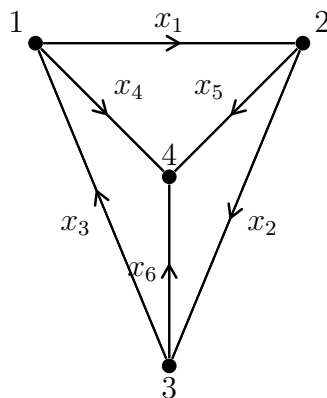


LJETNI ISPITNI ROK 16.07.2019.

1. (10 bodova) Kirchoffov zakon o električnoj struji kaže da je u svakom čvoru električne mreže zbroj električnih struja koje ulaze u čvor jednak zbroju struja koje izlaze iz čvora. Slikom je zadana električna mreža sa šest struja $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Strelice pokazuju u pozitivnom smjeru, a svaki x_i može biti pozitivan ili negativan. Nađite jednačbe koje opisuju Kirchoffov zakon za četiri čvora sa zadane slike. Riješite dobiveni linearni sustav.



2. (10 bodova) Dokažite sljedeća svojstva determinante.
- (a) Ako matrica \mathbf{A} ima dva jednaka retka, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.
 - (b) Rastave li se svi elementi nekog retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanti.
 - (c) Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, vrijednost determinante neće se promijeniti.
3. (10 bodova) Za vektore \mathbf{a} , \mathbf{b} i \mathbf{c} iz V^3 vrijedi

$$\|\mathbf{a}\| = 1, \quad \|\mathbf{b}\| = 2, \quad \|\mathbf{c}\| = 1,$$

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \frac{\pi}{2}, \quad \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\pi}{3}.$$

Odredite vektor $\mathbf{v} \in V^3$ koji zadovoljava uvjete

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 3,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 12,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 5.$$

4. (10 bodova) Dokažite ili opovrgnite. Ako sustavi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ imaju isti skup rješenja za svaki vektor \mathbf{b} , onda je $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

Okrenite!

5. (10 bodova) Na skupu $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ kvadratnih matrica reda n zadano je preslikavanje $P: \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formulom

$$P(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top}{2}.$$

- (a) Dokažite da je P linearni operator.
 - (b) Dokažite da se jezgra operatora P sastoji od antisimetričnih matrica.
 - (c) Kolika je dimenzija prostora $\text{Ker}(P)$?
 - (d) Kolika je dimenzija $\text{Im}(P)$? Opišite prostor $\text{Im}(P)$.
6. (10 bodova) Na vektorskom prostoru \mathbb{R}^2 zadani su linearni operatori $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ formulama

$$A(x, y) = (2x - y, -x + 2y),$$

$$B(x, y) = (x + y, 2x + y).$$

- (a) Odredite vlastite (svojstvene) vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i vlastite (svojstvene) vrijednosti operatora A .
- (b) Prikažite operator A u bazi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
- (c) Prikažite operator B u istoj bazi.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.