<u>Упражнение 7.</u> Задача за назначенията. Методи и алгоритми за намиране на оптимално решение

7.1. Обща формулировка на задачата за назначенията

Необходимо е да се разпределят m дейности между n машини. Дейността i, когато се изпълнява на машината j, води до разходи $c_{ij}, i = 1,...,m; j = 1,...,n$. Всяка отделна дейност се изпълнява на една отделна машина. Търси се такова разпределение на дейностите по машините, при което има минимални общи разходи.

Задачата се решава в каноничен вид при $m=n$ и се нарича *балансирана задача*. Ако $m<n$ или $m>n$, дебалансът се отстранява чрез добавяне на *фиктивни дейности* или *фиктивни машини*.

Нека x_{ij} са булеви променливи и

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, ако \quad i-тата \quad работа \quad е \quad разпределена \quad към \quad j-тата \quad машина \\ 0, ако \quad i-тата \quad работа \quad не \quad е \quad разпределена \quad към \quad j-тата \quad машина, \end{cases}$$

$i = 1,...,m,$

$j = 1,...,m.$

Тогава *математическият модел* на задачата за назначения е: Търсят се x_{ij}, такива че

$$\min\left\{ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \right\},$$

при ограничения: (7.1)

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,m,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,...,m; \quad j = 1,...,m.$$

7.2. Унгарски алгоритъм за решаване на задачата за назначенията

Стъпка 1. Намираме минималния елемент във всеки ред на $m \times m$ матрицата на цените. Конструираме нова втора матрица, като изваждаме от всеки елемент на матрицата минималния елемент за съответния ред. За тази нова матрица намираме минималния елемент във всеки стълб. Конструираме нова трета матрица (наречена матрица с редуцираните цени), като изваждаме от всеки елемент на втората матрица минималния елемент за съответния стълб. Продължаваме със Стъпка 2.

Стъпка 2. Зачертаваме с минималния възможен брой линии (хоризонтални, вертикални или и двете) всички нули в матрицата с редуцираните цени.

- Ако броят на тези линии е m, намерено е оптимално решение, чийто единици се намират точно там, където са нулите в матрицата с редуцираните цени. КРАЙ.
- Ако броят на линиите е по-малък от m, преминаваме към Стъпка 3.

Стъпка 3. Намираме най-малкия ненулев елемент (нека стойността му е k) в матрицата с редуцираните цени, който не е зачертан от линиите в Стъпка 2. Сега изваждаме k от всеки незачертан елемент на матрицата с редуцираните цени и прибавяме k към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан от две линии. Връщаме се към Стъпка 2 с така модифицираната матрица с редуцираните цени.

Забележка 7.1. За решаване на задача за назначения при критерий максимум постъпваме по обичайния начин, като умножаваме целевата функция с -1 и решаваме новополучената задача при критерий минимум.

Забележка 7.2. Ако броят на редовете и стълбовете на матрицата с цените е различен, задачата за назначения е небалансирана. Тогава прилагането на унгарския метод може да доведе до грешно решение. Затова първо трябва да сведем небалансираната задача за назначения до балансирана чрез добавяне на фиктивен(ни) ред(ове) или стълб(ове), след което прилагаме унгарския метод.

Пример 7.1. Да се реши задачата за назначенията по min:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Стъпка 1. Определяме минималния елемент във всеки ред и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния ред:

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определяме минималния елемент във всеки стълб и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния стълб

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Стъпка 2. Виждаме, че в матрицата с редуцираните цени първият ред и първият стълб съдържат по две нули. Като зачертаем първия ред и първия стълб с две линии, остава незачертана само нулата в третия ред и третия стълб. За нея ни трябва още една линия (която зачертава или третия ред, или третия стълб). Тук избираме линията, зачертаваща третия ред (а вие се опитайте да пререшите задачата, като зачертаете третия стълб).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Стъпка 3. Най-малкият незачертан елемент е равен на 1. Изваждаме 1 от всеки незачертан елемент и прибавяме 1 към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан два пъти. Така получаваме следната матрица

$$C_4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

в която вече са необходими 4 линии за зачертаване на всички нулеви елементи. Следователно налице е оптимално решение. Как да определим от тази матрица назначенията? Като огледаме матрицата, забелязваме, че във втория и третия стълб има само по едно нула. Това ни дава $x_{12} = 1$ и $x_{33} = 1$. Така втората нула в първия ред (и четвъртия стълб) не може да се използва. Сега вече остава $x_{24} = 1$, което прави нулата във втория ред и първия стълб неизползваема. Остава $x_{41} = 1$ (а и това е единствената нула в четвъртия ред). Окончателно $x_{12} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = 1$.

Отг. $F_{min} = 5 + 5 + 3 + 2 = 15, X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3. Задачи

Да се решат задачите за назначенията.

Задача 7.1. по min:

$$C = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 300 \\ 500 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = 0 + 100 + 0 = 100$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.2. по min:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = 3 + 6 + 3 + 4 + 1 = 17$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.3. по min:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = -2 + 1 - 2 = -3$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.4. по min:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.5. по min:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = -1 - 2 + 0 + 0 - 1 = -4$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.6. по max:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{max} = 4 + 6 + 6 = 16$,

$$X_{max} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.7. по max:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{max} = 5 + 2 + 6 + 6 = 19$,

$$X_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.8. по max:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{max} = 5 + 5 + 3 + 5 + 5 + 3 = 26$,

$$X_{max} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.9. по min:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отг. $F_{min} = 1 - 2 + 2 - 1 - 2 - 1 = -3$,

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$