6. PRAVAC I RAVNINA

6.1. RAVNINA

6.1.1. Jednadžba ravnine

Ravnina π u prostoru može biti određena na 4 načina:

- s 3 točke koje nisu kolinearne a leže u toj ravnini
- s pravcem i jednom točkom van njega, koji leže u toj ravnini
- s 2 pravca koji leže u toj ravnini
- pomoću jedne točke i jednog vektora koji je okomit na tu ravninu - normale

$n \perp \overrightarrow{T_1T}$ → u vektorskom obliku jedn. ravnine → $n \cdot (r - r_1) = 0$

Jedn. ravnine koja sadrži točku $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i ima vektor normale $n = Ai + Bj + Ck$ jest:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

6.1.2. Opća jednadžba ravnine

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

$n = n_1 \times n_2 \qquad n_1 = (2, -1, 1) \qquad n_2 = (1, 0, 1)$

$$n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = i(-1) - j(2-1) + k(0+1) = -i - j + k$$

6.1.3. Jednadžba ravnine zadane s 3 točke

$M(1,-1,2) \quad N(3,2,0) \quad P(1,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 3-1 & 2-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -2-(-1) & 1-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)(-3-2) - (y+1)(-2) + (z-2)(-2) = 0$$

$$\pi \equiv -5x + 2y - 2z + 11 = 0$$

6.1.4. Segmentni oblik jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad /:-D$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \qquad \text{za } A, B, C \neq 0:$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Točke $P(p,0,0)$, $Q(0,q,0)$ i $R(0,0,r)$ leže u ravnini.
Brojeve p, q i r nazivamo segmentima.

6.1.5. Parametarska jednadžba ravnine

Radij-vektor neke točke T te ravnine može se napisati u obliku

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1T}$$

radij-vektor neke točke T — točka ravnine π — leži u ravnini π

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \lambda a + \mu b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

dobivamo zapis:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_x + \mu b_x \\ y = y_1 + \lambda a_y + \mu b_y \\ z = z_1 + \lambda a_z + \mu b_z \end{cases}$$

Ukratko: $x - 2y + 3z - 5 = 0 \Rightarrow n = i - 2j + 3k$

$y = \lambda, \; z = \mu$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2\lambda - 3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.1.7. Udaljenost točke od ravnine

Udaljenost točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine $\pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$ iznosi:

$$d(T_1, \pi) = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Simetralna ravnina $\boxed{ZAD}$

Jednadžbu ravnine p koja zadrži sve točke koje su jednako udaljene od $\pi_1 \equiv x-3y-2z+1=0$ i $\pi_2 = 2x-y+3z+3=0$

$$d(T, \pi_1) = d(T, \pi_2)$$

$$\frac{|x-3y-2z+1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x-y+3z+3|}{\sqrt{14}} \Rightarrow \text{dva rj. !!}$$

Simetrala dužine $\boxed{ZAD}$

Odredi jednadžbu ravnine p koja sadrži sve točke jednako udaljene od dviju točaka: $T_1(2,-1,3)$ i $T_2(1,2,-1)$

$$d(T, T_1) = d(T, T_2)$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$$

$$p \equiv x-3y+4z-4=0$$

6.1.8. Kut između dviju ravnina

~ ako su paralelne, $\varphi = 0$

~ jednak kutu kojeg zatvaraju normale ravnina

$$\varphi = \measuredangle(n_1, n_2) \quad \text{ili} \quad \varphi = 180° - \measuredangle(n_1, n_2)$$

$$\cos\varphi = |\cos\measuredangle(n_1, n_2)| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

~ ako su paralelne/identične ako je $n_1 = \lambda n_2$, tj. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

~ okomite su ako je $n_1 \cdot n_2 = 0$, tj. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Točke $A(2,5,0)$, $B(1,6,2)$, $C(-1,4,1)$, $D(1,4,3)$, odredi kut između ABC i ABD

$$n_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = i(1+2) - j(-1+6) + k(1+3) = 3i - 5j + 4k$$

$$n_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = i(3+2) - j(-3+2) + k(1+1) = 5i + j + 2k$$

$$\cos\varphi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{|15 - 5 + 8|}{\sqrt{9+25+16}\sqrt{25+1+4}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{30}} = 0,465 \qquad \varphi = 62°18'$$

Jedn. ravnine koja sadrži os Oz, a s ravninom $\rho \equiv 2x + y - \sqrt{5}z$ zatvara kut od $60°$

$n = Ai + Bj \quad m = 2i + j - \sqrt{5}k$

$$\rightarrow \cos 60° = \frac{|n \cdot m|}{|n| \cdot |m|} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow (4A + 2B)^2 = 10(A^2 + B^2)$

$\Rightarrow 3\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$

$\Rightarrow A = -3B$ ili $3A = B$

$$\rightarrow \pi_1 \equiv x + 3y = 0$$

$$\pi_2 \equiv -3x + y = 0$$

6.2. PRAVAC

6.2.1. Jednadžba pravca

~ pravac p u prostoru je određen jednom svojom točkom T_1 i vektorom smjera c

~ T je bilo koja točka pravca $\Rightarrow$ vektor $\overrightarrow{T_1T}$ kolinearan je s vektorom c, stoga postoji skalar λ za koji vrijedi:

$$\overrightarrow{T_1T} = \lambda c$$

~ vektor $\overrightarrow{T_1T}$ kao razlika radijvektora: $\overrightarrow{T_1T} = r - r_1$

~ vektorska jednadžba pravca:

$$p \ldots \ r = r_1 + \lambda c$$

~ u kanonskoj bazi (i, j, k) $\Rightarrow$ $c = li + mj + nk$

$$\Rightarrow \ xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \lambda(li + mj + nk)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda l \\ y = y_1 + \lambda m \\ z = z_1 + \lambda n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ parametarska jednadžba pravca

6.2.2. Kanonska jednadžba pravca

~ izlučivanjem λ iz parametarske jednadžbe dobivamo: $\lambda = \frac{x-x_1}{l}$ ...

~ slijedi: $$\boxed{\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}}$$

~ pravac koji prolazi točkom $T_1(2,1,-2)$ i ima vektor smjera $c = 3i - k$:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$$

6.2.3. Pravac kroz dvije točke

$M(1,2,-1)$, $N(2,0,3)$

Vektor smjera je $c = \overrightarrow{MN} = i - 2j + 4k$

parametarska: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ kanonska: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}$

Pravac p prolazi točkama $A(-2,1,3)$ i $B(0,-1,2)$. Odredi kuteve što ih zatvara s koordinatnim osima

$c = \overrightarrow{AB} = 2i - 2j - k$ $\qquad c_0 = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$

$$c_0 = \frac{c}{|c|} = \frac{2i - 2j - k}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$$

$\alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$, $\beta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = 131°49'$, $\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109°28'$

6.3. Međusobni položaj pravaca i ravnina

6.3.1. Pravac kao presjek dviju ravnina

3 slučaja:
1) || ravnine : nema ih
2) Identične ravnine : njihov presjek je ravnina
3) ravnine se sijeku po pravcu

$\pi_1 \ldots \quad x+y-z+1=0$

$\pi_2 \ldots \quad x+2y+z+2=0$

$$\begin{cases} x+y=z-1 \\ x+2y=-z-2 \end{cases} \qquad z-1+y=-z-2 \qquad \begin{array}{l} x=z-1+2z+1 \qquad x=3z \\ y=-2z-1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x=3z \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$z=\frac{x}{3} \qquad z=\frac{y+1}{-2} \qquad \Rightarrow$ kanonska jedn. $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$

parametarska jedn: $\begin{cases} x=3\lambda \\ y=-2\lambda-1 \\ z=\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow$ jedn. pravca koji prolazi točkom $T=(0,-1,0)$

i ima vektor smjera $c=3i-2j+k$

6.3.2. Kut između pravca i ravnine

~ kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π.

$\rightarrow \psi$

~ kut što ga vektor c zatvara s normalom $= 90° - \psi$

$$\sin\psi = \cos(90° - \psi) = \frac{|c \cdot n|}{|c|\,|n|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

~ pravac ∥ ravnina : $c \cdot n = 0$, tj. $Al + Bm + Cn = 0$

~ pravac ⊥ ravnina: $c = \lambda n$, tj. $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

Jedn ravnine = ? Prolazi točkom $T(1,1,1)$ i ⊥ na $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$

vektor normale = vektor smjera $c = (2,-1,1)$

$$\pi \equiv 2(x-1) - 1(y-1) + 1(z-1) = 0 \equiv 2x - y + z - 2 = 0$$

Jedn ravnine = ? Prolazi pravcem $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ i ⊥ na $p \equiv 2x+3y+z+1=0$

$$n = c \times m = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = i(1-3) - j(1-2) + k(3-2) = -2i + j + k$$

$\pi = -2x + y + z = 0$

6.3.3. Presjek pravca i ravnine

$\pi \dots 2x - y + 4z + 4 = 0$ i pravca $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2} = \lambda$

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

$$2(3\lambda+2) - (\lambda-1) + 4(2\lambda+1) + 4 = 0 \Rightarrow 13\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 2 \\ y = (-1) - 1 \\ z = 2 \cdot (-1) + 1 \end{cases} \qquad P(-1, -2, -1)$$

Točka N (?) simetrična točki $M(1,1,1)$ s obzirom na $\pi \equiv x + y - 2z - 6 = 0$

Odredimo M' (polovište)

$$c = n = i + j - 2k \Rightarrow p \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

~siječe ravninu za $t = 1$, $M'(2, 2, -1)$

~slijedi:

$$2 = \frac{1+a}{2} = \frac{1+b}{2}, \quad -1 = \frac{1+c}{2} \Rightarrow N(3, 3, -3)$$

Jedn pravca p (?), prolazi $A(2, -3, 1)$ i $\perp$ na $q \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{3}$ i siječe ga

$$n = c = (2, -1, 3) \qquad \pi \equiv 2(x-2) - 1(y+3) + 3(z-1) = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z - 10 = 0$$

$$q \cap \pi \qquad q \begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 3 \\ z = 3\lambda + 5 \end{cases}$$

$$2(2\lambda+3) - 1(-\lambda-3) + 3(3\lambda+5) - 10 = 0$$

$$14\lambda + 14 = 0 \qquad 4\lambda + 6 + \lambda + 3 + 9\lambda + 15 - 10$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \qquad B(1, -2, 2) \qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

6.3.4. Pramen ravnina

~ hrpa ravnina koje se sijeku u istom pravcu

$\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_3z + D_2) = 0$$

$$(\mu A_1 + \lambda A_2)x + (\mu B_1 + \lambda B_2)y + (\mu C_1 + \lambda C_2)z + (\mu D_1 + \lambda D_2) = 0$$

Odredi jednadžbu pramena ravnina koje prolaze pravcem $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$ i $\frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$

$\pi_1 \equiv 3x - 2y - 7$ $\quad\pi_2 \equiv y - 3z + 5 = 0$

$$\lambda(3x - 2y - 7) + \mu(y - 3z + 5) = 0 \Rightarrow 3\lambda x + (-2\lambda + \mu)y - 3\mu z - 7\lambda + 5\mu = 0$$

Jedn. ravnine koja prolazi presječnicom ravnina $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$ i $\pi_2 \equiv x - y + 2z - 3 = 0$
i točkom $T(3, 1, 0)$

$$\lambda(2x - 3y + z - 1) + \mu(x - y + 2z - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (2\lambda + 1)x + (-3\lambda - 1)y + (\lambda + 2)z + (-\lambda - 3) = 0$$

$\quad\quad\downarrow 3 \quad\quad\quad \downarrow 1 \quad\quad\quad \downarrow 0$

$\Rightarrow 6\lambda + 3 - 3\lambda - 1 - \lambda - 3 = 0$

$2\lambda - 1 = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2}$

$$\pi \equiv 2x - \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z - \frac{7}{2} = 0 \quad / \cdot 2$$

$$\pi \equiv 4x - 5y + 5z - 7 = 0$$