

Математика 2
Поправни први колоквијум
14.06.2023.

1. [4 поена] Решити по X матричну једначину $(AX^{-1} - B)^{-1} = XB$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. [4 поена] У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y - 2u &= -3 \\ 2x - y - 2z + au &= 4 \\ x - 2y - 2z + (2a + 1)u &= 7. \end{aligned}$$

3. [5 поена] На скупу $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ дефинисана је операција $*$ са

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Испитати да ли је структура $(\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$ група. Ако јесте, испитати да ли је Абелова група.

4. [4 поена] Дата је група (G, \cdot) , где је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$ и нека је \cdot операција матричног множења. Доказати да је пресликавање $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, дато са

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = |x|$$

хомоморфизам групе G у групу $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Испитати да ли је дато пресликавање бијекција.

5. а) [2 поена] Одредити вредност параметра p тако да вектори $(1, 0, 4)$, $(2, 1, 3)$, $(4, 1, p)$ буду линеарно независни.
б) [3 поена] Испитати да ли је скуп $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a - 3b + c = 0, 3a - 3b - c = 0\}$ потпростор простора \mathbb{R}^4 . Уколико јесте, одредити базу и димензију.

Математика 2
Поправни други колоквијум
14.06.2023.

1. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$ и $\vec{c} = (-1, 3, 5)$.
 - а) [1 поен] Одредити ортогоналну пројекцију вектора \vec{b} на вектор \vec{a} .
 - б) [1 поен] Одредити непознате координате вектора $\vec{p} = (2, y, z)$ тако да вектори \vec{a} и \vec{p} буду ортогонални и да важи $|\vec{p}| = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$.
 - в) [2 поена] Израчунати висину призме чије су ивице одређене векторима \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , ако је њена основа паралелограм конструисан над векторима \vec{a} и \vec{b} .
2. Дата је тачка $A(0, -7, 2)$, вектор $\vec{a} = (-2, 9, 2)$ и права $l: \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$.
 - а) [1 поен] Одредити једначину праве a која пролази кроз тачку A и паралелна је вектору \vec{a} .
 - б) [1 поен] Одредити једначину равни α која садржи тачку $L = (1, 0, 0)$ и праву l .
 - в) [2 поена] Одредити једначину равни β која је паралелна равни α и на растојању је 1 од ње.
 - г) [2 поена] Доказати да су праве a и l мимоилазне и одредити растојање између њих.
3. [4 поена] Одредити p тако да један корен једначине $x^3 - 7x + p = 0$ буде једнак двоструком другом корену те једначине.
4. [4 поена] Које године претходног века је рођен Вукан ако је 2023. године напунио онолико година колики је збир цифара године његовог рођења?
5.
 - а) [2 поена] Ако је n природни број, тада је $n^3 + 1997n + 1998$ дељив са 6. Доказати.
 - б) [2 поена] Одредити број позитивних делилаца броја $7!(6^9)^2$.