

**MEĐUISPIT**  
**19.11.2020.**

1. (10 bodova) Za kvadratnu regularnu matricu  $\mathbf{A}$  kažemo da je *involutorna* ako je  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ .

(a) Odredite  $\mathbf{A}^2$  za involutornu matricu  $\mathbf{A}$ .

(b) Odredite sve involutorne matrice oblika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

gdje su  $a, b$  i  $c$  realni brojevi.

(c) Ako su  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$  involutorne matrice, moraju li  $\mathbf{AB}$  i  $\mathbf{ABA}$  nužno biti involutorne? Obrazložite!

2. (10 bodova) Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Iskažite Binet-Cauchyjeve teoreme.

(b) Koliko iznosi determinanta matrice  $\mathbf{A}$ ?

(c) Neka je  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^8$ . Koliko iznosi determinanta matrice  $\mathbf{B}$ ?

(d) Neka je  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$ . Koliko iznosi determinanta matrice  $\mathbf{C}$ ?

3. (10 bodova)

(a) Neka su  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  regularne matrice. Napišite i izvedite formulu u kojoj  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1}$  izražavamo preko  $\mathbf{A}^{-1}$  i  $\mathbf{B}^{-1}$ .

(b) Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riješite matricnu jednadžbu  $\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ .

4. (10 bodova) Riješite zadani sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -4 \end{cases}$$

**OKRENITE STRANICU!**

5. (10 bodova)

(a) Definirajte skalarni umnožak vektora u  $V^2$  i  $V^3$ .

(b) Dani su ortogonalni vektori

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

te vektor  $\mathbf{a}$  takav da  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} = 1$ . Ako je  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{f} + \gamma \mathbf{g}$ , odredite  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ .

**Napomena:** Ispit se piše **120 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.