8. Linearni operatori

8.1. Svojstva linearnih operatora

8.1.1. Definicija linearnog operatora

Preslikavanje $A: X \to Y$ naziva se linearni operator ako za njega vrijedi uvjet linearnosti:

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \quad A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

Taj je uvjet ekvivalentan s uvjetima:

1) aditivnosti $\Rightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) \; A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$
2) homogenosti $\Rightarrow (\forall x \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \; A(\alpha x) = \alpha A(x)$

Svaka matrica A tipa $m \times n$ definira linearni operator $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ formulom:

$$T_A(x) := Ax$$

$\Rightarrow$ za operator T_A kažemo da je pridružen matrici A

1. Ako je T_A operator pridružen matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, odredi $T_A(x, y)$

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x+y \end{bmatrix}$$

$$T_A(x, y) = (y, 2x+y)$$

8.1.2. Jezgra, slika, defekt i rang linearnog operatora

$A: Y \to Y$ - linearni operator

Jezgra (nul-potprostor) operatora A je skup svih vektora prostora X koji se preslikavaju u nul vektor:

$$Ker(A) = \{x \in X : A(x) = 0\}$$

Slika operatora A je skup svih njegovih vrijednosti:

$$Im(A) = \{y \in Y : y = A(x) \text{ za neki } x \in X\}$$

TEOREM 1

Jezgra $Ker(A)$ je vektorski potprostor od X. Slika $Im(A)$ je vektorski potprostor od Y.

DOKAZ

$x_1, x_2 \in Ker(A) \Rightarrow A(x_1) = A(x_2) = 0 \Rightarrow$ za bilo koje α_1 i α_2

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Ker(A) \Rightarrow Ker(A)$ je potprostor

$y_1, y_2 \in Im(A) \Rightarrow$ postoje x_1 i x_2 takvi da vrijedi $y_1 = A(x_1)$ $y_2 = A(x_2)$

$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in X$

$\Rightarrow$ zbog linearnosti preslikavanja A:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

$\Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Im(A) \Rightarrow Im(A)$ je potprostor

Rang operatora $r=r(A)$ definiramo kao dimenziju slike $Im(A)$
Defekt operatora $d=d(A)$ definiramo kao dimenziju jezgre $Ker(A)$

TEOREM 2

Ako je n dimenzija prostora X, d defekt i r rang operatora $A: X \to Y$, tada vrijedi $n = r + d$

8.1.3. Postojanje rješenja linearnog sustava

$Ax=b$ $\Rightarrow$ ima rj ako vektor b leži u slici operatora A

TEOREM 3 -

Sljedeća svojstva linearnog operatora su ekvivalentna
1) $Ker(A) = \{0\}$, tj. $d=0$
2) Operator A je injekcija, to jest za svaki $b \in Im(A)$ jednadžba $A(x)=b$ ima točno jedno rješenje

Operator A je surjektivan ako je $Y = Im A$
Nužan i dovoljan uvjet za to je da se dimenzije ovih prostora podudaraju.

Operator koji je injektivan i surjektivan nazivamo regularnim operatorom.
Operator $A: X \to Y$ je regularan onda i samo onda ako vrijedi:

$$d=0 \quad i \quad \dim X = \dim Y = n$$

TEOREM 4. inj. surj.

Inverzno preslikavanje A^{-1} regularnog linearnog operatora A je linearni operator.

DOKAZ

Uzmemo neke vektore $y_1, y_2 \in Y$ $\Rightarrow$ postoje $x_1, x_2 \in X$ za koje vrijedi

$A(x_1)=y_1$, $A(x_2)=y_2$ $\Rightarrow$ $x_1 = A^{-1}(y_1)$, $x_2 = A^{-1}(y_2)$; zbog linearnih operatora A:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$; djelovanjem inverz. preslikavanja:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

$$\lambda_1 A^{-1}(y_1) + \lambda_2 A^{-1}(y_2) = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$ ■

8.2. Matrica pridružena operatoru

8.2.1. Matrica operatora u paru baza

$A(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \dots + a_{m1} f_m$

$\dots$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ j-ti stupac matrice A čine komponente vektora $A(e_j)$ po bazi $f_1, \dots, f_m$

Neka su X, Y vektorski prostori, $A: X \to Y$ linearni operator, $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza u X i $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza u Y. Operatoru A odgovara u tom paru baza matrica A čiji su stupci komponente vektora $A(e_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ u bazi $\{f_1, \dots, f_m\}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_m f_m =: y$

$y = A(x)$

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i = y$$

Jedinični operator $I: X \to X$, definiran je formulom $I(x) = x$ za svaki $x \in X$. Za svaki vektor baze vrijedi $I(e_j) = e_j$, pa ovome operatoru odgovara (u bilo kojoj bazi) jedinična matrica I.
Ako je n dimenzija prostora X, onda je rang $r(I) = n$ a defekt $d(I) = 0$.

Nul operator $O: X \to Y$ definiran je formulom $O(x) = 0$, za svaki $x \in X$. Njemu odgovara nul-matrica tipa (m, n). Rang nul operatora je 0, a defekt n.

Neka je $a = a_x i + a_y j + a_z k \neq 0$ zadani vektor u trodimenzionalnom prostoru.
Definirajmo operator $A : V^3 \to V^3$ na način:

$$A(x) := a \times x$$

$$A(i) = A \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0_i + a_z j - a_y k \quad \ldots \quad A(j) = \ldots \quad A(k) = \ldots$$

dobijemo
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

za $a_z \neq 0$ su 1. i 2. red linearno nezavisni

za $a_z = 0$ su 2. i 3. red linearno nezavisni

$\to r(A) = 2 \to d(A) = 1$