Лекция 2. Математически модели на практически линейни оптимизационни задачи

Пример 2.1. *Задача за оптимално разпределение на ограничени ресурси*

Фирма разполага с два вида ресурси (суровини) S_1, S_2, съответно с максимално количество дневен запас от 6 т и 8 т. и съответно единична цена от 1,5 хил.€/т и 0,8 хил.€/т. От тези суровини фирмата произвежда два вида продукти P_1, P_2, които се продават съответно по 3 хил.€/т и 2 хил.€/т.

Технологът на фирмата е определил разходните норми за производството на единица (един тон) от продуктите P_1, P_2 каква част от суровините S_1, S_2 е необходима (в т)– таблица 2.1.

Таблица 2.1. Разходни норми

	P_1	P_2
S_1	3	2
S_2	1	5

Отдел „Маркетинг“ на фирмата е поставил допълнителни условия:

- дневното производство трябва да е поне 1 т общо от двата продукта;
- дневното производство на продукта P_1 да не превишава дневното производство на продукта P_2 с повече от 0,7 т.

а) Да се състави математически модел, в който се определят оптималните количества от продуктите P_1, P_2, които трябва ежедневно да се произвеждат, така че фирмата да реализира максимален дневен приход от продажбата на двата продукта.

б) Да се състави математически модел, в който се определят оптималните количества от продуктите P_1, P_2, които трябва ежедневно да се произвеждат, така че фирмата да реализира минимален дневен разход за суровини.

Решение. Нека оптималните количества от продуктите P_1, P_2, които трябва ежедневно да се произвеждат са съответно x_1 т и x_2 т, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

а) *Целта е*: максимален дневен приход от продажбата на двата продукта. Следователно, *целевата функция* представлява общият дневен приход от продажбата на двата продукта като сума от произведенията на съответните единични цени и количества на продуктите:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to max(\text{приход}).$$

Условията, при които се търси този максимален приход идват от постановката на задачата:

- от разходните норми, определени от технолога и ограничения ресурс;
- от условията наложени от отдел „Маркетинг“.

От разходните норми и ограничения ресурс:

Количеството от суровината S_1 за цялото дневно производство на продуктите P_1, P_2 е $3x_1 + 2x_2$, но то е ограничено, тъй като от тази суровина дневното максимално количество е 6 т. Следователно, едното условие е:

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$.

Количеството от суровината S_2 за цялото дневно производство на продуктите P_1, P_2 е $1x_1 + 5x_2$, но то е ограничено, тъй като от тази суровина дневното максимално количество е 8 т. Следователно, другото условие е:

$1x_1 + 5x_2 \leq 8$.

От условията наложени от отдел „Маркетинг“:

- дневното производство трябва да е поне 1 т общо от двата продукта:

$x_1 + x_2 \geq 1$;

- дневното производство на продукта P_1 да не превишава дневното производство на продукта P_2 с повече от 0,7 т:

$x_1 - x_2 \leq 0{,}7$.

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$(приход)

при ограничения:

$$\left|\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 1x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 0{,}7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

б) *Целта е*: минимален дневен разход за суровини. Следователно, *целевата функция* представлява общият дневен разход за суровини като сума от произведенията на съответните единични цени и количества на суровините:

$f(x) = 1{,}5(3x_1 + 2x_2) + 0{,}8(1x_1 + 5x_2) = 5{,}3x_1 + 7x_2 \rightarrow min$(разход).

Условията, при които се търси този минимален разход са същите както и в а), тъй като постановката на задачата е една (само целите са различни).

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 1{,}5(3x_1 + 2x_2) + 0{,}8(1x_1 + 5x_2) = 5{,}3x_1 + 7x_2 \rightarrow min$(разход).

при ограничения:

$$\left|\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 1x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 0{,}7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

Пример 2.2. *Задача за оптимална дневна диета*

За изготвяне на ежедневна хранителна диета трябва да се осигурят определени количества от протеини, мазнини и килокалории, които се съдържат в различни видове храни. Количествата от всяко вещество, което се съдържа в 100g от съответната храна и цената в лв. са дадени в таблица 2.2.

Таблица 2.2. Съдържание на всяко вещество в 100g хранителен продукт и цена

Продукти	Хляб	Сирене	Масло	Мед	Свинско месо	Бяла риба
Цени (лв./100гр.)	0,1	0,7	1,1	0,9	0,8	1,2
Протеини (в 100гр.)	0,5	30	0	0	45	60
Килокалории (в 100гр.)	350	300	600	800	450	100
Мазнини (в 100гр.)	0	35	100	0	30	0

Диетолог определя, че за да се осигури пълноцинно ежедневно хранене са необходими:

- поне 150g протеини;
- поне 1600 килокалории;
- поне 30g мазнини.

а) Да се състави математически модел на задачата, в който се определят оптималните количества от всеки хранителен продукт, така че дневната диета да е най-евтина и да осигурява пълноцинно хранене.

б) Да се състави математически модел на задачата, в който се определят оптималните количества от всеки хранителен продукт като е пренебрегнато условието на диетолога за поне 150g протеини и е заменено с максимално количество на протеини, а общата дневна цена за хранителните продукти не трябва да надвишава 15лв.

Решение. Нека оптималните количества от хранителните продукти хляб, сирене, масло, мед, свинско месо, бяла риба са съответно $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$; $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$.

а) *Целта е*: минимална обща дневна цена за хранителните продукти. Следователно, *целевата функция* представлява сума от произведенията на съответните единични цени и количества на хранителните продукти:

$f(x) = 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}8x_5 + 1{,}2x_6 \to min$(цена).

От условията наложени от диетолога:

- поне 150g протеини:

$0{,}5x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 45x_5 + 60x_6 \geq 150$;

- поне 1600 килокалории:

$350x_1 + 300x_2 + 600x_3 + 800x_4 + 450x_5 + 100x_6 \geq 1600$;

- поне 30g мазнини:

$0x_1 + 35x_2 + 100x_3 + 0x_4 + 30x_5 + 0x_6 \geq 30$.

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}8x_5 + 1{,}2x_6 \to min$

при ограничения:

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}5x_1 + 30x_2 + 45x_5 + 60x_6 \geq 150 \\ 350x_1 + 300x_2 + 600x_3 + 800x_4 + 450x_5 + 100x_6 \geq 1600 \\ 35x_2 + 100x_3 + 30x_5 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6. \end{array}\right.$$

б) *Целта е*: максимално дневно количество на протеини. Следователно, *целевата функция* представлява сума от произведенията на съответните единични количества на протеини и количества на хранителните продукти:

$f(x) = 0{,}5x_1 + 30x_2 + 45x_5 + 60x_6 \rightarrow min$(количество протеини).

Условията на диетолога за килокалориите и мазнините са същите.

Условието:

- общата дневна цена за хранителните продукти не трябва да надвишава 15лв.:

$0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}8x_5 + 1{,}2x_6 \leq 15.$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 0{,}5x_1 + 30x_2 + 45x_5 + 60x_6 \rightarrow min$

при ограничения:

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}8x_5 + 1{,}2x_6 \leq 15 \\ 350x_1 + 300x_2 + 600x_3 + 800x_4 + 450x_5 + 100x_6 \geq 1600 \\ 35x_2 + 100x_3 + 30x_5 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6. \end{array}\right.$$

Пример 2.3. *Задача за оптимална дневна дажба на група животни*

Дневната дажба за хранене на група животни може да се изготви от сено и силаж. Ветеринарен лекар определя, че дневната дажба трябва да съдържа:

не по-малко от 1kg белтъци;

не по-малко от 95g калций;

не по-малко от 75g фосфор.

Съдържанието на тези хранителни вещества (в g) в 1 kg сено и силаж и съответната цена (в лв) са дадени в таблица 2.3.

Таблица 2.3. Съдържание на хранителните вещества и цена

Вещества / Храни	**Белтъци**	**Калций**	**Фосфор**	**Цена**
Сено	35	1,5	2	0,35
Силаж	8	2,2	1	0,24

Да се състави математически модел на задачата, който да определи най-евтината дажба, осигуряваща пълноценно хранене на животните.

Решение. Нека дневната дажба се състои от $x_1$kg сено и $x_2$kg силаж, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Целта е: най-евтина дажба. Тогава *целевата функция* е сума от произведенията на съответните единична цена и количества на сеното и силажа:

$f(x) = 0{,}35x_1 + 0{,}24x_2 \rightarrow min$(цена).

От условията, поставени от ветеринарния лекар, за пълноценно хранене:

- не по-малко от 1kg белтъци:

$35x_1 + 8x_2 \geq 1000;$

- не по-малко от 95g калций:

$1{,}5x_1 + 2{,}2x_2 \geq 95;$

- не по-малко от 75g фосфор:

$2x_1 + 1x_2 \geq 75.$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 0{,}35x_1 + 0{,}24x_2 \to min$

при ограничения:

$$\begin{cases} 35x_1 + 8x_2 \geq 1000 \\ 1{,}5x_1 + 2{,}2x_2 \geq 95 \\ 2x_1 + 1x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 2.4. *Задача за изготвяне на оптимална дневна смес от хранителни добавки*

Фармацевтична фирма дневно произвежда не по-малко от 850kg от някаква хранителна добавка, която е смес от царевично и соево брашно, чийто състав е представен в таблица 2.4.

Таблица 2.4. Съдържание на хранителните вещества и цена

Брашно	Белтък (в kg на kg брашно)	Целулоза (в kg на kg брашно)	Цена (в лв. за kg)
Царевично	0,08	0,03	0,40
Соево	0,70	0,05	1,10

Диетолозите препоръчват в хранителната добавка да има:

- не по-малко от 35% белтък;
- не повече от 4% целулоза.

Да се състави математически модел на задачата, при който фармацевтичната фирма да изготви рецептура за хранителната добавка, която да има минимална цена и да удовлетворява препоръките на диетолозите.

Решение. Нека $x_1$kg е количеството царевично брашно, а $x_2$kg е количеството соево брашно, които се използват в дневното производство на хранителната добавка, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Целта е: минимална цена на хранителната добавка. Тогава *целевата функция* представлява сума от съответните единична цена и количество от видовете брашно:

$f(x) = 0{,}40x_1 + 1{,}10x_2 \to min$(цена).

От препоръките на диетолозите в хранителната добавка да има:

- не по-малко от 35% белтък:

$\frac{0{,}08x_1+0{,}70x_2}{x_1+x_2} \geq 0{,}35 \Rightarrow 0{,}08x_1 + 0{,}70x_2 \geq 0{,}35(x_1 + x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}08x_1 + 0{,}70x_2 \geq 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 \Rightarrow -0{,}27x_1 + 0{,}35x_2 \geq 0;$

- не повече от 4% целулоза:

$\frac{0{,}03x_1+0{,}05x_2}{x_1+x_2} \geq 0{,}04 \Rightarrow 0{,}03x_1 + 0{,}05x_2 \geq 0{,}04(x_1 + x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}03x_1 + 0{,}05x_2 \geq 0{,}04x_1 + 0{,}04x_2 \Rightarrow -0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 \geq 0.$

От условието: дневното производство да е не по-малко от 850kg от хранителната добавка:

$x_1 + x_2 \geq 850.$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = 0{,}40x_1 + 1{,}10x_2 \rightarrow min$

при ограничения:

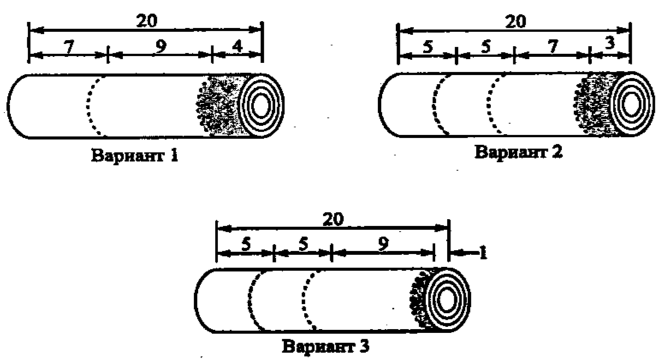
$$\begin{cases} -0{,}27x_1 + 0{,}35x_2 \geq 0 \\ -0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 850 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 2.5. *Задача за оптимално линейно разкрояване*

Хартиена фабрика произвежда стандартни рулони хартия с ширина 20 фута. Специални поръчки на клиентите ѝ изискват разрязване на стандартните рулони. Една типова поръчка е следната:

- 140 рулона с ширина 5 фута;
- 180 рулона с ширина 7 фута;
- 280 рулона с ширина 9 фута.

Фабриката изпълнява поръчките чрез разрязване на стандартните рулони със специални ножове на по-малки парчета. Съществуват няколко варианта за разкрояване на стандартен рулон, три от които са показани на фигура 2.1.



Фигура 2.1. Три варианта за разрязване на стандартните рулони

Да се състави математически модел на задачата, който да намери комбинация от варианти за разкрояване, с помощта на която да се изпълни поръчката и общите отпадъци да бъдат минимални.

Решение. Информацията от постановката на задачата е представена в таблица 2.5.

Таблица 2.5. Варианти за разкрояване

Ширина (фута)	**Варианти (брой възможни разкроя)**			**Количество рулони по поръчка (брой)**
	1	**2**	**3**	
5	0	2	2	140
7	1	1	0	180
9	1	0	1	280
Отпадъци (фута)	4	3	1	

Нека x_j е броя на стандартните рулони, разкроени по j-тия начин, $x_j \epsilon \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, j = 1,2,3$.

Целта е: общите отпадъци при изпълнението на поръчката да бъдат минимални. Тогава *целевата функция* е сума от произведенията на броя на вариантите на разкрояване на стандартните рулони и съответните им отпадъци:

$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \rightarrow \min(\text{отпадъци})$.

Условията в задачата идват от типовата поръчка:

- 140 рулона с ширина 5 фута:

$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 140;$

- 180 рулона с ширина 7 фута:

$1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \geq 180;$

- 280 рулона с ширина 9 фута:

$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \geq 280.$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

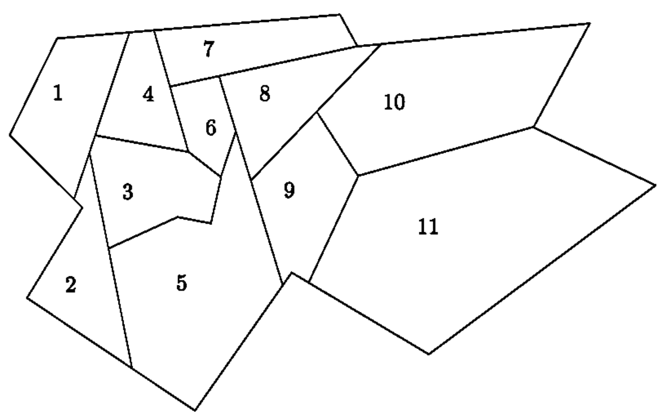
$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \rightarrow min.$

при ограничения:

$$\left| \begin{array}{l} 2x_2 + 2x_3 \geq 140 \\ 1x_1 + 1x_2 \geq 180 \\ 1x_1 + 1x_3 \geq 280 \\ x_j \epsilon \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, j = 1,2,3. \end{array} \right.$$

Пример 2.6. *Задача за оптимално покритие*

Град преразглежда разположението на противопожарните си станции. Градът се състои от квартали, както е показано на фигура 2.2.



Фигура 2.2. Карта на града

Противопожарна станция може да бъде разположена в произволен квартал. Тя може да гаси пожари в квартала, където е разположена, както и във всеки съседен на него квартал. Да се състави математически модел на задачата, който минимизира броят на противопожарните станции.

Решение. Нека променливите

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ако в квартал } j \text{ е разположена противопожарна станция} \\ 0, \text{ако в квартал } j \text{ не е разположена противопожарна станция} \end{cases}, j = 1, \dots, 11.$$

Целта е: минимизиране на броя на противопожарните станции. Тогава *целевата функция* е сума от броя на противопожарните станции, разположени във всеки квартал:

$f(x) = \sum_{j=1}^{11} x_j \to min$(брой противопожарни станции).

От условието, че противопожарна станция може да гаси пожари в квартала, където е разположена, както и във всеки съседен на него квартал:

Нека

$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ако квартал } i \text{ е съседен на квартал } j \\ 0, \text{ако квартал } i \text{ не е съседен на квартал } j \end{cases}; \begin{matrix} i = 1, \dots, 11 \\ j = 1, \dots, 11 \end{matrix}.$

Тогава всяко от ограниченията е:

$\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^{11} a_{ij} x_j \geq 1.$

Първото ограничение означава, че трябва да има противопожарна станция в квартал 1 или в някой от съседните му квартали (2, 3, 4). Следващото ограничение е за квартал 2 и т.н., т.е.:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1,$
$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1,$
$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1,$
$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1,$
$x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1,$
$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1,$
$x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1,$
$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1,$
$x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1.$

Трябва да се намери множество от такива подмножества j, които покриват множеството на всички квартали в смисъл, че всеки квартал се появява в множеството на обслужване на поне една противопожарна станция.

Тагава *математическият модел* на задачата е:

$f(x) = \sum_{j=1}^{11} x_j \to min$

при ограничения:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \\ x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \\ x_j = \{0,1\}, j = 1, \dots, 11. \end{array} \right.$$

Пример 2.7. *Задача за оптимални транспортни разходи*

Фирма притежава четири завода за производство на брашно B_1, B_2, B_3, B_4, чийто възможности за преработка на суровина са съответно 220, 300, 450 и 130 т.

Тази суровина е налична в три склада A_1, A_2, A_3, чийто наличности в даден момент са съответно 340, 440 и 320 т.

Транспортните разходи в лв. за превоз на един тон суровина от всеки склад до всеки завод са дадени в таблица 2.6.

Таблица 2.6. Транспортни разходи

Заводи / Складове	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	5	2
A_2	6	1	2	3
A_3	4	5	3	1

Да се състави математически модел на задачата, който да определи такъв план на превозите, при който разходите са минимални.

Решение. Нека x_{ij} т е количеството превозено от всеки склад A_i до всеки завод B_j, за $i = 1,2,3, j = 1,2,3,4, x_{ij} \geq 0$.

Целта е: минимални общи разходи за транспорт. Тогава *целевата функция* е сума от произведенията на съответните единична цена-разход и транспортирано количество от всяко A_i до всяко B_j, $i = 1,2,3, j = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 3x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + \\ & +6x_{21} + 1x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + \\ & +4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} + 1x_{34} \to min(\text{разходи}) \end{aligned}$$

Ограниченията на задачата трябва да осигурят както пълно задоволяване на складовете, така и транспортиране на всичкото количество брашно, т.е.:

- за складовете:

$$\left| \begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 340 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 440 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 320; \end{aligned} \right.$$

- за заводите:

$$\left| \begin{aligned} & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 220 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 450 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130. \end{aligned} \right.$$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 3x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + \\ & +6x_{21} + 1x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + \\ & +4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} + 1x_{34} \to min \end{aligned}$$

при ограничения:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=340 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=440 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=320 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=220 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=300 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=450 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=130 \\ x_{ij}\geq 0, i=1,2,3, j=1,2,3,4. \end{cases}$$

Пример 2.8. *Задача за оптимална производителност*

В машиностроителен цех на едно предприятие има три машини K_1, K_2, K_3, които имат съответно дневна производителност 1200, 1420 и 970 броя. На всяка от тези машини могат да се произвеждат четири детайли D_1, D_2, D_3, D_4 като трябва съответно дневното им производство да е 890, 1120, 750 и 830 броя.

Разходите в лв. за производството на всеки един от детайлите $D_i, i=1,2,3,4$, на всяка една от машините $K_j, j=1,2,3$, са дадени в таблица 2.7.

Таблица 2.7. Производствени разходи

Машини / Детайли	K_1	K_2	K_3
D_1	0,24	0,35	0,72
D_2	0,42	0,23	0,43
D_3	0,58	0,35	0,12
D_4	0,68	0,52	0,15

Да се състави математически модел на задачата, при който да се намери такъв производствен план, който да минимизира общите дневни производствени разходи.

Решение. Нека x_{ij} броя е количеството от всеки детайл $D_i, i=1,2,3,4$, произведен на всяка машина $K_j, j=1,2,3$, $x_{ij}\epsilon\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$.

Целта е: минимални общи дневни производствени разходи. Тогава *целевата функция* е сума от произведенията на на съответните единични разходи и количества:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 0{,}24x_{11}+0{,}35x_{12}+0{,}72x_{13}+ \\ & +0{,}42x_{21}+0{,}23x_{22}+0{,}43x_{23}+ \\ & +0{,}58x_{31}+0{,}35x_{32}+0{,}12x_{33}+ \\ & +0{,}68x_{41}+0{,}52x_{42}+0{,}15x_{43}\rightarrow min(\text{разходи}) \end{aligned}$$

Ограниченията на задачата се задават от условията за дневната производителност на детайлите и машините:

- за детайлите:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=890 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1120 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=750 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=830; \end{cases}$$

- за машините:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1200 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1420 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=970. \end{cases}$$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 0{,}24x_{11}+0{,}35x_{12}+0{,}72x_{13}+ \\ & +0{,}42x_{21}+0{,}23x_{22}+0{,}43x_{23}+ \\ & +0{,}58x_{31}+0{,}35x_{32}+0{,}12x_{33}+ \\ & +0{,}68x_{41}+0{,}52x_{42}+0{,}15x_{43} \to min \end{aligned}$$

при ограничения:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=890 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1120 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=750 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=830 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1200 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1420 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=970 \\ x_{ij}\epsilon\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}, i=1,2,3,4, j=1,2,3. \end{cases}$$

Пример 2.9. *Задача за оптимално назначение*

Голяма високотехнологична компания разкрива три свободни места на позиции – началник отдел „Маркетинг“, мениджър продажби и технически сътрудник към отдел „Продажби“. До интервю са допуснати трима кандидати – Янев, Димитрова и Кръстев. По време на интервюто всеки кандидат е попитан, каква месечна заплата очаква за всяка от обявените позиции. Резултатите в лв. от интервюто са представени в таблица 2.8.

Таблица 2.8. Резултати от интервюто

Позиция / Кандидат	Началник отдел	Мениджър	Технически сътрудник
Янев	3500	2700	1500
Димитрова	3200	2500	2000
Кръстев	3300	2200	1700

Отдел „Човешки ресурси“ трябва да направи такова разпределение на работните места между тримата кандидати, така че общите разходи на компанията за заплати да са минимални.

Да се състави математически модел на тази задача.

Решение. Нека променливите

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ако кандидат } i \text{ е назначен на позиция } j \\ 0, \text{ако кандидат } i \text{ не е назначен на позиция } j\end{cases} \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3. \end{matrix}$$

Целта е: общите разходи за заплати да са минимални. Тогава *целевата функция* е:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 3500x_{11}+2700x_{12}+1500x_{13}+ \\ & +3200x_{21}+2500x_{22}+2000x_{23}+ \\ & +3300x_{31}+2200x_{32}+1700x_{33} \to min\,. \end{aligned}$$

Ограниченията на задачата се задават от условията:

- всеки кандидат трябва да заеме само една позиция

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1; \end{cases}$$

- на всяка позиция трябва да има само един кандидат:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1. \end{cases}$$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$$f(x) = 3500x_{11} + 2700x_{12} + 1500x_{13} + \\ +3200x_{21} + 2500x_{22} + 2000x_{23} + \\ +3300x_{31} + 2200x_{32} + 1700x_{33} \to min\,.$$

при ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} = \{0,1\}, i = 1,2,3, j = 1,2,3. \end{cases}$$

2.1. Задачи

Задача 2.1. Фирма разполага с два вида ресурси (суровини) S_1, S_2, съответно с максимално количество дневен запас от 10 т и 12 т. и съответно единична цена от 2,7 хил.€/т и 3,5 хил.€/т. От тези суровини фирмата произвежда два вида продукти P_1, P_2, които се продават съответно по 6 хил.€/т и 5 хил.€/т.

Технологът на фирмата е определил разходните норми за производството на единица (един тон) от продуктите P_1, P_2 каква част от суровините S_1, S_2 е необходима (в т)– таблица 2.9.

Таблица 2.9. Разходни норми

	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$
$\boldsymbol{S_1}$	5	4
$\boldsymbol{S_2}$	2	6

Отдел „Маркетинг“ на фирмата е поставил допълнителни условия:

- дневното производство трябва да е поне 2 т общо от двата продукта;
- дневното производство на продукта P_1 да не превишава дневното производство на продукта P_2 с повече от 2 т.

а) Да се състави математически модел, в който се определят оптималните количества от продуктите P_1, P_2, които трябва ежедневно да се произвеждат, така че фирмата да реализира максимален дневен приход от продажбата на двата продукта.

б) Да се състави математически модел, в който се определят оптималните количества от продуктите P_1, P_2, които трябва ежедневно да се произвеждат, така че фирмата да реализира минимален дневен разход за суровини.

Задача 2.2. За изготвяне на ежедневна хранителна диета трябва да се осигурят определени количества от протеини, мазнини и килокалории, които се съдържат в различни видове храни. Количествата от всяко вещество, което се съдържа в 100g от съответната храна и цената в лв. са дадени в таблица 2.10.

Таблица 2.10. Съдържание на всяко вещество в 100g хранителен продукт и цена

Продукти	**Хляб**	**Краве мляко**	**Масло**	**Мед**	**Телешко месо**	**Бяла риба**
Цени (лв./100гр.)	0,1	0,2	1,1	0,8	1,4	1,3
Протеини (в 100гр.)	0,6	15	0	0	35	56
Килокалории (в 100гр.)	320	150	600	900	420	120
Мазнини (в 100гр.)	0	22	100	0	20	0

Диетолог определя, че за да се осигури пълноцинно ежедневно хранене са необходими:

- поне 140g протеини;
- поне 1800 килокалории;
- поне 20g мазнини.

а) Да се състави математически модел на задачата, в който се определят оптималните количества от всеки хранителен продукт, така че дневната диета да е най-евтина и да осигурава пълноцинно хранене.

б) Да се състави математически модел на задачата, в който се определят оптималните количества от всеки хранителен продукт като е пренебрегнато условието на диетолога за поне 140g протеини и е заменено с максимално количество на протеини, а общата дневна цена за хранителните продукти не трябва да надвишава 12лв.

Задача 2.3. Фармацевтична фирма дневно произвежда не по-малко от 1200 kg от някаква хранителна добавка, която е смес от царевично и соево брашно, чийто състав е представен в таблица 2.11.

Таблица 2.11. Съдържание на хранителните вещества и цена

Брашно	**Белтък (в kg на kg брашно)**	**Целулоза**	**Цена (в лв. за kg)**
Царевично	0,09	0,04	0,60
Соево	0,80	0,07	1,45

Диетолозите препоръчват в хранителната добавка да има:

- не по-малко от 42% белтък;
- не повече от 5% целулоза.

Да се състави математически модел на задачата, при който фармацевтичната фирма да изготви рецептура за хранителната добавка, която да има минимална цена и да удовлетворява препоръките на диетолозите.

Задача 2.4. Фирма притежава четири завода за производство на шоколад B_1, B_2, B_3, B_4, чийто възможности за преработка на суровина са съответно 120, 200, 350 и 30 т.

Тази суровина е налична в три склада A_1, A_2, A_3, чийто наличности в даден момент са съответно 240, 340 и 120 т.

Транспортните разходи в лв. за превоз на един тон суровина от всеки склад до всеки завод са дадени в таблица 2.12.

Таблица 2.12. Транспортни разходи

Заводи / Складове	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	1	4	2
A_2	4	6	5	6
A_3	3	7	3	7

Да се състави математически модел на задачата, който да определи такъв план на превозите, при който разходите са минимални.

Задача 2.5. В машиностроителен цех на едно предприятие има три машини K_1, K_2, K_3, които имат съответно дневна производителност 1320, 1550 и 1020 броя. На всяка от тези машини могат да се произвеждат четири детайли D_1, D_2, D_3, D_4 като трябва съответно дневното им производство да е 1000, 920, 660 и 1310 броя.

Разходите в лв. за производството на всеки един от детайлите $D_i, i = 1,2,3,4$, на всяка една от машините $K_j, j = 1,2,3$, са дадени в таблица 2.13.

Таблица 2.13. Производствени разходи

Машини / Детайли	K_1	K_2	K_3
D_1	0,22	0,13	0,86
D_2	0,35	0,85	0,73
D_3	0,44	0,27	0,62
D_4	0,62	0,38	0,53

Да се състави математически модел на задачата, при който да се намери такъв производствен план, който да минимизира общите дневни производствени разходи.

Задача 2.6. Голяма фармацевтична компания разкрива три свободни места на позиции – началник отдел, мениджър продажби и технически сътрудник. До интервю са допуснати трима кандидати – Стоянова, Димитров и Иванова. По време на интервюто всеки кандидат е попитан, каква месечна заплата очаква за всяка от обявените позиции. Резултатите в лв. от интервюто са представени в таблица 2.14.

Таблица 2.14. Резултати от интервюто

Позиция / Кандидат	**Началник отдел**	**Мениджър**	**Технически сътрудник**
Стоянова	3600	2200	1400
Димитров	3300	2500	1800
Иванова	3200	2600	1600

Отдел „Човешки ресурси“ трябва да направи такова разпределение на работните места между трима кандидати, така че общите разходи на компанията за заплати да са минимални.

Да се състави математически модел на тази задача.