

Математика 2
Први колоквијум
16.04.2022.

1. [4 поена] Решити по X матричну једначину $(A - BX) \cdot (X - B)^{-1} = 2I$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. [4 поена] У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} 4x + ay + z &= a - 1 \\ (a + 2)x + 6y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

3. [2+3 поена]

- а) На скупу \mathbb{R}^2 дата је операција $*$ са $(m, n) * (a, b) = (m + n + na, nb)$. Испитати да ли су пресликавања $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дата са $f(m, n) = (-1, n)$ и $g(m, n) = (m, 1)$ хомоморфизми.
- б) На скупу реалних бројева дефинисане су бинарне операције $*$ и \diamond на следећи начин: $x * y = 1 + x + y$ и $x \diamond y = x + y - 7$, $x, y \in \mathbb{R}$. Доказати да су групоиди $(\mathbb{R}, *)$ и (\mathbb{R}, \diamond) изоморфни.

4. [4 поена] Нека је дат скуп

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}.$$

Испитати да ли је (M, \cdot) група, где је \cdot операција множења матрица. Да ли је група Абелова?

5. [2+3 поена] Испитати да ли су следећи простори потпростори векторских простора \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 редом. Уколико јесу, одредити њихову базу и димензију.

- а) $E_1 = \{(-3x, 2x - y, z) \mid x + 3z = 2y - 1\};$
- б) $E_2 = \{(x, -4y, 2z - x, t) \mid x + 4y = 2z - t, x + z = -3y + 2t\}.$