7. Vektorski prostori

7.1. Baza i dimenzija vektorskog prostora

7.1.1. Vektorski prostor

Neprazni skup X na kojem su definirane operacije $+ : X \times X \to X$ (zbrajanje vektora) i $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ (množenje skalara i vektora) naziva se vektorski prostor ako vrijede sljedeća svojstva:

VP₁) $(\forall x, y \in X)\ x+y=y+x$ → komutativnost

VP₂) $(\forall x, y, z \in X)\ x+(y+z)=(x+y)+z$ → asocijativnost

VP₃) $(\exists 0 \in X)(\forall x \in X)\ x+0=0+x=x$ → postojanje nul-vektora

VP₄) $(\forall x \in X)(\exists x' \in X)\ x+x'=x'+x=0$ → postojanje suprotnoga vektora

VP₅) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\ \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ → kompatibilnost množenja

VP₆) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x, y \in X)\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ → distributivnost množ. prema zbr. u X

VP₇) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ → distr. množ. prema zbr. u $\mathbb{R}$

VP₈) $1 \cdot x = x$ → netrivijalnost množenja

~ umjesto x' piši $-x$

Vektorski prostor mogu činiti i funkcije: $(x+y)(t) := x(t)+y(t)$
$(\alpha x)(t) := \alpha x(t)$

7.1.2. Vektorski potprostor

$(X, +, \cdot)$ je vektorski prostor. Podskup $W \subseteq X$ čini vektorski potprostor prostora X ako je on vektorski prostor uz iste operacije koje su definirane na prostoru X.

TEOREM 1

Neka je X vektorski prostor. $W \subseteq X$ je potprostor ako i samo ako vrijedi:

$$(\forall x, y \in W)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad \alpha x + \beta y \in W$$

Dokaz: Ako je $x \in W$, po pretpostavci u W leži i kombinacija $1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0$, kao i kombinacija $0 \cdot x + (-1) x = -x$

7.1.3. Potprostor razapet skupom vektora

Neka su $a_1 \dots a_n$ elementi vektorskog prostora X. Skup svih linearnih kombinacija tih vektora

$$W = \{a \in X : a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

naziva se potprostor generiran (razapet) vektorima $a_1 \dots a_n$ i označava se s $L(a_1 \dots a_n)$

7.1.4. Baza i dimenzija prostora

Dimenzija prostora maksimalan je broj linearno-nezavisnih vektora u tome prostoru.

~ prostori se dijele na konačno-dimenzionalne i na besk.-dimenz.

ove radimo

~ besk.-dim. prostor $\mathcal{P}$

ako za svaki t vrijedi

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \dots \alpha_n t^n = 0$$

samo ako su svi $\alpha = 0$.

Baza

Neka je X vektorski prostor. **Baza** u X je svaki skup $v_1, \dots v_n$ koji ima sljedeća dva svojstva

B_1) vektori $v_1, v_2 \dots v_n$ su linearno nezavisni

B_2) svaki drugi vektor $x \in X$ može se zapisati u obliku linearne kombinacije vektora $v_1, v_2, \dots, v_n$.

~ skup svih linearnih kombinacija vektora $v_1 \dots v_n$ označili smo s $L(v_1 \dots v_n)$

~ Svojstvo B_2) kaže da za bazu vrijedi $X = L(v_1, v_2 \dots v_n)$

~ kažemo da baze „razapinju čitav prostor"

TEOREM 2.

Prikaz svakoga vektora u bazi vektorskog prostora je jedinstven

DOKAZ

~ pretpostavimo da x ima dva razl. prikaza,

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

~ slijedi

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

~ zbog linearne nezavisnosti svi koef. moraju biti $= 0$,

dakle dobivamo $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

7.1.5. Svojstva baze vektorskog prostora

TEOREM 3.

Svake dvije baze u vektorskom prostoru X imaju isti broj elemenata.
Taj se broj podudara s dimenzijom prostora.

TEOREM 4.

Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Tad skup $v_1, \dots, v_n$ od n linearno nezavisnih vektora čini bazu.

DOKAZ 4.

Prvo svojstvo $B_1)$ je ispunjeno po pretpostavci. Da dokažemo $B_2)$ dovoljno je primijetiti da je za svaki x skup $\{v_1, \dots, v_n, x\}$ linearno zavisan (inače bi dimenzija prostora bila $> n$). No, odavde slijedi da se x može prikazati kao linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$, te oni razapinju cijeli prostor.

TEOREM 5.

Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Ako za vektore $v_1, \dots, v_n$ vrijedi $L(v_1, \dots, v_n) = X$, tad oni čine bazu.

Skup $v_1, \dots v_k$ je baza u prostoru X dimenzije n ako vrijede bilo koja dva od sljedeća tri uvjeta:

1) $k = n$
2) vektori $v_1, \dots, v_k$ su linearno nezavisni
3) vektori $v_1, \dots, v_k$ razapinju prostor X → posljedica prva dva

7.1.6. Nadopunjavanje do baze

TEOREM 6

Neka je $v_1, \ldots, v_k$ bilo koji skup linearno nezavisnih vektora prostora X dimenzije n. Onda se taj skup može nadopuniti do baze - postoje vektori $v_{k+1}, \ldots, v_n$ takvi da dodani početnom skupu čine bazu.

Nadopunjavanje:

1. Krenemo od zadanog skupa $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisnih vektora
2. Tom skupu dodamo bilo koju bazu $\{e_1, \ldots e_n\}$ prostora X
3. U skupu $\{v_1, \ldots, v_k, e_1, \ldots, e_n\}$ krenuvši od elementa e_1, izbacujemo redom sve one za koje se pokaže da su zavisni o prethodnim elementima.
4. Postupak prekidamo kad dobijemo n linearno nezavisnih vektora, izbacujući ostatak iz skupa.

7.2. Promjena baze

7.2.1. Matrica prijelaza s jedne na drugu

Neka je x vektor zapisan preko stare baze. Ako je $T=(t_{ij})$ matrica prelaza iz stare baze u novu:

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

onda komponente vektora u novoj bazi dobivamo rješavanjem sustava

$$Tx' = x$$

odnosno, vrijedi $\quad x' = T^{-1}x$

Izračun komponenti vektora u te 2 baze

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j \right) e_i$$

$\Rightarrow$ vrijedi $\quad x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j$

$\Rightarrow$ u matričnom zapisu $\quad x = Tx'$

7.2.2. Baze u prostoru $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots x_n) + (y_1, \dots y_n) = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n$$

Kanonska baza prostora $\mathbb{R}^n$

~ čine ju vektori: $e_1 = (1, 0, \dots c)$,

$e_2 = (0, 1, \dots 0)$,

$\dots$

$e_n = (0, 0, \dots 1)$