

LJETNI ISPITNI ROK
10.7.2020.

1. (a) Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

- (b) Za koje
- a
- je determinanta
- n
- tog reda

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

jednaka 0?

2. (10 bodova) Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ b \end{bmatrix},$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Riješite sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ za $a = 2$ i $b = -2$. Zapišite rješenje u vektorskom obliku.
- (b) Za koje vrijednosti parametara a i b sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima
- jedinstveno rješenje,
 - beskonačno mnogo rješenja,
 - niti jedno rješenje?

3. (10 bodova) Zadane su ravnine

$$\begin{aligned} \pi_1 \dots 2x - y + 3z - 1 &= 0, \\ \pi_2 \dots x + 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Odredite ravninu koja prolazi ishodištem i okomita je na ravnine π_1 i π_2 .
- (b) Odredite presjek ravnina π_1 i π_2 .

4. (10 bodova) Zadan je linearni operator

$$D: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_4, \quad (Dp)(t) = (t^2 + t)p'(t).$$

Odredite matrični zapis tog operatora u paru kanonskih baza, izračunajte njegov rang i defekt te mu odredite po jednu bazu za njegovu sliku i jezgru. Odredite jedan polinom iz \mathcal{P}_4 koji **nije** element $\text{Im } D$.

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Neka je $A: X \rightarrow Y$ linearni operator.

- (a) Dokažite da je $\text{Ker } A$ vektorski potprostor prostora X .
- (b) Dokažite da je linearni operator $A: X \rightarrow Y$ injekcija ako i samo ako je $\text{Ker } A = \{\mathbf{0}\}$.
- (c) Neka je $\dim X = 5$, $\dim Y = 3$ i $\dim(\text{Ker } A) = 3$. Je li operator A surjekcija? Obrazložite svoj odgovor.

6. (10 bodova) Odredite ortonormiranu bazu u kojoj je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

dijagonalna.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.