ZAVRŠNI ISPIT
30.1.2020.

1. (10 bodova) Zadana je točka $A(1,1,0)$ i ravnina

$$\pi \ \ldots \ 3x - 2y + z = 0.$$

   (a) Odredite ortogonalnu projekciju točke A na ravninu π.

   (b) Neka je zadan i pravac

$$p \ \ldots \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+2}{1}.$$

   Odredite točku T tog pravca takvu da polovište dužine $\overline{AT}$ leži u ravnini π.

2. (10 bodova)

   (a) Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ u vektorskom prostoru V.

   (b) Napišite definiciju baze vektorskog prostora.

   (c) Neka je $\mathcal{S}_2$ vektorski prostor simetričnih matrica drugog reda. Za svaki od sljedećih skupova ispitajte čini li bazu tog vektorskog prostora:

   i. $\mathbf{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$,

   ii. $\mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$,

   iii. $\mathbf{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,

   iv. $\mathbf{B}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$.

3. (10 bodova) Zadan je linearni operator $A \colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ svojom matricom $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ u kanonskoj bazi $\{1,\, t,\, t^2\}$, gdje je $a_{ij} = i - j$, $i, j \in \{1,2,3\}$.

   (a) Izračunajte $A(1 + 2t + 3t^2)$.

   (b) Odredite rang i defekt od A.

   (c) Odredite jezgru operatora A.

   (d) Je li vektor $1 + t$ u slici operatora A? Obrazložite svoj odgovor.

4. (10 bodova)

   (a) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (b) Postoji li ortogonalna matrica $\mathbf{S}$ takva da je matrica $\mathbf{S}^\top \mathbf{A} \mathbf{S}$ dijagonalna? Ako postoji, odredite ju.

   (c) Matrica $\mathbf{A}$ iz (a) podzadatka je matrica operatora zrcaljenja s obzirom na pravac p u kanonskoj bazi. Odredite kanonsku jednadžbu pravca p.

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Dokažite sljedeće tvrdnje:

   (a) Svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima matrice međusobno su linearno nezavisni.

   (b) Svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima simetrične matrice međusobno su ortogonalni.

Napomena: Ispit se piše **120 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.