<u>Лекция 10.1.</u> Теория на игрите. Матрични игри. Графичен метод за решаване на задачи от матрични игри

10.1.1. Теория на игрите. Матрични игри

Теория на игрите е раздел от приложната математика и изследване на операциите и се прилага при анализ и оптимизация на конфликтни ситуации. Широко приложение намира при оптимизиране на реални задачи в икономиката при конкуренти на пазара и др.

Разглеждаме игра на двама участника I и II.

Дефиниция 10.1.1. *Игра с нулева сума* е тази, при която победите на единия участник са равни на загубите на другия. Интересите на участниците са противоположни.

Дефиниция 10.1.2. *Стратегия на участник* се нарича множество от правила, определящи вариант за действие при личен ход на участника. В зависимост от броя на възможните стратегии игрите са *крайни* и *безкрайни*.

Нека участник I има m на брой стратегии $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$, а участник II има n на брой стратегии $B_1, \dots, B_j, \dots, B_n$. Ако I е избрал да играе със стратегия A_i, а II е избрал да играе със стратегия B_j, то *изходът от играта* означаваме с a_{ij}, което е произволно по знак. Така всички изходи при крайна матрична игра са представени в следната таблица:

I \ II	$\boldsymbol{B_1}$	**…**	$\boldsymbol{B_j}$	**…**	$\boldsymbol{B_n}$
$\boldsymbol{A_1}$	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_i}$	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_m}$	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Таблица 10.1.1.

Дефиниция 10.1.3. Матрицата

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{m\times n}$$

се нарича *платежна матрица* на играта. Една задача от матрични игри е дадена, ако е известна платежната матрица.

Дефиниция 10.1.4. *Оптимална стратегия* е тази, която обезпечава възможно максимална печалба при възможно минимална загуба, при многократно повтаряне на играта.

Свойство 10.1.1. Ако един от играчите се придържа към оптималната си стратегия, то за другия не е изгодно да се отклонява от неговата оптимална стратегия.

Матричната игра може да се *редуцира* в следните случаи:

- Отстраняване на *дублиращи стратегии*, т.е. тези които имат едни и същи изходи;
- Отстраняване на видимо *неизгодни стратегии*.

Дефиниция 10.1.5. *Неизгодна стратегия за играч I* е тази, която във всички изходи носи най-малка печалба, т.е. стратегията A_k е неизгодна, ако е изпълнено

$$a_{ij} \geq a_{kj}, j = 1, \dots, n.$$

Неизгодна стратегия за играч II е тази, която във всички изходи носи по-голяма загуба, т.е. стратегията B_l е неизгодна, ако е изпълнено

$$a_{ij} \geq a_{il}, i = 1, \dots, m.$$

Примери на дублиращи стратегии

1) За матричната игра с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$A_1 = A_3 = \{1 \quad 2 \quad -2\}$ са дублиращи стратегии за участник I.

2) За матрична игра с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$B_2 = B_3 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$ са дублиращи стратегии за участник II.

Примери на неизгодни стратегии

1) За матричната игра с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Стратегията A_1 е неизгодна за участник I, тъй като

$$\begin{array}{cccc} A_1: & \{1 & 2 & -2\} \\ \text{и} & \wedge\!\| & \wedge\!\| & \wedge\!\| \\ A_3: & \{1 & 3 & -1\} \end{array}$$

В стратегия A_1 са по-малки или равни печалбите на участник I отколкото съответните му в стратегия A_3. Участник I се стреми към по-големи печалби. Тогава за него стратегия A_1 се оказва неизгодна и той няма да я приложи в играта, т.е. ще я играе с вероятност нула.

2) За матричната игра с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Стратегията B_2 е неизгодна за участник II, тъй като

$$\begin{array}{ccc} B_2 & \text{и} & B_3 \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} & \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array}$$

В стратегия B_2 са по-големи или равни загубите на участник II отколкото съответните му в стратегия B_3. Участник II се стреми към по-малки печалби. Тогава за него стратегия B_2 се оказва неизгодна и той няма да я приложи в играта, т.е. ще я играе с вероятност нула.

Тъй като всеки от участниците играе разумно, то ако I играе със стратегия A_i, тогава противника II избира стратегия B_j, така че изходът за I да е минимален. Така се пресмятат числата

$$\alpha_i = \min_{1\le j\le n} a_{ij},$$

които се наричат *гарантирана печалба* на участник I при стратегия $A_i, i = 1, \dots, m$.

Тъй като участник I се стреми максимално да спечели, тогава се определя числото

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij},$$

което се нарича *долна цена на играта* или *максимално гарантирана печалба на участник I*.

Аналогично, за противникът II се пресмятат числата

$$\beta_j = \max_{1\le i\le m} a_{ij},$$

които се наричат *гарантирана загуба* на участник II при стратегия $B_j, j = 1, \dots, n$.

Числото

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

се нарича *горна цена на играта* или *минимално гарантирана загуба на участник II*.

Дефиниция 10.1.6. Стратегията, която съответства на числото α се нарича *максиминимална стратегия за участник I*, а тази, която съответства на числото β е *минимаксимална стратегия за участник II*.

И двете стратегии е прието да се наричат *минимаксимална стратегия*.

Дефиниция 10.1.7. *Принцип на минимакса* е този, който изисква от участниците да изберат своите максиминимална или минимаксимална стратегии.

Дефиниция 10.1.8. *Игра със седлова точка* е тази, за която е изпълнено

$$\alpha = \beta.$$

Седловата точка отговаря на двойка минимаксимални стратерии, наречени *чисти стратегии*, които са оптимални и тяхната съвкупност е решение на играта.

Общата стойност на долната и горната цена на играта се нарича *чиста цена на играта* l, т.е. $l = \alpha = \beta$. Ако тази стойност l се достига за някое a_{ij}, т.е. при стратегия A_i за участник I и стратегия B_j за участник II, то двамата участника имат изгода да играят само тези си стратегии с вероятност 1, а останалите си стратегии няма да играят или ще играят с вероятност 0. В този случай, може да се каже, че *двамата участника имат общ интерес* от играта, т.е. там, където участник I печели най-много, там участник II губи най-малко.

Пример на матрична игра със седлова точка

За матричната игра с платежна матрица

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{min} -2 \\ \rightarrow \boxed{-1} \\ \rightarrow -4 \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{max} \alpha = \boxed{-1} \\ max \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad \underbrace{2 \quad \boxed{-1} \quad 5}_{} \\ \qquad min \ \downarrow \\ \qquad \beta = \boxed{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = l = -1} \Rightarrow \begin{cases} X^* \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 = 0 & x_2 = 1 & x_3 = 0 \end{pmatrix} \\ Y^* \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ y_1 = 0 & y_2 = 1 & y_3 = 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

X^* и Y^* са оптималните чисти стратегии съответно на участник I и участник II, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_1, x_2, x_3 \epsilon [0; 1] \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1; y_1, y_2, y_3 \epsilon [0; 1] \end{cases}$.

Нека за матричната игра $\alpha \neq \beta$, тогава решението се търси в *смесени стратегии*.

Дефиниция 10.1.9. *Смесена стратегия* в теория на игрите, се нарича случайното редуване на чистите стратегии на всеки участник.

Смесена стратегия X_I на участник I е

$$X_I = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m), \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \epsilon [0;1]\ i = 1, \dots, m,$$

където x_i е вероятността, с която чистата стратегия A_i участва в X_I. Ако $x_i \neq 0$, то A_i е *активна стратегия* и ако $x_i = 0$, то A_i е *неактивна стратегия*.

Смесена стратегия Y_{II} на участник II е

$$Y_{II} = \left(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n\right), \sum_{j=1}^{n} y_i = 1, y_j \epsilon [0;1]\ j = 1, \dots, n,$$

където y_j е вероятността, с която чистата стратегия B_j участва в Y_{II}. Ако $y_j \neq 0$, то B_j е *активна стратегия* и ако $y_j = 0$, то B_j е *неактивна стратегия*.

Забележка. Всяка чиста стратегия може да се представи като смесена, като съответната координата е равна на единица, а останалите – са равни на нула, например $A_1 = X_I = (1,0,0, \dots ,0)$.

Дефиниция 10.1.10. *Решение на матричната игра* се нарича двойката оптимални стратегии X^* и Y^*.

Теорема 10.1.1. Всяка крайна матрична игра има едно решение, което е възможно в областта на смесените стратегии и цената l е

$$\alpha \leq l \leq \beta,$$

където α е долната цена, а β е горната цена на играта.

Теорама 10.1.2. Броят на активните стратегии с платежна матрица $A_{m \times n}$, за всеки участник, не е по-голям от

$$min(m, n).$$

10.1.2. Матрична игра от вида 2 × 2

Нека е дадена матрична игра с платежна матрица

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ако играта има седлова точка, то решението е в чисти стратегии.

Пример на матрична игра от вида 2 × 2 в чисти стратегии

Матричната игра има платежна матрица

$$\left.\begin{array}{l} A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to -1 \\ \to \boxed{1} \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{max} \alpha = \boxed{1} \quad (min) \\ max \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\quad \underbrace{2 \quad \boxed{1}} \\ min \qquad \downarrow \\ \qquad\quad \beta = \boxed{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 1 = l} \Rightarrow \begin{cases} X^*(0;1) \\ Y^*(0;1) \end{cases}$$

Нека играта няма седлова точка, т.е. $\alpha \neq \beta$. Търсим

$$\begin{cases} X^*(x_1; x_2), x_1 + x_2 = 1, \\ Y^*(y_1; y_2), y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

както и цената на играта l.

Нека

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{l_1 \quad l_2} & \\ A_{2\times 2} = \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \\ & \boxed{y_1 \quad y_2} & \end{array}$$

1) За участник I очакваните печалби l_1 и l_2 зависят от вероятностите, с които участник II ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ l_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ y_2 = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ l = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{array} \right.$$

2) За участник II очакваните загуби l_1 и l_2 зависят от вероятностите, с които участник I ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ l_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ l = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{array} \right.$$

Пример на матрична игра от вида 2×2 в смесени стратегии

Матричната игра има платежна матрица

$$\left. \begin{array}{l} A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -1 \\ \to -2 \end{matrix} \Big\} \overset{max}{\longrightarrow} \alpha = \boxed{-1} \quad (min) \\ \quad max \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\quad \underbrace{1 \quad 0} \\ \quad min \quad \downarrow \\ \qquad \beta = \boxed{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha \neq \beta}$$

Тогава

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{l_1 \quad l_2} & \\ A_{2\times 2} = \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \\ & \boxed{y_1 \quad y_2} & \end{array}$$

1) За участник I очакваните печалби l_1 и l_2 зависят от вероятностите, с които участник II ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left|\begin{array}{l} l_1 = 1.y_1 + (-1).y_2 \\ l_2 = (-2).y_1 + 0.y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{1}{2} \\ l = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

2) За участник II очакваните загуби l_1 и l_2 зависят от вероятностите, с които участник I ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left|\begin{array}{l} l_1 = 1.x_1 + (-2).x_2 \\ l_2 = (-1)x_1 + 0.x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ l = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

10.1.3. Матрична игра от вида $2 \times n, n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

Платежната матрица на играта е

$$A_{2\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \end{pmatrix}$$

Ако играта има седлова точка, то решението е в чисти стратегии.

Нека играта няма седлова точка, т.е. $\alpha \neq \beta$. Търсим

$$\begin{cases} X^*(x_1; x_2), x_1 + x_2 = 1, \\ Y^*(y_1; \dots; y_n), y_1 + \dots + y_n = 1, \end{cases}$$

както и цената на играта l. Две са активните стратегии на участник II.

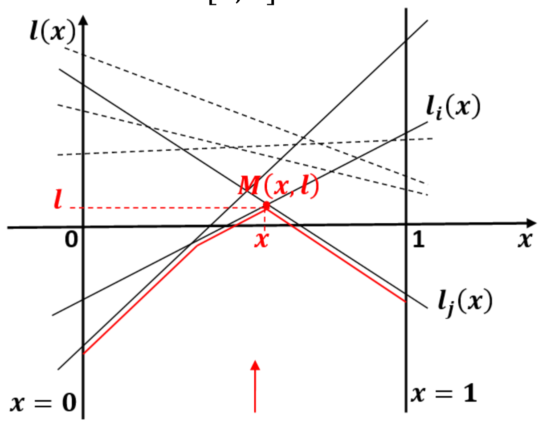
За участник II очакваните загуби $l_1, \dots, l_n$ зависят от вероятностите, с които участник I ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left|\begin{array}{c} l_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ \dots \\ l_i(x) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 \\ \dots \\ l_j(x) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \\ \dots \\ l_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right.$$

Ако положим $x_1 = x \Rightarrow x_2 = 1 - x$. Тогава

$$\left|\begin{array}{c} l_1(x) = a_{11}x + a_{21}(1 - x) \\ \dots \\ l_i(x) = a_{1i}x + a_{2i}(1 - x) \\ \dots \\ l_j(x) = a_{1j}x + a_{2j}(1 - x) \\ \dots \\ l_n(x) = a_{1n}x + a_{2n}(1 - x) \end{array}\right.$$

Можем да решим задачата графично като изобразим функциите $l_1(x), \dots, l_n(x)$ върху декартова координатна система Oxl и $x\epsilon[0;1]$:



Фигура 10.1.1

$$\underset{\text{Участник II}}{\xrightarrow{\text{Цел: да губи по}-\text{малко}}} \underbrace{\min_{1\le j\le n} l_j(x)}_{\text{долна обвивка на фамилия прави}} \underset{\text{Участник I}}{\xrightarrow{\text{Цел: да печели повече}}} M(x,l)=l_i\times l_j$$

$$M(x,l)=l_i\times l_j \Rightarrow a_{1i}x+a_{2i}(1-x)=a_{1j}x+a_{2j}(1-x) \Rightarrow \begin{cases} x=x_1=\dfrac{a_{2j}-a_{2i}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}} \\ 1-x=x_2=\dfrac{a_{1i}-a_{1j}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}} \end{cases}$$

Тогава оптималната смесена стратегия на участник I е

$$X^*\left(x_1=\frac{a_{2j}-a_{2i}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}};x_2=\frac{a_{1i}-a_{1j}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}}\right).$$

От графиката се вижда, че оптималната игра е в точка M при активни стратегии B_i и B_j на участник II. Следователно, $y_i\neq 0, y_j\neq 0$, а всички останали y са равни на нула.

Ако положим $y_i=y$, то $y_j=1-y$. Тогава:

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{l_1\ \dots\ l_i\ \dots\ l_j\ \dots\ l_n} & \\ A_{2\times n}= & \boxed{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}} & \begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1i}\dots a_{1j}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2i}\dots a_{2j}\dots a_{2n} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{array}{l} x_1=x \\ x_2=1-x \end{array}} \\ & & \boxed{y_1\ \dots\ y_i\ \dots\ y_j\ \dots\ y_n} & \\ & & \boxed{0\ \dots\ y\ \dots\ 1-y\ \dots\ 0} & \end{array}$$

Цената на играта зависи само от активните стратегии. Следователно,

$$l=l_i.y_i+l_j.y_j=l_i.y+l_j.(1-y)=\left(a_{1i}x+a_{2i}(1-x)\right).y+\left(a_{1j}x+a_{2j}(1-x)\right).(1-y)=$$
$$=a_{1i}xy+a_{2i}y-a_{2i}xy+a_{1j}x+a_{2j}-a_{2j}x-a_{1j}xy-a_{2j}y+a_{2j}xy=$$
$$=(a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j})xy+(a_{1j}-a_{2j})x+(a_{2i}-a_{2j})y+a_{2j}=\underbrace{\left((a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j})y+(a_{1j}-a_{2j})\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}}x+(a_{2i}-a_{2j})y+a_{2j}$$

Цената на оптималната игра може да се изрази като функция само от x или само от y. Тогава можем да запишем:

$$(a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j})y+(a_{1j}-a_{2j})=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=y_i=\frac{a_{2j}-a_{1j}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}}\Rightarrow 1-y=y_j=\frac{a_{1i}-a_{2i}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}},$$

както при матрична игра 2×2. Тогава оптималната смесена стратегия на участник II е:

$$Y^*\left(y_1=0;\dots;y_i=\frac{a_{2j}-a_{1j}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}};\dots;y_j=\frac{a_{1i}-a_{2i}}{a_{1i}-a_{2i}-a_{1j}+a_{2j}};\dots;y_n=0\right).$$

Цената на играта е: $l=\frac{a_{1i}a_{2j}-a_{1j}a_{2i}}{a_{1i}+a_{2j}-a_{1j}-a_{2i}}$.

Пример на матрична игра от вида $2 \times n$ в смесени стратегии

Платежната матрица на играта е

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$\left.\begin{array}{l} A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{min} -3 \\ \to -4 \end{array}\Big\} \xrightarrow{max} \alpha = \boxed{-3} \\ \quad max \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad\quad \underbrace{2 \quad 0 \quad -1}_{min \downarrow} \\ \quad\quad \beta = \boxed{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha \neq \beta}$$

Следователно, играта е в смесени стратегии.

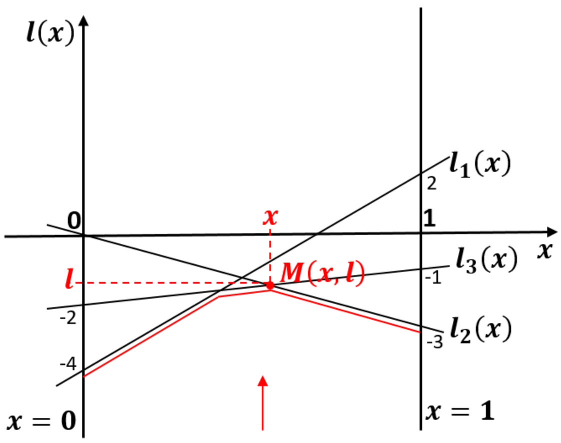
Нека

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{l_1 \quad l_2 \quad l_3} & \\ A_{2\times3} = \boxed{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = 1 - x \end{array}} \\ & \boxed{y_1 \quad y_2 \quad y_3} & \end{array}$$

За участник II очакваните загуби l_1, l_2, l_3 зависят от вероятностите, с които участник I ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване. Ако положим $x_1 = x \Rightarrow x_2 = 1 - x$, то

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = 2x_1 + (-4)x_2 \\ l_2 = (-3)x_1 + 0x_2 \\ l_3 = (-1)x_1 + (-2)x_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} l_1 = 2x + (-4)(1 - x) \\ l_2 = (-3)x + 0(1 - x) = -3x \\ l_3 = (-1)x + (-2)(1 - x) = x - 2 \end{array} \right.$$

Можем да решим задачата графично като изобразим функциите $l_1(x), l_2(x), l_3(x)$ върху декартова координатна система Oxl и $x\epsilon[0; 1]$:



Фигура 10.1.2

$$\xrightarrow{\text{Цел: да губи по}-\text{малко}} \quad \underbrace{\min_{j=1,2,3} l_j(x)} \quad \xrightarrow{\text{Цел: да печели повече}} M(x, l) = l_2 \times l_3$$

Участник II — долна обвивка на фамилия прави — Участник I

$$M(x,l) = l_2 \times l_3 \Rightarrow -3x = x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 = \dfrac{1}{2} \\ 1 - x = x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Тогава оптималната смесена стратегия на участник I е

$$X^*\left(x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{2}\right).$$

От графиката се вижда, че оптималната игра е в точка M при активни стратегии B_2 и B_3 на участник II. Следователно, $y_2 \neq 0, y_3 \neq 0$, а $y_3 = 0$.

Ако положим $y_2 = y$, то $y_3 = 1 - y$. Тогава:

$$A_{2\times n} = \begin{array}{cc} & \boxed{l_1 \quad l_2 \quad l_3} \\ \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = 1 - x \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{y_1 \quad y_2 \quad y_3} \\ \boxed{0 \quad y \quad 1 - y} \end{matrix}} \end{array}$$

Цената на играта зависи само от активните стратегии. Следователно,

$$l = l_2.y_2 + l_3.y_3 = l_2.y + l_3.(1 - y) = (-3x)y + (x - 2)(1 - y) =$$
$$= -3xy + x - xy - 2 + 2y = -4xy + x + 2y - 2 = \underbrace{(-4y + 1)}_{\overset{\|}{0}}x + 2y - 2$$

Цената на оптималната игра може да се изрази като функция само от x или само от y. Тогава можем да запишем:

$$-4y + 1 = 0 \Rightarrow y = y_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - y = y_3 = \frac{3}{4}.$$

Оптималната смесена стратегия на участник II е:

$$Y^*\left(y_1 = 0; y_2 = \frac{1}{4}; y_3 = \frac{3}{4}\right).$$

Цената на играта или общото очакване от играта е:

$$l = 0x + 2y - 2 = 0 + 2.\frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

Проверка:

$l = -\dfrac{3}{2}$

$l_2 = -3x = -3.\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2} = l$

$l_3 = x - 2 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2} = l$

(Играта е в точка $M(x,l) = l_2 \times l_3$)

10.1.4. Матрична игра от вида $m \times 2, m \geq 3, m \epsilon \mathbb{N}$

Платежната матрица на играта е

$$A_{m\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} \\ \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{1m} \end{pmatrix}.$$

Ако играта има седлова точка, то решението е в чисти стратегии.

Нека играта няма седлова точка, т.е. $\alpha \neq \beta$. Търсим

$$\begin{cases} X^*(x_1; \dots; x_m), x_1 + \dots + x_m = 1, \\ Y^*(y_1; y_2), y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

както и цената на играта l. Две са активните стратегии на участник I.

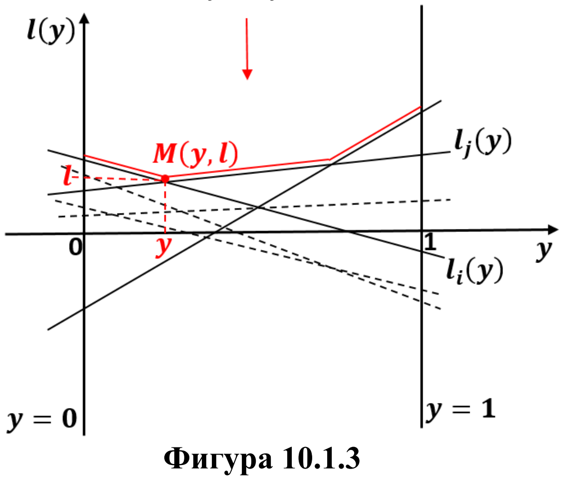
За участник I очакваните печалби $l_1, \dots, l_m$ зависят от вероятностите, с които участник II ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване:

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dots \\ l_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \\ \dots \\ l_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 \\ \dots \\ l_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{array} \right.$$

Ако положим $y_1 = y \Rightarrow y_2 = 1 - y$. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} l_1(y) = a_{11}y + a_{12}(1-y) \\ \dots \\ l_i(y) = a_{i1}y + a_{i2}(1-y) \\ \dots \\ l_j(y) = a_{j1}y + a_{j2}(1-y) \\ \dots \\ l_m(y) = a_{m1}y + a_{m2}(1-y) \end{array} \right.$$

Можем да решим задачата графично като изобразим функциите $l_1(y), \dots, l_m(y)$ върху декартова координатна система Oyl и $y\epsilon[0;1]$:



Фигура 10.1.3

$$\underset{\text{Участник I}}{\xrightarrow{\text{Цел: да печели повече}}} \quad \underbrace{\max_{1\le i\le m} l_i(y)}_{\text{горна обвивка на фамилия прави}} \quad \underset{\text{Участник II}}{\xrightarrow{\text{Цел: да губи по-малко}}} M(y,l) = l_i \times l_j$$

$$M(y,l) = l_i \times l_j \Rightarrow a_{i1}y + a_{i2}(1-y) = a_{j1}y + a_{j2}(1-y) \Rightarrow \begin{cases} y = y_1 = \dfrac{a_{j2} - a_{i2}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}} \\ 1 - y = y_2 = \dfrac{a_{i1} - a_{j1}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}} \end{cases}$$

Тогава оптималната смесена стратегия на участник I е

$$Y^*\left(y_1 = \frac{a_{j2} - a_{i2}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}}; y_2 = \frac{a_{i1} - a_{j1}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}}\right).$$

От графиката се вижда, че оптималната игра е в точка M при активни стратегии A_i и A_j на участник I. Следователно, $x_i \neq 0, x_j \neq 0$, а всички останали x са равни на нула.

Ако положим $x_i = x$, то $x_j = 1 - x$. Тогава:

$$A_{m\times 2} = \begin{array}{c|c|c} & \boxed{l_1 \quad l_2} & \\ \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_j \\ \dots \\ l_m \end{matrix}} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} \\ \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{1m} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ \dots \\ x_i = x \\ \dots \\ x_j = 1 - x \\ \dots \\ x_m = 0 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{y_1 \quad y_2} \\ \boxed{y \quad 1-y} \end{matrix}} & \end{array}$$

Цената на играта зависи само от активните стратегии. Следователно,

$$l = l_i.x_i + l_j.x_j = l_i.x + l_j.(1-x) = \big(a_{i1}y + a_{i2}(1-y)\big).x + \Big(a_{j1}y + a_{j2}(1-y)\Big).(1-x) =$$
$$= a_{i1}xy + a_{2i}x - a_{i2}xy + a_{j1}y + a_{j2} - a_{j2}y - a_{j1}xy - a_{j2}x + a_{j2}xy =$$
$$= (a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2})xy + (a_{j1} - a_{j2})y + (a_{i2} - a_{j2})x + a_{j2} = \underbrace{\Big((a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2})x + (a_{j1} - a_{j2})\Big)}_{\substack{\parallel \\ 0}} y + (a_{i2} - a_{j2})x + a_{j2}$$

Цената на оптималната игра може да се изрази като функция само от x или само от y. Тогава можем да запишем:

$$(a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2})x + (a_{j1} - a_{j2}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = x_i = \frac{a_{j2} - a_{j1}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}} \Rightarrow 1 - x = x_j = \frac{a_{i1} - a_{i2}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}},$$

както при матрична игра 2×2. Тогава оптималната смесена стратегия на участник I е:

$$X^*\left(x_1 = 0; \dots; x_i = \frac{a_{j2} - a_{j1}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}}; \dots; x_j = \frac{a_{i1} - a_{i2}}{a_{i1} - a_{i2} - a_{j1} + a_{j2}}; \dots; x_m = 0\right).$$

Цената на играта е:

$$l = \frac{a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}}{a_{i1} + a_{j2} - a_{j1} - a_{i2}}.$$

Пример на матрична игра от вида $m \times 2$ в смесени стратегии

Платежната матрица на играта е

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$\left.\begin{array}{l} A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{min} -1 \\ \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow -2 \end{matrix} \Bigg\} \xrightarrow{max} \alpha = \boxed{0} \\ max \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad \underbrace{3 \quad 3} \\ min \quad \downarrow \\ \qquad \beta = \boxed{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha \neq \beta}$$

Следователно, играта е в смесени стратегии.

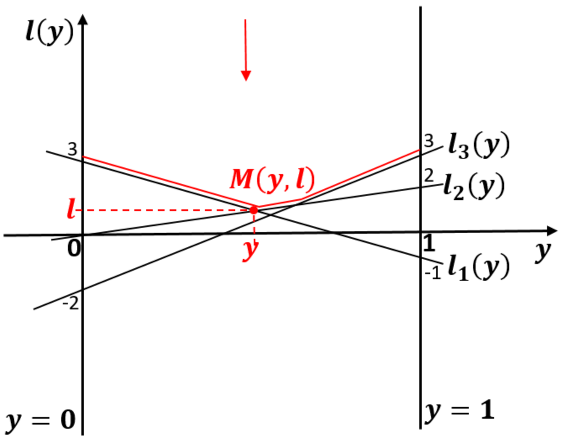
Нека

$$A_{3\times 2} = \begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{l_1 \quad l_2} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \boxed{\begin{matrix} \boxed{y_1 \quad y_2} \\ \boxed{y \quad 1-y} \end{matrix}} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{array}$$

За участник I очакваните печалби l_1, l_2, l_3 зависят от вероятностите, с които участник II ще играе своите стратегии и могат да се изразят като математическо очакване. Ако положим $y_1 = y \Rightarrow y_2 = 1 - y$, то

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = (-1)y_1 + 3y_2 \\ l_2 = 2y_1 + 0y_2 \\ l_3 = 3y_1 + (-2)y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} l_1 = (-1)y + 3(1-y) = 3 - 4y \\ l_2 = 2y + 0(1-y) = 2y \\ l_3 = 3y + (-2)(1-y) \end{array} \right.$$

Можем да решим задачата графично като изобразим функциите $l_1(y), l_2(y), l_3(y)$ върху декартова координатна система Oyl и $y \epsilon [0; 1]$:



Фигура 10.1.4

$$\text{Участник I} \xrightarrow{\text{Цел: да печели повече}} \underbrace{\max_{i=1,2,3} l_i(y)}_{\text{горна обвивка на фамилия прави}} \xrightarrow{\text{Цел: да губи по−малко}} M(y,l) = l_1 \times l_2$$

Участник II

$$M(y,l) = l_1 \times l_2 \Rightarrow 3 - 4y = 2y \Rightarrow \begin{cases} y = y_1 = \dfrac{1}{2} \\ 1 - y = y_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Тогава оптималната смесена стратегия на участник II е

$$Y^*\left(y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = \frac{1}{2}\right).$$

От графиката се вижда, че оптималната игра е в точка M при активни стратегии A_1 и A_2 на участник I. Следователно, $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, а $x_3 = 0$.

Ако положим $x_1 = x$, то $x_2 = 1 - x$. Тогава:

$$A_{3\times 2} = \begin{array}{c|c|c} & \boxed{l_1 \quad l_2} & \\ \boxed{\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = 1 - x \\ x_3 = 0 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{y_1 \quad y_2} \\ \boxed{y \quad 1 - y} \end{matrix}} & \end{array}$$

Цената на играта зависи само от активните стратегии. Следователно,

$$l = l_1.x_1 + l_2.x_2 = l_1.x + l_2.(1 - x) = (3 - 4y)x + 2y(1 - x) =$$
$$= 3x - 4xy + 2y - 2xy = \underbrace{(-6x + 2)}_{\overset{\parallel}{0}} y + 3x$$

Цената на оптималната игра може да се изрази като функция само от x или само от y. Тогава можем да запишем:

$$-6x + 2 = 0 \Rightarrow x = x_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - x = x_2 = \frac{2}{3}.$$

Оптималната смесена стратегия на участник I е:

$$X^*\left(x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{2}{3}; x_3 = 0\right).$$

Цената на играта или общото очакване от играта е:

$$l = 0y + 3x = 0 + 3.\frac{1}{3} = 1.$$

Проверка:

$l = 1$

$l_1 = 3 - 4y = 3 - 4.\dfrac{1}{2} = 1 = l$

$l_2 = 2y = 2.\dfrac{1}{2} = 1 = l$

(Играта е в точка $M(y,l) = l_1 \times l_2$)