LINEARNA ALGEBRA

Prvi jesenski ispitni rok (28. 8. 2020.)

- RJEŠENJA ZADATAKA -

1. (a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-2) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & \overset{\downarrow}{1} & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3a+3$$

Matrica A je regularna za $\det A = 3a+3 \neq 0$, tj. $a \neq -1$.

(b) Prema (a) podzadatku slijedi $a_0 = 1$. Za taj a_0 tražimo inverz matrice A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ + \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ |:3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ |\cdot 1 \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ |:2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ + \\ |\cdot(-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \updownarrow \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \updownarrow$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{-\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{6}}}_{A^{-1}}$$

Zato:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow \; = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \leftarrow \; = -4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ A i $A+B$ su regularne matrice

(b) $X = A\left[(A^{-1} - BX^{-1})B + I\right]^{-1}B$

1. način

$$A^{-1}\cdot\Big| \quad X = A\left[(A^{-1} - BX^{-1})B + I\right]^{-1}B \quad \Big|\cdot B^{-1}$$

$$A^{-1}XB^{-1} = \left[(A^{-1} - BX^{-1})B + I\right]^{-1} \quad /^{-1}$$

$$BX^{-1}A = (A^{-1} - BX^{-1})B + I$$

$$BX^{-1}A = A^{-1}B - BX^{-1}B + I$$

$$BX^{-1}A + BX^{-1}B = A^{-1}B + I$$

$$BX^{-1}(A+B) = A^{-1}B + A^{-1}A$$

$$B^{-1}\cdot\Big| \quad BX^{-1}(A+B) = A^{-1}(B+A) \quad \Big|\cdot(A+B)^{-1}$$

$$X^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad /^{-1}$$

$$\Rightarrow X = AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. način

$$X = A\left[(A^{-1}-BX^{-1})B+I\right]^{-1}B \qquad /^{-1}$$

$$X^{-1} = B^{-1}\left[(A^{-1}-BX^{-1})B+I\right]A^{-1}$$

$$X^{-1} = B^{-1}A^{-1}BA^{-1} - X^{-1}BA^{-1} + B^{-1}A^{-1}$$

$$X^{-1}(I+BA^{-1}) = B^{-1}A^{-1}(BA^{-1}+I) \qquad /\cdot(I+BA^{-1})^{-1}$$

$$X^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad /^{-1}$$

$$X = AB = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}.$$

③ (a) Zapišimo parametarske jednadžbe pravaca p_1 i p_2:

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = -t \end{cases}, \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = -2+3s \\ y = 3+2s \\ z = a+s \end{cases}$$

Tražimo vrijednost parametra a takvu da sljedeći sustav jednadžbi ima rješenje:

$$\begin{cases} 1+2t = -2+3s & \Rightarrow \quad 2t-3s = -3 \\ -2+t = 3+2s & \Rightarrow \quad t-2s = 5 \\ -t = a+s & \end{cases} \Rightarrow s=-13,\ t=-21$$

$$\Rightarrow \quad 21 = a-13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=34}$$

(b) Vektor normale tražene ravnine π mora biti okomit na vektore smjera dva pravca pa možemo uzeti njihov vektorski produkt:

$$\vec{n}_\pi = \vec{s}_{p_1} \times \vec{s}_{p_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}.$$

Budući da ta ravnina prolazi npr. točkom $(1,-2,0)$ (koja leži na p_1), njena je jednadžba

$$3(x-1)-5(y+2)+(z-0)=0$$

$$\pi \ldots\ 3x-5y+z=13.$$

4. (a) Teorem. Neka su X, Y vektorski prostori, $\dim X = n$ te neka je $A: X \to Y$ linearni operator. Tada

$$r(A)+d(A)=n.$$

Dokaz.

Prema pretpostavci teorema je jezgra od A, $\operatorname{Ker} A$, vektorski potprostor od X dimenzije d. Neka je $\{e_1,\ldots,e_d\}$ neka baza za $\operatorname{Ker} A$. Nadopunimo ju do baze za X: $\{e_1,\ldots,e_d, e_{d+1},\ldots,e_n\}$.

Tvrdimo da je skup $\{A(e_{d+1}),\ldots,A(e_n)\}$ baza za $\operatorname{Im} A$ (možemo da je tad tvrdnja teorema dokazana). Pokazujemo:

1° $A(e_{d+1}),\ldots,A(e_n)$ razapinju $\operatorname{Im} A$

Neka je $y\in \operatorname{Im} A$ proizvoljan. Tada postoji $x\in X$ takav da $y=A(x)$.

Budući da je $x\in X$, postoje jedinstveni skalari $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ takvi da $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. Slijedi

$$y=A(x)=A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=[\text{linearnost}]$$

$$=\alpha_1\underbrace{A(e_1)}_{=0}+\ldots+\alpha_d\underbrace{A(e_d)}_{=0}+\alpha_{d+1}A(e_{d+1})+\ldots+\alpha_n A(e_n)$$

jer $e_1,\ldots,e_d\in\operatorname{Ker} A$

$$=\sum_{i=d+1}^{n}\alpha_i A(e_i)$$

Dakle, $A(e_{d+1}),\ldots,A(e_n)$ razapinju $\operatorname{Im} A$.

2° $\{A(e_{d+1}),\dots,A(e_n)\}$ je linearno nezavisan skup vektora

Neka su $\lambda_{d+1},\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari takvi da

$$\lambda_{d+1}A(e_{d+1})+\dots+\lambda_n A(e_n)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n)=0$$

Dakle, mora biti $\sum_{i=d+1}^{n}\lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} A$ pa postoje (jedinstveni) skalari

$\mu_1,\dots,\mu_d \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n=\mu_1 e_1+\dots+\mu_d e_d$$

$$\Leftrightarrow \quad -\mu_1 e_1-\dots-\mu_d e_d+\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n=0$$

No odavde zbog linearne nezavisnosti skupa $\{e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n\}$ (to je baza za X) slijedi $\mu_1=\dots=\mu_d=\lambda_{d+1}=\dots=\lambda_n=0$.

Dakle, $\{A(e_{d+1}),\dots,A(e_n)\}$ je baza za $\operatorname{Im} A$ pa slijedi:

$$r(A)+d(A)=(n-d)+d=n.$$

U slučaju da je $d=n$, tada bi bilo $\operatorname{Ker} A = X$ pa bi A bio nul-operator (svaki vektor preslikava u nul-vektor), odakle bi slijedilo

$$r(A)=\dim \operatorname{Im} A=\dim\{0\}=0,$$

tj. $d(A)+r(A)=n+0=n$, pa tvrdnja teorema ponovno vrijedi.

Q.E.D.

(b) Neka je $A(0,0,1)=(x,y,z)$. Tada je matrični zapis od A u paru kanonskih baza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 3 & z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ \quad + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-2x \\ 0 & 0 & z-3x \end{bmatrix}$$

Dakle, rang ove matrice je barem 1, a uočimo da je najviše 2 (ova matrica nije regularna jer ima dva jednaka stupca).

Tako, na primjer, za $x=0$, $y=z=1$ dobivamo $r=2$ i $d=3-r=1$ (prema teoremu o rangu i defektu), dok za $x=y=z=0$ dobivamo $r=1$ i $d=2$.

5. (a) A je kompozicija dva operatora kojima lako možemo odrediti matrične zapise u kanonskoj bazi pa imamo

$$A(e) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrica operatora}\\ \text{centralne simetrije}\\ \text{s obzirom na}\\ \text{ishodište}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrica rotacije}\\ \text{oko ishodišta}\\ \text{za } \pi/6}} = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

↳ geometrijski, A je operator rotacije oko ishodišta za $\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

(b) A je regularan operator, što možemo pokazati na mnogo načina:

1° $\det(A(e)) = 1 \neq 0 \Rightarrow A(e)$ je regularna matrica

2° $r(A(e)) = 2 \Rightarrow A(e)$ je regularna matrica

3° A je rotacija oko ishodišta za $\frac{7\pi}{6}$, inverz joj je rotacija oko ishodišta za $-\frac{7\pi}{6}$, tj. $\frac{5\pi}{6}$

4° A je kompozicija dva regularna operatora

itd.

⑥ (T1) NETOČNO

Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$. Imamo

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+1$$

$\Rightarrow$ A nema realnih svojstvenih vrijednosti

(T2) NETOČNO

Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ ima samo jednu svojstvenu vrijednost

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1.$$

(T3) TOČNO

Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ regularna matrica, onda vrijedi

$$0 \neq \det A = (-1)^n \det(-A) = (-1)^n \det(0 \cdot I - A) = (-1)^n \mathcal{K}_A(0),$$

tj. 0 ne može biti svojstvena vrijednost od A jer nije nultočka njenog karakterističnog polinoma

(T4) TOČNO

Uočimo najprije da su elementi glavne dijagonale od A upravo njene svojstvene vrijednosti - naime, za karakteristični polinom od A imamo

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda-a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33}) \cdot \ldots \cdot (\lambda-a_{nn}).$$

Budući da su ti brojevi po pretpostavci zadatka različiti, pripadni svojstveni vektori su svi linearno nezavisni. Budući da je tih vektora ukupno n, oni čine bazu u kojoj se A može dijagonalizirati.