LINEARNA ALGEBRA

Završni ispit (30. 1. 2020.)

- RJEŠENJA ZADATAKA -

1. (a) Jednadžba pravca koji je okomit na ravninu π i prolazi točkom A glasi

$$q \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \iff \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -2t+1 \\ z = t \end{cases}$$

Tražena točka je presjek pravca q i ravnine π:

$$3(3t+1) - 2(-2t+1) + t = 0$$

$$14t = -1$$

$$t = -\frac{1}{14} \Rightarrow x = \frac{11}{14}, \; y = \frac{8}{7}, \; z = -\frac{1}{14}$$

Ortogonalna projekcija od A na π je $\left(\frac{11}{14}, \frac{8}{7}, -\frac{1}{14}\right)$.

(b) Parametarske jednadžbe pravca p glase

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4 \\ z = t-2 \end{cases}$$

Za točku $T(3t+1, 4, t-2) \in p$, polovište dužine $\overline{AT}$ ima koordinate

$$\left(\frac{1}{2}(3t+2), \frac{5}{2}, \frac{1}{2}(t-2)\right).$$

Prema uvjetu zadatka,

$$\frac{3}{2}(3t+2) - 5 + \frac{1}{2}(t-2) = 0$$

$$5t - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{5}$$

pa je tražena točka $T\left(\frac{14}{5}, 4, -\frac{7}{5}\right)$.

2. (a) Kažemo da su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ LINEARNO NEZAVISNI ako za sve skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

(b) Kažemo da vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ čine BAZU za V ako vrijedi:

(1) ti su vektori linearno nezavisni,

(2) svaki drugi vektor $\vec{v} \in V$ se može zapisati kao linearna kombinacija tih vektora.

(c) Za proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$ imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S_2 \Leftrightarrow b = c$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

slijedi $\dim S_2 = 3$.

Zato odmah vidimo da B_1 i B_4 ne mogu biti baze za S_2.

Za skup B_3 imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tj. on je linearno zavisan pa također ne može biti baza za S_2.

Skup B_2 je linearno nezavisan po definiciji

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

pa taj skup je baza za S_2.

3. Matrica od A u kanonskoj bazi glasi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A(1+2t+3t^2) = -8-2t+4t^2$$

(b) $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ |\cdot 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A(e)) = 2 \Rightarrow r(A) = 2$$

Prema teoremu o rangu i defektu

$$r(A) + d(A) = 3 \Rightarrow d(A) = 3-2 = 1$$

(c) $p(t) = a + bt + ct^2 \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Ap = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, rješavamo homogeni sustav

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u (b) dijelu} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \Rightarrow a = c \\ \Rightarrow b = -2c \end{matrix}$$

Zato

$$\operatorname{Ker} A = \{ c - 2ct + ct^2 \mid c \in \mathbb{R} \}$$
$$= L(\{1 - 2t + t^2\})$$

(d) Ispitujemo postoji li vektor $p(t) = a+bt+ct^2 \in \mathcal{P}_2$ takav da $Ap = 1+t$, tj. rješavamo nehomogeni sustav

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u (b) dijelu} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Iz prvog retka proširene matrice sustava vidimo da sustav nema rješenja, tj. $1+t \notin \operatorname{Im} A$.

4. (a) $$\mathcal{H}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-1)$$

$$= (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$

Odredimo pripadne svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = -1$

$$(-I-A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left.\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right\} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$2^\circ\ \lambda_2 = 1$

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Big\} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$x_2 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Budući da je matrica A simetrična, postoji ortonormirana baza u kojoj se ona može dijagonalizirati i to je upravo ortonormirana baza svojstvenih vektora od A. Zato je tražena matrica S oblika

$$S = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Uočimo da prema (a) dijelu zadatka slijedi da je vektor $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$ vektor smjera traženog pravca p (to je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, tj. zrcaljenje s obzirom na p fiksira sve vektore kolinearne s njim).

Budući da pravac p mora prolaziti kroz ishodište (u suprotnom zrcaljenje s obzirom na taj pravac ne bi bilo linearni operator), kanonska jednadžba od p glasi

$$p \ldots \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

5. (a) Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju k različitih svojstvenih vrijednosti matrice.

1° Baza $k=1$

Tvrdnja vrijedi (skup od jednog ne-nul vektora uvijek je linearno nezavisan).

2° Korak

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja u slučaju k različitih svojstvenih vrijednosti (za neki $k \in \mathbb{N}$).

Neka su sada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ različite svojstvene vrijednosti matrice A te $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ pripadni svojstveni vektori.

Promotrimo njihovu linearnu kombinaciju jednaku nul-vektoru:

$$A \cdot | \qquad \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \qquad (2)$$

Ako pomnožimo jednakost (1) sa λ_{k+1} i oduzmemo od (2), dobivamo

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ su linearno nezavisni pa slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Uvrštavanjem u (1) slijedi i $\alpha_{k+1} = 0$ pa po definiciji slijedi da su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}$ linearno nezavisni.

Q.E.D.

(b) Neka su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ i μ simetrične matrice A.

Računamo

$$\langle A\vec{v} \mid \vec{w}\rangle = \langle \lambda\vec{v} \mid \vec{w}\rangle = \lambda\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle,$$

$$\langle A\vec{v} \mid \vec{w}\rangle = \langle \vec{v} \mid A^T\vec{w}\rangle = \langle \vec{v} \mid \mu\vec{w}\rangle$$

$$= \mu\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle = \mu\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle = 0$$

Dakle, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su ortogonalni.

Q.E.D.