PRVI MEĐUISPIT
22.11.2018.

1. (10 bodova) Za kvadratnu regularnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *ortogonalna* ako je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\intercal$.

   (a) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je matrica $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}$ ortogonalna.

   (b) Koje su moguće vrijednosti determinante ortogonalne matrice $\mathbf{A}$? Svoju tvrdnju dokažite.

   (c) Dokažite: Ako je matrica $\mathbf{A}$ ortogonalna i matrica $\mathbf{B}$ simetrična, onda je $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}$ simetrična.

2. (10 bodova) Dokažite sljedeća svojstva determinante.

   (a) Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka retka, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

   (b) Rastave li se svi elementi nekog retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanti.

   (c) Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, vrijednost determinante neće se promijeniti.

3. (10 bodova) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da linearni sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & -1 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

   (a) nema niti jedno rješenje,

   (b) ima točno jedno rješenje,

   (c) ima beskonačno mnogo rješenja.

   Pronađite sva rješenja u slučajevima kada sustav ima rješenja.

4. (10 bodova) Nađite najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora među vektorima

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. (10 bodova) Neka je $ABCD$ tetraedar volumena 2 takav da je brid $\overline{\mathrm{AD}}$ okomit na bridove $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{AC}}$. Ako je $A(1,1,2), B(2,3,3)$ i $C(2,3,5)$, nađite koordinate vrha D. Odredite sva moguća rješenja.

Napomena: Ispit se piše **90 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.