

**DRUGI JESENSKI ISPITNI ROK**  
**8.9.2020.**

1. (10 bodova)

- (a) Iskažite Laplaceov teorem o razvoju determinante reda  $n$  po  $i$ -tom retku te po  $j$ -tom stupcu, gdje su  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- (b) Dokažite da je determinanta gornje trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na njenoj glavnoj dijagonali.
- (c) Dokažite da zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak.
- (d) Neka je  $x \in \mathbb{R}$ . Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ x & x+1 & x+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. (10 bodova) U ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$  riješite sustav

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}.$$

3. (10 bodova)

- (a) Definirajte vektorski umnožak vektora  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ .
- (b) Dani su vektori  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$  i  $\mathbf{v} = (2, 4, 5)$ . Odredite jedinični vektor  $\mathbf{w}$  okomit na vektore  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ .
- (c) Odredite projekciju vektora  $\mathbf{u}$  na vektor  $\mathbf{v}$ , gdje su  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  vektori iz (b) podzadatka.

4. (10 bodova) Zadan je linearni operator

$$A: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad A(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{M}.$$

Odredite matrični zapis tog operatora u kanonskoj bazi, izračunajte njegov rang i defekt te mu odredite po jednu bazu za njegovu sliku i jezgru.

**OKRENITE STRANICU!**

5. (10 bodova) Zadani su skupovi

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\},$$

$$Y = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\}.$$

(a) Dokažite da su  $X$  i  $Y$  vektorski potprostori vektorskog prostora  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Neka je  $A: X \rightarrow Y$  neki linearni operator.

i. Koliko redaka, a koliko stupaca ima matrični zapis  $\mathbf{A}$  tog operatora u nekom paru baza?

ii. Ako je  $\dim(\text{Ker } A) = 1$ , koliko je  $\dim(\text{Im } A)$ ?

Obrazložite sve svoje odgovore!

6. (10 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti te pripadne svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Napomena:** Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.