ZAVRŠNI ISPIT
31.1.2019.

1. (10 bodova) Dane su točke $A(1,-2,0), B(2,0,1), C(0,-1,2)$ i $D(4,2,4)$.
   (a) Neka je Π ravnina koja prolazi točkama A, B i C. Odredite ortogonalnu projekciju točke D na ravninu Π.
   (b) Neka je Π ravnina iz $a)$ dijela zadatka i p pravac koji prolazi točkama C i D. Odredite jednadžbu pravca s simetričnog pravcu p s obzirom na ravninu Π.

2. (10 bodova) Neka je $A : V^2 \to V^2$ linearni operator simetrije s obzirom na pravac kroz ishodište koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut od $30°$.
   (a) Odredite matricu prikaza $\mathbf{A}$ zadanog linearnog operatora u kanonskoj bazi.
   (b) Pokažite da za zadani linearni operator vrijedi $A \circ A = I$, gdje je I jedinični operator.

3. (10 bodova) Neka je $A : X \to Y$ linearni operator.
   (a) Dokažite da je jezgra operatora $\mathrm{Ker}(A)$ vektorski potprostor od X, a slika operatora $\mathrm{Im}(A)$ vektorski potprostor od Y.
   (b) Neka je $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\}$ baza od $\mathrm{Ker}(A)$, $d < n = \dim X$, i neka je $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza od X. Dokažite da je onda $\{A(\mathbf{e}_{d+1}), ..., A(\mathbf{e}_n)\}$ baza od $\mathrm{Im}(A)$.

4. (10 bodova) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tada je $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Nađite vlastite (svojstvene) vrijednosti i vlastite (svojstvene) vektore od $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ te pokažite da se $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ može dijagonalizirati.
   (b) Nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ dijagonalna.
   (c) Ako je $\mathbf{B}$ matrica tipa $m \times n$, može li se $\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ uvijek dijagonalizirati? Kratko obrazložite.

5. (10 bodova)
   (a) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, definiramo skalarni umnožak $\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle := \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}$ gdje je $\cdot$ standardni skalarni umnožak u $\mathbb{R}^2$.
      - Odredite formulu za $\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle$.
      - Odredite α tako da vektori $\mathbf{x} = (1,1), \mathbf{y} = (1,\alpha)$ budu ortogonalni u tom skalarnom umnošku.
   (b) Neka je sada $\mathbf{A}$ proizvoljna matrica reda n. Definirajmo analogno $\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle := \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}$ gdje je $\cdot$ standardni skalarni umnožak u $\mathbb{R}^n$. Uz koje uvjete na $\mathbf{A}$ će $\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle$ biti skalarni umnožak? Provjerite sva svojstva: pozitivnost, homogenost, komutativnost i aditivnost.

Napomena: Ispit se piše **120 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.