<u>Упражнение 5.</u> Методи и алгоритми за намиране на начално допустимо базисно решение и оптимално решение на класическа транспортна задача

Класическата транспортна задача (КТЗ) е специален случай на задачата на линейното оптимиране. Тя е една от първите ЗЛО и представлява самостоятелен интерес поради специфичните свойства, които притежава. Решаването на КТЗ със симплекс метода е свързано с голяма изчислителна работа. Затова са разработени специални методи за нейното решаване.

Математически модел на КТЗ

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът $A_i, i = 1,...,m$, снабдява пункта $B_j, j = 1,...,n$. При план на снабдяване $x = (x_{11},...,x_{mn})^T$ целевата функция е

$$f(x_{11},...,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{5.1}$$

а условията (транспортните ограничения) са

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,m, \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,...,n, \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,...,m; j = 1,...,n. \tag{5.4}$$

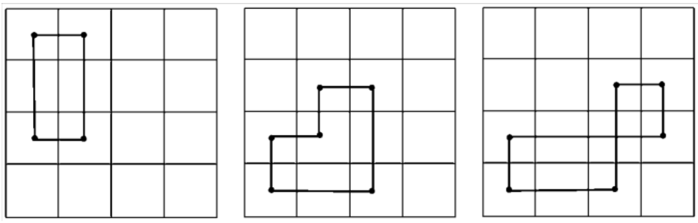
При различните методи за решаване на КТЗ се използват правоъгълни таблици и някои понятия, свързани с тях. Правоъгълната таблица има редове и стълбове, образуващи клетки. Всяка клетка се определя с наредена двойка *индекси* (*i,j*), където *i* е номерът на реда, а *j* - номерът на стълба, в който се намира клетката. Тогава има взаимноеднозначно съответствие между координатите на едно допустимо решение на КТЗ и клетките на тази таблица, като на координатата x_{ij} съответства клетката (*i,j*). Всички данни за дадено *базисно допустимо решение* (бдр) на КТЗ могат да бъдат подредени в правоъгълна таблица, наречана *транспортна таблица*, както е показано на таблица 5.1.

Таблица 5.1 Транспортна таблица

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	....	⋮	⋮
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	a b

Ако за дадено бдр $x = \{x_{ij}\}_{m \times n}$ координатата x_{ij} е *базисна*, клетката (*i,j*) също ще наричаме *базисна* (или *пълна*, тъй като там се записва съответната стойност на x_{ij}). Ако x_{ij} е *небазисна*, клетката (*i,j*) ще наричаме *небазисна* (или *празна*, защото там не се записва никаква стойност).

Съвкупността от клетки на транспортната таблица се нарича *цикъл*, ако начупената линия, образувана от отсечки с върхове в тези клетки, е затворена и от всеки две отсечки с общ връх едната лежи в ред, а другата - в стълб на транспортната таблица. Съвкупност от клетки в транспортната таблица, която съдържа цикъл, се нарича *циклична*. В противен случай се нарича *ациклична*. От написаното по-горе е видно, че всеки цикъл се състои от четен брой клетки. Във всеки цикъл две последователни (съседни) клетки имат равни първи или втори индекси, т. е. съседните клетки лежат в един и същи ред или стълб на транспортната таблица. Примери на цикли са дадени на фигура 5.1.



Фигура 5.1 Цикли

5.1. Методи и алгоритми за намиране на начално базисно допустимо решение (бдр)

За разлика от каноничната задача на линейното оптимиране при транспортната задача това се осъществява лесно. Има различни методи за построяване на начално бдр. Спираме се на два от тях - *метод на северозападния ъгъл* и *метод на минималния елемент*.

5.1.1. Метод на северозападния ъгъл

Алгоритъм:

1) Определяме $\min\{a_1, b_1\}$ и

- ако $\min\{a_1, b_1\} = a_1$, полагаме $x_{11} = a_1, x_{1j} = 0, j = 2,...,n$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия ред и коригиране на $b_1 : b_1' = b_1 - a_1$;
- ако $\min\{a_1, b_1\} = b_1$, полагаме $x_{11} = b_1, x_{i1} = 0, i = 2,...,m$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия стълб и коригиране на $a_1 : a_1' = a_1 - b_1$;
- ако $a_1 = b_1$, отстраняваме или първия стълб, или първия ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b_1' = 0$, или $a_1' = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр;

2) С получената таблица, която има един размер по-малко от предишната, повтаряме описаните по-горе процедури. Така след точно $m+n$-1 стъпки стигаме до таблица, състояща се от една клетка (или таблица с един ред и един стълб). В този случай двете количества a_1' и b_1' са равни и чак сега се елиминират и ред, и стълб. Пълните клетки в транспортната таблица са точно $m+n$-1 и освен това образуват ациклична съвкупност, т.е. в тях се намират базисните координати на полученото бдр.

Наименованието на метода идва от това, че x_{11} е разположена в „северозападната“ клетка на таблицата.

5.1.2. Метод на минималния елемент

Алгоритъм:

1) Намираме $c_{i_0} = \min\limits_{i,j} c_{ij}$. След това определяме $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$ и

- ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = a_{i_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, $x_{i_0 j} = 0, j \neq j_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на реда i_0 и коригиране на $b_{j_0} : b_{j_0}' = b_{j_0} - a_{i_0}$;
- ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = b_{j_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, $x_{i j_0} = 0, i \neq i_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на стълба j_0 и коригиране на $a_{i_0} : a_{i_0}' = a_{i_0} - b_{j_0}$;
- ако $b_{j_0} = a_{i_0}$, отстраняваме или j_0-я стълб, или i_0-я ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b_{j_0}' = 0$, или $a_{i_0}' = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр;

2) С получената таблица повтаряме описаните процедури.

Пример 5.1. Да се приложат
А) методът на северозападния ъгъл
Б) методът на минималния елемент
за намиране на бдр на транспортната задача, зададена с таблица 5.2.

Таблица 5.2.

3	5	7	11	100
1	4	6	3	130
5	8	12	7	170
150	120	80	50	

Решение.

А) Намирането на начално бдр по метода на северозападния ъгъл е илюстрирано с таблица 5.3. Редът за отстраняване на редове (респ. стълбове) при получаване на редуцираните таблици е означен отляво (за редовете) и отгоре (за стълбовете) на таблицата с римски цифри. Транспортните разходи за намереното бдр са 2300.

Таблица 5.3.

	II	IV	V	VI	
I	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~100~~
III	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	~~130~~ ~~80~~
VI	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{12}$ 80	$\boxed{7}$ 50	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

Б) Намирането на бдр на същата задача по метода на минималния елемент е илюстрирано на таблица 5.4. Транспортните разходи за това бдр са 2220. По- късно ще видим, че за оптималното решение те са 2040.

Таблица 5.4.

	II	V	VI	IV	
III	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{5}$ 80	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~100~~ ~~80~~
I	$\boxed{1}$ 130	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	~~130~~
VI	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{12}$ 80	$\boxed{7}$ 50	~~170~~ ~~120~~ ~~80~~
	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

5.2. Методи и алгоритми за намиране оптимално решение

Условието за баланс е необходимо и достатъчно, за да има КТЗ оптимално решение. Така от алгоритъма на симплекс метода отпада критерият за неограниченост на целевата функция и остават само два елемента - критерий за оптималност и правило за преминаване от едно бдр към съседно на него, при което стойността на целевата функция се подобрява.

5.2.1. Разпределителен метод

Разпределителният метод е вариант на симплекс метода за решаване на каноничната задача на линейното оптимиране.

Критерий за оптималност

Нека $\bar{x}$ е бдр и (k,l) е празна клетка. Образуваме единствения цикъл γ_{kl}, който я свързва с клетките от базиса на $\bar{x}$

$$\gamma_{kl} : (k,l)(k,j_1)\ldots(i_s,j_s)(i_s,l). \qquad (5.5)$$

Клетките от цикъла маркираме алтернативно със знаци + и −, започвайки от клетката (k,l) със знак +. Тогава относителната оценка на променливата x_{kl} е

$$\bar{c}_{kl} = \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{+}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} c_{ij}, \tag{5.6}$$

където $\gamma_{kl}^{+} = \left\{(i,j)\in\gamma_{kl}, \text{означени с } +\right\}$, $\gamma_{kl}^{-} = \left\{(i,j)\in\gamma_{kl}, \text{означени с } -\right\}$.

Бдр на класическата транспортна задача е оптимално тогава и само тогава, когато $\bar{c}_{kl} \geq 0$ за всички негови празни клетки (k,l).

Преминаване от едно бдр към съседно на него

Нека $\bar{x}$ е бдр на класическата транспортна задача. Тогава векторът $\bar{x}'$, получен от $\bar{x}$ по формулите

$$\begin{aligned}
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij} + \bar{x}_{i_p j_p}, (i,j)\in\gamma_{kl}^{+},\\
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i_p j_p}, (i,j)\in\gamma_{kl}^{-},\\
&\bar{x}'_{ij} = \bar{x}_{ij}, (i,j)\notin\gamma_{kl}, \bar{x}_{i_p j_p} = \min_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} \bar{x}_{ij},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

е бдр на задачата, като $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ са съседни.

Алгоритъм на разпределителен метод

1. Построяваме начално бдр $\bar{x}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.
2. За всяка празна клетка (i,j) на $\bar{x}$ построяваме цикъла γ_{ij} и пресмятаме $\bar{c}_{ij}$. Проверяваме критерия за оптималност.
   - Ако той е изпълнен, то бдр е оптимално и задачата е решена. Край.
   - Ако критерият за оптималност не е изпълнен, преминаваме към т. 3.
3. Намираме $\bar{c}_{i_0 j_0} = \min\left\{\bar{c}_{ij} : \bar{c}_{ij} < 0\right\}$. Построяваме ново бдр $\bar{x}'$ по формулите (5.7) с помощта на цикъла $\gamma_{i_0 j_0}$, свързващ клетката (i_0, j_0) с базисните клетки на $\bar{x}$. Преминаваме към т. 2, като вместо $\bar{x}$ вземаме $\bar{x}'$.

Пример 5.2. Да се приложи разпределителният метод за решаване на задачата, дадена с таблица 5.2.

Решение.

Итерация 0

1. За начално бдр $x^{(0)}$ използуваме намереното в таблица 5.3.

2. Проверяваме условията за оптималност. За целта пресмятаме относителните оценки на небазисните променливи (празните клетки). Това извършваме по редове отляво надясно. Първата празна клетка при тази наредба е (1, 2). Нейният цикъл

$$\gamma_{12}: \begin{matrix}(1,2) & (2,2) & (2,1) & (1,1)\\ + & - & + & -\end{matrix}$$

е показан с пунктир на таблица 5.5. Тогава $\bar{c}_{12} = 5 - 4 + 1 - 3 = -1 < 0$.

Таблица 5.5.

3 100 −	5 +	7	11
1 50 +	4 80 −	6	3
5	8 40	12 80	7 50

Следователно, $x^{(0)}$ не е оптимално бдр.

3. Тъй като проверката на критерия за оптималност при разпределителния метод е свързана с намирането на цикъла на всяка празна клетка, намирането на всички относителни оценки е доста продължителен процес. Затова в този пример ще вкарваме в базиса първата празна клетка, която не удовлетворява критерия за оптималност. В случая това е клетката (1,2). Минималното количество в клетките, отбелязани с -, е 80.

Итерация 1

1. Определяме координатите на новото бдр $x^{(1)}$ (вж. таблица 5.6) по формули (5.7).

Таблица 5.6.

3 20	5 80 −	7 +	11
1 130	4	6	3
5	8 40 +	12 80 −	7 50

2. Първата празна клетка е (1,3). Нейният цикъл

$$\gamma_{13}: \underset{+}{(1,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(2,1)}$$

е показан с пунктир на таблица 5.6. Тогава $\bar{c}_{13} = 7 - 12 + 8 - 5 = -2 < 0$.

Следователно, $x^{(1)}$ не е оптимално бдр.

3. Минималното количество в отбелязаните с - клетки е равно на 80. То се среща в две от тези клетки. Това означава, че следващото бдр ще бъде изродено.

Итерация 2

1. Определяме координатите на новото бдр $x^{(2)}$ (вж. таблица 5.7) по формули (5.7), като изваждаме от базиса клетката (3,3). Тогава клетката (1,2) става базисна нула (в тази клетка записваме числото 0 и не я оставяме празна).

Таблица 5.7.

3 20 −	5 0 +	7 80	11
1 130	4	6	3
5 +	8 120 −	12	7 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр:

$$\gamma_{14}: \underset{+}{(1,4)}\underset{-}{(3,4)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(1,2)},$$

$$\bar{c}_{14} = (11+8) - (7+5) = 19 - 12 = 7 > 0,$$

$$\gamma_{22}: \underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)},$$

$$\bar{c}_{22} = (4+3) - (1+5) = 7 - 6 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{23}: \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,3)},$$

$$\bar{c}_{23} = (6+3) - (1+7) = 9 - 8 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{24}: \underset{+}{(2,4)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)},\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(3,4)},$$

$$\bar{c}_{24} = (3+3+8) - (1+5+7) = 14 - 13 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{31}: \underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(3,2)}\underset{+}{(2,1)}\underset{-}{(1,1)},$$

$$\bar{c}_{31} = (5+5) - (8+3) = 10 - 11 = -1 < 0.$$

3. Минималното количество в отбелязаните с - клетки е равно на 20.

Итерация 3

1. Определяме координатите на новото бдр $x^{(3)}$ (вж. таблица 5.8) по формули (5.7).

Таблица 5.8.

3	5 20	7 80	11
1 130	4	6	3
5 20	8 100	12	7 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр: $\bar{c}_{11} = 1$, $\bar{c}_{14} = 7$, $\bar{c}_{22} = \bar{c}_{23} = \bar{c}_{24} = 0$, $\bar{c}_{34} = 2$.

Следователно $x^{(3)}$ е оптимално бдр. Оптималната стойност на целевата функция е 2040.

Остава само да отбележим, че относителните оценки на празните клетки във втория ред на таблицата са равни на нула. Това означава, че задачата има и други оптимални решения. Те се получават (още три на брой), като вкараме последователно в базиса тези три празни клетки. Така задачата притежава четири оптимални бдр. Да ги означим с $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$ и $x^{(6)}$. Общият вид на оптималните решения представлява изпъкналата обвивка на тези четири бдр

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j=3}^{6} \lambda_j \mathbf{x}^{(j)}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 3, \ldots, 6, \quad \sum_{j=3}^{6} \lambda_j = 1.$$

5.2.2. Метод на потенциалите

Този метод е вариант на двойствения симплекс метод.

Критерий за оптималност

Двойнствената задача на класическата транспортна задача е

$$\max\left\{ g(y) = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \right\}$$

при ограничения (5.8)

$$v_j - u_i \le c_{ij}, i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

Двойствените променливи, отговарящи на ограниченията (5.2), са означени с $-u_i, i = 1,\dots,m$, а тези, отговарящи на ограниченията (5.3) са означени с $v_j, j = 1,\dots,n$. Прието е те да се наричат *потенциали*.

Необходимо и достатъчно условие бдр $\bar{x}$ да бъде оптимално решение на класическата транспортна задача е да съществува вектор $\left(-u_1,\dots,-u_m, v_1,\dots,v_n\right)^T$, такъв че

$$v_j - u_i \le c_{ij},\quad за\quad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

$$v_j - u_i = c_{ij}\quad за\quad x_{ij} > 0.$$

(5.9)

Алгоритъм на метода на потенциалите

1. Построяваме начално бдр $\bar{x}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.
2. Решаваме системата $v_j - u_i = c_{ij}$ за пълните (базисните) клетки на $\bar{x}$. Тъй като броят на уравненията е $m + n - 1$, а броят на неизвестните е $m + n$, решението на системата е определено с точност до константа.
3. Проверяваме условията за оптималност.
   - Ако те са изпълнени, бдр е оптимално и задачата е решена. Край.
   - Ако условията за оптималност не са изпълнени, преминаваме към т. 4.
4. Определяме празна клетка $\left(i_0, j_0\right)$, за която не е изпълнен критерият за оптималност, със свойството $c_{i_0 j_0} - v_{j_0} + u_{i_0} = \min\left\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\right\}$. Свързваме клетката $\left(i_0, j_0\right)$ с базисните клетки чрез единствения цикъл. Построяваме ново бдр по формулите (5.7) и преминаваме към т. 2.

Пример 5.3. Да се приложи методът на потенциалите за решаване на задачата, дадена с таблицата

Таблица 5.9.

1	5	30
7	2	60
3	10	60
90	30	

Решение. Задачата е от отворен тип. Превръщаме я в КТЗ с добавянето на фиктивен стълб (таблица 5.10).

Таблица 5.10.

1	5	0	30
7	2	0	60
3	10	0	60
90	30	30	

Итерация 0

1. Намираме начално бдр $x^{(0)}$ по метода на северозападния ъгъл. Информацията за него се намира в таблица 5.11. Вижда се, че това бдр е изродено. Базисната нула може да бъде поставена и в клетката (3,1) вместо в (2,2).

Таблица 5.11.

1 30	5	0	30
7 60	2 0	0	60
3	10 30	0 30	60
90	30	30	

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_2 - u_3 = 10,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_2 = 10$, $u_2 = 8$, $v_1 = 15$, $u_1 = 14$. Нанасяме потенциалите, както е показано в таблица 5.12.

Таблица 5.12.

u_i \ v_j	15	10	0
14	1 30	5	0
8	7 60	2 0	0
0	3	10 30	0 30

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12},\quad v_3 - u_1 = -14 < 0 = c_{13},$$

$$v_3 - u_2 = -8 < 0 = c_{23},\quad v_1 - u_3 = 15 > 1 = c_{31}.$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката (3,1) е

$$\gamma_{31} : \underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(3,2)}\underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с - клетка е 30.

Итерация 1

1. Определяме координатите на новото бдр $x^{(1)}$ (вж. Таблица 5.13) по формули (5.7).

Таблица 5.13.

u_i \ v_j	3	−2	0
2	1 30	5	0
−4	7 30	2 30	0
0	3 30	10	0 30

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_1 - u_3 = 3,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = -4$, $v_2 = -2$, $u_1 = 2$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = -2 < 0 = c_{13},$$

$$v_3 - u_2 = 4 > 0 = c_{23}, \quad v_2 - u_3 = -2 < 10 = c_{31}.$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката (2, 3) е

$$\gamma_{23} : \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с - клетка е 30. То се среща два пъти, откъдето следва, че следващото бдр е изродено.

Итерация 2

1. Определяме координатите на новото бдр $x^{(2)}$ (вж. таблица 5.14) по формули (5.7).

Таблица 5.14.

u_i \ v_j	7	2	0
6	1 30	5	0
0	7 0	2 30	0 30
4	3 60	10	0

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_3 - u_2 = 0,\ v_1 - u_3 = 3.$$

Полагайки $u_2 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 7$, $v_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_1 = 6$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = -6 < 0 = c_{13},$$

$$v_2 - u_3 = -2 < 10 = c_{32}, \quad v_3 - u_3 = -4 < 0 = c_{33}.$$

Това бдр е оптимално. Стойността на целевата функция е 270.

Упражнение 5. Методи и алгоритми за намиране на начално допустимо базисно решение и оптимално решение на класическа транспортна задача

Задачи

Да се решат транспортните задачи:

Задача 5.1.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (25, 20, 30)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (20, 40)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.2.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (180, 90)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (60, 75, 120, 45)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.3.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (30, 40, 10)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (20, 50)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.4.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (25, 20, 15, 40)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (60, 30)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.5.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (35, 55)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (30, 25, 55)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.6.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (110, 70)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (110, 60, 50)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.7.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 14 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (30, 45)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (25, 45, 25)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.8.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (100, 90, 150)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (80, 110, 120)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.9.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (50, 50, 15)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (30, 20, 40, 25)^{\mathrm{T}}$$

Задача 5.10.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = (135, 90)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b} = (75, 60, 135)^{\mathrm{T}}$$