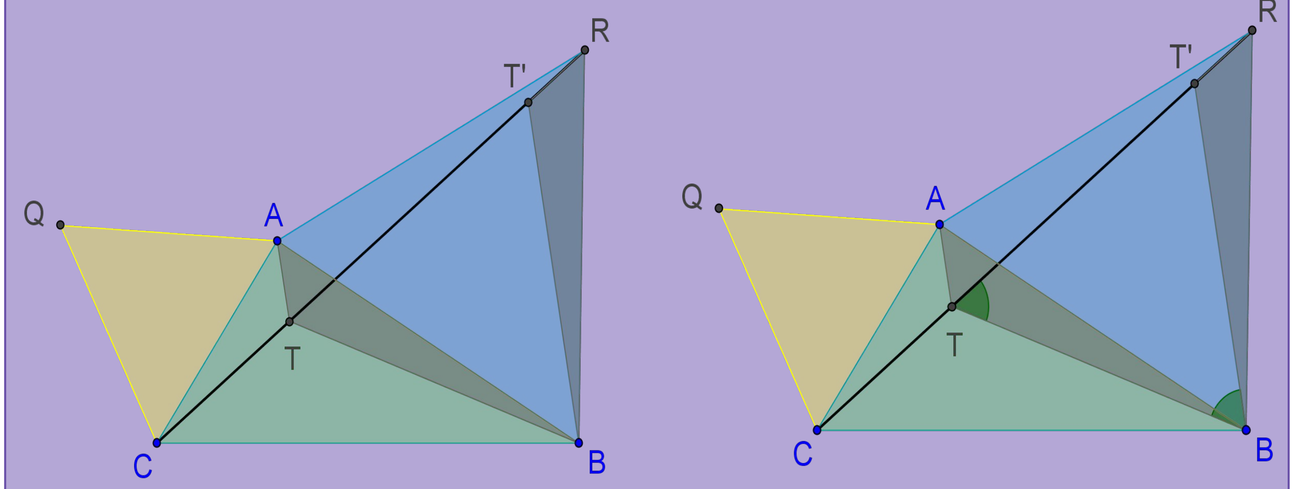
Ponto de Torricelli - Problema de Fermat

O ponto de Torricelli é o ponto que minimiza as distâncias aos vértices do triângulo inicial



Segmentos da Reta de Simpson - Problema de Fermat

O comprimento de cada segmento de Simpson <u>é exatamente igual</u> à soma das distâncias entre o ponto de Torricelli e os três pontos dado



Segmento de Simpson

Ponto de Torricelli

Problema de Steiner

"Dado um conjunto finito de pontos num espaço métrico, encontrar uma rede de comprimento mínimo que conecte todos os pontos desse conjunto".

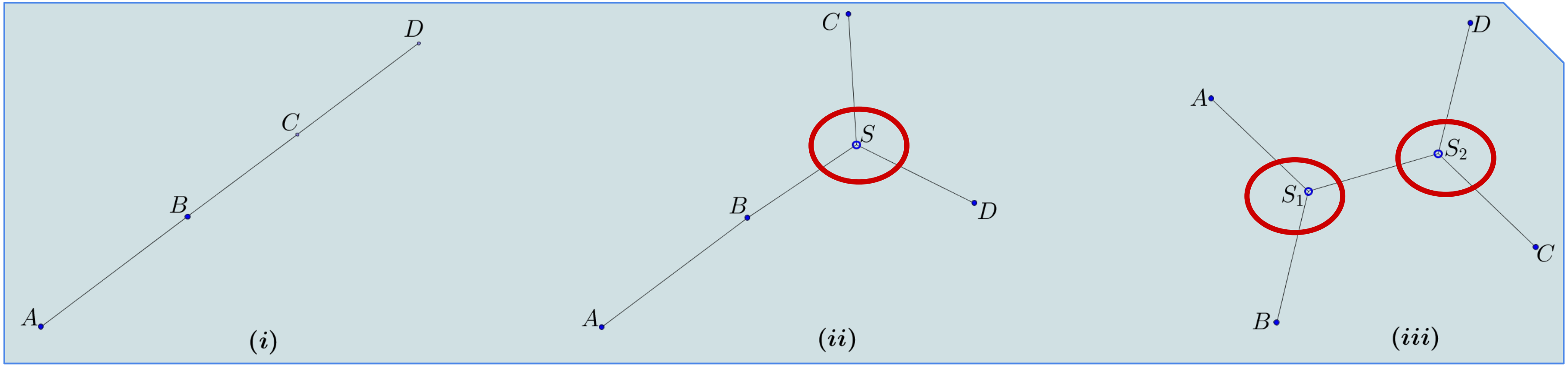
O Problema de Steiner não pode ser resolvido unindo simplesmente os pontos dados, como já foi provado, no caso do problema de Fermat, para o caso em que são dados três pontos.

Problema de Steiner

- Os matemáticos mais perspicazes e até os computadores mais rápidos tiveram algumas dificuldades em encontrar a solução do Problema de Steiner
- Há alguns processos que permitem resolver o problema de uma forma recursiva, mas são processos que não produzem resultados em tempo computacionalmente factível

Problema de Steiner

"Dados n pontos, encontrar um sistema de segmentos de reta, tal que a soma dos seus comprimentos seja mínima, de tal forma que quaisquer dois dos pontos dados possam ser unidos por um conjunto de segmentos de reta do sistema."



Problema de Steiner

A resolução do Problema de Steiner passa pela construção de uma estrutura de comprimento mínimo, estrutura esta que poderá ligar somente os pontos dados, Árvore Geradora Minimal, ou abranger alguns pontos extra.

Árvore Geradora Minimal

Perante grafos com pesos podemos qualificar as suas árvores geradoras através da soma total dos pesos das arestas.

Como identificar uma árvore que minimiza essa soma?
Uma tal árvore designa-se por **Árvore Geradora Minimal**.

Árvore Geradora Minimal

O problema da árvore geradora minimal é encontrar uma árvore geradora, G′ (V, E′), para a qual a soma dos pesos das arestas seja mínima.

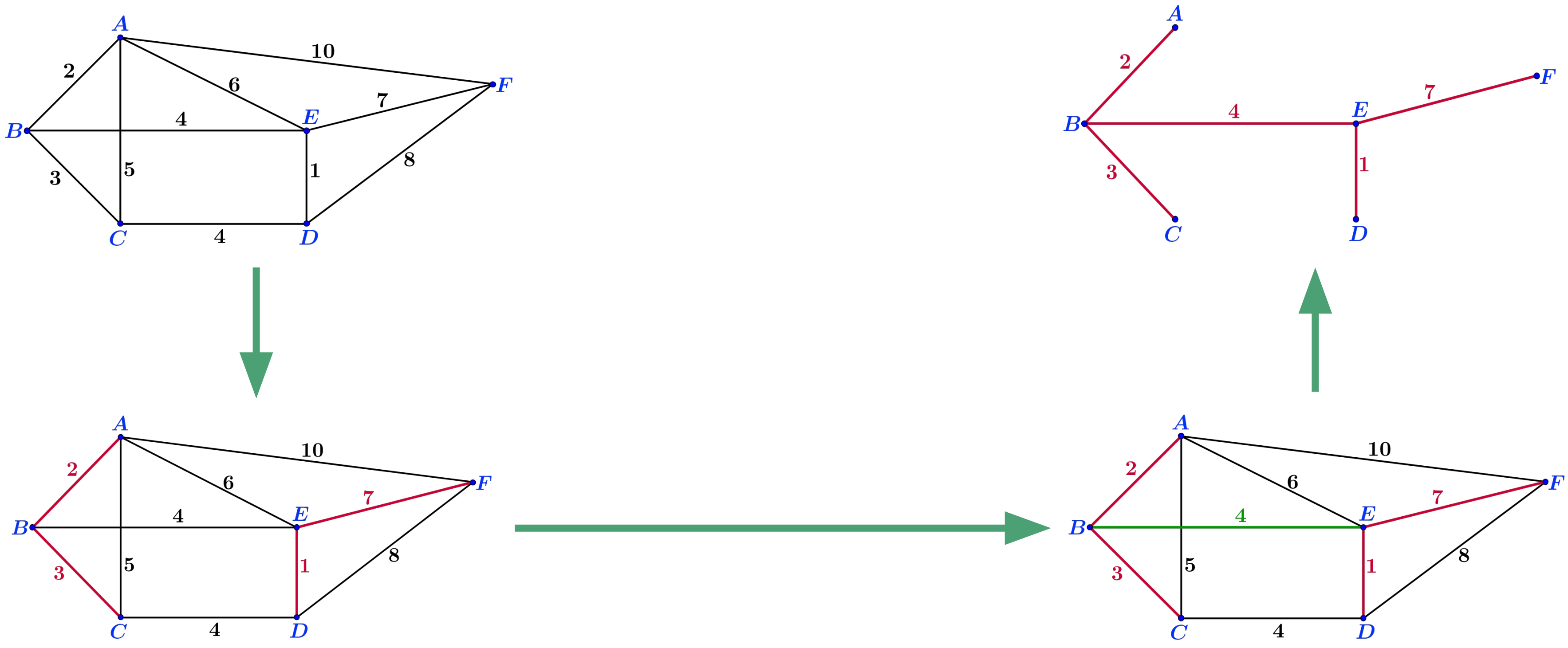
Algoritmo de Borüvka - Árvore Geradora Minimal

Começa por ligar cada vértice ao seu vizinho mais próximo, depois, ligar cada árvore à outra árvore que lhe estiver mais próxima, até que todos os vértices do grafo estejam inseridos na árvore.

Portanto, este algoritmo carateriza-se pela divisão do grafo inicial em vários subgrafos para os quais é calculada a árvore geradora minimal.

Este algoritmo é recursivo e só termina quando existe apenas uma componente conexa.

Algoritmo de Borüvka - Árvore Geradora Minimal

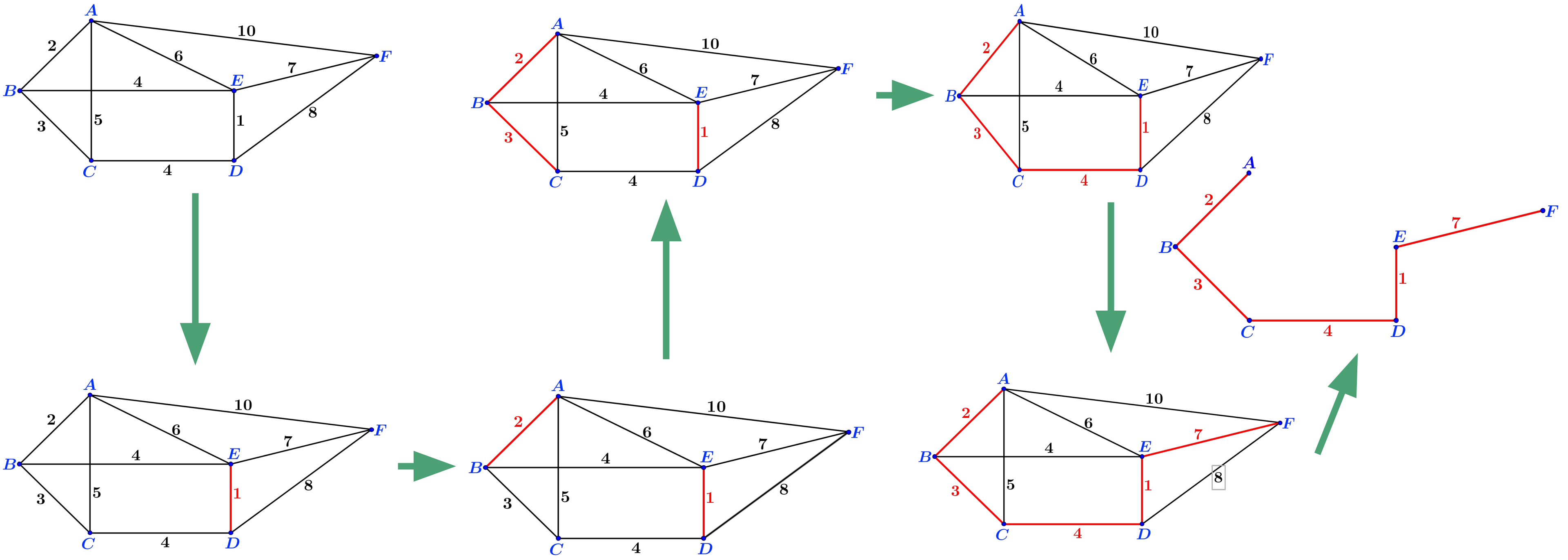


Algoritmo Kruskal - Árvore Geradora Minimal

Inicialmente considera o peso de todas as arestas devidamente ordenados.

Depois, em cada fase, a aresta de menor peso é adicionada à árvore, exceto quando esta forma um ciclo com as que já foram selecionadas.

Algoritmo Kruskal - Árvore Geradora Minimal



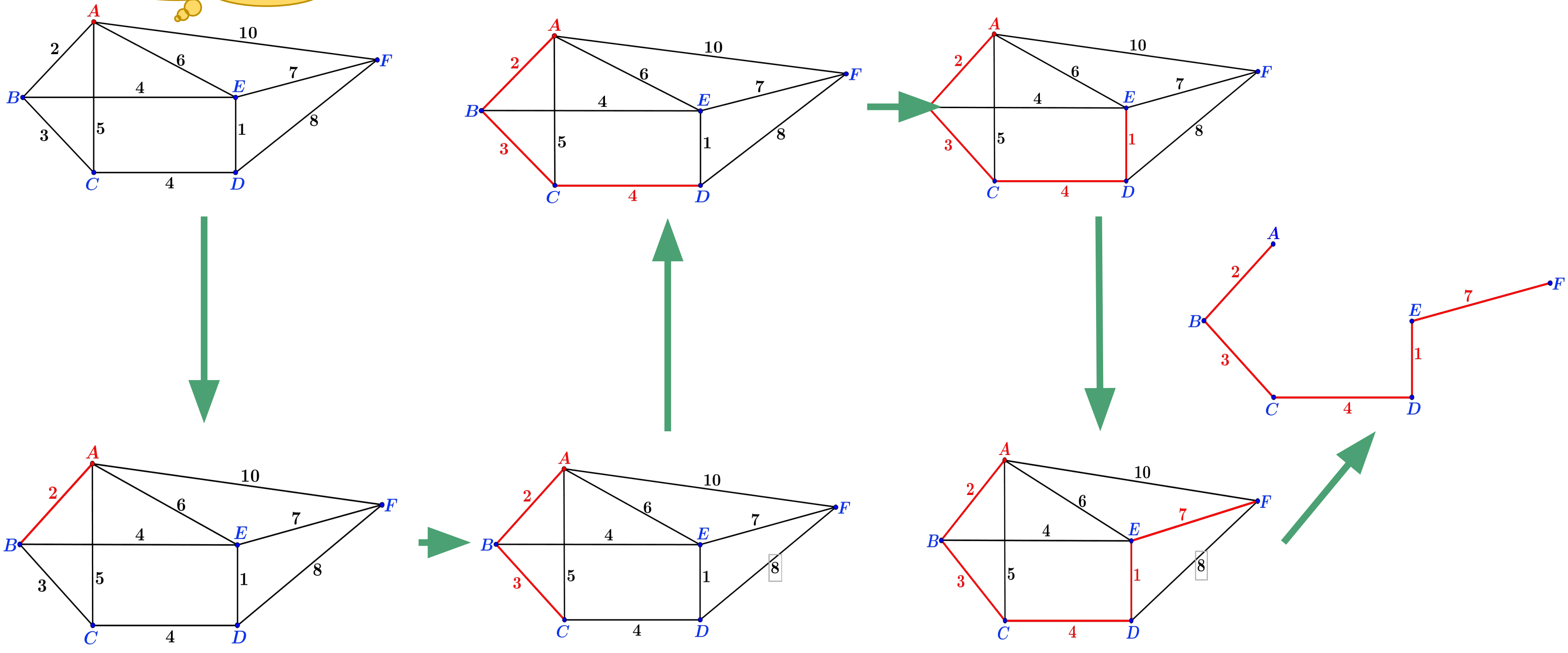
Algoritmo Prim - Árvore Geradora Minimal

Em cada fase é adicionada à árvore a aresta de custo mínimo com um vértice pertencente à árvore do passo anterior e outro não.

Assim, em cada passo temos uma árvore. O processo termina quando todos os vértices do grafo inicial estão inseridos na árvore.

Algoritmo Prim - Árvore Geradora Minimal

Escolher um vértice arbitrário.



Árvore de Steiner

"Dados n pontos, encontrar um sistema de segmentos de reta, tal que a soma dos seus comprimentos seja mínima, de tal forma que quaisquer dois dos pontos dados possam ser unidos por um conjunto de segmentos de reta do sistema."

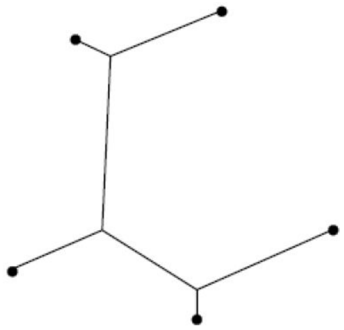
Problema de Steiner em Grafos consiste em, dado um grafo e uma função peso associada às suas arestas, determinar uma árvore geradora minimal desse grafo

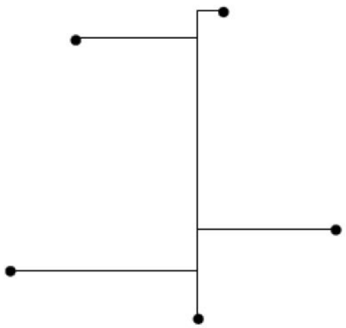
- ❖ Um problema geométrico em $\mathbb{R}^n$
- ❖ Há métricas euclidiana e retilínea
- ❖ Ângulos de amplitude maior ou igual a 120º
- ❖ Ponto de Steiner um ponto de X \ V de grau maior ou igual 3.

Retilínea & Euclidiana - Árvore de Steiner

Euclidiana

Objetivo em encontrar a rede de comprimento mínimo que ligue os v pontos dados em $\mathbb{R}^n$



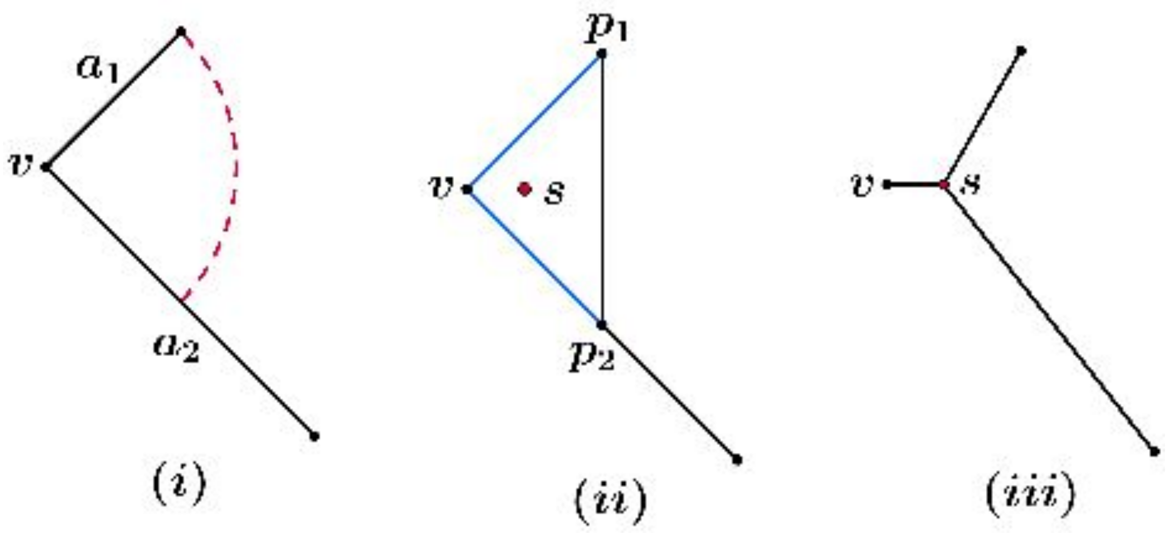


Retilínea

Objetivo em encontrar um sistema de segmentos de reta que ligue os pontos dados inicialmente utilizando apenas ligações horizontais ou verticais e tal que a soma dos seus comprimentos seja mínima

Propriedades básicas de Steiner

Ângulos: Quaisquer duas arestas de T incidentes num mesmo vértice definem ângulos de amplitude maior ou igual a 120º.



Propriedades básicas de Steiner

Número de Pontos de Steiner: Uma árvore com v vértices iniciais e os pontos de Steiner tem no máximo v − 2 pontos de Steiner, em particular, numa árvore de Steiner para V, com |V | = v, o número máximo de pontos de Steiner é v − 2.

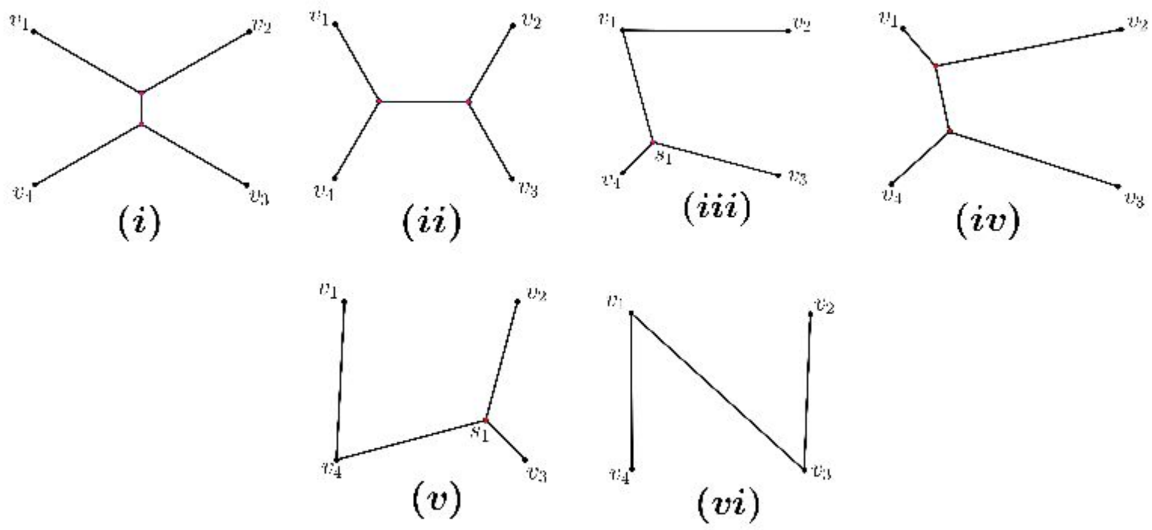
Uma topologia com o número máximo de pontos de Steiner (s = v − 2) é designada por Topologia Completa

Propriedades básicas de Steiner

Número de topologias de Steiner: Uma maneira de encontrar a árvore de Steiner mínima para v pontos dados seria considerar as diferentes topologias de Steiner para um mesmo conjunto de pontos iniciais, isto é, procurar todas as árvores relativamente mínimas e averiguar para cada uma delas qual a árvore que tem menor custo.

Topologia Árvore de Steiner

A árvore com menor peso, que se obtém após a análise de todas as topologias, designa-se por Árvore Mínima de Steiner.



Razão de Steiner

É o custo de uma aproximação da Árvore de Steiner Mínima e o custo da Árvore Geradora Minimal.

Logo uma medida que permite efetuar comparações entre as diferentes heurísticas e averiguar qual a qualidade de cada uma delas.

Aplicação

Informática

Exemplo:
algoritmos de caminho mínimo,
resolução de algoritmos NP-difícil,
construção de hardware

Construção civil

Exemplo:
rede de eletricidade,
de gás,
de ventilação,
de túneis,
estrutura têxteis,
de vias de comunicação

Biologia

Exemplo:
estruturas moleculares,
filogenética,

Física e química

Exemplo:
estruturas atômicas,
eletrostático,

Serve de base para qualquer problema cujo objetivo é encontrar uma ligação entre pontos, objetos, localidades, caminho mínimo, ou algo semelhante.

Referências

DA SILVA, Eduardo Alexandre. Teorema de Casey: Uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritıveis. 2016.

Obrigado!

Árvore de Steiner

Alunos: Mariana Tavares, Wellington Silva
Professor: Rodolfo Oliveira