<u>Лекция 6.</u> Целочислена задача на линейното оптимиране. Методи и алгоритми за решаване им

Целочисленото оптимиране разглежда клас дискретни оптимизационни задачи. Нарича се така, понеже върху част или всички променливи са наложени условия за целочисленост. Почти всяка дискретна оптимизационна задача може да се сведе до целочислена (макар че това не винаги е оправдано, тъй като води до голям брой променливи).

6.1. Обща формулировка на задачата на целочисленото оптимиране

Общият вид на *задачата на целочисленото оптимиране* (ЦО) е

$$\max\ (\min)\ \{F(x) : x \in \Omega \subset Z^n\},$$

където Z^n е множеството от всички n-мерни вектори с целочислени компоненти, а $F(x)$ е реална функция, дефинирана в Ω.

Засега най-добре са изучени линейните целочислени (смесено-целочислени) задачи. Общата *задача на целочисленото линейно оптимиране* (ЦЛО) е

$$\max\ \{<c, x>: Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in R^n \text{ и целочислени}\}.$$

Задачата на смесено-целочисленото линейно оптимиране (СЦЛО) е

$$\max\ \{<c, x>: Ax \leq b,\ x = (x_1,x_2) \in R^n,\ x_1 \geq 0 \text{ и целочислени},\ x_2 \geq 0\}.$$

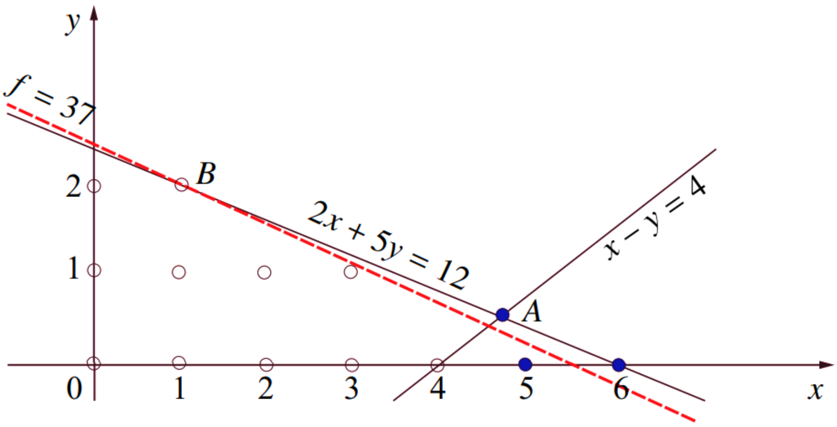
Задачата на двоичното оптимиране е $\max\ \{<c, x>: Ax \leq b,\ x \in \{0, 1\}^n,\ i = 1, \ldots, \mathrm{n}\}$.

По принцип всяка задача на ЦЛО може да се сведе до задача на двоич- ното оптимиране чрез смяна на променливите. Целочислените и въобще дискретните оптимизационни задачи са значително по-трудни за решаване от непрекъснатите. Редица знаменити математически проблеми, оставени ни от древността, са добра илюстрация за трудността на проблемите, възникващи в дискретното оптимиране. Елементарните подходи (например закръгляване до целочисленост на непрекъснатото решение) не са ефективни, както личи от следния пример:

Пример 6.1. Търси се

$$\max\ \{f = 7x + 15y : 2x + 5y \leq 12,\ x - y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ и цели}\}.$$

Решение. Решението на непрекъснатата задача се достига в точка $A\left(\frac{32}{7}, \frac{4}{7}\right)$ (фигура 6.1), а решението на целочислената - в точката $B(1, 2)$ и е очевидно, че намирането на непрекъснатото решение не може да ни доведе до целочисленото без допълнителни изследвания.



Фигура 6.1.

6.2. Методи за решаване на общата задача на ЦЛО

Първият общ подход за решаване на целочислената задача на линейното оптимиране е предложен от Гомори (1958 г.). Под общото наименование методи на отсичането той не е загубил значение и до днес. Общата идея на тези методи се основава на следния факт: ако за даден линеен многостен (областта, определена от линейните ограничения на задачата) успеем да построим изпъкналата обвивка на неговите целочислени точки, решаването на целочислената задача се свежда до решаване на обикновената линейна задача върху изпъкналата обвивка. За съжаление намирането на изпъкналата обвивка е може би по-сложна задача от изходната.

В методите на отсичането експлицитно намиране на изпъкналата обвивка не е необходимо. От информацията, която ни носи целевата функция, чрез въвеждане на допълнителни ограничения (отсичания) и последователно решаване на непрекъснати линейни задачи се строи итерационен процес, който завършва, когато непрекъснатото решение на поредната линейна задача се окаже целочислено. Така се построява само тази част от изпъкналата обвивка на целочислените точки, която генерира намирането на целочислено решение.

Дефиниция 6.1. *Правилно отсичане* наричаме прибавянето на такова линейно ограничение, което:

а) не се удовлетворява от непрекъснатото решение на линейната задача (това решение се "отсича" от многостена, определен от ограниченията);

б) удовлетворява се от всички целочислени точки, принадлежащи на многостена.

Нека е дадена задачата с целочислени коефициенти

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\dots,m;\ x_j \geq 0 \text{ и цели},\ j = 1,\dots,n\right\}. \tag{6.1}$$

Нека x е оптимален опорен план на (6.1) без условията за целочисленост (на непрекъснатата задача). Да изразим базисните променливи x_i , $i \in J_B$, чрез небазисните x_j, $j \in J_N$, съответстващи на оптималния опорен план

$$x_i = \beta_i - \sum_{j\in J_N} \alpha_{ij}x_j, \quad i \in J_B.$$

Нека $k = \min\{i : i \in J_B, \beta_i \text{ не е цяло}\}$. Такова k съществува, защото в противен случай всички β_i са цели, т.е. планът x е целочислен и е решение на целочислената задача. Означаваме с $\{\beta_k\}$, $\{\alpha_{kj}\}$, $j \in J_N$, дробните части на числата β_k, α_{kj}, $j \in J_N$. Тогава е в сила следното

Твърдение6.1. Ограничението

$$x_{n+1} = \sum_{j\in J_N} \{\alpha_{kj}\}x_j - \{\beta_k\} \geq 0 \tag{6.2}$$

е правилно отсичане.

Алгоритъм:

1. Решаваме задачата без условието за целочисленост. Възможни са случаите:
   а) задачата няма решение; целочислената задача също няма решение; към т. 3;
   б) решението е целочислено; то е решение и на целочислената задача; към т. 3;
   в) решението има поне една нецелочислена компонента; към т. 2.

2. Към ограниченията на решената в т. 1 задача прибавяме съответното за текущата итерация ограничение от типа (6.2). Към т. 1.

3. Край.

Забележка 1. Изборът на k по този начин не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Вместо k може да се използва кой да е индекс, за който β_i не е цяло.

Забележка 2. За генериране на правилно отсичане може да се използва и целевият ред.

Забележка 3. Въз основа на описаната идея на Гомори са създадени редица алгоритми: без ограничения за целочисленост на коефициентите; за решаване на смесено-целочислени задачи и др.

Пример 6.2. Да се реши по метода на отсичането задачата

$$\max\{l(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3\},$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13, \\ x_j \ge 0 \text{ и цели, } j = 1,2,3. \end{array}$$

Решение.

1. Решаваме по симплекс-метода съответната задача на линейното оптимиране, която привеждаме в каноничен вид чрез допълнителните неотрицателни променливи x_4, x_5, x_6:

$$\max\{l(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3\},$$
$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,6. \end{array}\right.$$

Итерация 0

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1 4	x_2 5	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 0
x_4	0	10	3	2	0	1	0	0
x_5	0	11	1	$\boxed{4}$	0	0	1	0
x_3	1	13	3	3	1	0	0	1
		−13	1	2	0	0	0	−1

Итерация 1

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1 4	x_2 5	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 0
x_4	0	$\frac{9}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	5	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0
x_3	1	$\frac{19}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	1
		$-\frac{37}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	−1

Итерация 2

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1 4	x_2 5	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 0
x_1	4	$\frac{18}{10}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	5	$\frac{23}{10}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0
x_3	1	$\frac{7}{10}$	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1
		$-\frac{194}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-1

Планът $x^* = \left(\frac{18}{10}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}, 0,0,0\right)$ на каноничната задача е оптимален. Той не е целочислен.

2. Въвеждаме ново ограничение $x_7 = \frac{9}{10}x_4 + \frac{3}{10}x_5 \geq \frac{7}{10}$, което добавяме към останалите.

3. Решаваме получената линейна задача, като прилагаме двойнствения симплекс метод и използуваме последната симплексна таблица от т. 1. Въведената чрез новото ограничение допълнителна променлива x_7 е новата базисна променлива, съответстваща на новото ограничение.

Итерация 3

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1 4	x_2 5	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 0	x_7 0
x_1	4	$\frac{18}{10}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0
x_2	5	$\frac{23}{10}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0
x_3	1	$\frac{7}{10}$	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0
x_7	0	$-\frac{7}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\boxed{-\frac{7}{10}}$	0	1
		$-\frac{194}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-1	0

Определяме (по правилата на двойнствения симплекс метод) променливата, която ще излезе от базиса измежду тези, на които в стълба β съответствуват отрицателни числа. Единствената такава е x_7. Определяме променливата, която ще влезе в базиса: това е тази, за която се достига $\min\left\{\frac{\Delta_j}{\alpha_{7j}}\right\}$: $\{\min 2, \frac{4}{7}\} = \frac{4}{7} = \frac{\Delta_5}{\alpha_{75}}$. В базиса влиза x_5.

Итерация 4

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1 4	x_2 5	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 0
x_1	4	2	1	0	0	$\frac{3}{7}$	0	0
x_2	5	2	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	0	0
x_3	1	1	0	0	1	$-\frac{6}{7}$	0	1
x_5	0	1	0	0	0	$\frac{1}{7}$	1	0
		-19	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	0	-1

Тъй като стълбът β не съдържа повече отрицателни числа, линейната задача е решена. Оптималният план $x^{**} = (2,2,1)$ е целочислен и следователно е решение на дадената задача: $l_{\max}(x) = l(x^{**}) = 19$.

1) Нека представянето на базисните променливи x_i, $i \in J_B$, чрез небазисните x_j, $j \in J_N$, съответстващи на оптималния опорен план, а именно

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in J_B} \alpha_{ij} x_j, \qquad i \in J_B, \tag{6.3}$$

умножим с $h \neq 0$, т.е. $hx_i + \sum_{j \in J_B} h\alpha_{ij} x_j = h\beta_i$, $i \in J_B$. Ако $[h]$ означава цялата част на h, то $[h]x_i + \sum_{j \in J_B} [h\alpha_{ij}] x_j \leq h\beta_i$, $i \in J_B$, защото $x \geq 0$. За целочислени стойности на вектора x лявата страна на неравенството ще бъде цяло число и $[h]x_i + \sum_{j \in J_B} [h\alpha_{ij}] x_j \leq [h\beta_i]$, $i \in J_B$. Като извадим от (6.3), умножено с $[h]$, това неравенство, ще получим

$$\sum_{j \in J_B} ([h]\alpha_{ij} - [h\alpha_{ij}]) x_j \geq [h]\beta_i - [h\beta_i], \qquad i \in J_B,$$

което се удовлетворява от всяко целочислено допустимо решение на задача (6.1). При $h = 1$ имаме $\sum_{j \in J_B} (\alpha_{ij} - [\alpha_{ij}]) x_j \geq \beta_i - [\beta_i]$, $i \in J_B$, или

$$\sum_{j \in J_B} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\}, \qquad i \in J_B. \tag{6.4}$$

Тъй като изходният оптимален план не е целочислен, съществува $k \in J_B$, такова че $\{\beta_k\} > 0$ и понеже $x_j = 0$, $j \in J_N$, той не удовлетворява отсичането. Следователно (6.4) е правилно отсичане.

2. При метода на отсичането броят на ограниченията в линейните задачи, които се решават последователно, не е постоянен - той расте. Докато симплекс методът (по-специално модифицираният симплекс метод) е удобен за прилагане към задачи, в които броят на стълбовете не е постоянен, стига броят на редовете да остава един и същ, при двойнствения симплекс метод е обратното.