<u>Лекция 5.</u> Класическа транспортна задача. Методи и алгоритми за намиране на начално допустимо базисно решение и оптимално решение

Класическата транспортна задача (КТЗ) е специален случай на задачата на линейното оптимиране. Тя е една от първите ЗЛО и представлява самостоятелен интерес поради специфичните свойства, които притежава. Решаването на КТЗ със симплекс метода е свързано с голяма изчислителна работа. Затова са разработени специални методи за нейното решаване.

5.1. Постановка на класическа транспортна задача

Даден вид продукт е произведен в пунктовете $A_1,...,A_m$ (наричани производители, доставчици, складове) съответно в количества $a_1,...,a_m$. Пунктовете $B_1,...,B_n$ (наричани потребители, магазини) се нуждаят от този продукт в количества съответно $b_1,...,b_n$, като

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.1}$$

Транспортните разходи за превоз на единица продукт от пункта A_i до пункта B_j са съответно $c_{ij}, i=1,...,m; j=1,...,n$. Задачата е: да се направи план за снабдяването на пунктовете $B_j, j=1,...,n$, така че потребностите им да бъдат изцяло задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

5.2. Математически модел на КТЗ

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът $A_i, i=1,...,m$, снабдява пункта $B_j, j=1,...,n$. При план на снабдяване $x=(x_{11},...,x_{mn})^T$ целевата функция е

$$f(x_{11},...,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{5.2}$$

а условията (транспортните ограничения) са

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=1,...,m, \tag{5.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j=1,...,n, \tag{5.4}$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,...,m; j=1,...,n. \tag{5.5}$$

В практиката много по-често се срещат транспортни задачи, при които баланс между производство и потребление няма. Те се наричат *транспортни задачи от отворен тип*. За решаването им е необходимо изкуствено да бъде създаден баланс.

1 случай: *Производството е по-голямо от потреблението*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.6}$$

За да има баланс, се въвежда *фиктивен потребител* B_{n+1} с потребност

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.7}$$

и транспортни разходи от всеки производител до него съответно $c_{i,n+1} = 0, i = 1,...,m$. След получаването на оптималното решение количествата продукт, предназначени за фиктивния потребител, просто остават у съответните производители. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (5.3) стават от вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1,...,m \; . \tag{5.8}$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен потребител.

2 случай: *Потреблението е по-голямо от производството*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.9}$$

Постъпва се аналогично: въвежда се *фиктивен производител* A_{m+1} с производство

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{5.10}$$

и транспортни разходи до всеки потребител съответно $c_{m+1,j} = 0, j = 1,...,n$. В този случай във формулировката на транспортната задача се премахва изискването потребностите на потребителите да бъдат изцяло задоволени, тъй като това би довело до несъвместими ограничения. Вместо него се иска цялата продукция да бъде превозена при минимални транспортни разходи. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (5.4) стават от вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j = 1,...,n \; . \tag{5.11}$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен производител. След получаването на оптималното решение количествата продукт, които трябва да бъдат доставени от фиктивния производител на съответните потребители, просто остават у него и не се превозват.

5.3. Основни свойства

Без ограничение на общността предполагаме, че $a_i > 0, i = 1,...,m; b_j > 0, j = 1,...,n$ (иначе намаляваме броя на производителите или потребителите, а съответните променливи на задачата са равни на нула).

КТЗ (5.2)-(5.5) очевидно е канонична задача на линейното оптимиране (КЗЛО) и може да се запише във матричен вид:

$$\begin{aligned} &\min\left\{f(x) = c^T x\right\} \\ &\text{при ограничения} \\ &Ax = d, \\ &x \ge 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

където $c \in R^{nm}$, $x \in R^{nm}$, A е матрица $(m+n)\times mn$, $d \in R^{m+n}$, $d = (a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)^T$. Един допустим вектор $x = (x_{11},...,x_{mn})^T$ понякога се записва като матрица X с елементи $x_{ij}, i = 1,...,m; j = 1,...,n$, която се нарича *матрица на превозите*. Аналогично се определя и *матрица на транспортните разходи С*, чиито елементи са $c_{ij}, i = 1,...,m; j = 1,...,n$.

Теорема 5.1. Задача (5.2)-(5.5) има оптимално решение тогава и само тогава, когато е налице условието за баланс (5.1).

Матрицата A се състои от нули и единици, като във всеки стълб има точно два ненулеви елемента, защото променливата x_{ij} участва с коефициент 1 само в две ограничения - i-тото и $m+j$-тото.

Теорема 5.2. Рангът на матрицата A е равен на $m+n-1$.

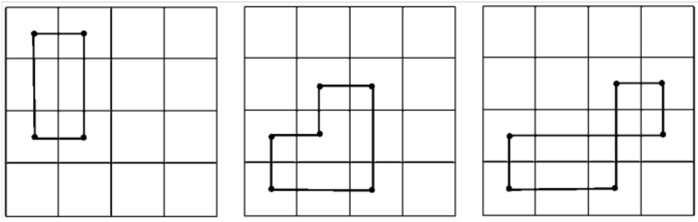
При различните методи за решаване на КТЗ се използват правоъгълни таблици и някои понятия, свързани с тях. Правоъгълната таблица има редове и стълбове, образуващи клетки. Всяка клетка се определя с наредена двойка *индекси* (i,j), където i е номерът на реда, а j - номерът на стълба, в който се намира клетката. Тогава има взаимноеднозначно съответствие между координатите на едно допустимо решение на КТЗ и клетките на тази таблица, като на координатата x_{ij} съответства клетката (i,j). Всички данни за дадено *базисно допустимо решение* (бдр) на КТЗ могат да бъдат подредени в правоъгълна таблица, наречана *транспортна таблица*, както е показано на таблица 5.1.

Таблица 5.1 Транспортна таблица

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	....	$\vdots$	$\vdots$
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	a b

Ако за дадено бдр $x = \{x_{ij}\}_{m\times n}$ координатата x_{ij} е *базисна*, клетката (i,j) също ще наричаме *базисна* (или *пълна*, тъй като там се записва съответната стойност на x_{ij}). Ако x_{ij} е *небазисна*, клетката (i,j) ще наричаме *небазисна* (или *празна*, защото там не се записва никаква стойност).

Дефиниция 5.1. Съвкупността от клетки на транспортната таблица се нарича *цикъл*, ако начупената линия, образувана от отсечки с върхове в тези клетки, е затворена и от всеки две отсечки с общ връх едната лежи в ред, а другата - в стълб на транспортната таблица. Съвкупност от клетки в транспортната таблица, която съдържа цикъл, се нарича *циклична*. В противен случай се нарича *ациклична*. От написаното по-горе е видно, че всеки цикъл се състои от четен брой клетки. Във всеки цикъл две последователни (съседни) клетки имат равни първи или втори индекси, т. е. съседните клетки лежат в един и същи ред или стълб на транспортната таблица. Примери на цикли са дадени на фигура 5.1.



Фигура 5.1 Цикли

Теорема 5.3. Необходимо и достатъчно условие произволна съвкупност от вектор-стълбове на матрицата на транспортните ограничения да бъде линейно независима е съответните ѝ клетки в транспортната таблица да не съдържат цикъл.

Теорема 5.4. Необходимо и достатъчно условие допустимият вектор $x = \{x_{ij}\}_{m \times n}$ да бъде бдр за КТЗ е клетките (*i,j*), за които $x_{ij} > 0$, да не съдържат цикъл.

Теорема 5.5. Нека $x = \{x_{ij}\}_{m \times n}$ е бдр за КТЗ. За всяка празна клетка (*i,j*) съществува точно един цикъл, който я свързва с базисните (пълните) клетки на *x*.

5.4. Методи и алгоритми за намиране на начално базисно допустимо решение (бдр)

За разлика от каноничната задача на линейното оптимиране при транспортната задача това се осъществява лесно. Има различни методи за построяване на начално бдр. Спираме се на два от тях - *метод на северозападния ъгъл* и *метод на минималния елемент*.

5.4.1. Метод на северозападния ъгъл

Алгоритъм:

1) Определяме $\min\{a_1, b_1\}$ и

- ако $\min\{a_1, b_1\} = a_1$, полагаме $x_{11} = a_1, x_{1j} = 0, j = 2,...,n$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия ред и коригиране на $b_1 : b_1' = b_1 - a_1$;
- ако $\min\{a_1, b_1\} = b_1$, полагаме $x_{11} = b_1, x_{i1} = 0, i = 2,...,m$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия стълб и коригиране на $a_1 : a_1' = a_1 - b_1$;
- ако $a_1 = b_1$, отстраняваме или първия стълб, или първия ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b_1' = 0$, или $a_1' = 0$. Това

нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр;

2) С получената таблица, която има един размер по-малко от предишната, повтаряме описаните по-горе процедури. Така след точно $m+n$-1 стъпки стигаме до таблица, състояща се от една клетка (или таблица с един ред и един стълб). В този случай двете количества a_1' и b_1' са равни и чак сега се елиминират и ред, и стълб. Пълните клетки в транспортната таблица са точно $m+n$-1 и освен това образуват ациклична съвкупност, т.е. в тях се намират базисните координати на полученото бдр.

Наименованието на метода идва от това, че x_{11} е разположена в „северозападната“ клетка на таблицата.

5.4.2. Метод на минималния елемент

Алгоритъм:

1) Намираме $c_{i_0} = \min\limits_{i,j} c_{ij}$. След това определяме $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$ и

- ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = a_{i_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, $x_{i_0 j} = 0, j \neq j_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на реда i_0 и коригиране на $b_{j_0} : b_{j_0}' = b_{j_0} - a_{i_0}$;
- ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = b_{j_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, $x_{i j_0} = 0, i \neq i_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на стълба j_0 и коригиране на $a_{i_0} : a_{i_0}' = a_{i_0} - b_{j_0}$;
- ако $b_{j_0} = a_{i_0}$, отстраняваме или j_0-я стълб, или i_0-я ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b_{j_0}' = 0$, или $a_{i_0}' = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр;

2) С получената таблица повтаряме описаните процедури.

5.5. Методи и алгоритми за намиране на оптимално решение

Условието за баланс е необходимо и достатъчно, за да има КТЗ оптимално решение. Така от алгоритъма на симплекс метода отпада критерият за неограниченост на целевата функция и остават само два елемента - критерий за оптималност и правило за преминаване от едно бдр към съседно на него, при което стойността на целевата функция се подобрява.

5.5.1. Разпределителен метод

Разпределителният метод е вариант на симплекс метода за решаване на каноничната задача на линейното оптимиране.

Критерий за оптималност

Нека $\bar{x}$ е бдр и (k,l) е празна клетка. Образуваме единствения цикъл γ_{kl}, който я свързва с клетките от базиса на $\bar{x}$

$$\gamma_{kl} : (k,l)(k,j_1)\ldots(i_s,j_s)(i_s,l). \tag{5.13}$$

Клетките от цикъла маркираме алтернативно със знаци + и −, започвайки от клетката (k,l) със знак +. Тогава относителната оценка на променливата x_{kl} е

$$\bar{c}_{kl} = \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{+}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} c_{ij}, \tag{5.14}$$

където $\gamma_{kl}^{+} = \left\{(i,j)\in\gamma_{kl}, \textit{означени с } +\right\}$, $\gamma_{kl}^{-} = \left\{(i,j)\in\gamma_{kl}, \textit{означени с } -\right\}$.

Теорема 5.6. Бдр на задача (5.2)-(5.5) е оптимално тогава и само тогава, когато $\bar{c}_{kl} \geq 0$ за всички негови празни клетки (k,l). А това е видно от условията за оптималност на каноничната линейна задача.

Преминаване от едно бдр към съседно на него

Теорема 5.7. Нека $\bar{x}$ е бдр на задача (5.2)-(5.5). Тогава векторът $\bar{x}'$, получена от $\bar{x}$ по формулите

$$\begin{aligned}
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij} + \bar{x}_{i_p j_p}, (i,j)\in\gamma_{kl}^{+},\\
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i_p j_p}, (i,j)\in\gamma_{kl}^{-},\\
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij}, (i,j)\notin\gamma_{kl}, \bar{x}_{i_p j_p} = \min_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} \bar{x}_{ij},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

е бдр на задача (5.2)-(5.5), като $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ са съседни.

Това следва непосредствено от формулите за преминаване от едно бдр на каноничната задача на линейното оптимиране към съседно на него.

Алгоритъм на разпределителен метод

1. Построяваме начално бдр $\bar{x}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.
2. За всяка празна клетка (i,j) на $\bar{x}$ построяваме цикъла γ_{ij} и пресмятаме $\bar{c}_{ij}$. Проверяваме критерия за оптималност.
   - Ако той е изпълнен, то бдр е оптимално и задачата е решена. Край.
   - Ако критерият за оптималност не е изпълнен, преминаваме към т. 3.
3. Намираме $\bar{c}_{i_0 j_0} = \min\left\{\bar{c}_{ij} : \bar{c}_{ij} < 0\right\}$. Построяваме ново бдр $\bar{x}'$ по формулите (5.15) с помощта на цикъла $\gamma_{i_0 j_0}$, свързващ клетката (i_0, j_0) с базисните клетки на $\bar{x}$. Преминаваме към т. 2, като вместо $\bar{x}$ вземаме $\bar{x}'$.

5.5.2. Метод на потенциалите

Този метод е вариант на двойствения симплекс метод.

Критерий за оптималност

Двойствената задача на задача (5.2)-(5.5) е

$$\max\left\{g(y)=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i\right\}$$

при ограничения (5.16)

$$v_j - u_i \le c_{ij}, i=1,...,m; j=1,...,n.$$

Двойствените променливи, отговарящи на ограниченията (5.3), са означени с $-u_i, i=1,...,m$, а тези, отговарящи на ограниченията (5.4) са означени с $v_j, j=1,...,n$. Прието е те да се наричат *потенциали*.

Лесно може да се провери, че ако $(-u_1,...,-u_m,v_1,...,v_n)^T$ е допустим вектор за горната задача, то и векторът $(-u_1-h,...,-u_m-h,v_1+h,...,v_n+h)^T$, където $h=const$, също е допустим за нея. Това означава, че всеки допустим вектор за тази двойствена задача е определен с точност до адитивна константа.

Теорема 5.8. Необходимо и достатъчно условие бдр $\bar{x}$ да бъде оптимално решение на задача (5.2)-(5.5) е да съществува вектор $(-u_1,...,-u_m,v_1,...,v_n)^T$, такъв че

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \quad \text{за} \quad i=1,...,m; j=1,...,n.$$

$$v_j - u_i = c_{ij} \quad \text{за} \quad x_{ij} > 0. \tag{5.17}$$

Това следва от теоремите за двойнственост на общата задача на линейното оптимиране.

Алгоритъм на метода на потенциалите

1. Построяваме начално бдр $\bar{x}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.
2. Решаваме системата $v_j - u_i = c_{ij}$ за пълните (базисните) клетки на $\bar{x}$. Тъй като броят на уравненията е $m+n-1$, а броят на неизвестните е $m+n$, решението на системата е определено с точност до константа.
3. Проверяваме условията за оптималност.
   - Ако те са изпълнени, бдр е оптимално и задачата е решена. Край.
   - Ако условията за оптималност не са изпълнени, преминаваме към т. 4.
4. Определяме празна клетка (i_0, j_0), за която не е изпълнен критерият за оптималност, със свойството $c_{i_0 j_0} - v_{j_0} + u_{i_0} = \min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\}$. Свързваме клетката (i_0, j_0) с базисните клетки чрез единствения цикъл. Построяваме ново бдр по формулите (5.15) и преминаваме към т. 2.

Забележка. Изборът на клетката (i_0, j_0) по начина, изложен в т. 3 на разпределителния метод (респ. т. 4 от метода на потенциалите), не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Клетката (i_0, j_0) може да бъде произволно избрана между клетките (i, j), за които $\bar{c}_{ij} < 0$ (респ. $c_{ij} - v_j + u_i < 0$).