<u>Лекция 3.</u> Двумерна задача на ЛО. Геометричен метод за решаване

Задачата на ЛО има просто геометрично тълкуване в двумерното пространство. При $n = 2$ тя има вида: търсят се такива реални стойности на променливите x_1, x_2, за които целевата функция:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max(min) \tag{3.8}$$

при ограничения:

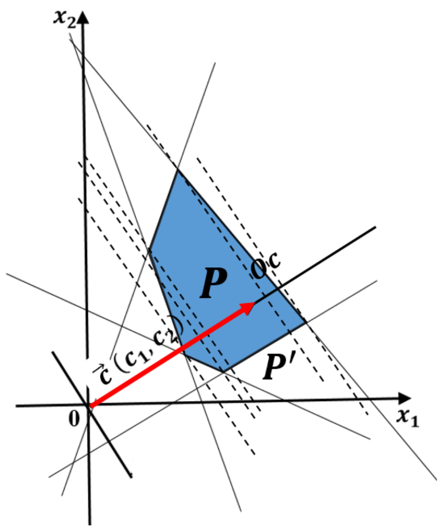
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = 1, \dots, m. \tag{3.9}$$

Ако има условия за неотрицателност на x_1 и x_2, то те са включени в (3.9).

Нека в равнината е фиксирана координатна система x_1Ox_2. Множеството от планове P на задачата е сечението на полуравнините (3.9). То е изпъкнало, затворено многоъгълно множество и може да бъде празно (системата (3.9) е несъвместима), ограничено (изпъкнал многоъгълник) и неограничено. Когато P е ограничено, контурът му се състои само от отсечки (ограничени ръбове), а когато е неограничено, той съдържа още и лъчи или прави (неограничени ръбове на P).

Ако $x = (x_1, x_2)$, $c = (c_1, c_2)$ и Oc е директрисата на вектора c, разглеждана като числова ос с посока c, то $f(x) = \langle c, x \rangle = \lambda_{x'} \|c\|$, където x' е проекцията на x върху Oc, а $\lambda_{x'}$ - алгебричната мярка на вектора x'. Тук и навсякъде по-долу дадена точка и нейният радиус-вектор се означават еднакво.

Задача (3.8) - (3.9) може да се изкаже геометрично така: търси се точка $x \epsilon P$, чийто вектор-проекция x' върху оста Oc има най-голяма (най-малка) алгебрична мярка $\lambda_{x'}$. Задачата може да се реши чрез *геометричен метод* – фигура 3.3.

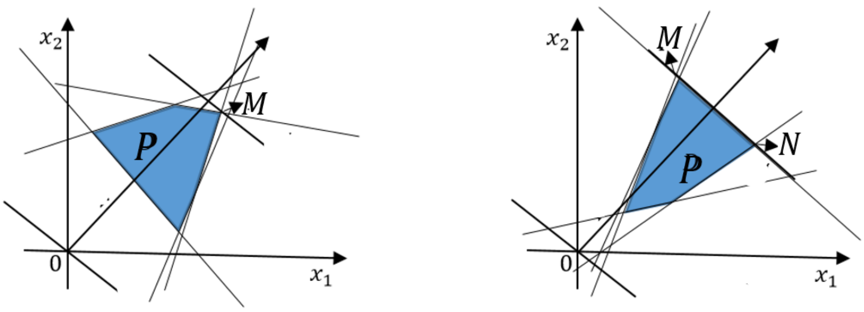


Фигура 3.3. Геометричен метод

Алгоритъм на геометричен метод за решаване на двумерната задача на ЛО – фигури 3.4, 3.5:

1) Построява се множеството от планове P на задачата. Ако $P = \emptyset$, задачата няма решение.
2) Построяват се векторът $c = (c_1, c_2)$ и директрисата му Oc. Проектира се множеството P върху оста Oc. Проекцията P' на P е отсечка (ако P е ограничено), лъч или права.
3) Определят се точките, чиито проекции имат максимална (минимална) алгебрична мярка - те са решение на задачата:

- ако P' е отсечка, това са точките, чиито проекции съвпадат с втория (първия) край на отсечката - задачата има решение при търсене на максимум и на минимум;
- ако P' е лъч, еднопосочен (противоположен) на вектора c, алгебричните мерки на проекциите растат (намаляват) неограничено в P и задачата за търсене на максимум (минимум) няма решение. Точките, чиито проекции съвпадат с началната точка на лъча, имат най-малка (най-голяма) алгебрична мярка на проекцията си и са решение на задачата за минимум (максимум);
- ако P' е права, алгебричните мерки на проекциите растат и намаляват неограничено отгоре и отдолу в P' и задачата няма решение при търсене и на максимум, и на минимум.



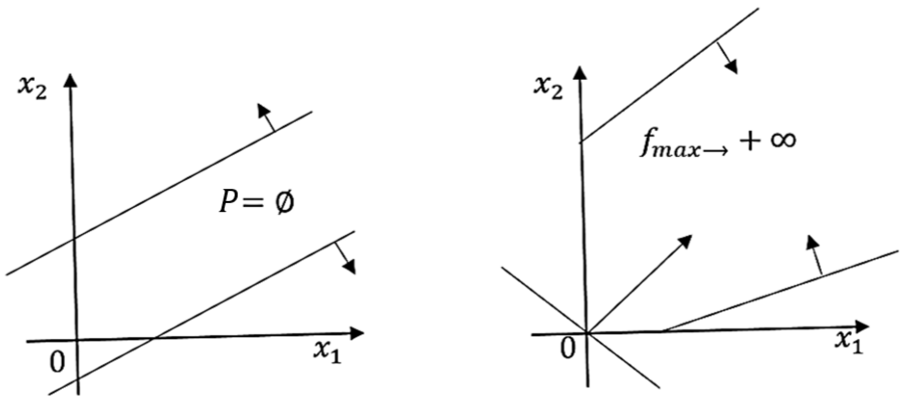
Решението на линейната задача е в т. M

$f_{max} = f(M)$

Решението на линейната задача е в отс. MN

$f_{max} = f(MN)$

Фигура 3.4. Случаи, при които линейната задача има решение



$P = \emptyset \Longrightarrow$задачата на линейното оптимиране няма решение

$f_{max \to} + \infty \Longrightarrow$задачата на линейното оптимиране няма решение

Фигура 3.5. Случаи, при които линейната задача няма решение

Забележка. В общия случай задачата на ЛО (1.1) - (1.3) може да бъде сведена до двумерната задача (3.8) - (3.9) и да бъде решена геометрично, ако сред уравненията (2.2) има r линейно независими и $n - r \leq 2$.

3.1. Примери

Да се решат с геометричен метод примерите:

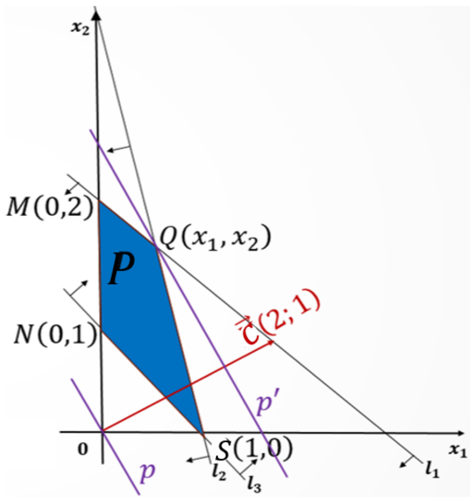
Пример 3.1. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to max$

при ограничения:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4x_1 + 1x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}\right.$$

Решение. Имаме декартова координатна система $0x_1x_2$.
От $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \Longrightarrow P$ е в I квадрант.
Нека l_1: $2x_1 + 3x_2 = 6$. Тогава т. $(0; 2)$, т. $(3; 0)$ ϵ l_1.
Нека l_2: $4x_1 + x_2 = 4$. Тогава т. $(0; 4)$, т. $(1; 0)$ ϵ l_2.
Нека l_3: $x_1 + x_2 = 1$. Тогава т. $(0; 1)$, т. $(1; 0)$ ϵ l_3.
Построение – фигура 3.6:
1) Построяваме $0x_1x_2$;
2) Построяваме P: $MNSQ$:
- правите
  l_1: $2x_1 + 3x_2 = 6$,
  l_2: $4x_1 + x_2 = 4$,
  l_3: $x_1 + x_2 = 1$;
- полуравнините
  $2x_1 + 3x_2 \le 6$,
  $4x_1 + x_2 \le 4$,
  $x_1 + x_2 \ge 1$;

3) Построяваме $\vec{c}(2; 1)$;
4) Построяваме $p \perp \vec{c}$, $O \in p$;
5) Построяваме $p' \perp \vec{c}$, $p' \parallel p$, $Q \in p'$.



Фигура 3.6. Геометрично построение

От геометричното построение виждаме, че решението е в т. Q.

$Q = l_1 \times l_2$, т.е. $Q \in l_1$ и $Q \in l_2$ и координатите на т. Q намираме като решение на системата:

$$\left|\begin{array}{l} l_1: 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ l_2: 4x_1 + 1x_2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{array}\right. \Rightarrow Q\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

Тогава

$$f_{max} = f(Q) = f\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{5}\right) = 2.\frac{3}{5} + 1.\frac{8}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8.$$

Проверка:
$f(M) = f(0; 2) = 2.0 + 1.2 = 2 < 2{,}8 = f(Q)$,
$f(N) = f(0; 1) = 2.0 + 1.1 = 1 < 2{,}8 = f(Q)$,
$f(P) = f(1; 0) = 2.1 + 1.0 = 2 < 2{,}8 = f(Q)$.

Пример 3.2. $f(x) = 5x_1 + 2{,}5x_2 \to min$

при ограничения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Имаме декартова координатна система $0x_1x_2$.

От $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Longrightarrow P$ е в I квадрант.

Нека l_1: $2x_1 + 3x_2 = 6$. Тогава т. $(0;2)$, т. $(3;0) \epsilon\, l_1$.

Нека l_2: $4x_1 + x_2 = 4$. Тогава т. $(0;4)$, т. $(1;0) \epsilon\, l_2$.

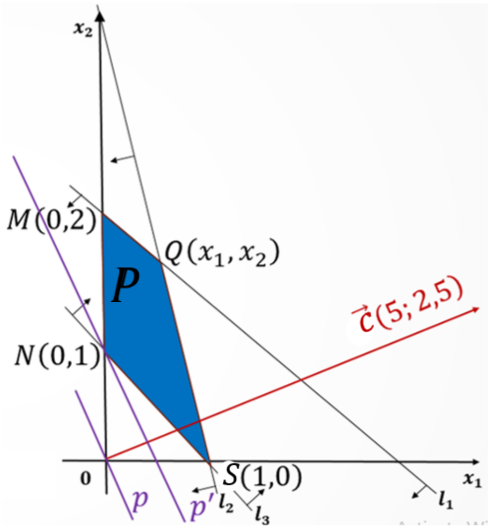
Нека l_3: $x_1 + x_2 = 1$. Тогава т. $(0;1)$, т. $(1;0) \epsilon\, l_3$.

Построение – фигура 3.7:

1) Построяваме $0x_1x_2$;
2) Построяваме P: $MNSQ$:

- правите
  l_1: $2x_1 + 3x_2 = 6$,
  l_2: $4x_1 + x_2 = 4$,
  l_3: $x_1 + x_2 = 1$;
- полуравнините
  $2x_1 + 3x_2 \leq 6$,
  $4x_1 + x_2 \leq 4$,
  $x_1 + x_2 \geq 1$;

3) Построяваме $\vec{c}(5; 2{,}5)$;
4) Построяваме $p \perp \vec{c}$, $O \in p$;
5) Построяваме $p' \perp \vec{c}$, $p' \parallel p$, $N \in p'$.



Фигура 3.7. Геометрично построение

От графичното построение виждаме, че решението е в т. $N(0{,}1)$.

Тогава

$f_{min} = f(N) = f(0;1) = 2.0 + 1.1 = 1.$

Проверка:

$f(M) = f(0;2) = 2.0 + 1.2 = 2 > 1 = f(N)$,

$f(P) = f(1;0) = 2.1 + 1.0 = 2 > 1 = f(N)$,

$f(Q) = f\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{5}\right) = 2.\frac{3}{5} + 1.\frac{8}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8 > 1 = f(N)$.