1. Množenje matrica asocijativno $(AB)C = A\cdot(BC)$

$A = a_{ij}$ $m\times n$ $\quad (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$

$B = b_{jk}$ $n\times p$ $\quad (BC)_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}\cdot c_{kl}$

$C = c_{kl}$ $p\times r$

te je $\quad [(AB)\cdot C]_{il} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\cdot c_{kl}$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}\cdot c_{kl}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(BC)_{jl} = [A\cdot(BC)]_{jl}$$

2. Distributivnost $(A+B)\cdot C = AC+BC$

$$[(A+B)\cdot C]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A+B)_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij}) c_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk}$$

$$= (AC)_{ik} + (BC)_{ik} = [AC+BC]_{ik}$$

3. Transponiranje umnoška $(AB)^T = B^T\cdot A^T$

$B^T = p\times n$ $\quad B^T A^T$ $p\times m$ -> postaji

$A^T = n\times m$

$$[(AB)^T]_{ik} = AB_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{ij}\cdot(A^T)_{jk} = (B^T\cdot A^T)_{ik}$$

4. Determinanta => nul redak = $\det A = 0$

Determinantu razvijemo po tom retku (nul redak) i tvrdnja neposredno slijedi. (Množimo s 0)

5. Trokutasta -> $\det A$ = umnožak elemenata na dijagonali

za $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Razvoj po prvom stupcu -> $|A| = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$

Tako možemo nastaviti razvijati manju determinantu i sve ostale nakon nje po prvom stupcu i dobit ćemo umnožak dijagonalnih elemenata

6. Dva jednaka retka => $\det A = 0$

za $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ a & b\end{vmatrix} = ab - ab = 0$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za det. reda n. Neka je A reda $n+1$ s dva jednaka retka. Neka su to i-ti i j-ti. Razvijmo determinantu po k-tom retku, $k\neq i$ i $k\neq j$:

$\det A = \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{k+l}\cdot a_{kl}\cdot M_{kl}$ $\quad M_{kl}$ je po pretpostavci det. matrice reda n s dva jednaka retka, pa je takva $=0$. Zato je i $\det A = 0$

7. Transponiranje $\det A = \det A^T$

za $n=2$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Neka je A matrica reda 3, i razvijmo je po prvom retku

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Zamjenimo retke i stupce u minorama reda 2, po pretpostavci:

$$\det A^T = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Determinanta se množi skalarom tako da se jedan redak množi tim skalarom

Neka je A početna matrica, A' matrica u kojoj je jedan, recimo prvi redak pomnožen skalarom λ:

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{1j}) A_{1j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \lambda \det A$$

9. Rastave li se svi elementi nekog retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je det. jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanata

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}' + a_{1j}'') \cdot A_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}' \cdot A_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'' \cdot A_{1j} = \det A' + \det A''$$

10. Ako zamjenimo dva retka matrice determinanta mijenja predznak.

Pretpostavimo da želimo zamjeniti i-ti i j-ti redak matrice A.

$$0 = \begin{vmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_j \end{vmatrix}$$

Prva i zadnja determinanta su jednake 0, te ostaje

$$0 = \begin{vmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_j \end{vmatrix}$$

11. Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi pomnožen skalarom, vrijednost det. neće se promjeniti.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \lambda \overbrace{\begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 \end{vmatrix}}^{\to 0} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

12. Matrica ima jedinstven inverz

Pretpostavimo da postoje dvije matrice A' i A'' koje zadovoljavaju jednakost: $A' \cdot A = A \cdot A' = I$

tada:

$$A' \cdot A = I \quad / \cdot A'' \qquad (A' \cdot A) A'' = I A'' = A''$$

$$(A'A)A'' = A' \cdot (A \cdot A'') = A' \cdot I = A'$$

13. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Matrica $B^{-1}A^{-1}$ postoji po pretpostavci

$$(AB)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = ABB^{-1}\cdot A^{-1} = AI\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot B = B^{-1}\cdot I\cdot B = I$$

14. A regularna akko $\det A \neq 0$

A regularna $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A\cdot A^{-1} = I \quad /\det$$

$$\det(A\cdot A^{-1}) = \det I$$

$$\underset{\neq 0}{\det A}\cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

15. A regularna akko ima puni rang

Neka je A regularna. Svedimo ju na reducirani oblik A_R.

Dvije su mogućnosti: 1) A_R nema niti jedan nul redak

2) A_R ima barem jedan nul redak

U drugom slučaju $\det A_R = 0$ zato A nije regularna jer je ekvivalentna matrici A_R

Kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

Prema tome, za prvi slučaj, matrica A_R nema niti jedan nul redak, tj. ima n stožernih elemenata zato je njezin rang n.

16. Ako je A regularna, a B ekvivalentna s njom, onda je B regularna

$$B = E_R \cdots E_1 \cdot A$$

Svaka elementarna matrica je regularna pa postoji umnožak $A^{-1}\cdot E_1^{-1}\cdots E_R^{-1}$, a to je upravo inverz matrice B

17. A regularna akko $Ax=b$ ima jedno rješenje

$\Rightarrow$ Neka je A regularna, njezin je rang $r(A) = n = r(A_p) \Rightarrow$ jednak rangu proširene matrice pa sustav $Ax=b$ ima rješenja. Opće rješenje je u obliku $x = x_h + x_p$. Partikularno rješenje čitamo iz desne strane proširene matrice, a homogeno može biti samo nul vektor pa je zato rješenje jednoznačno.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da sustav ima točno 1 rješenje. To znači da homogeni sustav $Ax=0$ ima također 1 rješenje $x=0$. Pa zaključujemo da je A regularna

18. Dvostruki umnožak

$(a\times b)\times c$

$d = (a\times b)\times c$

$d = d_x i + d_y j + d_z k$

$$d_x = [(a\times b)\times c]\cdot i = (a\times b)\cdot(c\times i)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow\ = (a\cdot c)b_x - (b\cdot c)a_x$

$\rightarrow\ = (a\cdot c)b_y - (b\cdot c)a_y$

$\rightarrow\ (a\cdot c) = b_z - (b\cdot c)a_z$

Zato:

$d = (a\cdot c)\cdot(b_x i + b_y j + b_z k) - (b\cdot c)(a_x i + a_y j + a_z k)$

$= (a\cdot c)b - (b\cdot c)a$

$\Rightarrow (a\times b)\times c = (a\cdot c)\cdot b - (b\cdot c)a$