<u>Лекция 10.2.</u> Теория на игрите. Матрични игри. Симплекс метод за решаване на задачи от матрични игри

10.2.1. Матрични игри и линейно оптимиране

Съществува тясна връзка между матричните игри и задачите на линейното оптимиране, на базата на която решаването на произволна матрична игра може да бъде сведено до решаване на двойка спрегнати задачи на линейното оптимиране.

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{m\times n}$$

Ще считаме, че всички елементи на матрицата A са положителни числа. Следователно и цената l също е положително число.

Лесно може да се покаже, че решаването на матричната игра $\Gamma(A)$ се свежда към решаването на следната двойка спрегнати задачи:

I задача. Да се намери вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, за който линейната функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \to min$$

при ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq 1, j = 1, \dots, m, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

II задача. Да се намери вектор $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$, за който линейната функция

$$g(y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j \to max$$

при ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \leq 1, i = 1, \dots, n, \\ y_j \geq 0, j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Решението на играта $\Gamma(A)$ се получава по формулите:

$$l = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} y_j^*},$$

$$x = lx^* = (lx_1^*, lx_2^*, \dots, lx_n^*),$$

$$y = ly^* = (ly_1^*, ly_2^*, \dots, ly_m^*).$$

От теорията за двойствеността в линейното оптимиране се знае, че за да се определят оптималните планове x^* и y^* на двойката задачи I и II, е достатъчно да се реши едната от тях.

Решаването на една матрична игра $\Gamma(A)$ с методите на линейното оптимиране може да стане по следния <u>алгоритъм</u>:

1. Проверява се дали играта има седлова точка:
   - ако има, то задачата е решена и се преминава към т. 9;
   - ако не - към т. 2;

2. Проверява се дали всички елементи на платежната матрица A са неотрицателни числа:
   - ако са - се преминава към т. 5;
   - ако не - към т. 3;

3. Определя се най-големият по абсолютна стойност отрицателен елемент на матрицата A, т.е. определя се числото $a = \max\limits_{a_{ij}<0} a_{ij} = |a_{ij}|$.

4. Преобразува се матрицата A в матрицата A_1 с неотрицателни елементи по формулата $A_1 = A + a$.

5. Решава се едната от двойката спрегнати задачи I или II чрез симплекс метода.

6. Определя се оптималният план на другата задача чрез последната симплексна таблица, получена в т. 5.

7. Определят се оптималните смесени стратегии $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ и $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$ съответно на първия и втория играч на играта $\Gamma(A_1)$ и цената ѝ l_1 по формулите:
$$l_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*},$$
$$\tilde{x}_i = l x_i^*, i = 1, \dots, n,$$
$$\tilde{y}_j = l y_j^*, j = 1, \dots, m.$$

8. Определя се цената l на изходната игра $\Gamma(A)$ по формулата $l = l_1 + a$.

9. Край.

10.2.2. Пример на решаване на задачи от матрични игри със симплекс метод

Дадена е матрична игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица
$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$
Да се намерят оптималните стратегии на двамата участника.

Решение

1. Проверяваме за седлова точка играта:

$$\left.\begin{array}{l} A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{min} 0 \\ \longrightarrow -3 \\ \longrightarrow -2 \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{max} \alpha = \boxed{0} \\ \begin{array}{ccc} max & \downarrow & \downarrow \\ & \underbrace{4 \quad\quad 1}_{} & \end{array} \\ \quad min \ \downarrow \\ \quad \beta = \boxed{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha \neq \beta}$$

Следователно, играта няма седлова точка и двамата участници имат смесени стратегии.

2. Матрицата A има отрицателни елементи:

$$a_{21} = -3, a_{32} = -2.$$

3. Определяме числото

$$a = max\{|-3|, |-2|\} = 3.$$

4. Получаваме матрицата A_1 по формулата

$$A_1 = A + 3 = \begin{pmatrix} 2+3 & 0+3 \\ -3+3 & 1+3 \\ 4+3 & -2+3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. По симплекс метода решаваме съответната на играта $\Gamma(A_1)$ задача II, т.е. решаваме задачата:

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \to max$$

при ограничения:

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ 0y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ 7y_1 + 1y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Каноничната задача е:

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \to max$$

при ограничения:

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 + y_3 = 1 \\ 0y_1 + 4y_2 + y_4 = 1 \\ 7y_1 + 1y_2 + y_5 = 1 \\ \quad y_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Тогава

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 5 & 3 & \boxed{1} & 0 & 0 & |1 \\ 0 & 4 & 0 & \boxed{1} & 0 & |1 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & |1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Б}_y(y_3, y_4, y_5) \text{ е базиса на задачата.}$$

Попълваме симплексната таблица:

$c_{Б_y}$	$Б_y$	b	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	1	5	3	1	0	0
0	y_4	1	0	4	0	1	0
0	y_5	1	7	1	0	0	1
Y_0	Δ_j	$g(Y_0)=0$	$\Delta_1=-1$	$\Delta_2=-1$	$\Delta_3=0$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=0$
0	y_3	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{16}{7}$	1	0	
0	y_4	1	0	4	0	1	
1	y_1	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	0	
Y_1	Δ_j	$g(Y_1)=\frac{1}{7}$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=-\frac{6}{7}$	$\Delta_3=0$	$\Delta_4=0$	
1	y_2	$\frac{1}{8}$					
0	y_4	$\frac{1}{2}$					
1	y_1	$\frac{1}{8}$					
Y_2	Δ_j	$g(Y_2)=\frac{1}{4}$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$		$\Delta_4=0$	

Следователно,

$g_{max(\text{КЗ})} = g\left(y_1=\frac{1}{8}; y_2=\frac{1}{8}; y_3=0; y_4=\frac{1}{2}; y_5=0\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow g_{max}=g\left(y_1=\frac{1}{8}; y_2=\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}.$

Получаваме оптимален план $y^*=\left(y_1^*=\frac{1}{8}, y_2^*=\frac{1}{8}\right)$ и максимална стойност на целевата функция $g(y^*)=\frac{1}{4} \Longrightarrow l_{1y}=\frac{1}{g(y^*)}=\frac{1}{y_1^*+y_2^*}=\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{\frac{2}{8}}=4.$

6. Активните стратегии за участник II са B_1 и B_2, а за участник I - A_1 и A_2. Оптималният план на задача I може да се намери като се реши следната система:

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1^*+0x_2^*+7x_3^*=1 \\ 3x_1^*+4x_2^*+1x_3^*=1 \\ x_3^*=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1^*=\frac{1}{5} \\ x_2^*=\frac{1}{10} \\ x_3^*=0 \end{array}\right.$$

Следователно, $x^*=\left(x_1^*=\frac{1}{5}, x_2^*=\frac{1}{10}\right) \Rightarrow f(x^*)=\frac{3}{10}.$

7. Определяме решението на играта $\Gamma(A_1)$:

$$l_{1x}=\frac{1}{f(x^*)}=\frac{1}{x_1^*+x_2^*}=\frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{3}, l_{1y}=\frac{1}{g(y^*)}=\frac{1}{y_1^*+y_2^*}=\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{\frac{2}{8}}=4$$

$$\tilde{x}_1=l_{1x}.x_1^*=\frac{10}{3}.\frac{1}{5}=\frac{2}{3}; \tilde{x}_2=l_{1x}.x_2^*=\frac{10}{3}.\frac{1}{10}=\frac{1}{3} \Rightarrow \tilde{x}\left(\tilde{x}_1=\frac{2}{3}; \tilde{x}_2=\frac{1}{3}; \tilde{x}_3=0\right)$$

$$\tilde{y}_1=l_{1y}.y_1^*=4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2}; \tilde{y}_2=l_{1y}.y_2^*=4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{y}\left(\tilde{y}_1=\frac{1}{2}; \tilde{y}_2=\frac{1}{2}\right)$$

8. Решението на изходната игра $\Gamma(A)$ е:
   оптимални стратегии на първия и на втория участник и цена съответно са:
$$\tilde{x}^*\left(\tilde{x}_1^* = \frac{2}{3}; \tilde{x}_2^* = \frac{1}{3}; \tilde{x}_3^* = 0\right)$$
$$\tilde{y}^*\left(\tilde{y}_1^* = \frac{1}{2}; \tilde{y}_2^* = \frac{1}{2}\right)$$
$$l = l_{1x} - a = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}.$$
9. Край.