MEĐUISPIT
21.11.2019.

1. (10 bodova) Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *idempotentna* ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

   (a) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je matrica $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 1/4 & \alpha \end{bmatrix}$ idempotentna.

   (b) Koje su moguće vrijednosti determinante idempotentne matrice $\mathbf{A}$? Svoju tvrdnju dokažite.

   (c) Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ idempotentna ako i samo ako je matrica $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ idempotentna.

2. (10 bodova)

   (a) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice. Napišite i izvedite formulu u kojoj $(\mathbf{AB})^{-1}$ izražavamo preko $\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{B}^{-1}$.

   (b) Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Dokažite da su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ regularne te izračunajte $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$.

3. (10 bodova) U ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora među sljedećim vektorima

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

4. (10 bodova)

   (a) Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \end{cases}.$$

   (b) Odredite opće rješenje pripadnog homogenog linearnog sustava.

   (c) Odredite bilo koja dva različita partikularna rješenja x_p, x_p' nehomogenog sustava iz (a) dijela zadatka.

5. (10 bodova) Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nekomplanarni vektori takvi da je $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 1$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 30^\circ$ te neka je kut koji vektor $\mathbf{c}$ zatvara s ravninom koju razapinju vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jednak 60°. Izračunajte

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Napomena: Ispit se piše **120 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.