PRVI JESENSKI ISPITNI ROK
28.8.2020.

1. (10 bodova)

   (a) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je matrica
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   regularna.

   (b) Neka je a_0 najmanji pozitivni cijeli broj za koji je matrica $\mathbf{A}$ iz (a) podzadatka regularna. Za taj a_0 odredite sve matrice $\mathbf{X}$ za koje vrijedi $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, gdje je
   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. (10 bodova) Zadane su matrice
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokažite da su matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ regularne.

   (b) Riješite matričnu jednadžbu
   $$\mathbf{X} = \mathbf{A}\left[(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}\mathbf{X}^{-1})\mathbf{B} + \mathbf{I}\right]^{-1}\mathbf{B}.$$

3. (10 bodova) Zadani su pravci
   $$p_1 \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1},$$
   $$p_2 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-a}{1},$$
   gdje je $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Odredite vrijednost parametra a takvu da se pravci p_1 i p_2 sijeku.

   (b) Za dobivenu vrijednost parametra a u (a) podzadatku, odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži pravce p_1 i p_2.

4. (10 bodova)

   (a) Iskažite i dokažite teorem o rangu i defektu.

   (b) Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator takav da je
   $$A(1,0,0) = (1,2,3), \quad A(0,1,0) = (1,2,3).$$
   Odredite sve moguće vrijednosti ranga i defekta od A. Obrazložite svoj odgovor.

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Neka je $A\colon V^2 \to V^2$ linearni operator koji svaki vektor u ravnini najprije rotira oko ishodišta za $\dfrac{\pi}{6}$, a zatim dobiveni vektor zrcali s obzirom na ishodište.

   (a) Odredite matrični prikaz od A u kanonskoj bazi.

   (b) Je li operator A regularan? Dokažite svoj odgovor.

6. (10 bodova) Za svaku od sljedećih tvrdnji odredite jesu li istinite ili ne. Istinite tvrdnje dokažite, a za neistinite navedite odgovarajući protuprimjer.

   (T1) Svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima n realnih svojstvenih vrijednosti.

   (T2) Svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti.

   (T3) $\lambda = 0$ ne može biti svojstvena vrijednost regularne matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$.

   (T4) Ako gornje trokutasta matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima na svojoj glavnoj dijagonali n različitih vrijednosti, onda se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.