Лекция 1. Линейно оптимиране

1.1. Задача на линейното оптимиране. Основни свойства

Задачата на линейното оптимиране (ЗЛО) се състои в оптимизиране на линейна функция (наречена *целева функция*) върху множество от *линейни ограничения*, които могат да са както равенства, така и неравенства по отношение на променливите.

Тогава, *общият вид* на задача на линейното оптимиране е следният: търсят се такива реални стойности на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$, за които стойността на функцията

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to min(max) \qquad (1.1)$$

при ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesseqgtr b_i, i = 1, \dots, m, b_i = const, b_i \in \mathbb{R}\,, \qquad (1.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \qquad (1.3)$$

където:

- функцията $f(x)$ се нарича *целева функция* или *критерий за оптималност*;
- коефициентите $c_j \epsilon \mathbb{R}, j = 1, \dots n$, пред променливите в целевата функция се наричат *целеви коефициенти*;
- ограниченията (1.2) и (1.3) се наричат *множество от ограничение* или *множество от допустими решения* на задачата, в които коефициентите $a_{ij} \epsilon \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, и свободните членове $b_i \epsilon \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$;
- $c_j, a_{ij}, b_i, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, са известни константи.

Матричният вид на задачата на линейното оптимиране е: търси се вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, X \epsilon \mathbb{R}^n$, за който функцията

$$F(X) = CX \to min(max) \qquad (1.4)$$

при ограничения:

$$AX \lesseqgtr B, \qquad (1.5)$$

$$X \geq 0, \qquad (1.6)$$

където:

- функцията $F(X)$ се нарича *целева функция* или *критерий за оптималност*;
- векторът $C = (c_1, c_2, \dots, c_3)$ се наричат *целеви вектор*;
- ограниченията (2.5) и (2.6) се наричат *множество от ограничение* или *множество от допустими решения* на задачата, в които

  матрицата $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \epsilon \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$

  и векторът $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, b_i \epsilon \mathbb{R}, i = 1, \dots, m;$

План на задачата (допустима точка) се нарича всяко решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на системата (1.2) - (1.3). Множеството от плановете на задачата (допустимото множество) е множеството P от всички решения на (1.2) - (1.3). P е изпъкнало затворено многостенно множество.

Определение 1.1. *Опорен план* (крайна точка, екстремна точка) се нарича план, чиито компоненти удовлетворяват като равенства $r, r \geq n$, от ограниченията (1.2) - (1.3) и сред тях има n линейно независими. Всеки опорен план е крайна точка (връх) на *множеството от планове* P. Опорният план е неизроден при $r = n$ и изроден при $r > n$. Задачата на ЛО е изродена, ако има поне един изроден опорен план.

Ръб на множеството от планове се нарича съвкупност от всички планове, които удовлетворяват като равенства $n - 1$ едни и същи линейно независими ограничения от (1.2) - (1.3). Геометрично ръбовете са отсечки (*ограничени ръбове*) или лъчи и прави (*неограничени ръбове*) в $\mathbb{R}^n$. Ръбовете са *оптимални*, ако точките им са решения на задачата (1.1)–(1.3).

Определение 1.2. *Решение* на задачата (*оптимален план*) е план,за който целевата функция (1.1) достига максимума (минимума) си. *Опорно решение* (опорен оптимален план) е оптимален план на задачата, който е и неин опорен план.

Теорема 1.1. Задачата на ЛО има решение (е разрешима) тогава и само тогава, когато множеството ѝ от планове P не е празно ($P \neq \emptyset$) и целевата функция е ограничена отгоре (отдолу) в P.

Теорема 1.2. Всяка разрешима задача на ЛО, която има опорни планове, има поне един опорен оптимален план.

Теорема 1.3. Опорните планове на задачата на ЛО са краен (вкл. и нулев) брой.

Теорема 1.4. Необходимо и достатъчно условие задачата на ЛО да има опорни планове е системата ограничения (1.2) - (1.3) да е съвместима ($P \neq \emptyset$) и да има ранг n.

Теорема 1.5. Множеството P^* от решенията на задачата на ЛО е изпъкнало и затворено многостенно множество. Ако $x^1, \ldots, x^s$ са опорни решения на задачата, а $p^1, \ldots, p^k$ - направляващи вектори на неограничени оптимални ръбове (по един за всеки ръб), то

$$\bar{P} = \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j p^j \right\} \subset P^* \qquad (1.7)$$

при $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, s, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, j = 1, \ldots, k$. В частност, ако $x^1, \ldots, x^s$ са всичките опорни решения и $p^1, \ldots, p^k$ са направляващите вектори на всичките неограничени оптимални ръбове на множеството P, то $\bar{P} = P^*$.

1.2. Примери

Пример 1.1. Да се реши задачата:

$f(x) = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to max$

при ограничения:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$-3x_1 - x_2 - x_3 \leq 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Решение. Системата ограничения е съвместима - един план на задачата е например $x = (0,0,4)$. От ограниченията следва, че $0 \leq x_j \leq 4, j = 1,2,3$, т.е. множеството от планове е ограничено и функцията $f(x)$ е ограничена отгоре (и отдолу) в него. Системата от ограничения има ранг 3, следователно задачата е разрешима и има опорни планове. Ще ги намерим, като решим всички подсистеми от по 3 уравнения:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 = 0, \end{cases}$
несъвместима;

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 = 0, \end{cases}$
$\bar{x} = (-6,0,16)$;

3) $\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 = 0, \end{vmatrix}$
$\bar{y} = (-6,16,0);$

4) $\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0, \end{vmatrix}$
$\bar{z} = (0,0,4);$

5) $\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0, \end{vmatrix}$
$\bar{u} = (0,4,0);$

6) $\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0, \end{vmatrix}$
$\bar{v} = (2,0,0).$

Точките $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не са планове на задачата - те не удовлетворяват условията $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. За опорните планове $\bar{z}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ имаме $f(\bar{z}) = 20$, $f(\bar{u}) = 16$, $f(\bar{v}) = 20$, следователно $f^* = 20$. Задачата има две опорни решения $\bar{z}$ и $\bar{v}$ и съгласно теорема 2.5, всички решения на задачата са точките от отсечката $\overline{zv}$: $x = \lambda_1\bar{z} + \lambda_2\bar{v} = (2\lambda_2, 0, 4\lambda_1)$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

1.2. Задачи

Проверете дали зададените вектори са опорни планове на съответните множества и ако са - установете дали са изродени:

Задача 1.1. $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (1,0).$

Задача 1.2. $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (0,0).$

Задача 1.3. $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (0,0,1,1),$ $\bar{y} = \left(\frac{14}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0\right).$

Задача 1.4. $\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (4,0,0,0,2),$ $\bar{y} = \left(1,0,0,\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right),$ $\bar{z} = (0,1,1,0,0),$ $\bar{u} = (0,2,0,0,0).$

Задача 1.5. $\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (0,0,0,1),$ $\bar{y} = (1,1,1,0).$

Задача 1.6. $\begin{vmatrix} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5, \end{vmatrix}$ $\quad \bar{x} = (4,0,17,23,9),$ $\bar{y} = (3,5,0,0,17),$ $\bar{z} = (0,0,9,31,21),$ $\bar{u} = (1,1,8,24,19).$

Задача 1.7. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5, \end{cases}$

$\bar{x} = (0,12,0,12,0)$,
$\bar{y} = (5,9,2,0,0)$,
$\bar{z} = (4,0,4,0,0)$,
$\bar{u} = (6,18,0,0,0)$,
$\bar{v} = (0,0,3,9,0)$,
$\bar{w} = (0,0,0,0,12)$.

Като използвате теореми 1.2, 1.4 и 1.5, намерете всички решения на задачите:

Задача 1.8. $f(x) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to min$
при ограничения:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{cases}$$

Задача 1.9. $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 \to max$
при ограничения:
$$\begin{cases} 10x_1 + x_3 \leq 10 \\ 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{cases}$$

Задача 1.10. $f(x) = x_1 + x_2 \to max$
при ограничения:
$$\begin{cases} -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \\ -1 \leq -x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Задача 1.11. $f(x) = 4x_1 + x_2 \to max(min)$
при ограничения:
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ -1 \leq x_1 \leq 10. \end{cases}$$