<u>Лекция 7.</u> Задача за назначенията. Методи и алгоритми за намиране на оптимално решение

Целочислени задачи от линейното оптимиране възникват по естествен път, когато решенията са от типа „да-не“. Съществен интерес представляват и задачи, в които се въвеждат изкуствено булеви променливи, за да се преодолеят някои аналитични трудности или некоректности на началния модел.

7.1. Обща формулировка на задачата за назначенията

Характерна задача от целочисленото оптимиране с булеви решения е *задачата за назначения*, която се състои в следното: Необходимо е да се разпределят m дейности между n машини. Дейността i, когато се изпълнява на машината j, води до разходи $c_{ij}, i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$. Всяка отделна дейност се изпълнява на една отделна машина. Търси се такова разпределение на дейностите по машините, при което има минимални общи разходи.

Задачата се решава в каноничен вид при $m=n$ и се нарича *балансирана задача*. Ако $m<n$ или $m>n$, дебалансът се отстранява чрез добавяне на *фиктивни дейности* или *фиктивни машини*.

Нека x_{ij} са булеви променливи и

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i-\text{тата работа е разпределена към } j-\text{тата машина} \\ 0, & i-\text{тата работа не е разпределена към } j-\text{тата машина} \end{cases}, \quad i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,m.$$

Тогава *математическият модел* на задачата за назначения е: Търсят се x_{ij}, такива че

$$min\left\{ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \right\}$$

при ограничения: (7.1)

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, i = 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1,\dots,m, \\ x_{ij} \epsilon \{0,1\}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,m \end{array} \right.$$

Пример 7.1. Голяма високотехнологична компания разкрива три свободни места на позиции – началник отдел „Маркетинг“, мениджър продажби и технически сътрудник към отдел „Продажби“. До интервю са допуснати трима кандидати – Янев, Димитрова и Кръстев. По време на интервюто всеки кандидат е попитан, каква месечна заплата очаква за всяка от обявените позиции. Резултатите в лв. от интервюто са представени в таблица 7.1.

Таблица 7.1. Резултати от интервюто

Позиция / Кандидат	Началник отдел	Мениджър	Технически сътрудник
Янев	3500	2700	1500
Димитрова	3200	2500	2000
Кръстев	3300	2200	1700

Отдел „Човешки ресурси" трябва да направи такова разпределение на работните места между трите кандидати, така че общите разходи на компанията за заплати да са минимални.

Да се състави математически модел на тази задача.

Решение. Нека променливите

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ако кандидат } i \text{ е назначен на позиция } j & i = 1,2,3 \\ 0, \text{ако кандидат } i \text{ не е назначен на позиция } j & j = 1,2,3. \end{cases}$$

Целта е: общите разходи за заплати да са минимални. Тогава *целевата функция* е:

$$f(x) = 3500x_{11} + 2700x_{12} + 1500x_{13} +$$
$$+3200x_{21} + 2500x_{22} + 2000x_{23} +$$
$$+3300x_{31} + 2200x_{32} + 1700x_{33} \to min\ .$$

Ограниченията на задачата се задават от условията:

- всеки кандидат трябва да заеме само една позиция

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1; \end{cases}$$

- на всяка позиция трябва да има само един кандидат:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1. \end{cases}$$

Тогава *математическият модел* на задачата е:

$$f(x) = 3500x_{11} + 2700x_{12} + 1500x_{13} +$$
$$+3200x_{21} + 2500x_{22} + 2000x_{23} +$$
$$+3300x_{31} + 2200x_{32} + 1700x_{33} \to min\ .$$

при ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} = \{0,1\}, i = 1,2,3, j = 1,2,3. \end{cases}$$

Специалната структура на модела прави възможно използването на по-ефективен метод на решение, т.нар. *унгарски метод*.

7.2. Алгоритъм на унгарски метод

Ще разгледаме две описания на унгарски алгоритъм.

Алгоритъм 1:

Стъпка 1. Преобразува се матрицата $\mathrm{C} = \{c_{ij}\}_{mxm}$ в еквивалентна матрица $D = \{d_{ij}\}_{mxm}$:

$$c'_{ij} = \max_k c_{kj} - c_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, m, \tag{6.2}$$

$$d_{ij} = c'_{ij} - \min_k c'_{ik}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m. \tag{6.3}$$

Във всеки стълб и ред се отбелязва с * по една нула (ако това е възможно). Тези нули се наричат (*)-маркирани.

Стъпка 2. Ако броят на (*)-маркираните нули е m, задачата е решена, като местата на тези нули отговарят на елементите $x_{ij} = 1$ в оптималния план. В противен случай, следва стъпка 3.

Стъпка 3. Отбелязват се с + стълбовете, в които има 0* и се считат за заети. Тъй като има и заети редове, елементите, които са в незаети ред и стълб се считат за незаети, а останалите – за заети.

Стъпка 4. Ако всички нули са заети, следва стъпка 8.

Стъпка 5. Ако има незаети нули, се избира една от тях, отбелязва се с ` и се нарича (`)-маркирана. Ако в нейния ред няма 0*, следва стъпка 7. В противен случай, ако 0* е такава, следва стъпка 6.

Стъпка 6. Изстрива се знака + от стълба, в който е тази 0* и се счита за незает. Отбелязва се с + реда, в който е 0` и се счита за зает. Следва стъпка 4.

Стъпка 7. Започвайки от намерената 0` се строи верига от нули: от 0` по стълба ѝ до 0*, от там по реда до някоя 0` и т.н., докато това е възможно. Премахва се знака + от нулите от веригата, а 0` от нея става 0*. Изстриват се всички знаци (`) и +. Следва стъпка 5.

Стъпка 8. Измежду незаетите елементи се избира минималния (нека това е p), изважда се от всички незаети редове и се прибавя към заетите стълбове. Следва стъпка 5.

Алгоритъм 2:

Стъпка 1. Намираме минималния елемент във всеки ред на m×m матрицата на цените. Конструираме нова втора матрица, като изваждаме от всеки елемент на матрицата минималния елемент за съответния ред. За тази нова матрица намираме минималния елемент във всеки стълб. Конструираме нова трета матрица (наречена матрица с редуцираните цени), като изваждаме от всеки елемент на втората матрица минималния елемент за съответния стълб. Продължаваме със Стъпка 2.

Стъпка 2. Зачертаваме с минималния възможен брой линии (хоризонтални, вертикални или и двете) всички нули в матрицата с редуцираните цени.

- Ако броят на тези линии е m, намерено е оптимално решение, чийто единици се намират точно там, където са нулите в матрицата с редуцираните цени. КРАЙ.
- Ако броят на линиите е по-малък от m, преминаваме към Стъпка 3.

Стъпка 3. Намираме най-малкия ненулев елемент (нека стойността му е k) в матрицата с редуцираните цени, който не е зачертан от линиите в Стъпка 2. Сега изваждаме k от всеки незачертан елемент на матрицата с редуцираните цени и прибавяме k към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан от две линии. Връщаме се към Стъпка 2 с така модифицираната матрица с редуцираните цени.

Забележка 7.1. За решаване на задача за назначения при критерий максимум постъпваме по обичайния начин, като умножаваме целевата функция с -1 и решаваме новополучената задача при критерий минимум.

Забележка 7.2. Ако броят на редовете и стълбовете на матрицата с цените е различен, задачата за назначения е небалансирана. Тогава прилагането на унгарския метод може да доведе до грешно решение. Затова първо трябва да сведем небалансираната задача за назначения до балансирана чрез добавяне на фиктивен(ни) ред(ове) или стълб(ове), след което прилагаме унгарския метод.

Забележка 7.3. В задача с големи размери е възможно намирането на минималния брой линии, с които да зачертаем всички нулеви елементи на матрицата с редуцираните цени, да не бъде лесна задача. В този случай е препоръчително използването на алгоритъм 1.

Забележка 7.4. Задачата (7.1) може да се разглежда и като частен случай на транспортна задача. Тук работите са „изходни пунктове (ИП)“, а машините - „пунктове на назначение (ПН)“. Във всеки ИП предположението (производството) е равно на единица, т.е. $a_i, i = 1,...,m$. Търсенето във всеки ПН също е равно на единица, т.е. $b_j, j = 1,...,n$. Разходите за „превоз“ (за назначаване) на работата *i* към машината *j* са c_{ij}. Ако някоя работа *r* не може да се изпълни от машината *s*, се полага $c_{rs} = M >> 0$.

Пример 7.2. Да се реши задачата за назначенията по min:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решаваме задачата по алгоритъм 2.

Стъпка 1. Определяме минималния елемент във всеки ред и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния ред:

$$C_1 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определяме минималния елемент във всеки стълб и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния стълб

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Стъпка 2. Виждаме, че в матрицата с редуцираните цени първият ред и първият стълб съдържат по две нули. Като зачертаем първия ред и първия стълб с две линии, остава незачертана само нулата в третия ред и третия стълб. За нея ни трябва още една линия (която зачертава или третия ред, или третия стълб). Тук избираме линията, зачертаваща третия ред (а вие се опитайте да пререшите задачата, като зачертаете третия стълб).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Стъпка 3. Най-малкият незачертан елемент е равен на 1. Изваждаме 1 от всеки незачертан елемент и прибавяме 1 към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан два пъти. Така получаваме следната матрица

$$C_4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

в която вече са необходими 4 линии за зачертаване на всички нулеви елементи. Следователно налице е оптимално решение. Как да определим от тази матрица назначенията? Като огледаме матрицата, забелязваме, че във втория и третия стълб има само по едно нула. Това ни дава $x_{12} = 1$ и $x_{33} = 1$. Така втората нула в първия ред (и четвъртия стълб) не може да се използва. Сега вече остава $x_{24} = 1$, което прави нулата във втория ред и първия стълб неизползваема. Остава $x_{41} = 1$ (а и това е единствената нула в четвъртия ред). Окончателно $x_{12} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = 1$.

Отг. $F_{min} = 5 + 5 + 3 + 2 = 15, X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$