Математика 2 - поправни први колоквијум
21.06.2022.

1. [**4 поена**] Решити по X матричну једначину $2AX^T - B = 3CX^T - I$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{3} & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. [**4 поена**] У зависности од реалног параметра λ дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= \lambda. \end{aligned}$$

3. [**4 поена**] Дати су групоиди $(\mathbb{R}, \cdot)$ и $(M, \cdot)$, при чему је скуп M дат са $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$, а $\cdot$ операција множења у одговарајућем скупу. Испитати да ли је пресликавање $f : \mathbb{R} \to M$ дато са $f(a) = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ хомоморфизам.

4. [**5 поена**] Нека је $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\circ$ операција дефинисана са $a \circ b = \begin{cases} ab, & a > 0 \\ \frac{a}{b}, & a < 0 \end{cases}$. Испитати да ли је структура $(\mathbb{R}^*, \circ)$ моноид.

5. [**5 поена**] Испитати да ли су следећи простори потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$. Уколико јесу, одредити њихову базу и димензију.

   а) $E_1 = \{(-a, 3a + 2b, b^2, c) \mid a + 2b = 2c\}$;

   б) $E_2 = \{(a + b, -c, d - 3a, b) \mid a - 2b + 3d = 5c\}$.

Математика 2 - поправни други колоквијум
21.06.2022.

1. Дати су вектори $\vec{a} = (8, 1, 1)$ и $\vec{b} = (13, m, 2m)$ и $\vec{c} = (3, 0, 3)$.

   а) [**2 поена**] Одредити вредност реалног параметра m, ако је познато да је запремина паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака 42;

   б) [**2 поена**] Израчунати угао који вектор $\vec{c}$ заклапа са равни која је одређена векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Одредити:

   а) [**1 поена**] вредност реалног параметра n у једначини праве $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{n}$ тако да права p сече праву $q : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$;

   б) [**1 поена**] параметре a и b тако да раван $\alpha : ax + by + 2z = 1$ буде нормална на праву $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

   в) [**2 поена**] једначину равни којој припадају праве $p_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $p_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$;

   г) [**2 поена**] растојање између равни $\alpha : 2x+3y-6z+14 = 0$ и $\beta : 2x+3y-6z-35 = 0$.

3. [**4 поена**] Одредити реалне параметре a и b тако да полином $p(x) = 4x^4-20x^3+ax^2+bx-15$ има једну нулу $2-i$, а затим одредити све нуле полинома p. Развити полином p по степенима од $x-1$.

4. [**4 поена**] Дата је једначина $8x + 3y = 2013$. Нека су $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ парови природних бројева који задовољавају дату једначину. Израчунати збир $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

5. [**4 поена**] Испитати да ли је број $19^{202} - 145^{156}$ дељив са 11.