Optimisation
Programmation linéaire

hepia HES-SO

Paul Albuquerque

Michel Vinckenbosch

Guido Bologna

Plan

- Exemples 2D
- Exemples de dimensionnalité supérieure
- Méthode du «tableau»
- Problème auxiliaire
- Problème dual

Exemple de problème

RESSOURCES			
PRODUIT	Travail (hr/unité)	Argile (Kg/unité)	Revenu (CHF/unité)
Bol	1	4	40
Tasse	2	3	50

On dispose de 40 heures de travail et de120 kilos d'argile par jour

Variables décisionnelles :

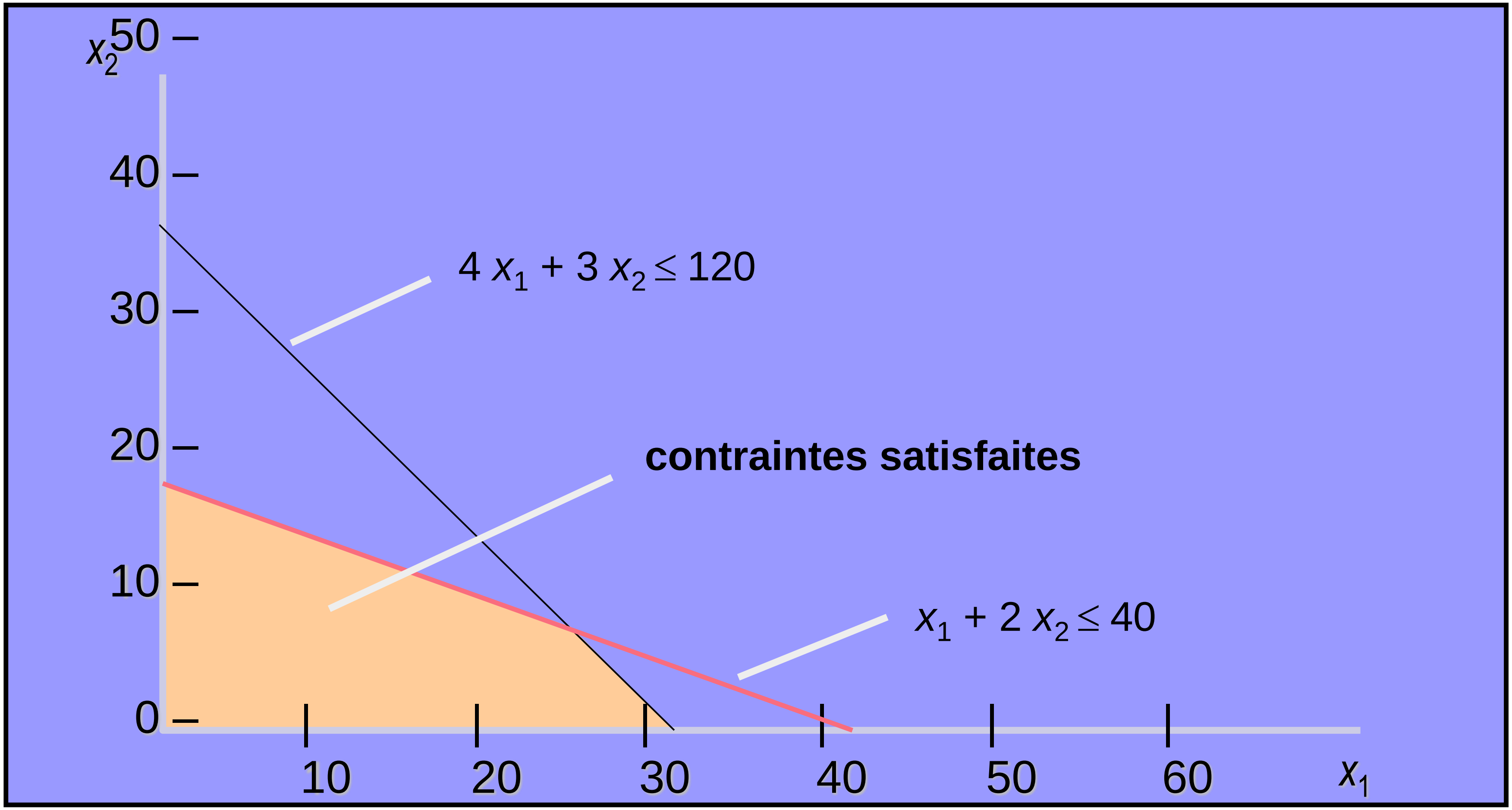
x_1 = nombre de bols à produire

x_2 = nombre de tasses à produire

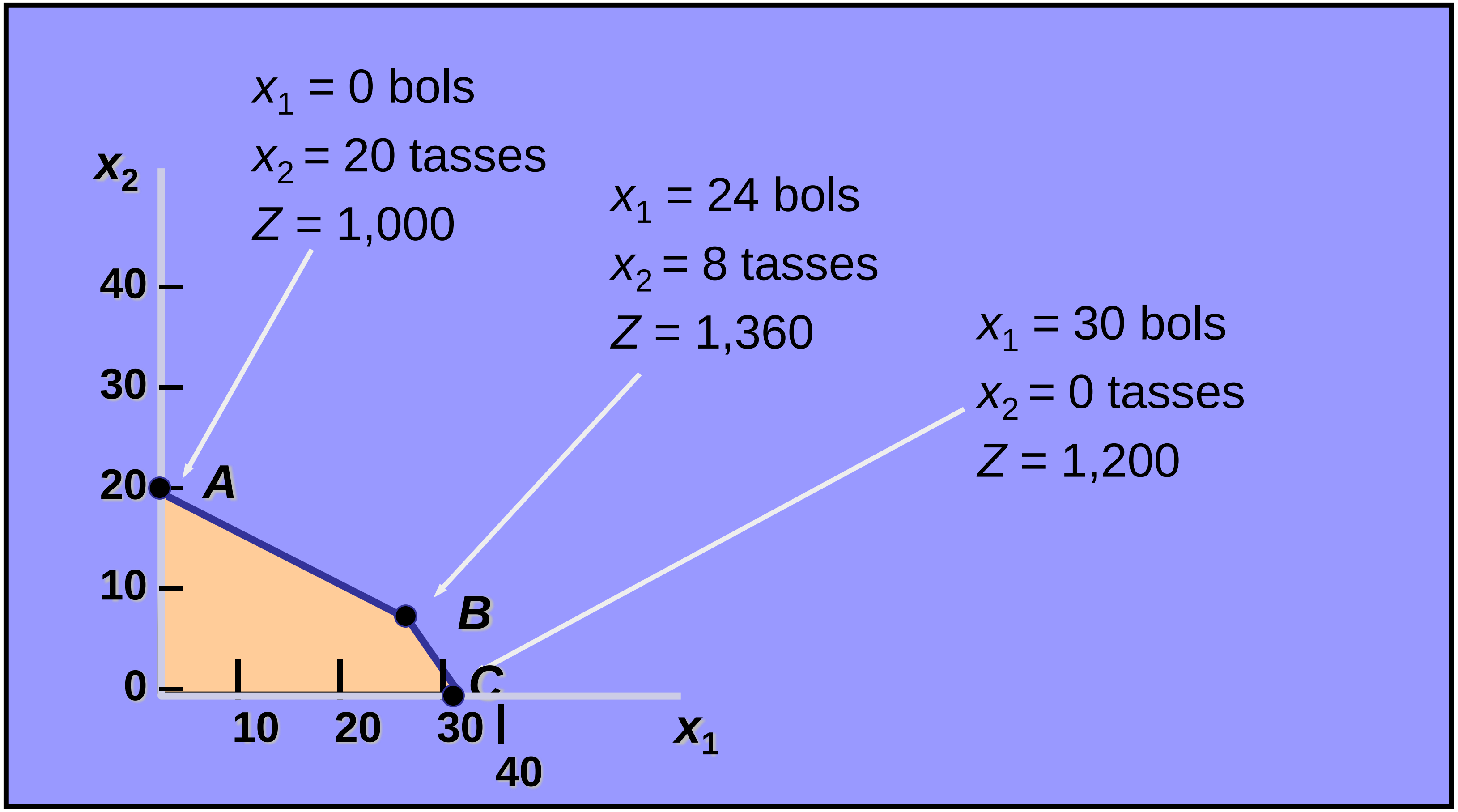
Exemple de problème

- Maximiser $Z = 40\ x_1 + 50\ x_2$
- Sous contraintes :
- $x_1 + 2x_2 \leq 40$ (travail)
- $4x_1 + 3x_2 \leq 120$ (argile)
- $x_1, x_2 \geq 0$
- La solution est x_1 = 24 bols et x_2 = 8 tasses
- Revenu = 1360

Représentation graphique



Résolution graphique



Example 2

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 5x_1 + 7x_2 \\
\text{s.c.} \quad & x_1 \leq 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 \geq 0 \text{ and } x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

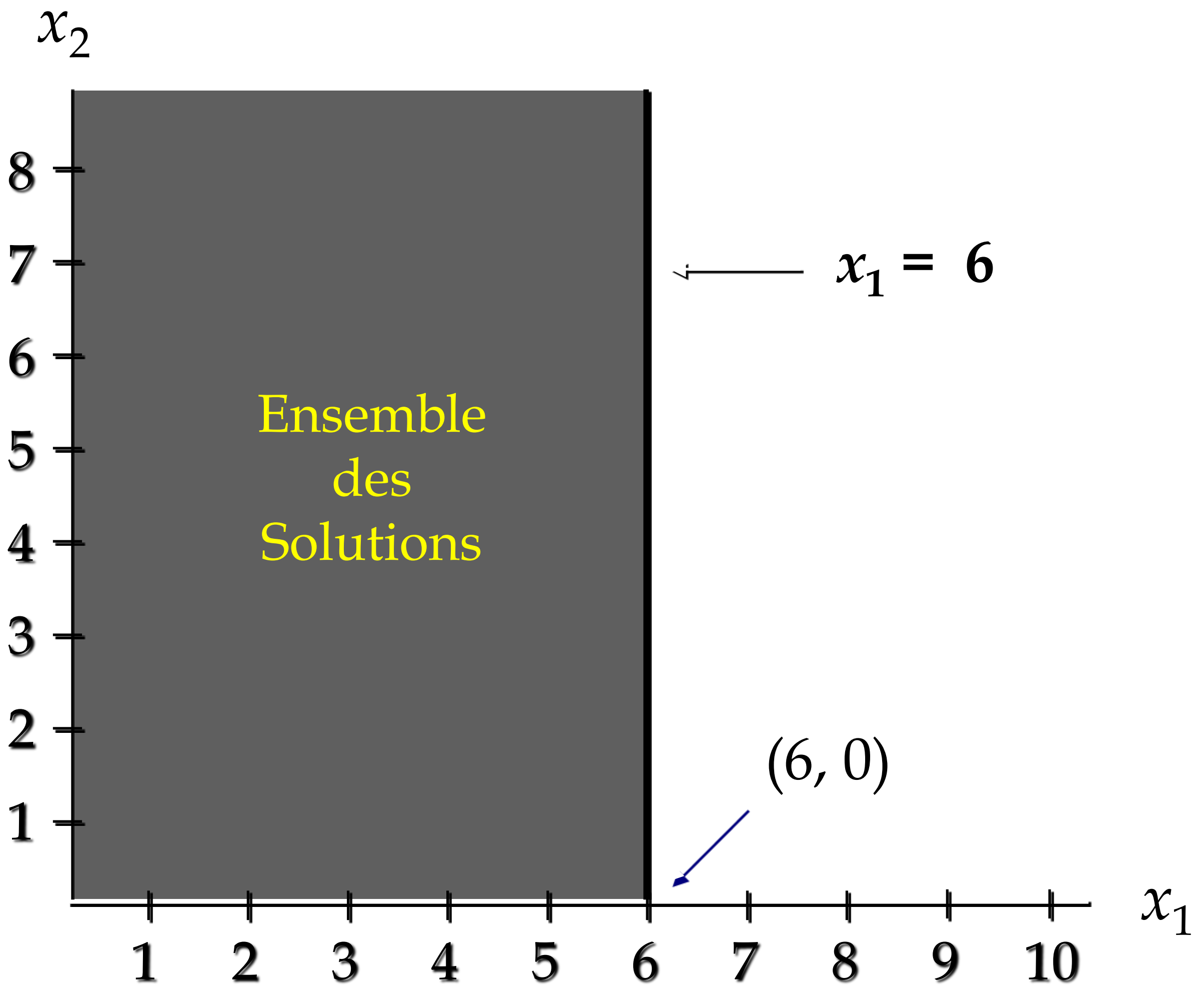
Fonction objectif

Contraintes

Contraintes Non-négatives

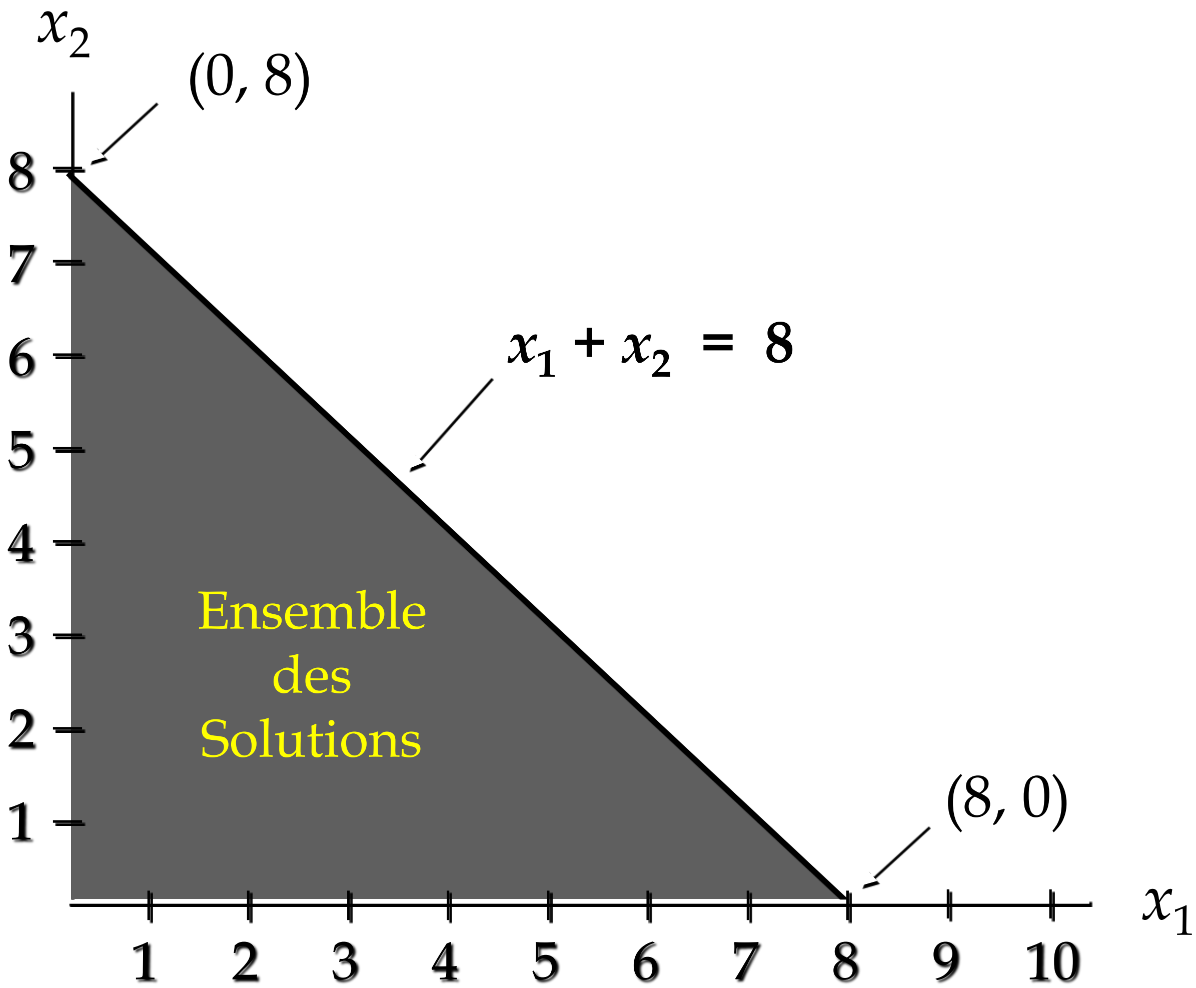
Example 2

- Première contrainte



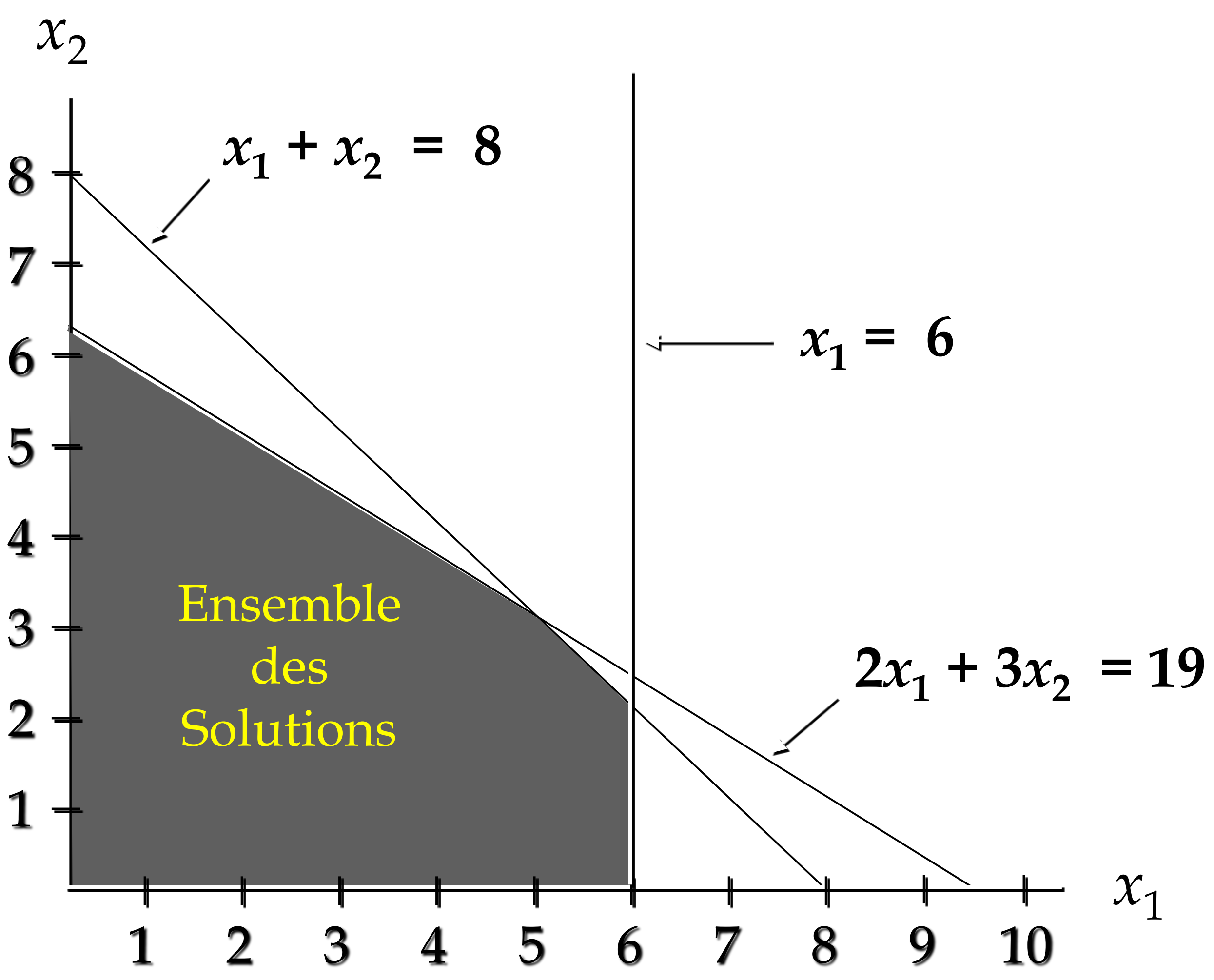
Example 2

- Deuxième contrainte



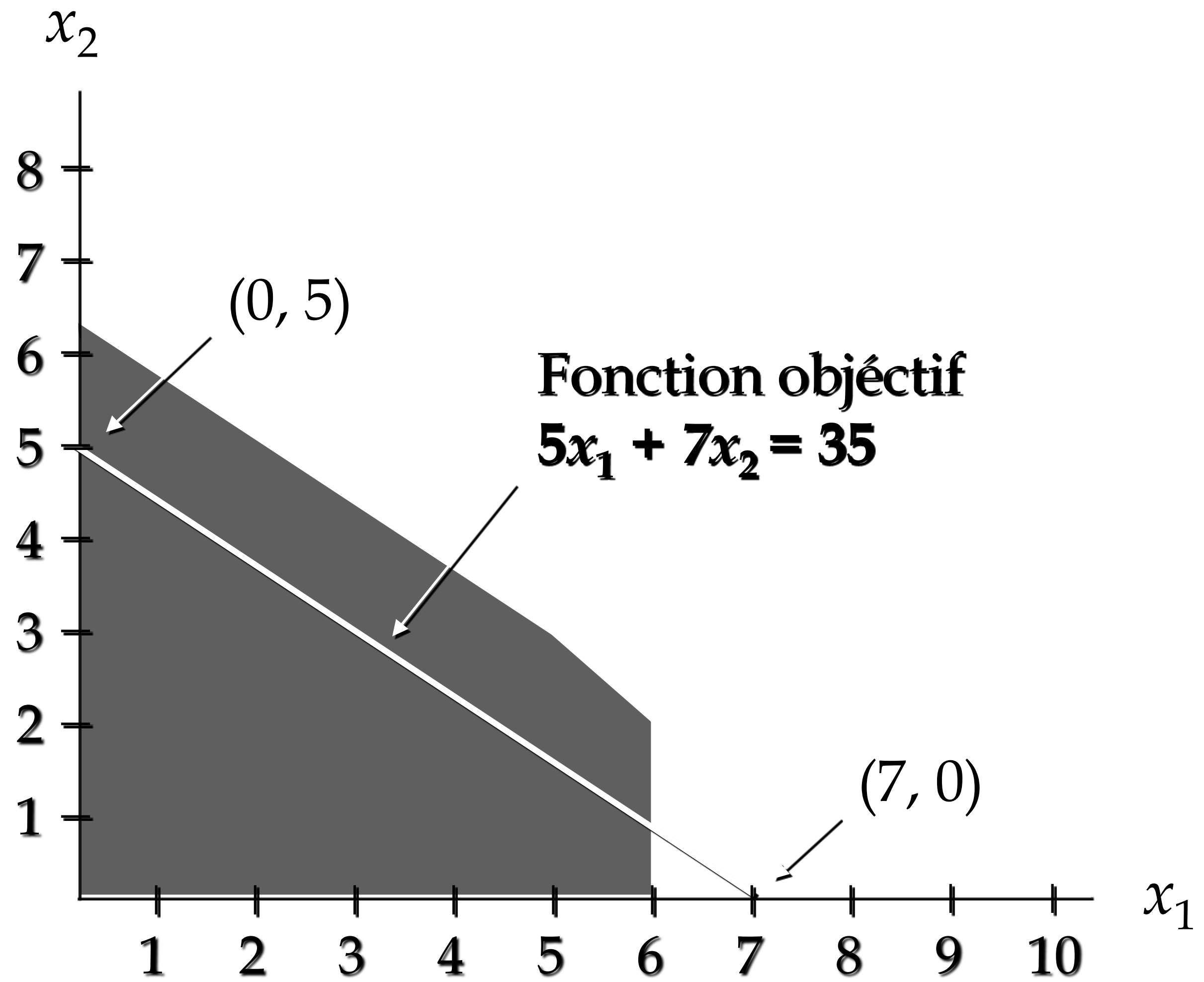
Example 2

- Combinaison de trois contraintes



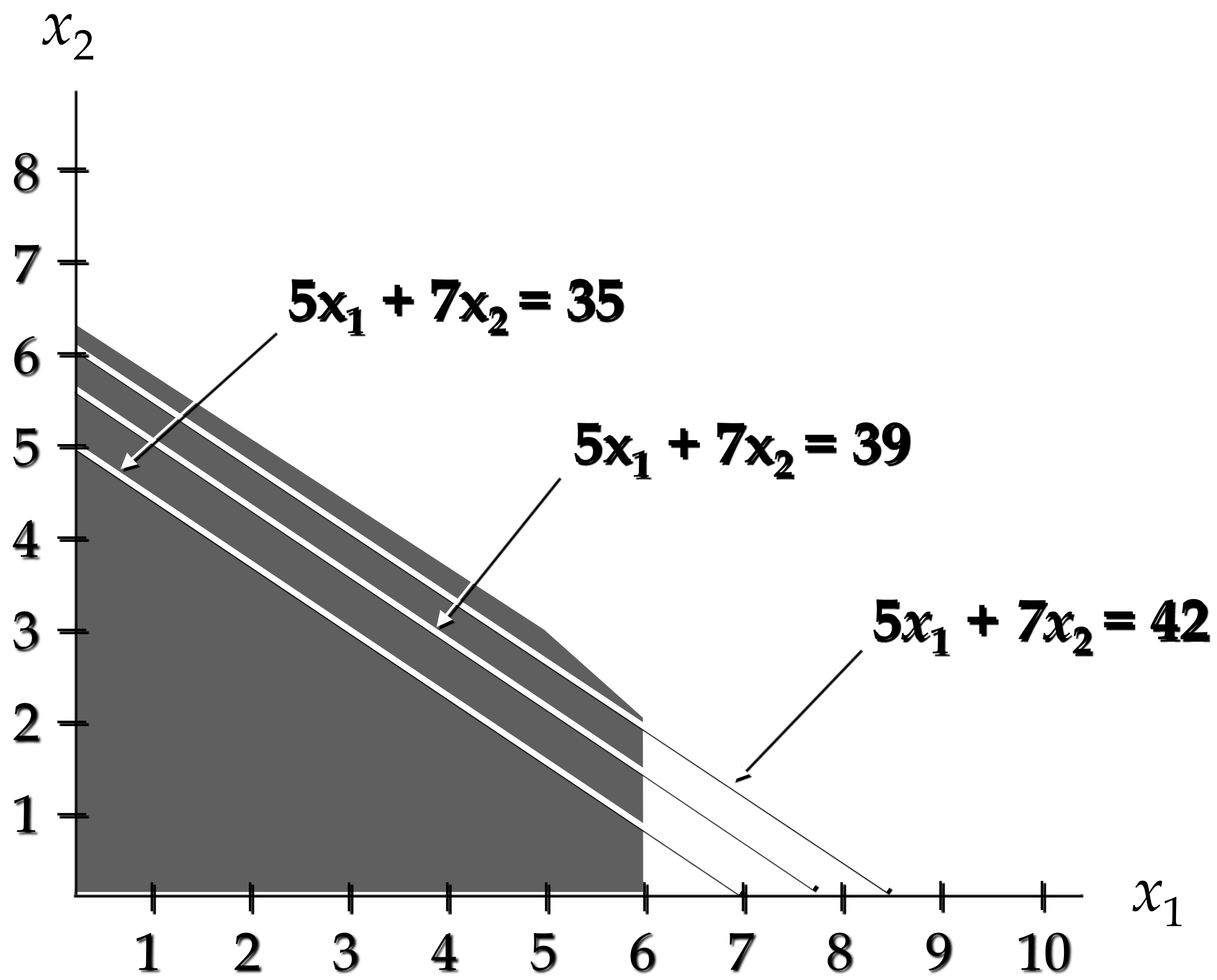
Example 2

- Fonction objéctif



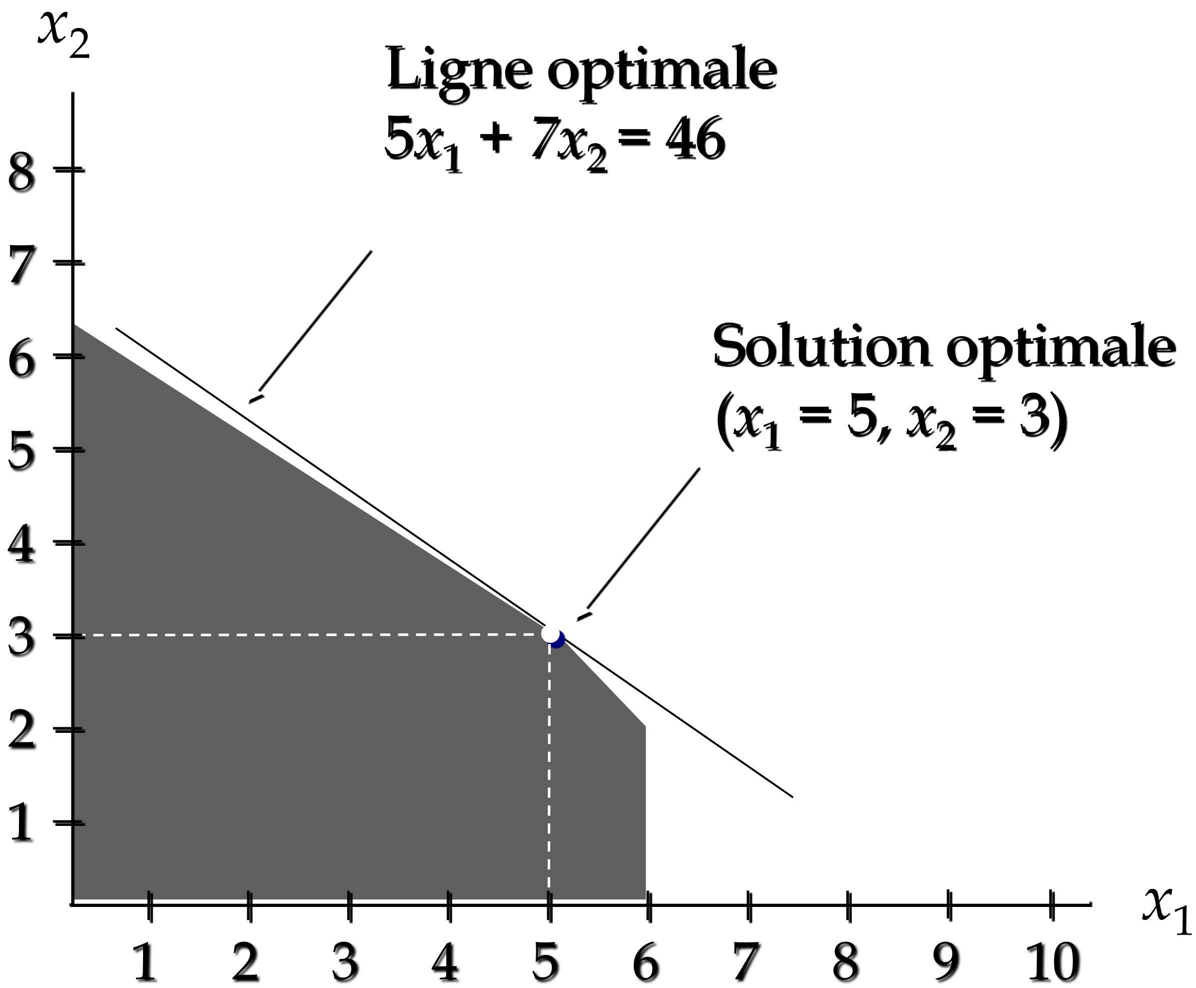
Example 2

- Fonction objéctif avec différentes valeurs de ctes



Example 2

- Solution Optimale



Polyèdres

- Hyperplan = ensemble de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - d = 0$
  - Exemples
    - dimension 2 : une droite
    - dimension 3 : un plan
    - dimension 4 : un sous-espace de dimension n
- Polyèdre = espace fini délimité par des hyperplans

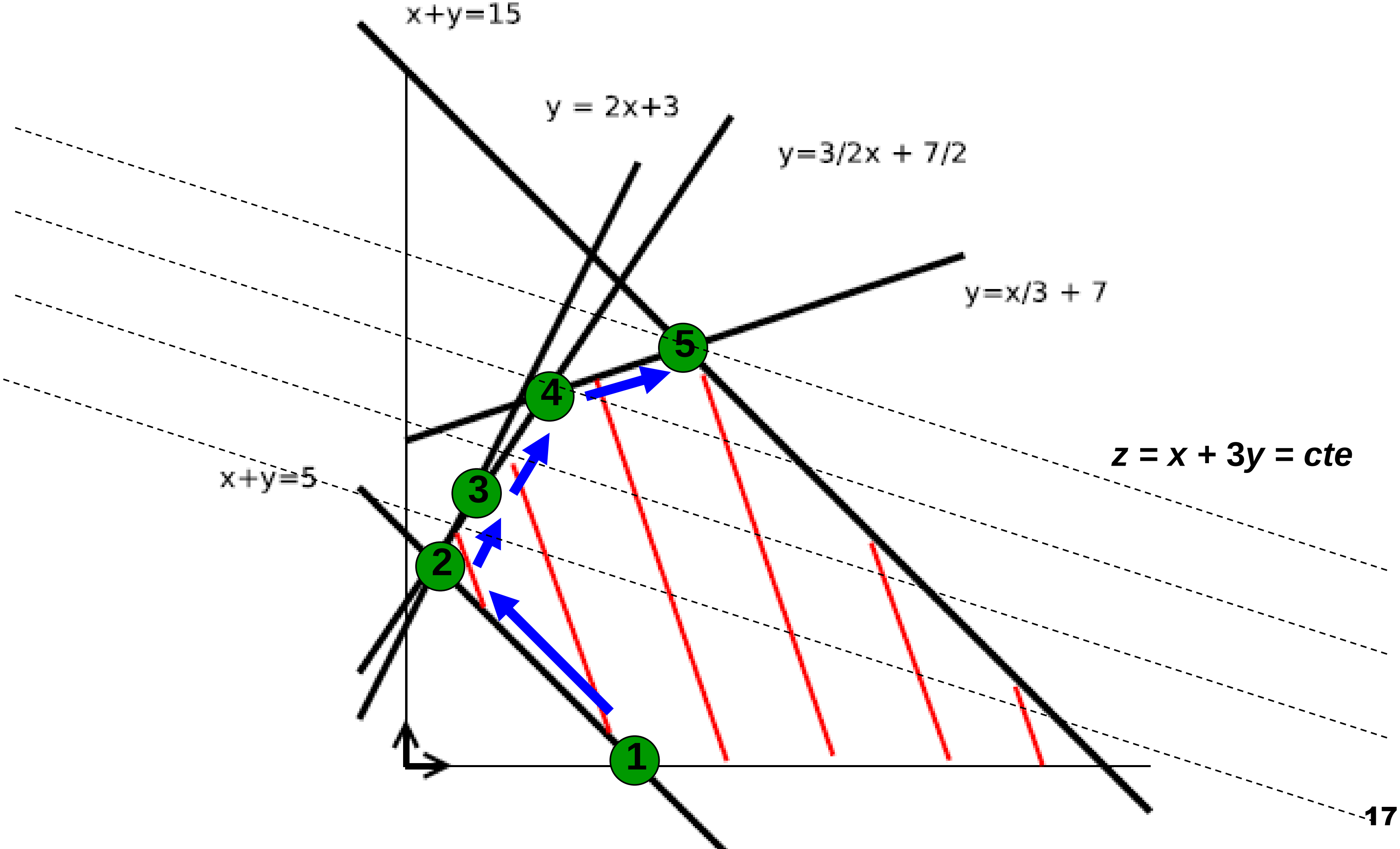
Polyèdres

- Correspondance algébrique ↔ géométrique
  - Nombre de variables ↔ dimension de l’espace
  - Contraintes ↔ hyperplans
  - Solution ↔ tout point à l’intérieur du polyèdre
  - Fonction objectif ↔ vecteur (coeffs. de la fonct.)

Algorithme simple

- Énumérer tous les sommets du polyèdre et choisir le meilleur d'entre eux
- Difficulté
  - m contraintes et n variables ≥ 0
  - $(m+n)!/(m!n!)$ points d'intersections de n hyperplans
    - $n = 15$, $m = 10 \Rightarrow (m+n)!/(m!n!) = 3.3 \cdot 10^6$
  - quels points d'intersections sont des sommets du polyèdre (i.e. satisfont les contraintes)?
  - quel sommet maximise l'objectif?

Algorithme du simplexe (linéaire)



Algorithme du simplexe

- Principe
  - Initialisation sur un sommet *s*
  - Répéter
    - Sélection du sommet voisin de *s* qui augmente le plus la fonction objectif

    Tant que la fonction objectif croît strictement
- Existence d’une solution optimale
  - Si les contraintes délimitent un **polyèdre** $\neq \varnothing$, alors il existe une solution optimale sur **un de ses sommets**

Algorithme du simplexe

- Maximiser $z = 5x_1 + \frac{13}{2}x_2 + 8x_3 + 9x_4$
- Sous contraintes

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 &\leq 240 \\
12x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 &\leq 150 \\
0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 &\leq 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Forme augmentée

- Introduction de variables d'écart e_i

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 + e_1 &= 240 \\
12x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 + e_2 &= 150 \\
0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + e_3 &= 2 \\
e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Résolution

- Maximiser $z = 5x_1 + \frac{13}{2}x_2 + 8x_3 + 9x_4$
- Sous contraintes

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 240 - 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 9x_4 \\
e_2 &= 150 - 12x_1 - 15x_2 - 9x_3 - 12x_4 \\
e_3 &= 2 - 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 \\
& e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Terminologie : e_i variables **de base** (ou liées)
  x_i variables **hors base** (ou libres)

Résolution: solution initiale

- Maximiser $z = 5x_1 + \frac{13}{2}x_2 + 8x_3 + 9x_4$
- Sous contraintes

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 240 - 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 9x_4 \\
e_2 &= 150 - 12x_1 - 15x_2 - 9x_3 - 12x_4 \\
e_3 &= 2 - 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 \\
& e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Solution initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$
- Valeur initiale : $z = 0$ (à améliorer)

Résolution: première itération

- Choix de la variable faisant augmenter
  $z = 5x_1 + \frac{13}{2}x_2 + 8x_3 + 9x_4$
- max(5, 13/2, 8, 9) = 9
- x_4 donne le plus fort accroissement de z
- x_4 est appelée variable **entrante**

Résolution: première itération

- Augmenter x_4 tant qu'aucune contrainte n'est violée, i.e. jusqu'à $e_i = 0$ pour un i

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 240 - 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 9x_4 \\
e_2 &= 150 - 12x_1 - 15x_2 - 9x_3 - 12x_4 \\
e_3 &= 2 - 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 \\
& e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Résolution: première itération

- En partant de la solution $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ augmenter x_4 jusqu'à $e_i = 0$ pour un i

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 240 - 3 \bullet 0 - 6 \bullet 0 - 3 \bullet 0 - 9x_4 \\
e_2 &= 150 - 12 \bullet 0 - 15 \bullet 0 - 9 \bullet 0 - 12x_4 \\
e_3 &= 2 - 0.1 \bullet 0 - 0.1 \bullet 0 - 0.1 \bullet 0 - 0.1x_4
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
e_1 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 240/9 \\
e_2 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 150/12 \\
e_3 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 2/0.1
\end{array}
\right\} \Rightarrow \min(240/9,\ 150/12,\ 2/0.1) = 150/12
$$

Résolution: première itération

- En prenant $x_4 = 150/12$, on a : $e_2 = 0$
- e_2 est appelée variable **sortante**
- À cette étape, on dit que x_4 entre dans la base et e_2 sort de la base
- x_4 devient une variable de base

  e_2 - - - hors base

Résolution: première itération

- On exprime x_4 en fonction de e_2

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 240 - 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 9x_4 \\
x_4 &= 25/2 - x_1 - 5/4x_2 - 3/4x_3 - 1/12e_2 \\
e_3 &= 2 - 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 \\
&e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Puis on remplace x_4 dans les autres équations et dans la fonction objectif

Résolution: seconde itération

- On obtient

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 255/2 + 6x_1 + 21/4x_2 + 15/4x_3 + 3/4e_2 \\
x_4 &= 25/2 - x_1 - 5/4x_2 - 3/4x_3 - 1/12e_2 \\
e_3 &= 3/4 + 1/40x_2 - 1/40x_3 + 1/120e_2
\end{aligned}
$$

$$
z = 225/2 - 4x_1 - 19/4x_2 + 5/4x_3 - 3/4e_2
$$

- Variables de base : e_1, x_4, e_3

  - hors base : x_1, x_2, x_3 ,e_2

Résolution: seconde itération

- Choix de la variable entrante
  - $z = 225/2 – 4x_1 – 19/4x_2 + 5/4x_3 – 3/4e_2$
  - max(-4, -19/4, 5/4, -3/4) = 5/4
  - x_3 donne le plus fort accroissement de z
  - x_3 est la variable entrante

Résolution: seconde itération

- En partant de la solution $x_1 = x_2 = x_3 = e_2 = 0$ augmenter x_3 jusqu'à e_1, x_4 ou $e_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 255/2 + 6 \cdot 0 + 21/4 \cdot 0 + 15/4 x_3 + 3/4 \cdot 0 \\
x_4 &= 25/2 - 0 - 5/4 \cdot 0 - 3/4 x_3 - 1/12 \cdot 0 \\
e_3 &= 3/4 + 1/40 \cdot 0 - 1/40 x_3 + 1/120 \cdot 0
\end{aligned}
$$

- $e_1 \geq 0 \Rightarrow$ indép. de x_3
- $x_4 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 50/3$
- $e_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 30$

$\Rightarrow \min(50/3, 30) = 50/3$

Résolution: seconde itération

- En prenant $x_3 = 50/3$, on a : $x_4 = 0$
- x_4 est la variable sortante
- x_3 devient une variable de base

  x_4 - - - hors base
- On remplace ensuite

  $$x_3 = 50/3 - 4/3\, x_1 - 5/3\, x_2 - x_4 - 1/9\, e_2$$

  dans les équations pour e_1, e_3, z

Résolution: seconde itération

- On obtient

$e_1 = 190 + x_1 - x_2 + 5x_4 + 1/3e_2$
$x_3 = 50/3 - 4/3x_1 - 5/3x_2 - 4/3x_4 - 1/9e_2$
$e_3 = 1/3 - \ 1/30x_4 + 1/15x_2 - 1/30x_4 + 1/90e_2$

$z \ \ = 400/3 - 17/3x_1 - 41/6x_2 - 5/3x_4 - 8/9e_2$

- Variables de base : e_1, x_3, e_3

  \- hors base : x_1, x_2, x_4, e_2

Terminaison de l'algorithme

- Choix de la variable entrante
  - $z = 400/3 - 17/3x_1 - 41/6x_2 - 5/3x_4 - 8/9e_2$
  - $\max(-17/3, -41/6, -5/3, -8/9) \leq 0$
  - Impossible d'augmenter z
  - L'optimum est atteint en $x_1 = x_2 = x_4 = e_2 = 0$ et vaut 400/3

    Les équations pour e_1, x_3, e_3 donnent

    $e_1 = 190$, $x_3 = 50/3$, $e_3 = 1/3$

Algorithme du simplexe

- Remarques
  - Initialisation
    - Quelle solution de départ? L'origine?
  - Itération
    - Une stagnation est-elle possible?
  - Terminaison
    - L'algorithme se termine-t-il toujours?

Résolution avec tableaux

- Maximiser

$$5x_1 + 6.5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = z$$

- Sous contraintes

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 + e_1 &= 240 \\ 12x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 + e_2 &= 150 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + e_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Résolution avec tableaux

- Nouvelle représentation

variables hors base — variables de base

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	
3	6	3	9	1	0	0	240
12	15	9	12	0	1	0	150
0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	1	2
5	6,5	8	9	0	0	0	Z

Résolution avec tableaux

- Itération 1: choix de la variable entrante

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	
3	6	3	9	1	0	0	240
12	15	9	12	0	1	0	150
0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	1	2
5	6,5	8	9	0	0	0	Z

- x_4 entre dans la base

Résolution avec tableaux

- Itération 1: choix de la variable sortante

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	
3	6	3	9	1	0	0	240
12	15	9	12	0	1	0	150
0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	1	2
5	6,5	8	9	0	0	0	Z

- min(240/9, 150/12, 2/0.1) $\Rightarrow$ e_2 sort de la base

Résolution avec tableaux

- Itération 1: x_4 rentre et e_2 sort de la base

  $\Rightarrow$ on échange les colonnes de x_4 et e_2

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{variables hors base}}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{variables de base}}$$

x_1	x_2	x_3	e_2	e_1	x_4	e_3	
3	6	3	0	1	9	0	240
12	15	9	1	0	12	0	150
0,1	0,1	0,1	0	0	0,1	1	2
5	6,5	8	0	0	9	0	Z

Résolution avec tableaux

- Itération 1: reconstruction de la matrice identité
  - on normalise la seconde ligne par 12

x_1	x_2	x_3	e_2	e_1	x_4	e_3	
3	6	3	0	1	9	0	240
1	$\frac{15}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	1	0	$\frac{150}{12}$
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	1	0	$\frac{25}{2}$
$0,1$	$0,1$	$0,1$	0	0	$0,1$	1	2
5	$6,5$	8	0	0	9	0	Z

  - puis on l'utilise comme **pivot** pour éliminer x_4 des autres lignes

Résolution avec tableaux

- À la fin de la première itération

x_1	x_2	x_3	e_2	e_1	x_4	e_3	
-6	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{255}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	1	0	$\frac{25}{2}$
0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{120}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$
5	$6,5$	8	0	0	9	0	Z

Résolution avec tableaux

- Itération 2 : choix de la variable entrante

x_1	x_2	x_3	e_2	e_1	x_4	e_3	
-6	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{255}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	1	0	$\frac{25}{2}$
0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{120}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$
-4	$-\frac{19}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$Z-\frac{225}{2}$

- x_3 entre dans la base

Résolution avec tableaux

- Itération 2 : choix de la variable sortante

x_1	x_2	x_3	e_2	e_1	x_4	e_3	
-6	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{255}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	1	0	$\frac{25}{2}$
0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{120}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$
-4	$-\frac{19}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$Z-\frac{225}{2}$

- min(50/3, 30) $\Rightarrow x_4$ sort de la base

Résolution avec tableaux

- Itération 2 : x_3 rentre et x_4 sort de la base

  $\Rightarrow$ on échange les colonnes de x_3 et x_4

variables hors base				variables de base			
x_1	x_2	x_4	e_2	e_1	x_3	e_3	
-6	$-\frac{21}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{15}{4}$	0	$\frac{255}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
0	$-\frac{1}{40}$	0	$-\frac{1}{120}$	0	$\frac{1}{40}$	1	$\frac{3}{4}$
-4	$-\frac{19}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$Z-\frac{225}{2}$

Résolution avec tableaux

- Itération 2 : reconstruction de la matrice identité
  - on normalise la seconde ligne par 3/4
  - puis on supprime x_3 des autres lignes

x_1	x_2	x_4	e_2	e_1	x_3	e_3	
-1	1	5	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	190
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$	0	1	0	$\frac{50}{3}$
$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{90}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$
$-\frac{17}{3}$	$-\frac{41}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{9}$	0	0	0	$Z-\frac{400}{3}$

  - Coefficients dans z tous $\leq 0 \Rightarrow$ on a terminé

Principes généraux

- Mise sous forme normale
- Itération
  - Choix d’un pivot qui accroît la fonction objectif
  - Détection d’un optimum ou de l’infaisabilité
- Problèmes possibles
  - Solution non-bornée
  - Infaisabilité
  - Cycles
  - Solution initiale

Difficultés du simplexe

- Itération
  - Peut-on toujours itérer vers l’optimum?
- Terminaison
  - Les itérations se terminent-elles toujours?
- Initialisation
  - Peut-on toujours trouver une solution initiale?

Solution non-bornée

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 5 + 2x_3 - x_4 - 3x_1 \\
x_5 &= 7 - 3x_4 - 4x_1 \\
\hline
z &= 5 + x_3 - x_4 - x_1
\end{aligned}
$$

x_3 entre dans la base

Pas de borne supérieure sur x_3: $x_3 \geq -5/2$

Valeur de z arbitrairement grande !

Pas de solution optimale

Forme matricielle

- Maximiser $z = c^t x$
  sous contraintes

  $$Ax \leq b$$

  $$x \geq 0$$

- Si b $\geq$ 0, alors l'origine est une solution admissible, sinon elle n'appartient pas au simplexe

Initialisation

$$\text{Maximiser } z = x_1 - x_2 + x_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\le -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\le -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

- L'origine n'est pas une solution admissible
- But: construire une solution admissible

Initialisation: problème auxiliaire

Maximiser $w = -x_0$

sous contraintes

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \leq -5$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \leq -1$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Initialisation

$$
\begin{array}{llllll}
x_4 = & 4 & -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_0 \\
x_5 = & -5 & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_0 \\
x_6 = & -1 & +x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_0 \\
\hline
w = & & & & & -x_0
\end{array}
$$

- Démarrage normale du simplexe impossible!
- Pivot: x_0 entre et x_5 sort car min(4,-5,-1) = -5

Initialisation

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 = & 5 & +2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_5 \\
x_4 = & 9 & & -2x_2 & -x_3 & +x_5 \\
x_6 = & 4 & +3x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +x_5 \\
\hline
w = & -5 & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_5
\end{array}
$$

- Itérations normales du simplexe
- Pivot: x_2 entre et x_6 sort

Initialisation

$$
\begin{array}{llllll}
x_2 = & 1 & +0.75x_1 & +0.75x_3 & +0.25x_5 & -0.25x_6 \\
x_0 = & 2 & -0.25x_1 & -1.25x_3 & +0.25x_5 & +0.75x_6 \\
x_4 = & 7 & -1.5x_1 & -2.5x_3 & +0.5x_5 & +0.5x_6 \\
\hline
w = & -2 & +0.25x_1 & +1.25x_3 & -0.25x_5 & -0.75x_6
\end{array}
$$

- Pivot: x_3 entre et x_0 sort

Initialisation

$$
\begin{array}{lllllll}
x_3 = & 1.6 & -0.2x_1 & +0.2x_5 & +0.6x_6 & -0.8x_0 \\
x_2 = & 2.2 & +0.6x_1 & +0.4x_5 & +0.2x_6 & -0.6x_0 \\
x_4 = & 3 & -x_1 & & -x_6 & +2x_0 \\
\hline
w = & & & & & -x_0
\end{array}
$$

- Optimum: $x_0 = 0$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 1.6$, $x_4 = 3$
- Il faut retraduire dans le **dictionnaire** originel

Initialisation

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 \\
x_2 &= 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 \\
x_4 &= 3 - x_1 - x_6 \\
\hline
z &= -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6
\end{aligned}
$$

- On a posé: $x_0 = 0$, puis remplacé x_2 et x_3 dans z
- On obtient ainsi un dictionnaire admissible pour le problème originel

Initialisation: principe général

- 1ère étape: x_0 entre et une autre variable sort
- Étape générale: itération normale du simplexe
- Terminaison
  - x_0 n'est pas dans la base et $w = 0 \Rightarrow$ problème résoluble
  - x_0 est dans la base et $w \neq 0 \Rightarrow$ problème insoluble

Simplexe à deux phases

- Phase 1
  - Résolution du problème auxiliaire
- Phase 2
  - Résolution du problème originel à partir du tableau / dictionnaire obtenu au terme de la phase 1
- Existence d’une solution: cas possibles
  - Chaque problème de programmation linéaire est soit
    - infaisable (polyèdre vide)
    - non borné (polyèdre ouvert)
    - résoluble (polyèdre non-vide)

Dualité: motivations

Maximiser $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\
5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 \\
-x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Borne inférieure sur z : solutions admissibles
  - $z > 5$ avec $x = (0,0,1,0)$ $\qquad$ $z > 22$ avec $x = (3,0,2,0)$
- Borne supérieure sur z ?

Dualité: motivations

Maximiser $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
sous contraintes

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$
$$-x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Borne supérieure sur z
  - Mult. la 2ème contrainte par 5/3, comparaison avec z

    $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$

    $\leq 25/3\, x_1 + 5/3\, x_2 + 5x_3 + 40/3\, x_4 \leq 275/3$

Dualité: motivations

Maximiser $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
sous contraintes

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\le 1 \\
5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\le 55 \\
-x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\le 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

- Borne supérieure sur z
  - Addition des 2ème et 3ème contraintes, comparaison avec z

    $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 11x_4 \le 58$
  - Idée: combinaison linéaire des contraintes

Dualité: motivations

Maximiser $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
sous contraintes

$$(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1) \bullet y_1$$
$$+$$
$$(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55) \bullet y_2$$
$$+$$
$$(-x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3) \bullet y_3$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

- On obtient

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)\, x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\, x_2$$
$$+ (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\, x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\, x_4 \;\leq\; y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

- Condition pour que le terme de gauche majore z ?

Dualité: motivations

- $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$

  $\overset{?}{\leq} (y_1 + 5y_2 - y_3)\, x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\, x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\, x_3$
  $+ (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\, x_4 \ \leq \ y_1 + 55y_2 + 3y_3$

- Contraintes

$$
\begin{aligned}
y_1 + 5y_2 - y_3 &\geq 4 \\
-y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\
-y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\
3y_1 + 8y_2 - 5y_3 &\geq 3 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Pour obtenir la meilleure borne supérieure, il faut minimiser $y_1 + 55y_2 + 3y_3$

Problèmes primal et dual

Problème primal

- Maximiser $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
  sous contraintes
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problème dual

- Minimiser $w = y_1 + 55y_2 + 3y_3$
  sous contraintes
$$\begin{aligned} y_1 + 5y_2 - y_3 &\geq 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problèmes dual et primal

Problème primal

- Maximiser $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ou $z = cx$
  sous contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{ou} \quad Ax \leq b$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$$

Problème dual

- Minimiser $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ou $w = b^{t} y$
  sous contraintes

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad \text{ou} \quad A^{t} y \geq c$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$$

Dualité: remarques

- Problème primal de maximisation

  $\Leftrightarrow$ Problème dual de minimisation

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

- nb. *m* de contraintes > nb. *n* de variables libres

  $\Rightarrow$ problème dual plus avantageux à résoudre

  (nb. d'itérations typique % nb. de variables)

Complexité: mauvais cas

- Maximiser
  sous contraintes

$$z = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

$$\left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \le 100^{i-1}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

- Nombre d'étapes de l'algorithme du simplexe: 2^n
- L'algorithme du simplexe est non-polynomial
- « De tels mauvais cas sont rares »

Historique

- Algorithme du simplexe (Dantzig, 1947)
  - Planification de l'US Air Force
- Applications à la productique
  - Problème d'allocation de ressources
  - Formalisation de problèmes de décision
- Applications en économie
  - Prix Nobel 1975 (Kantorovich / Koopmans)
- Théorie math. plus ancienne (Fourier, 19ème s.)
  - Mise en pratique possible avec l'informatique
- Programmation linéaire $\supsetneq$ algo. du simplexe
  - variables entières $\Rightarrow$ difficile / résolution différente

Bibliographie

- V. Chvátal, *Linear Programming*, Freeman, 1983
- D. de Werra, *Éléments de programmation linéaire avec applications aux graphes,* Presses Polytechniques Romandes,1990
- R. Faure, B. Lemaire et C. Picouleau. *Précis de recherche opérationnelle: méthodes et exercices d'application*, 5ème édition, Dunod, 2000
- D. de Werra, T. M. Liebling et J.-F. Hêche, *Recherche opérationnelle pour ingénieurs,* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003