<u>Упражнение 6.</u> Методи и алгоритми за решаване на целочислената задача на линейното оптимиране

В много задачи на ЛО всички или част от променливите приемат цели стойности. Една задача се нарича *целочислена задача*, ако всички нейни променливи приемат цели стойности. Ако това условие се отнася само до някои от променливите на задачата, тя се нарича *смесено целочислена задача*.

Целочислените променливи затрудняват разработването на ефективни алгоритми, които търсят оптималното решение директно сред допустимите целочислени точки на решенията. Една възможност е в допустимата област от решения да се намерят всички целочислени и да се сравнят. Затрудненията тук се дължат на големия брой комбинации от стойности на променливите, които трябва да се оценят. Други методи за решаване на целочислени задачи се основават на методите за непрекъснато ЛО и обстоятелството, че оптималното решение се намира в ъглова точка на пространството на решения. Основните стъпки са:

1. „Отслабват“ се ограниченията на началната целочислена задача, като се отстраняват изискванията за целочисленост на променливите и се решава задача на непрекъснатото ЛО.
2. Започва се от непрекъснатото оптимално решение. Въвеждат се допълнителни ограничения, които отчитат изискванията за целочисленост и променят допустимата област на „отслабената“ задача дотогава, докато това е възможно.

Така се решава последователност от задачи на непрекъснатото ЛО. От изчислитилна гледна точка това е по-ефективно от директното търсене на целочислени решения.

Често целочисленото решение е близо до непрекъснатото.

На втора стъпка, след построяването на допълнителните ограничения могат да се използват: *метод на разклоняване и отсичане* или *метод на отсичащите равнини*. И при двата метода добавяните ограничения отстраняват части от допустимата област на отслабената задача, които не съдържат точки с целочислени координати.

6.1. Метод на отсичащите равнини

Методът на отсичането е предложен от Гомори през 1957 г. за решаването на линейна целочислена задача. В матричен запис тя има вида:Търси се целочислен вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T, x_i \in Z, i = 1, \dots, n$, за който

$$\min\{z(x) = \langle c, x \rangle\}$$

$$\textit{при ограничения}$$

$$M: \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

където A е $(m \times n)$ матрица, $c = (c_1, \dots, c_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Ограниченията M, представляват изпъкнало множество. Нека Ω е множеството от точки с цели координати в M и е допустимото множество на дадената целочислена задача. Нека M' е изпъкнала обвивка на Ω. Разглежда се разширината задача:

$$\min\{\langle c, x \rangle : x \in M'\}, \tag{6.2}$$

която е линейна оптимизационна задача и се решава например със симплекс метода. Полученото решение е целочислено. Но намирането на изпъкналата обвивка M', е задача

- по-сложна от изходната. Гомори предлага да не се търси цялата изпъкнала обвивка M' , а само тази част от нея, която се намира „около“ непрекъснатото решение на линейната задача (6.2). Това се постига чрез последователни „отсичания“ от изходното множество M с отсичащи хиперравнини. Всяка поредна въведена хиперравнина е ново линейно ограничение, което не се удовлетворява от непрекъснатото решение, но не отсича нито една точка от M с цели координати. Ако решението на получената нова линейна задача е целочислено, то изходната задача е решена. В противен случай, процесът продължава докато това е възможно.

Необходимо условие за прилагането на метода на Гомори е матрицата A и векторът b да са целочислени.

Пример 6.1. (Целочислен пример)

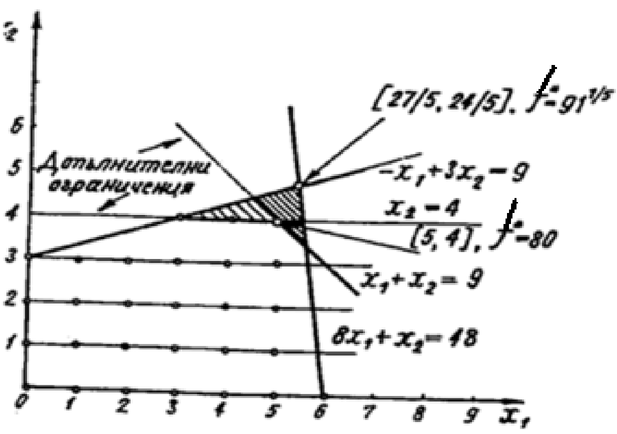
Да се максимизира

$$f = 8x_1 + 10x_2$$

при ограничения

$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$8x_1 + x_2 \leq 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0, цели.$$

Решение. Пространството на допустимите решения на задачата с отслабени ограничения е показано на фигура 6.1. Нейното оптимално решение е $x^*_1 = 5\frac{2}{5}$, $x^*_2 = 4\frac{4}{5}$ и $f^* = 91\frac{1}{5}$. Началното пространство се преобразува в нов изпъкнал многостен (в случая - многоъгълник), чиято екстремна точка е оптималното решение на началната целочислена задача. При това всички нейни допустими целочислени решения лежат вътре във или на границата на многостена. На фигура 6.1 е показано как въвеждането на две нови подходящи ограничения позволява да се получи нова екстремна точка (5,4), която е оптималното решение на началната задача. Защрихованата "отсечена" област не съдържа точки с целочислени координати.



Фигура 6.1.

Симплекс-таблицата на оптималното решение на отслабената задача е представена чрез таблица 6.1.

Таблица 6.1.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
f	0	0	72/25	34/25	$91^{1/5}$
x_1	0	1	8/25	1/25	$4^{4/5}$
x_2	1	0	-1/25	3/25	$5^{2/5}$

Като произвеждащ може да се избере кой да е от редовете. Обикновено се избира редът, на който съответствува $\max\{f_i\}$. В случая това е редът на x_2 (4/5 > 2/5). За този ред може да се запише

$$x_2 + \frac{8}{25}x_3 + \frac{1}{25}x_4 = 4^{4/5}$$

или

$$x_2 + \left(0 + \frac{8}{25}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{25}\right)x_4 = 4 + 4^{4/5},$$

откъдето уравнението на сечението на Гомори е

$$S_1 - \frac{8}{25}x_3 - \frac{1}{25}x_4 = -\frac{4}{25}.$$

Новата симлекс-таблица е представена чрез таблица 6.2.

Таблица 6.2.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
f	0	0	0	1	9	$91^{4/5}$
x_1	0	1	8/25	1/25	0	$4^{4/5}$
x_2	1	0	-1/25	3/25	0	$5^{4/5}$
$\leftarrow S_1$	0	0	-8/25	-1/25	1	-4/5

Тъй като S_1 има недопустима стойност (< 0), прилага се дуалният симплекс метод. В съответствие с правилата за определяне на изключваната и включваната променлива, изключва се променлива S_1 и се включва променливата x_3. Преобразуваната таблица, чиито елементи са получени по съответните правила за дуалния симплекс метод е представена в таблица 6.3.

Таблица 6.3.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
f	0	0	72/25	34/25	0	84
x_1	0	1	0	0	1	4
x_2	1	0	0	1/8	-1/8	$5^{1/2}$
x_3	0	0	1	1/8	1	-25/8

Вижда се, че новата стойност на x_2 е целочислена, но решението за x_1 е нецелочислено, затова въвеждането на сечения продължава. Уравнението на x_1 се представя във вида

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{8}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{7}{8}\right)S_1 = 5 + \frac{1}{2}$$

и новото пораждащо сечение се описва с уравнението

$$S_2 - \frac{1}{8}x_4 - \frac{7}{8}S_1 = -\frac{1}{2}.$$

Това сечение се добавя към последната таблица и се получава таблица 6.4.

Таблица 6.4.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	Решение
f	0	0	0	1	9	0	84
x_1	0	1	0	0	1	0	4
x_2	1	0	0	1/8	-1/8	0	$5^{1/2}$
x_3	0	0	1	1/8	25/8	0	$2^{1/2}$
$\leftarrow S_1$	0	0	0	-1/8	7/8	1	-1/2

След прилагането на дуалния симплекс метод се получава таблица 6.5.

Таблица 6.5.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	Решение
f	0	0	0	0	2	8	80
x_1	0	1	0	0	1	0	4
x_2	1	0	0	0	-1	1	5
x_3	0	0	1	0	-4	1	2
x_4	0	0	0	1	7	-8	4

Оптималното решение на началната задача е $x^*_1 = 5$, $x^*_2 = 4$ и $f^* = 80$. Вижда се, че стойността на f намалява с последователното въвеждане на нови ограничения.

Да проверим как сеченията отсичат части от допустимото пространство на отслабената задача. От последната таблица се вижда, че $x_2 + S_1 = 4$, откъдето $x_2 \leq 4$ е едното ново допълнително ограничение. От същата таблица може да се запише

$$x_1 - S_1 - S_2 = 5.$$

След заместване на S_1 от уравнението $x_2 + S_1 = 4$ се получава

$$x_1 + x_2 + S_2 = 9, \text{ т.е. } x_1 + x_2 \leq 9.$$

Правите, които съответстват на двете нови ограничения, са показани на фигура 6.1.

Пример 6.2. (Частично целочислен пример)

Разглежда се примерът 6.1, като се изисква само променливата x_1 да е целочислена. От таблицата с оптималното решение на отслабената задача

$$x_1 - \frac{1}{25}x_3 + \frac{3}{25}x_4 = 5 + \frac{2}{5},$$

откъдето

$$N^- = \{3\}, N^+ = \{4\}, f_1 = \frac{2}{5}.$$

Уравнението на сечението на Гомори е

$$S_1 - \frac{2}{75}x_3 - \frac{3}{25}x_4 = \frac{2}{5}$$

или

Това ограничение се включва в същата таблица и се получава таблица 6.6.

Таблица 6.6.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
f	0	0	72/25	34/25	0	$91^{1/5}$
x_1	0	1	8/25	1/25	0	$4^{4/5}$
x_2	1	0	-1/25	3/25	0	$5^{2/5}$
$\leftarrow S_1$	0	0	-2/75	-3/25	1	-2/5

След прилагането на дуалния симплекс метод се определя решението в таблица 6.7.

Таблица 6.7.

БР	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
f	0	0	116/45	0	34/3	$86^{2/3}$
x_1	0	1	602/1875	0	1/3	$4^{2/3}$
x_2	1	0	-1/15	0	1	5
x_4	0	0	2/9	1	-25/3	$3^{1/3}$

Вижда се, че оптималната стойност $f^* = 86^{2/3}$ се получава при $x^*_1 = 5$ и $x^*_2 = 4^{2/3}$.

Счита се,че методите на отсичането не са подходящи за решаването на задачи с по-голяма размерност. Те са ефективни при решаването на някои задачи със специална структура. Напоследък, в съчетание с елементи на разклоняване, идеите за отсичащи равнини се използуват при разработването на нови алгоритми на ЦО.

6.2. Метод на разклоняване и отсичане

По-общ подход за решаване на почти всички видове дискретни оптимизационни задачи е *методът на разклоняване и отсичане* (*Branch & Bound*). Възниква през 1963 г. след една забавна история, при която фирма публикува с рекламна цел *задачата за търговския пътник* без да знае нито какво е решението, нито как се решават подобни задачи. След нарастващ скандал от страна на клиентите да получат наградата за това, че са изпратили верен отговор, фирмата се обръща към професионални математици, които решават въпросния пример и предлагат новия метод.

Нека Ω е крайно дискретно множество и $f(x)$ е функцията, на която не се налагат никакви ограничения. Търси се

$$\max\{f(x): x \in \Omega\}, \tag{6.3}$$

Множеството Ω може да се разбие на краен брой непресичащи се подмножества

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad \Omega_k \bigcap \Omega_j = \varnothing \text{ за } k \neq j. \tag{6.4}$$

Нека множеството $\overline{\Omega}_i$ е разширение на Ω_i, $\Omega_i \subset \overline{\Omega}_i$ за всяко i. Разглеждат се две задачи A_i и $\overline{A}_i$:

Задача A_i: $\max\{f(x): x \in \Omega_i\}$; (6.5)

Задача $\overline{A}_i$ (*оценъчна задача*): $\max\{f(x): x \in \overline{\Omega}_i\}$. (6.6)

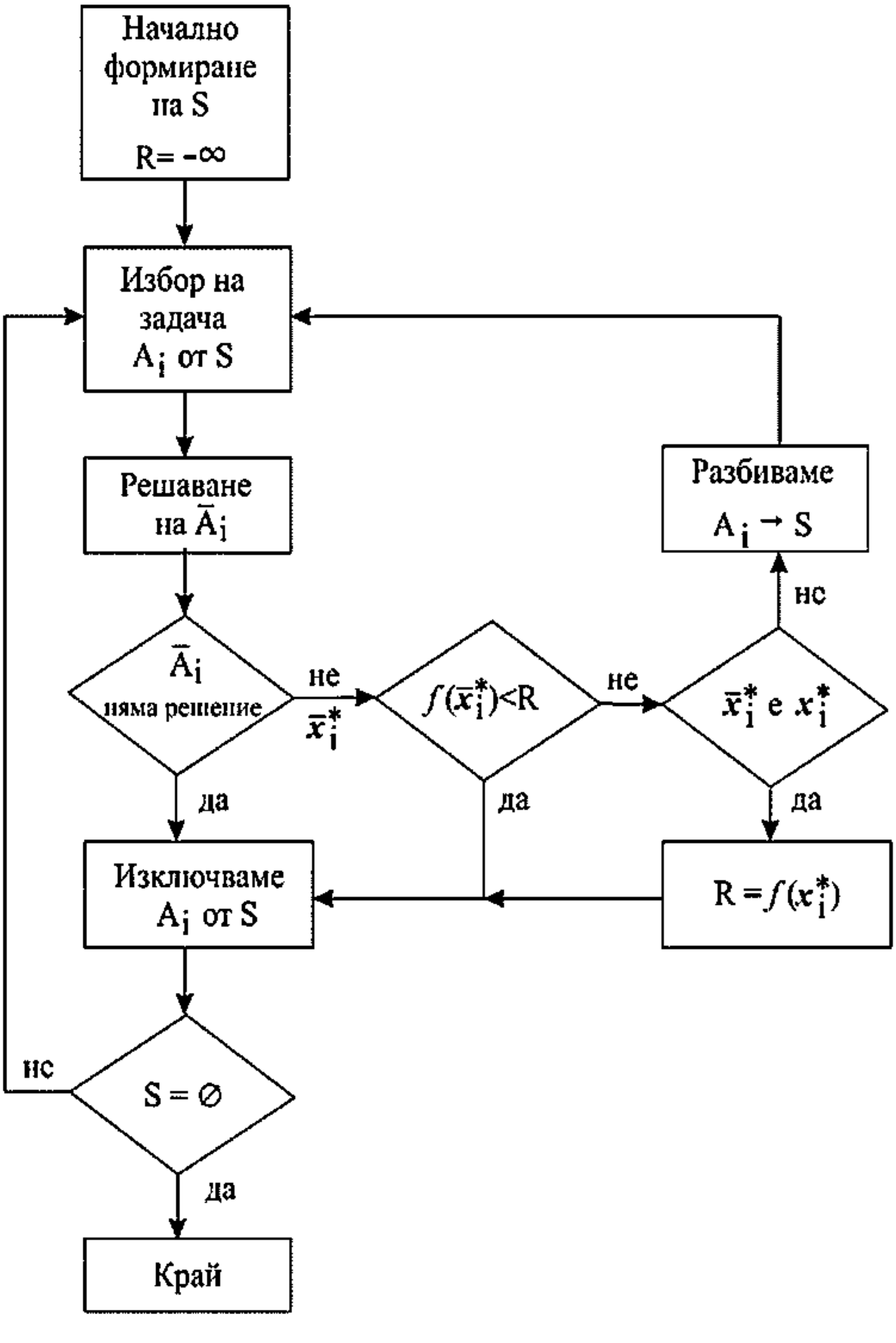
От $\Omega_i \subset \overline{\Omega}_i$ следва, че $\max\{f(x): x \in \overline{\Omega}_i\} \geq \max\{f(x): x \in \Omega_i\}$, т.е. оптималната стойност на оценъчната задача $\overline{A}_i$ е по-голяма от тази на A_i. Оценъчната задача се решава по-лесно от изходната задача, но конструирането ѝ е специфично за всеки отделен вид дискретна задача.

Фигура 6.2 описва блок-схемата на алгоритъма на разклоняване и отсичане.

Въведени са и следните означения:

- R – горна граница; $R = \max\{f(x^*), -\infty\}$, където x^* е допустима точка за изходната задача A;

- S – списък от задачи, получени при разбиването на A на $A_1, A_2, ..., A_k$, евентуално разбиването на A_j на $A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jp}$ и т.н.



Фигура 6.2. Блок-схема на алгоритъма на разклоняване и отсичане

Алгоритъм:

1. Ако задачата $\overline{A}_i$ няма решение, то и задачата A_i няма решение;
2. Ако $f(\overline{x}_i *) < R$, то без да се проверява дали $\overline{x}_i *$ е решение и на A_i, че оптималната ѝ стойност е по-малка от R;

3. При „край“, ако $R = -\infty$, то задачата *A* няма решение, в проивен случай, решение е това, при което е получено последното *R*.

Възникват редица въпроси, свързани с ефективността на алгоритъма: Колко „лесно“ се решават задачите $\overline{A}_i$, колко близки са решенията на $\overline{A}_i$ до тези на A_i, т.е. колко голям е списъкът *S*?

Принципно, колкото по-грубо е разширението $\overline{\Omega}_i$ на Ω_i, толкова по-лоша ще бъде оценката, но за сметка на това $\overline{A}_i$ се решават по-лесно. Компромисът се прави по различен начин за всеки отделен вид задачи в зависимост от тяхната специфика. Ако $\overline{\Omega}_i = \Omega$, то $|S| = 1$ и оценъчната задача е изходната. Ако задача *A* няма решение, алгоритъмът се превръща в почти пълно изчерпване на вариантите. Ако се решава целочислена линейна задача, най-естествено е оценъчната задача да се получава чрез отпадане на изискването за целочисленост.

Алгоритъмът на разклоняване и отсичане може да се адаптира и за решаване на *двоични задачи*, но тази тема ще се разглежда в следващи упражнения.

Методът е приложим за решаване на двата вида задачи - напълно целочислени и частично целочислени. Същността му ще бъде изяснена с помощта на следните примери:

Пример 6.1. Да се максимизира

$$f(x) = 6x_1 + 5x_2$$

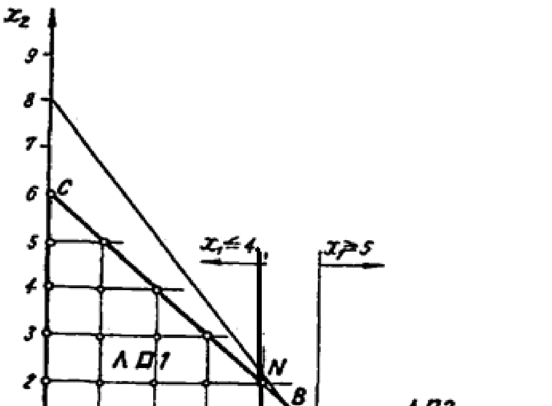
при ограничения

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$16x_1 + 11x_2 \leq 88,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ цели}$$

Решение. На фигура 6.3 е показано с точки пространството на решенията на задачата на ЦЛО. Пространството на решенията на отслабената задача на непрекъснатото ЛО, която възниква след отстраняване на изискванията за целочисленост, е четириъгълникът OABC. Оптималното решение на задачата ЛО, получено по симплекс метода, е $x^*_1 = 4{,}40$, $x^*_2 = 1{,}60$, $f^* = 34{,}40$.



Фигура 6.3. Графично решение

Тъй като решението на задачата не е целочислено, пространството на решенията се изменя по такъв начин, че да се подобрят възможностите за определяне на целочислено решение. За целта произволно се избира една от променливите, която в точката на оптимума не е целочислена, да генерира необходимите изменения. Ако например се избере x_1 ($x^*_1 = 4{,}40$), вижда се, че областта $4 < x_1 < 5$ от пространството на решенията не съдържа целочислени решения и може да бъде отстранена. Очевидно, целочислените решения трябва да удовлетворяват едно от следните две условия $x_1 \le 4$ или $x_1 \ge 5$, което позволява началното пространство ПрЛО на задачата да се замени с две пространства ПрЛО1 и ПрЛО2

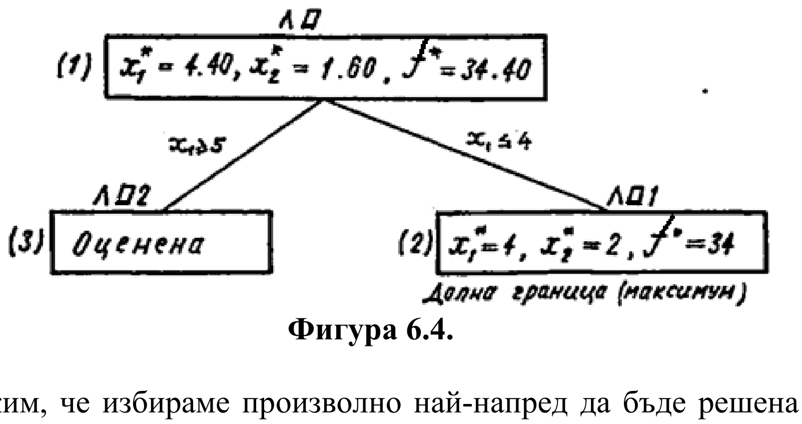
ПрЛО1=ПрЛО0 и ограничението ($x_1 \le 4$),

ПрЛО2=ПрЛО0 и ограничението ($x_1 \ge 5$).

По този начин отслабената непрекъсната задача ЛО се заменя с две нови задачи на непрекъснатото ЛО - задачите ЛО1 и ЛО2. На фигура 6.3 пространствата ПрЛО1 и ПрЛО2 са представени съответно от четириъгълника OMNC и триъгълника PAQ, означени са и задачите ЛО1, ЛО2, породени от новите пространства. Вижда се, че двете проранства съдържат всички допустими целочислени решения на началната ЦЛЗ и в този смисъл са еквивалентни на ПрЛО0.

Тъй като двете нови ограничения $x_1 \le 4$ и $x_1 \ge 5$ се изключват взаимно, задачите ЛО1 и ЛО2, които възникват след поотделното въвеждане на тези ограничения в задачата ЛО, са различии и се решават поотделно.

Описаното разделяне на текущото пространство на решенията на две взаимно изключващи се подпространства и свързаното с това построяване на две нови задачи (подзадачи) на ЛО от началната (текущата) задача се означават с понятието разклоняване. На фигуга 6.4 е показано разклоняването на ЛО на двете подзадачи ЛО1 и ЛО2, като клоните се определят от ограниченията $x_1 \le 4$ и $x_1 \ge 5$. Процесът на разклоняване се представя чрез дърво, всеки възел на което съответствува на подзадача. Самото дърво се нарича дърво на решението (или дърво на изброяването). Променливата x_1, използувана за да се извърши разклоняването, се нарича променлива на разклоняването.



Фигура 6.4.

Да предположим, че избираме произволно най-напред да бъде решена подзадачата ЛО1:

Да се максимизира $f = 6x_1 + 5x_2$

при ограничения

$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$16x_1 + 11x_2 \le 88$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Разликата от ЛО е тази, че тук е включено ново ограничение, което не се удовлетворява от оптималното решение на ЛО - $x^*_1 = 4{,}40$. Като се приложи описаната процедура, се определя оптималното решение на ЛО1 - $x^*_1 = 4$, $x^*_1 = 2$, $f^* = 34$.

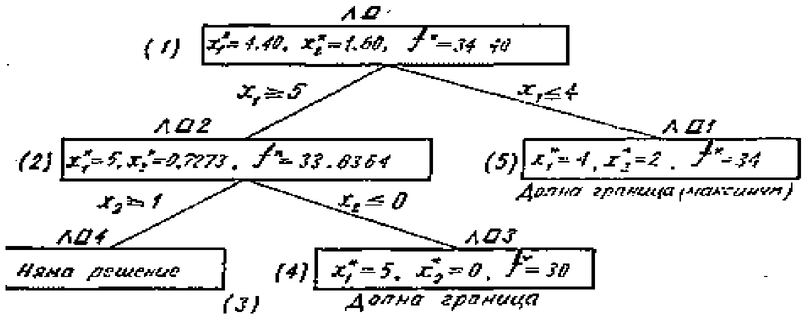
Полученото решение е целочислено и подзадачата ЛО1 се означава като оценена (измерена), в смисъл, че тя няма да се разглежда по-нататък, тъй като не може да даде по- добро решение.

Целочисленото решение на ЛО1 определя долна граница за оптималната стойност на целевата функция на ЗЦО. Понятието "граница" е следващото важно понятие за разглеждания метод. Границата позволява да се отстраняват както неперспективни задачи, които не биха могли да дадат по-добро решение и няма смисъл да бъдат решавани, така и получаваните нови целочислени решения, ако те не са по-добри от съществуващото, което определя границата. В случая долната граница (задачата е за максимизация) е $f^* = 34$. Тъй като оптималното решение на ЛПО $f^* = 34{,}40$ и коефициентите в целевата функция са цели числа, от ЛО не може да произлезе задача, която да има по-добро решение от $f^* = 34$. В този смисъл задачата ЛО2 може да бъде отстранена без решаване, като неперспективна, тъй като нейното решение не би могло да бъде по-добро от това на задачата ЛО1 $f^* = 34$. Задачата ЛО2 също е оценена, т.е. няма да се разглежда по-нататък.

От изложеното се вижда, че една подзадача е *оценена*, ако е получено нейното допустимо целочислено решение или ако е показано, че тя не може да даде по-добро решение от това, което е определило текущата граница. Тя е оценена също, ако въобще няма допустимо решение.

В разглеждания пример всички подзадачи са оценени и оптималното решение на началната ЦЛЗ е това, което съответствува на текущата долна граница - решението на ЛО1.

В случая случайният избор на променливата на разклоняването и на задачата ЛО1 като първа за решаване от двете нови задачи беше твърде сполучлив. Той позволи бързо да се получи допустимо целочислено решение и да се оцени и втората подзадача ЛО2. Като променлива на разклоняването обаче би могла да бъде избрана променлиивата x_2, а като първа за решаване - подзадачата ЛО2, което би довело до значително по-различен изчислителен процес от разглеждания. Нека например най-напред да се решава задачата ЛО2 (фигура 6.5). Нейното оптимално решение е $x^*_1 = 5$, $x^*_2 = 0{,}7273$ и $f^* = 33{,}6364$. Тъй като стойността x^*_2 не е целочислена, x_2 се избира като променлива на разклоняване и от подзадачата ЛО2 възникват двете нови подзадачи ЛО3 и ЛО4, съответно с клони $x_2 \leq 0$ и $x_2 \geq 1$. Техните пространства на решение са ПрЛО3 = ПрЛО2 и ограничението ($x_2 \leq 0$) = ПрЛО0 и ограничението ($x_1 \geq 5$) и ограничението ($x_2 \leq 0$); ПрЛО4 = ПрЛО2 и ограничението ($x_2 \geq 1$) = ПрЛО0 и ограничението ($x_1 \geq 5$) и ограничението ($x_2 \geq 1$).



Фигура 6.5.

Нека като първа се решава подзадачата ЛО4. Прилагането на дуалния симплекс метод показва, че тази подзадача няма допустимо целочислено решение, т.е. тя е оценена. Да предположим, че като следваща за решаване произволно се избира подзадачата ЛО3. Нейното решение $x^*_1 = 5$, $x^*_2 = 0$ и $f^* = 30$ удовлетворява изискванията за целочисленост. Това решение определя текуща долна граница $f^* = 30$ за оптималната стойност на целевата функция на ЦЛЗ. Последна се решава подзадачата ЛО1. Както беше показано по-горе, нейното оптимално решение е $x^*_1 = 4$, $x^*_2 = 2$, $f^* = 34$ и то определя нова, по-добра долна граница. Тъй като всички задачи са оценени, решението на началната ЦЛЗ се определя от оптималното решение, което съответствува на текущата долна граница - решението на ЛО1.

Разгледаният изчислителен процес премина през решаването на задачите ЛО→ЛО2→ЛО4→ЛО3→ЛО1 и е значително по-неефективен от първия процес ЛО0→ЛО→ЛП2. Той илюстрира един основен недостатък на метода на клоните и границите - липсата на обосновани правила за избиране на променливата на разклоняване при дадена подзадача и на следващата за решаване подзадача сред останалите нерешени подзадачи. Според едно най-просто правило целочислените променливи се номерират и подреждат в естествен ред $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и сред тези от тях, които в оптималното решение на съответната подзадача имат нецелочислени стойности, се избира първата в естествения ред (тази с най-малък номер) като променлива на разклоняването.

Съществуват евристични правила за избор на перспективни клони, които невинаги са резултатни при решаването на общата задача на ЦЛО.

Алгоритъмът на клоните и границите се използува и за решаване на задачи на СЦО, като непрекъснатите променливи (тези, които могат да имат дробни стойности) не се избират като променливи на разклоняване. Нека да изменим разглеждания пример така, че променливата x_1 да е целочислена, x_2 - непрекъсната. Подзадачата ЛО1 дава допустимо решение $x_1 = 4$ и долна граница $f^* = 34$. В случая обаче подзадачата ЛО2 не може да бъде оценена без да се реши, тъй като целевата функция може да има нецелочислени стойности. Решението на тази подзадача е $x^*_1 = 5$, $x^*_2 = 0{,}7273$ и $f^* = 33{,}6364$. Вижда се, че решението на ЛО1 е по-добро и то е оптималното решение на разгледаната задача на СЦО.

Често оптималната стойност f^*, получена при решаването на подзадача, която е възникнала от начална задача на СЦО, се нарича *граница на подзадачата*. Ако началната задача е напълно целочислена, границата на възникнала от нея подзадача се определя, като получената за подзадачата стойност f^* се закръгли до най-близкото по-малко цяло число.

Методът на клоните и границите е предложен от Ланд и Доиг (1960). Съвременните реализации се основават на алгоритъма на Дакин (1965). В случая на *задача за максимизация* този *алгоритъм* може да бъде представен в следния обобщен вид:

Начална стъпка. Полага се долната граница $f^* = -\infty$. Решава се отслабената задача ЛО. Ако ЛО е оценена, изчисленията се прекратяват, в обратния случай се преминава към стъпка 1.

Стъпка 1. Разклоняване. Избира се подзадача сред оставащите неоценени подзадачи (например последната създадена). Избира се една от целочислените променливи x_j, чиято стойност x^*_j в оптималното решение на подзадачата не е целочислена (например първата такава в естествения ред на целочислените променливи). Построяват се две нови подзадачи чрез включване към избраната подзадача на едно от ограниченията, където $[x^*_j]$ означава най-голямото цяло число $\leq x^*_j$.

Стъпка 2. Ограничаване. Определя се границата на всяка от двете нови подзадачи чрез решаването ѝ с използуване на дуалния симплекс метод. В случая на задача на чистото ЦО стойността на f се закръгля до най-близкото по-малко цяло число, а при задача на СЦО закръгление не се извършва.

Стъпка 3. Оценяване. За всяка от новите подзадачи се проверява изпълнението на следните условия:

а) границата и е $\leq f^*$, където f^* е текущата долна граница на началната задача;

б) подзадачата няма допустимо решение;

в) оптималното и решение отговаря на изискванията за целочисленост.

Ако се изпълнява кое и да е от тези условия, подзадачата е оценена. Оценените подзадачи се отстраняват от разглеждане. Ако подзадачата е оценена вследствие изпълнение на условие в) и оптималното и решение е по-добро от досегашното, то го заменя, а съответствуващата му стойност на целевата функция става нова текуща граница f^*. В този случай условие а) се проверява отново за всички неоценени подзадачи с новата, по-добра стойност на f^*.

Стъпка 4. Проверка на оптималността. Ако няма повече неоценени подзадачи, изчисленията се прекратяват, като решението, което съответствува на текущата долна граница, е оптималното решение на началната напълно или частично целочислена задача. В обратния случай се преминава към стъпка 1.

Алгоритъмът лесно се модифицира за решаване на задачи за минимизация. Въвежда се понятието горна граница f^* за оптималната стойност на целевата функция на началната задача и условие а) от стъпка 3 на алгоритъма се изменя във вида границата на подзадачата $\geq f^*$.

Алгоритъмът може да се използува и за определяне на квазиоптимално решение, основното предимство, при което са намалените изчислителни загуби. Едно решение е "достатъчно добро", ако съответната стойност f е "достатъчно близко" до оптималната (или някаква желана) стойност f^{**}, т.е. ако се изпълнява

$$f \geq f^{**} - M \text{ или } f \geq (1-\alpha) f^{**}$$

при зададени положителни константи M и α. За определяне на квазиоптимално решение условие а) в стъпка 3 на алгоритъма се заменя с едно от двете условия

границата на подзадачата $\leq f^* + M$

или (1 - α) границата на подзадачата f^*, като условието се проверява след проверката на условие в) и установяването евентуално на нова долна граница. Ускорението се дължи на това, че алгоритъмът оценява (отстранява от разглеждане) дадена подзадача, ако нейната граница не е "достатъчно по-добра" от текущата долна граница.

6.3. Възможности за повишаване на ефективността на алгоритмите

В съвременните алгоритмични реализации се използува комбинация от три вида методи: 1) усъвършенствани алгоритми на клоните и границите; 2) генериране на отсичащи равнини и 3) автоматична предварителна обработка на задачата. Последната се основава на компютърен анализ на началната формулировка, в резултат на който задачата се преформулира във вид, който се решава по-бързо, без да се отстраняват допустими решения.

6.4. Задачи

Решете следните задачи, в които всички променливи са цели неотрицателни числа:

Задача 6.1.

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\le 4, \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 6, \end{aligned}$$

Задача 6.2.

$$x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 36, \\ x_2 &\le 13; \end{aligned}$$

Задача 6.3.

$$\{x_1 + 4x_2\} \to \max,$$
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 6; \end{aligned}$$

Задача 6.4.

$$\{x_1 + x_2\} \to \max,$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 9; \end{aligned}$$

Задача 6.5.

$$\{3x_1 + 4x_2\} \to \max,$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ x_1 + 4x_2 &\le 10; \end{aligned}$$

Задача 6.6.

$$\{x_1 + 2x_2 + x_5\} \to \min,$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Отговори:

6.1. $x^* = (2, 2, 5)$, $l^* = 11$.

6.2. $x^* = (3, 13)$, $l^* = 16$.

6.3. $x^* = (1, 1)$, $l^* = 5$.

6.4. $x^* = (0, 3)$, $x^{**} = (1, 2)$, $x^{***} = (2, 1)$, $x^{****} = (3, 0)$, $l^* = 3$.

6.5. $x^* = (1, 2)$, $l^* = 11$.

6.6. $x^* = (1, 3, 0, 0, 1)$, $l^* = 8$.