No.
Date : :

CH.2.

#3 丟2個骰子,考慮其先後順序

E: 2個點數和=奇數.

F: 至少1個骰子點數=1

G: 2個點數和=5

Describe:

EF: 其中1個為1且相加點數=奇數

$=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\}$.

$E\cup F$ = 至少1個為1或2者相加點數奇數

$$= \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,3) & (2,5) & & & \\ (3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,6) & & \\ (4,1) & (4,3) & (4,5) & & & \\ (5,1) & (5,2) & (5,4) & (5,6) & & \\ (6,1) & (6,3) & (6,5) & & & \end{array} \right\}$$

FG: 至少1個點數=1 且相加=5

$=\{(1,4)\,(4,1)\}$

EF^c: 相加點數為奇數,且不能出現點數1

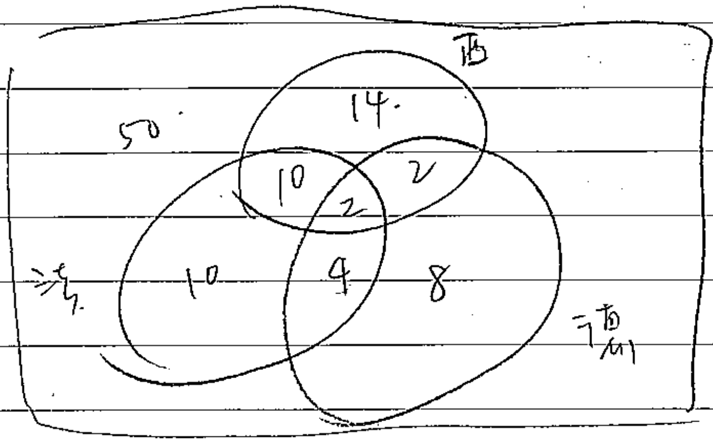
$$= \left\{ \begin{array}{lll} (2,3) & (2,5) & \\ (3,2) & (3,4) & (3,6) \\ (4,3) & (4,5) & \\ (5,2) & (5,4) & (5,6) \\ (6,3) & (6,5) & \end{array} \right\}$$

No.
Date : :

EFG: 相加點數=5且點數1奇1偶

$=\{(1,4)\,(4,1)\}$

#12 西/法/德文. 共100人



(a)

$P($皆沒修3門課$) = \frac{50}{100}$

(b)

$P($只修1門課$) = \frac{32}{100}$

(c)

$P($選2位學生,至少1位有修1門課$) = \frac{\underbrace{\binom{100}{2}}_{\text{全体}} - \underbrace{\binom{50}{2}}_{\text{都沒修}}}{\underbrace{\binom{100}{2}}_{\text{全体}}} = \frac{3725}{4950} = \frac{149}{198}$

Chuyu culture

#16 丟5個骰子

(a)

$$P(\text{沒有2個相同}) = \frac{\binom{6}{5}\frac{5!}{1!1!1!1!1!}}{6^5} \approx 0.0926$$

(大家都不同)

(b)

$$P(\text{有1組一樣}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}\frac{5!}{2!1!1!1!}}{6^5}$$

$$= \frac{15\times4\times60}{6^5} \approx 0.463$$

(c)

$$P(\text{2組配對}) = \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{2}\frac{5!}{2!2!1!}}{6^5} = \frac{20\times3\times30}{6^5}$$

$$\approx 0.2315$$

(d)

$$P(\text{3個1樣}) = \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{1}\frac{5!}{3!1!1!}}{6^5} = \frac{20\times3\times20}{6^5} \approx 0.1543$$

(e)

$$P(\text{full house}) = P(\text{葫蘆}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}\frac{5!}{3!2!}}{6^5} = \frac{15\times2\times10}{6^5} \approx 0.0386$$

(f)

$$P(\text{4個一樣}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}\frac{5!}{4!1!}}{6^5} = \frac{15\times2\times5}{6^5} \approx 0.0193$$

(g)

$$P(\text{5個都一樣}) = \frac{\binom{6}{1}\frac{5!}{5!}}{6^5} \approx 0.0008$$

No.
Date : :

#20 blackjack = 21點 (必拿 A 和 10, J, Q, K 三其中一張)

P(2個都沒拿到 21點)

let
A: 玩家拿到 21點事件
B: 莊家拿到 21點事件

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

2張A 2張10點

$$= 1 - \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}\frac{2!}{1!1!}}{52 \times 51} - \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}\frac{2!}{1!1!}}{52 \times 51} + \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}\frac{2!}{1!1!}\binom{3}{1}\binom{15}{1}\frac{2!}{1!1!}}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$$

≈ 0.9052

#25 丟2骰子直到點數和 5 or 7 出現 (同時)

let E_n: 點數和 5 出現在第 n 次且前面無點數和 5/7 發生

(第 n 次出現點數合 = 5)

$P(E_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$

(無點數合 5/7 發生)

A: 點數合 = 5
B: 點數合 = 7
C: 點數合 = 其他

$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36}$, $P(C) = \frac{26}{36}$

P(點數合 5在7出現)

$= P(E_1) + P(E_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

$= \frac{4}{36} + \frac{26}{36}\frac{4}{36} + \left(\frac{26}{36}\right)^2 \frac{4}{36} + \dots$

$= \frac{4}{36} \frac{1}{\left(1 - \frac{26}{36}\right)} = \frac{4}{10} = 0.4$

Chryu culture

35.

(a) $\dfrac{\binom{12}{3}\binom{16}{2}\binom{18}{2}}{\binom{46}{7}} = \dfrac{3060}{40549} \doteq 0.075$

(b) $1 - P(0 \text{ red is withdrawn}) - P(1 \text{ red is withdrawn})$

$= 1 - \underbrace{\dfrac{\binom{34}{7}}{\binom{46}{7}}}_{\text{從R中取0. B和G中取7.}} - \underbrace{\dfrac{\binom{12}{1}\binom{34}{6}}{\binom{46}{7}}}_{\text{從R中取1. B和G中取6.}}$

(c). $P(\text{全取紅}) + P(\text{全取綠}) + P(\text{全取藍})$

$= \dfrac{\binom{12}{7}}{\binom{46}{7}} + \dfrac{\binom{18}{7}}{\binom{46}{7}} + \dfrac{\binom{16}{7}}{\binom{46}{7}}$

(d) 令 A: exactly 3 red balls.

B: exactly 3 blue balls.

(p.3.) either ... or ... = 聯集.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \underbrace{\dfrac{\binom{12}{3}\binom{34}{4}}{\binom{46}{7}}}_{\text{從R中取3. B.G中取4.}} + \underbrace{\dfrac{\binom{16}{3}\binom{30}{4}}{\binom{46}{7}}}_{\text{從B中取3. R.G中取4.}} - \underbrace{\dfrac{\binom{12}{3}\binom{16}{3}\binom{18}{1}}{\binom{46}{7}}}_{\text{從R中取3. B中取3. G中取1}}$

40. 令甲.乙.丙.丁 4個住戶. A.B.C.D 4位工人.

$$P(i=1)=\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{\text{4戶都選到A}}\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{可以是選到A或B或C或D}}=\frac{1}{64}\ \#$$

$$P(i=2)=\frac{\binom{4}{2}(2^4-2)}{4^4}=\frac{21}{64}\ \#$$

想法: ① 2位工人被取到有 $\binom{4}{2}$ 種可能.

② 假設被取到的是 A和B →

甲	乙	丙	丁
A,B	A,B	A,B	A,B

$2\times2\times2\times2$.

故有 $(2^4-\underline{2})$ 種可能

↳ 取到 ~~AAAA~~ 或BBBB(只有1位工人被取).

$$P(i=3)=\frac{\binom{4}{3}\left(\frac{4!}{2!1!1!}\right)\binom{3}{1}}{4^4}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}\ \#$$

想法: ① 3位工人被取到有 $\binom{4}{3}$ 種可能

② 假設被取到是A.B.C且甲.乙.丙.丁各需有一位則必有一人重覆 e.g. AABC. 故有 $\frac{4!}{2!1!1!}$

③ 上述所說, 必有一人重覆 可為A或B或C重覆. 故 $\binom{3}{1}$

$$P(i=4)=\frac{4\times3\times2\times1}{4^4}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}\ \#$$

甲	乙	丙	丁
4種	3種	2種	1種

假設: 住戶們選到各工人的机率為 equally likely. 皆為 $\frac{1}{4}$

46. p(至少2人同月生日) $\geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1-p$(沒有人同月生日) $\geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1-\frac{P^{12}_n}{12^n} \geq \frac{1}{2}$ (P^{12}_n: 1^{st}人有12個月可以出生. 2^{nd}剩11個月. 3^{rd}剩10個月...).

$\Rightarrow \frac{P^{12}_n}{12^n} \leq \frac{1}{2}$.

當 $n=4$ 時. $\frac{P^{12}_4}{12^4} \doteqdot 0.573 > \frac{1}{2}$

$n=5$ 時. $\frac{P^{12}_5}{12^5} \doteqdot 0.38 \leq \frac{1}{2}$

故至少需5人

54. By inclusion-exclusion identity.

令 $\begin{cases} E_1: \text{手牌沒有黑桃} \\ E_2: \quad \text{''} \quad \text{紅心} \\ E_3: \quad \text{''} \quad \text{方塊} \\ E_4: \quad \text{''} \quad \text{梅花} \end{cases}$

題目翻譯: bridge hand is void in at least one suit (橋牌手牌(13張)中. 至少缺少一個花色)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} P(E_{i_1}E_{i_2}E_{i_3}) - P(E_1E_2E_3E_4).$$

$$= 4 \times \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{26}{0}\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} + \binom{4}{3}\frac{\binom{39}{0}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} - 0.$$

某一花色不取.其餘總共取13. 某2花色不取.其餘取13. 某3花色不取.其餘取13. 不可能4花色都不取.

(Note) $\frac{\binom{4}{1}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} = \sum_{i=1}^{4} P(E_i)$ 會重覆計算. e.g. $P(E_1)$ 會包含到同時沒有紅心的狀況. 而 $P(E_2)$ 也會包含到同時沒有黑桃的狀況. 故重覆

56. 想法：B是後位決策者，等A作決定後，B可選擇對自己有利的spinner.

Consider：

A選(a)：
- P(B選(b)且贏) = $\frac{4}{9}$ (*).
- P(B選(c)且贏) = $\frac{5}{9}$. (B選此).

A選(b)：
- P(B選(a)且贏) = $\frac{5}{9}$ (B選此).
- P(B選(c)且贏) = $\frac{4}{9}$.

A選(c)：
- P(B選(a)且贏) = $\frac{4}{9}$
- P(B選(b)且贏) = $\frac{5}{9}$ (B選此).

(*) $\boxed{\text{列舉法}}$

A選(a)	1	1	1	5	5	5	9	9	9
B選(b)	3	4	8	3	4	8	3	4	8
B贏	✓	✓	✓			✓			

⇒ 當A選(a)時 P(B選(b)且贏) = $\frac{4}{9}$ 故要當B#

Ans：無論A選何者，B都可選擇贏面較大的spinner,