

Proposta de modelo estocástico para minimização do máximo resíduo absoluto em redes de nivelamento

Stefano S Suraci^{*a}, Leonardo C Oliveira^a

^a Instituto Militar de Engenharia (IME) – Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

*stefanosampaio@hotmail.com, leonardo@ime.eb.br

ARTIGO ACEITO PARA PUBLICAÇÃO NA REVISTA MILITAR DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA (STATUS: AGUARDANDO PUBLICAÇÃO)

RESUMO: Em redes de nivelamento, os pesos das observações são geralmente dados pelo inverso do comprimento da respectiva seção. Esta abordagem é baseada em conjecturas de difícil garantia na prática dos levantamentos. Neste trabalho, um modelo estocástico alternativo que aproveita a característica de minimização do máximo resíduo absoluto do ajuste pela Minimização da Norma de Chebyshev com pesos unitários foi proposto para aplicação em redes sem outliers. Uma rede de nivelamento simulada sem outliers foi ajustada pelo Método dos Mínimos Quadrados com os modelos estocásticos usual e proposto. O ajustamento por Mínimos Quadrados com o modelo estocástico proposto apresentou menores resíduos absolutos máximo e mínimo. A média e o desvio padrão dos resíduos absolutos também foram menores. Além disso, ambos os conjuntos das precisões dos resíduos e dos parâmetros estimados obtiveram menor desvio padrão. Portanto, o método proposto parece promissor, pois forneceu resíduos absolutos menores e menos dispersos, e melhor homogeneidade de precisão dos parâmetros estimados.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo estocástico. Resíduo absoluto. Norma de Chebyshev. Rede de nivelamento.

ABSTRACT: In leveling networks, observation weights are usually given by the inverse of the length of the respective section. This approach is based on assumptions of difficult assurance in the practice of surveys. In this work, an alternative stochastic model that takes advantage of the maximum absolute residual minimization characteristic of the Chebyshev Norm Minimization adjustment with unitary weights was proposed for networks without outliers. A simulated leveling network with no outliers were adjusted by the Least Squares method with the usual and with the proposed stochastic model. Least Squares adjustment with the proposed stochastic model provided lower absolute maximum and minimum residuals. The mean and standard deviation of the absolute residuals were also lower. In addition, both sets of precision of residuals and of estimated parameters obtained lower standard deviation. Therefore, the proposed method seems promising, as it provided smaller and less dispersed absolute residuals, and better precision homogeneity of the estimated parameters.

KEYWORDS: Stochastic model. Absolute residual. Chebyshev norm. Leveling network.

1. INTRODUÇÃO

O ajustamento das observações de redes de nivelamento é normalmente realizado pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), que minimiza a soma dos quadrados dos elementos do vetor \mathbf{v} dos resíduos do ajustamento, ponderados pela matriz \mathbf{P} dos pesos das observações, sendo \mathbf{v}^T o vetor transposto de \mathbf{v} (Eq. 1). Seus resultados são os mais prováveis, sob a premissa de somente erros aleatórios normalmente distribuídos nas observações.

$$\text{MMQ: } \min(\mathbf{v}^T * \mathbf{P} * \mathbf{v}) \quad (1)$$

A teoria de propagação de covariâncias do ajustamento pelo MMQ é bem consolidada na literatura, sendo possível estimar suas matrizes de variância e covariância (MVC) dos resíduos $\mathbf{E}\mathbf{v}$ e dos parâmetros estimados $\mathbf{E}\mathbf{x}$. Maiores informações sobre o ajustamento pelo MMQ de redes geodésicas e sua respectiva teoria de propagação de covariâncias devem ser vistas em [1].

Os pesos das observações são usualmente dados pelo inverso do comprimento das respectivas seções de nivelamento. Porém, esta abordagem para o modelo estocástico do ajustamento, demonstrada matematicamente também por [1], é baseada em conjecturas de difícil garantia na prática dos levantamentos, como a utilização de

equipamentos com a mesma precisão e adoção da mesma distância em todas as visadas da rede.

Nos levantamentos de maiores dimensões, como de redes de nivelamento oficiais de países de grande área, é usual que várias seções sejam medidas simultaneamente, com diferentes precisões e condições de calibragem entre os diversos equipamentos. A versão mais atual da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Sistema Geodésico Brasileiro, por exemplo, possui cerca de 75.000 seções de nivelamento (observações) em seu ajustamento.

Quanto ao comprimento das visadas, no caso brasileiro [2] propõe que o comprimento dessas seja de 60 m. Entretanto, é de se esperar que, para parte das visadas de uma rede, isso seja inviabilizado no terreno, por exemplo, por relevo acidentado ou obstáculos naturais, como rios cruzando a linha de nivelamento. Assim, a própria legislação citada aceita que isto não seja estritamente seguido, desde que o comprimento da visada seja mantido num mesmo lance e não ultrapasse 100 m.

Por outro lado, o ajustamento pela Minimização da Norma de Chebyshev (MNC) envolve a minimização do máximo resíduo absoluto ponderado pelo peso da respectiva observação (Eq. 2), sendo \mathbf{p} o vetor dos pesos das observações (independentes), $|\mathbf{v}|$ o vetor dos resíduos absolutos, e a multiplicação entre eles elemento a elemento.

$$\text{MNC: } \min(\max(p \cdot |v|)) \quad (2)$$

Sem colocar pesos para as observações, ou seja, adotando-se pesos unitários para as mesmas, a MNC corresponde à minimização do Máximo Resíduo Absoluto (MRA) no ajustamento. A solução da MNC é usualmente feita por programação linear. Para maiores detalhes sobre o ajustamento pela MNC com pesos unitários e sua solução por programação linear, caso dessa pesquisa, indica-se [3].

No contexto das redes geodésicas, a MNC já foi aplicada por [4] para o caso de uma rede de nivelamento geométrico. Foi adotado o modelo estocástico usual que trata os pesos das observações como inversamente proporcionais ao comprimento das respectivas seções de nivelamento. Naquela obra, o autor sugere que o ajustamento pela MNC tem qualidade próxima à do MMQ.

Porém, diferentemente do MMQ, a MNC não possui uma respectiva teoria de propagação de covariâncias consolidada na literatura, essencial para uma análise acurada dos resultados do ajustamento de redes geodésicas. Assim, as matrizes **Ex** e **Ev** do ajustamento não foram avaliadas na obra mencionada.

Contudo, esse trabalho apresenta uma alternativa de modelo estocástico para ajustamento pelo MMQ de redes de nivelamento no qual os pesos das observações são adaptados iterativamente de forma a propiciar a minimização do MRA, calculado anteriormente via MNC com pesos unitários. Espera-se que isto contribua para a desejável diminuição do MRA do ajustamento, sem abrir mão de consagradas vantagens do MMQ, incluindo a possibilidade de aferição da precisão dos resultados do ajustamento via propagação de covariâncias.

Entretanto, o ajustamento pela MNC, assim como no caso do MMQ, não é robusto, tendendo a distribuir erros de *outliers* entre as demais observações, o que dificulta também sua aplicação na identificação dos mesmos [3]. Assim, como o modelo estocástico alternativo será construído a partir de resultados do ajustamento pela MNC, propõe-se que o mesmo seja aplicado em redes nas quais possíveis *outliers* já foram devidamente tratados.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

A rede simulada utilizada no experimento consta da Figura 1 e da Tabela 1. A altitude do ponto A foi considerada fixa (injunção fixa) e com valor $h_A=0$. Assim, trata-se de uma rede com 20 observações e 10 pontos de altitudes a determinar, ou seja, o número de graus de liberdade é 10. As observações foram simuladas com somente erros aleatórios (sem *outliers*), cenário em que a aplicação do modelo estocástico alternativo é proposta. O desvio padrão σ_i adotado para as observações nas simulações é dado pela Eq. 3, sendo K (em km) o comprimento da respectiva seção de nivelamento.

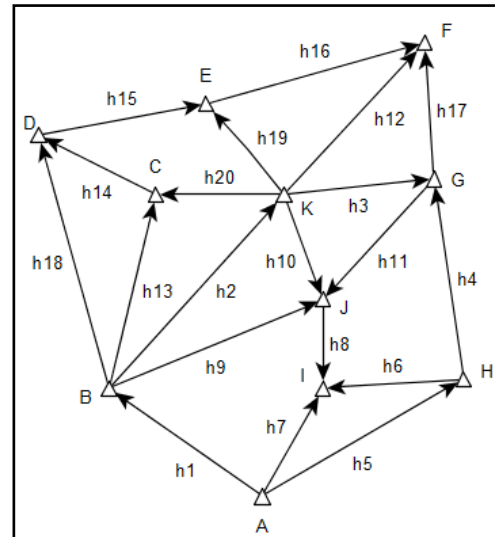


Fig. 1 – Geometria da rede simulada.

Tabela 1: Observações da rede simulada.

h_i	Comp. (km)	Valor (mm)	h_i	Comp. (km)	Valor (mm)
h_1	49	163836,2	h_{11}	62	110227,3
h_2	41	6441,5	h_{12}	49	155920,1
h_3	38	57046,3	h_{13}	35	52882,0
h_4	34	126213,0	h_{14}	43	62896,2
h_5	22	101126,5	h_{15}	20	3890,0
h_6	13	296883,3	h_{16}	28	42702,6
h_7	23	398012,4	h_{17}	19	98894,8
h_8	48	60452,9	h_{18}	39	115778,7
h_9	15	173717,0	h_{19}	27	113228,8
h_{10}	24	167266,0	h_{20}	21	46428,0

$$\sigma_i = 1,0(mm) * \sqrt{K_i} \quad (3)$$

O diagrama de atividades do método para construção do modelo estocástico alternativo proposto é apresentado na Fig.2. Inicialmente, a rede é ajustada pela MNC com pesos unitários para todas as observações, para que se compute o mínimo MRA da mesma. Em seguida, a rede é sucessivamente ajustada pelo MMQ. Na primeira iteração do MMQ, também são atribuídos pesos iguais para as observações, ou seja, a matriz dos pesos **P** deve ser igual à matriz identidade **I** de mesmas dimensões multiplicada por um escalar **k**, para o qual se adotará o valor do inverso do quadrado do MRA. Assim, assume-se que o MRA é uma estimativa inicial para os desvios padrão relativamente consonante com a real qualidade das observações.

Seja **i** o índice da *i-ésima* observação da rede. Nas iterações seguintes, o peso das observações com módulo do resíduo $|v_i|$ superior ao MRA (somado a um nível de tolerância cem vezes menor que a última casa decimal das observações da rede) é incrementado conforme Eq. 4, sendo **pn_i** o novo peso e **pa_i** o anterior. O procedimento se encerra quando o módulo de todos os resíduos da rede se tornar menor ou igual ao MRA calculado via MNC.

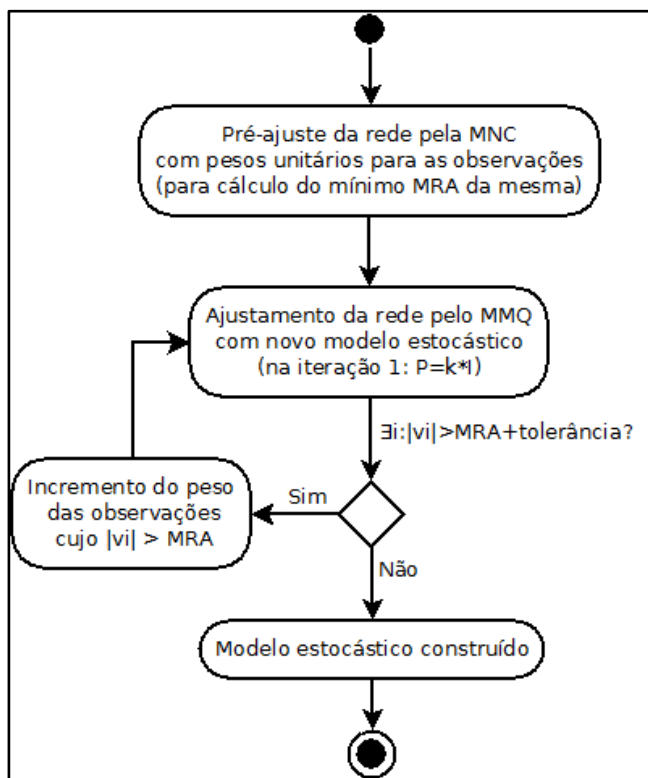


Fig. 2 – Diagrama de atividades da construção do modelo estocástico alternativo proposto.

$$pn_i = pa_i * \frac{|v_i|}{MRA} \quad (4)$$

Ao se iniciar com pesos iguais, deixa-se que a consistência interna do próprio conjunto de observações (sem a interferência de pesos usuais que podem estar mal dimensionados) desencadeie a construção do modelo estocástico a ser adotado. Em seguida, as adaptações iterativas dos pesos visam à obtenção de uma determinada característica no resultado do ajustamento, no caso, o MRA mínimo.

A desvantagem é que esta ponderação dificilmente reflete a realidade da rede. Neste caso o ajustamento das observações é obtido única e exclusivamente em função dos dados de campo e da configuração geométrica da rede, logo, os resultados obtidos não necessariamente conduzem a uma solução ótima, uma vez que o modelo estocástico foi simplificado.

Para avaliação, a rede de nivelamento foi ajustada pelo MMQ com o modelo estocástico usual (pesos pelo inverso do comprimento das seções) e com o modelo estocástico alternativo proposto construído pelo procedimento da Fig. 2. Nesse contexto, seja $|v|$ o vetor do valor absoluto dos resíduos, e S_x e S_v o das precisões dos parâmetros estimados e dos resíduos no ajustamento pelo MMQ, respectivamente. Essas precisões correspondem às raízes quadradas dos elementos da diagonal principal de E_x e E_v , respectivamente.

Foram comparadas a média, o desvio padrão, a máxima e a mínima magnitude, e a diferença entre essas duas últimas dos elementos dos vetores $|v|$ de cada um dos ajustamentos. A média e o desvio padrão dos elementos de

S_x e S_v também foram analisados. Os menores valores para cada uma dessas métricas foram considerados mais desejáveis para o ajustamento.

O experimento foi conduzido no software *Octave* [5] versão 4.4.1. A solução da MNC por programação linear foi feita pelo método *SIMPLEX*, com a formulação apresentada por [3] utilizando para tal a rotina *glpk* do mesmo software. O leitor pode contatar os autores para obter o código do experimento.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seguindo o procedimento da Fig. 2, o MRA calculado no ajustamento pela MNC para a rede foi de 7,00 mm. A Tabela 2 mostra o vetor dos resíduos v desse ajustamento. Nela se pode verificar também que 11 dos 20 resíduos absolutos obtiveram valor igual ao próprio MRA da rede. De fato, essa repetição de resíduos absolutos iguais ao MRA é uma propriedade do ajustamento pela MNC com pesos iguais. Maiores detalhes sobre tal propriedade podem ser vistas em [3].

Isso reforça a questão da deficiência de robustez da MNC, que dificulta sua aplicação antes do tratamento dos *outliers* da rede. Além de o possível *outlier* distribuir seu erro pelas outras observações, seu resíduo será igual ao de diversas outras “boas” observações, tornando inviável a sua identificação.

Tabela 2: Resíduos do ajustamento pela MNC.

v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)
v_1	1,50	v_6	2,60	v_{11}	-5,10	v_{16}	2,70
v_2	7,00	v_7	-7,00	v_{12}	7,00	v_{17}	-7,00
v_3	-7,00	v_8	4,80	v_{13}	-7,00	v_{18}	-5,40
v_4	-7,00	v_9	-7,00	v_{14}	2,10	v_{19}	-7,00
v_5	-7,00	v_{10}	-4,50	v_{15}	7,00	v_{20}	-1,50

Prosseguindo, o modelo estocástico alternativo proposto foi obtido após 26 iterações de ajustamento pelo MMQ. O peso inicial adotado para todas as observações foi de $2,04 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-2}$ (inverso do quadrado do MRA). Como as observações da rede analisada (em milímetros) possuem 1 casa decimal, a tolerância adotada na comparação dos resíduos absolutos com o MRA foi de 10^{-3} milímetros. A Tabela 3 mostra os pesos p_i construídos para as observações no modelo estocástico alternativo proposto. Vale notar que o peso inicial foi mantido para 17 das 20 observações.

Para comparação, a rede simulada foi ajustada pelo MMQ com o modelo estocástico usual (MEU) e com o modelo estocástico proposto (MEP). A Tabela 4 e a Tabela 5 listam os resíduos desses ajustamentos, respectivamente. Pode-se observar que somente duas observações (11 e 16)

apresentaram resíduos com sinais diferentes entre os ajustamentos.

Tabela 3: Pesos das observações no modelo proposto.

p_i	Valor (mm^{-2})	p_i	Valor (mm^{-2})	p_i	Valor (mm^{-2})	p_i	Valor (mm^{-2})
p_1	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_6	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{11}	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{16}	$2,04 \cdot 10^{-2}$
p_2	$2,32 \cdot 10^{-2}$	p_7	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{12}	$4,07 \cdot 10^{-2}$	p_{17}	$3,98 \cdot 10^{-2}$
p_3	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_8	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{13}	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{18}	$2,04 \cdot 10^{-2}$
p_4	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_9	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{14}	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{19}	$2,04 \cdot 10^{-2}$
p_5	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{10}	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{15}	$2,04 \cdot 10^{-2}$	p_{20}	$2,04 \cdot 10^{-2}$

Tabela 4: Resíduos do ajustamento pelo MMQ com o MEU.

v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)
v_1	6,64	v_6	1,56	v_{11}	-1,21	v_{16}	1,99
v_2	7,39	v_7	-2,05	v_{12}	10,42	v_{17}	-5,39
v_3	-5,20	v_8	-1,48	v_{13}	-1,73	v_{18}	2,57
v_4	-5,65	v_9	-0,92	v_{14}	4,80	v_{19}	-2,87
v_5	-1,02	v_{10}	1,20	v_{15}	3,55	v_{20}	3,38

Tabela 5: Resíduos do ajustamento pelo MMQ com o MEP.

v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)	v_i	Valor (mm)
v_1	5,86	v_6	3,18	v_{11}	0,25	v_{16}	-0,30
v_2	7,00	v_7	-2,64	v_{12}	7,00	v_{17}	-7,00
v_3	-7,00	v_8	-0,55	v_{13}	-1,36	v_{18}	0,91
v_4	-6,41	v_9	-1,64	v_{14}	2,77	v_{19}	-4,00
v_5	-3,22	v_{10}	0,85	v_{15}	3,69	v_{20}	4,14

A Tabela 6 compara os valores máximo, médio, mínimo, a diferença entre o máximo e o mínimo, e o desvio-padrão dos elementos de $|v|$ para os ajustamentos pelo MMQ com o MEU e com o MEP. Em destaque aparecem os valores mínimos dentre os ajustamentos para cada métrica analisada. Como era de se esperar, o ajustamento com modelo estocástico proposto apresentou MRA (máximo elemento de $|v|$) inferior, pois nele os pesos das observações foram construídos de forma a implicar isso.

Tabela 6: Comparação de estatísticas dos elementos de $|v|$ no ajustamento pelo MMQ com o MEU e com o MEP

Métrica comparada	MEU	MEP
Máximo ($ v $)	10,42 mm	7,00 mm
Média ($ v $)	3,55 mm	3,49 mm
Mínimo ($ v $)	0,92 mm	0,25 mm
Máximo ($ v $) – Mínimo ($ v $)	9,50 mm	6,75 mm
Desvio padrão ($ v $)	2,57 mm	2,47 mm

A média, o valor mínimo, o desvio padrão e o intervalo entre o valor máximo e o mínimo dos resíduos absolutos também foram diminuídos. Isso mostra que em média os

resíduos absolutos foram menores e menos dispersos, o que também pode ser considerado desejável.

Com fatores de variância *a posteriori* de 1,06 e 0,94 para o MMQ com o MEU e com o MEP, respectivamente, ambos os ajustamentos foram aprovados no Teste *Qui-Quadrado* bicaudal ao nível de significância de 5%.

A Tabela 7 apresenta a média e o desvio padrão dos elementos de S_v e S_x . O desvio padrão dos elementos dos vetores S_v e S_x foi menor que o equivalente com o MEU. Assim, o ajustamento pelo MMQ com o MEP gerou precisão dos resíduos e dos parâmetros estimados mais homogêneos que aqueles com o modelo usual. Em contraponto, os resultados do MMQ com o MEU apresentaram valor médio dos elementos de S_v e de S_x relativamente menores, apesar disso não significar que são necessariamente mais realistas.

Tabela 7: Comparação de estatísticas dos elementos de S_v e S_x no ajustamento pelo MMQ com o MEU e com o MEP

Métrica comparada	MEU	MEP
Média (S_v)	4,13 mm	4,65 mm
Desvio padrão (S_v)	1,36 mm	0,63 mm
Média (S_x)	5,15 mm	5,85 m
Desvio padrão (S_x)	0,91 mm	0,70 m

4. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, um modelo estocástico alternativo que aproveita a característica de minimização do MRA do ajustamento pela MNC com pesos iguais foi proposto para o ajustamento de redes de nivelamento pelo MMQ. Isso foi motivado pela difícil garantia das conjecturas do modelo estocástico usual na prática dos levantamentos. O modelo usual adota pesos pelo inverso do comprimento das respectivas seções de nivelamento.

Apesar do modelo proposto provavelmente também não refletir a realidade da rede, ele ocasionou resultados no mínimo interessantes, que podem ser considerados desejáveis, quando aplicado no ajustamento pelo MMQ de uma rede de nivelamento simulada. Como a MNC não é robusta e o modelo estocástico alternativo é construído a partir de resultados do ajustamento pela MNC, propõe-se que o mesmo seja aplicado em redes nas quais possíveis *outliers* já foram devidamente tratados.

O ajustamento pelo MMQ com o modelo estocástico proposto obteve sucesso em implicar na minimização do MRA em relação ao MMQ com o modelo usual. Além disso, houve uma diminuição no valor médio, no valor mínimo e no desvio padrão dos resíduos absolutos, e também na diferença entre o máximo e o mínimo resíduo absoluto. Ou seja, além de menores (em módulo) em geral, os resíduos tiveram uma menor dispersão.

Da análise da propagação de covariâncias no ajustamento pelo MMQ, o modelo proposto gerou precisão dos resíduos e dos parâmetros estimados com menor desvio padrão em relação àqueles do MMQ com pesos usuais. Isso pode ser aproveitado para implantação de redes de nivelamento com qualidade mais homogênea entre seus vértices.

O modelo estocástico proposto foi aplicado a uma rede de nivelamento, mas pode ser testado em outros tipos de redes geodésicas e no ajustamento de observações em geral, nas diversas áreas do conhecimento. Ademais, o método para construção do modelo utilizou em uma de suas etapas a MNC, um método de ajustamento das observações ainda pouco explorado na literatura geodésica. Em trabalhos futuros, outras possíveis aplicações da MNC no ajustamento de redes geodésicas podem ser investigadas.

Sugere-se ainda que modelos estocásticos que impliquem em outras possíveis características (além do MRA mínimo visto) para os resultados do ajustamento sejam propostos. Pode-se buscar a minimização da média dos resíduos e da precisão dos parâmetros estimados, por exemplo, em trabalhos futuros.

Referências

- [1] Ghilani, C.D.; Adjustment Computations, 5th ed., John Wiley & Sons: Hoboken, EUA, 2010.
- [2] IBGE; Especificações e Normas Gerais para Levantamentos Geodésicos em território brasileiro, Brasil, 1983.
- [3] Abdelmalek, N.N.; Malek, W.A.; Numerical linear approximation in C, CRC Press: Londres, Reino Unido, 2008.
- [4] Ebong, M.B.; The Chebyshev adjustment of a geodetic leveling network; Survey Review, **1986**, 28, 220.
- [5] GNU; GNU Octave; <https://www.gnu.org/software/octave/>, acessada em outubro de 2018.