

Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)

Учебный научно-исследовательский центр аэромеханики и летательной
техники

В-spline аппроксимация дискретных наборов данных. Сплайны высоких степеней

Г. Бачакашвили, И. Максименко, Н. Теслюк, А. Хорин



Жуковский

13 мая 2020 г.

Содержание

Преамбула	2
1 Базисные сплайны	3
1.1 Случай \mathbb{R} . Основные определения	3
1.1.1 Сплайн. Базисный сплайн	3
1.1.2 Коэффициенты аппроксимации	3
1.2 Случай \mathbb{R}^m . Обобщение	4
1.3 Случай \mathbb{R}^2 . Трёхмерные кривые	5
1.3.1 Общие соображения	5
1.3.2 Матрица коэффициентов аппроксимации	6
1.3.3 Смешанные B-сплайны. Форм-параметр	7
1.4 Теоретические заключения	8
2 Описание алгоритма программы	9
2.1 Структура программы	9
2.1.1 Общее описание алгоритма	9
2.1.2 Математическое описание	9
2.1.3 Вычислительное ядро и макроструктура алгоритма	9
2.1.4 Схема реализации последовательного алгоритма	9
2.1.5 Оценка сложности последовательной реализации	10
2.1.6 Информационный граф	10
2.1.7 Описание ресурса параллелизма	10
2.1.8 Входные и выходные данные	11
2.1.9 Свойства алгоритма	12
2.2 Тесты и примеры	12
Литература	14

Преамбула

В данной работе изложены основные понятия и формулы теории базисных сплайнов (от англ. *B-spline*), а также описаны возможные способы и методы численного построения B-spline аппроксимаций на параллельных вычислительных системах. Ключевым примером на протяжении всей статьи является решение задачи аппроксимации двумерной и трёхмерной кривых по заранее известным узлам, а также сравнение полученных результатов с точным аналитическим видом данной кривой. В ходе разработки текущей статьи были использованы различные вспомогательные источники, среди которых одними из основных являются работа профессора университета Ханчжоу Дзяньцзы (от англ. *Hangzhou Dianzi University*) Гана Сюя (от англ. *Xu Gang*) — «Extended Cubic Uniform B-spline and α -B-spline», посвящённая анализу смешивания кубических базисных сплайнов со сплайнами высоких порядков (т.н. *α -B-spline singular blending technique*), а также работа Н.Н. Калиткина и Н.М. Шляхова «B-сплайны высоких степеней».

Использование B-сплайнов находит широкое применение во множестве исследуемых задач и проблем компьютерного моделирования, обработки и анализа статистических данных, упрощения методов численного интегрирования и дифференцирования сложных функций и функционалов. Зачастую на практике ограничиваются дважды непрерывно дифференцируемыми кубическими сплайнами, которые, имея тот же порядок аппроксимации, что и другие интерполяционные полиномы 3 степени, дают абсолютную погрешность в 6 раз меньше по сравнению с теми же полиномами.

Построение сплайн-аппроксимаций высоких же степеней обычно оказывается весьма затратной по времени и вычислительным ресурсам процедурой (производительность ЭВМ, плотность точек расчётной сетки), поэтому практическим интересом в данной работе является реализация алгоритма параллельного построения базисных сплайнов в пространстве двумерных и трёхмерных кривых и подсчёт получаемого ускорения для сравнения с теоретическим значением.

1 Базисные сплайны

1.1 Случай \mathbb{R} . Основные определения

1.1.1 Сплайн. Базисный сплайн

Определение. *Сплайн* — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом). Максимальная из степеней использованных полиномов p называется *степенью сплайна*. Разность между степенью сплайна и получившейся гладкостью называется *дефектом сплайна* d .

Будем рассматривать полиномиальные сплайны p -степени $B_p(x)$ с дефектом $d = p - 1$ на расчётной сетке $D = \{x_n : n = \overline{0, N}\}$ (необязательно равномерной).

Определение. Сплайн $B_{pn}(x)$ порядка p называется *базисным*, если он отличен от нуля на минимально возможном числе интервалов сетки, ближайших к x_n .

Для дальнейших выкладок нам потребуется ещё одна обобщённая базисная функция — x_+^p , непрерывная при $p > 0$:

Определение. $x_+^p = \begin{cases} x^p, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$

Замечание. $\frac{d}{dx} x_+^p = p x_+^{p-1}.$

Замечание. При $p = 0$ функция x_+^p переходит в функцию Хевисайда $\theta(x)$.

Пусть выбран некоторый узел $x_n : x_{n'} \leq x_n \leq x_{n''}$ (числа n' и n'' не произвольны, но это будет оговорено позже). Будем считать, что $B_{pn}(x) = 0$, при $x \leq x_{n'}$, тогда справедливо следующее представление:

$$B_{pn}(x) = \sum_{k=0}^{n''-n'} b_{nk} (x - x_{n'+k})_+^p \quad (1)$$

1.1.2 Коэффициенты аппроксимации

Для того, чтобы до конца удовлетворить определению базисного сплайна, необходимо подобрать коэффициенты b_{nk} таким образом, чтобы $B_{pn}(x) \equiv 0$, при $x \geq x_{n''}$. Т.к. $B_{pn}(x)$ — полином, то последнее условие равносильно обнулению всех производных с нулевой по p -ую при $x \geq x_{n''}$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{n''-n'} b_{nk} (x_{n''} - x_{n'+k})_+^q = 0, \quad q = \overline{0, p} \quad (2)$$

Это — однородная СЛАУ¹. Чтобы она была совместна, то, как следует из теоремы Кронекера-Капелли, число уравнений должно быть равно числу неизвестных переменных b_{nk} . Однако такой случай нас не устраивает, так как гораздо проще масштабировать базисные функции, нежели искать конкретный вид аппроксимации в каждой ситуации. Поэтому будем определять решение с точностью до множителя, т.е. $n'' - n' + 1 = (p + 1) + 1$.

Если узлы $x_{n'}$ и $x_{n''}$ расположены приблизительно симметрично относительно узла x_n ($x_{n'} + x_{n''} \approx 2x_n$), то, после нехитрых математических выкладок, как показывается, в [1], коэффициенты b_{nk} могут быть вычислены по следующим формулам:

$$b_{nk} = - \prod_{i=1(i \neq k)}^{p+1} \frac{x_{n'} - x_{n'+i}}{x_{n'+k} - x_{n'+i}}, \quad k = \overline{0, p+1} \quad (3)$$

Замечание. Заметим, что в случае равномерной сетки $D = D_h = \{x_n : n = \overline{0, N}, x_{n+1} - x_n = h = const\}$, формулы (3) сильно упрощаются:

$$b_{nk} = (-1)^k h^p C_{p+1}^k, \quad k = \overline{0, p+1}, \quad (4)$$

где $C_{p+1}^k = \frac{(p+1)!}{k!(p-k+1)!}$ — биномиальный коэффициент.

1.2 Случай \mathbb{R}^m . Обобщение

При рассмотрении пространств большей размерности глобальное определение B-сплайна сводится к одномерному случаю. А именно, введём сетку в АЕП² \mathbb{R}^m $D = \{\mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) : n = \overline{0, N}\}$ (во избежание путаницы, узлы будем нумеровать верхним индексом в скобочках, т.к. нижним индексом в АЕП принято обозначать порядковый номер компоненты точки $\mathbf{x}^{(n)}$).

Определение. Сплайн $\mathbf{B}_p^{(n)}(x)$ порядка p будем называть *базисным*, если его компоненты являются базисными сплайнами порядка не выше p , т.е. $\forall i = \overline{1, m} \rightarrow (B_p^{(n)})_i(x)$ представимы в виде (1).

Замечание. Введённые таким образом «векторные» B-сплайны определены универсально.

¹Система линейных алгебраических уравнений;

²Арифметическое евклидово пространство.

В целом и на произвольной сетке D аналогично (2) можно определять коэффициенты $(b_k^{(n)})_i$, однако в дальнейшем мы ограничимся случаем $m = 2$ и будем рассматривать только равномерные сетки, которые удобно определим следующим образом (хотя результаты легко обобщаются и на неравномерный случай).

Определение. Сетка $D_h = \{\mathbf{x}^{(n)} = (x_1, x_2) : n = \overline{0, N}, x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)} = h_1 = \text{const}, x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)} = h_2 = \text{const}\}$ называется *равномерной* в \mathbb{R}^2 .

Замечание. Всё же отметим, что неравномерные сетки имеет огромное преимущество над равномерными при работе с «проблемными» участками функций (т.н. *зонами пограничных слоёв*).

1.3 Случай \mathbb{R}^2 . Трёхмерные кривые

1.3.1 Общие соображения

Пусть задан дискретный набор точек в АЕП $\mathbb{R}^3 - P = \{\mathbf{P}^{(n)} = (P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}), n = \overline{0, N}\}$. При этом для функций двух переменных, заданных явно, например, $x_3 = f(x_1, x_2)$, понятие сетка D следует трактовать, как сужение области определения множества P на \mathbb{R}^2 (первые две компоненты). Такое сужение будем обозначать $P \supset D$.

Будем считать, что введена параметризация для функции перехода от узла к узлу — $\Phi = \{u \in [0, 1], \varphi_i^{(n)}(u) : \varphi_i^{(n)}(0) = P_i^{(n)}, \varphi_i^{(n)}(1) = P_i^{(n+1)}, n = \overline{0, N-1}, i = 1, 2, 3\}$. Такая параметризация существует, т.к. отрезок $[0, 1]$ эквивалентен множеству \mathbb{R} . Ввиду того, что ЭВМ не допускают непрерывных величин, параметр u тоже должен быть определён дискретным образом. Каким именно — не принципиально, однако, рассматривая совокупности равномерных разбиений, будем полагать, что $u \in U^{(n)} = \{u_l : u_l = lh_u^{(n)}, l = \overline{0, L^{(n)}}\}$.

Замечание. Сразу отметим, что, говоря про равномерное разбиение между узлами, вовсе не предполагается эквидистантное расположение точек из множества P . Промежуточные же «узлы» фиктивны, но расположены равномерно и в каждом конкретном случае их число определяется исключительно из свойств рассматриваемой задачи.

При сделанных допущениях теперь можно считать, что для векторного B-сплайна $\mathbf{B}_p^{(n)}(u)$ имеется представление [2], [3]:

$$\mathbf{B}_p^{(n)}(u) = \sum_{k=0}^{n''-n'} b_k^{(n)}(u) \mathbf{P}^{(n'+k)}, \quad (5)$$

где $b_k^{(n)}(u) = \tilde{b}_k^{(n)}(\varphi_1^{(n)}(u), \varphi_2^{(n)}(u), \varphi_3^{(n)}(u))$ — полиномиальные коэффициенты порядка не выше

p .

1.3.2 Матрица коэффициентов аппроксимации

Сформулируем классическую задачу определения коэффициентов В-сплайн *аппроксимации* (не следует путать с *интерполяцией*, т.к. в общем случае базисные сплайны не обязаны проходить точно через заданные узлы $\mathbf{P}^{(n)}$).

Исходя из (5), пусть

$$b_k^{(n)}(u) = \sum_{q=0}^p b_{kq}^{(n)} u^q \quad (6)$$

Здесь, в отличие от сказанного в п. 1.1.2, считаем, что $n'' - n' + 1 = p + 1$ (это вызвано тем, что теперь «вес» нашей функции определяют только сами узлы $\mathbf{P}^{(n)}$). Без ограничения общности положим, что $n' = n$. Из представления (6) следует, что каждый полином $b_k^{(n)}(u)$ имеет $p + 1$ своих коэффициентов $b_{kq}^{(n)}$, таким образом, общее число неизвестных коэффициентов — $(p + 1)^2$. Все они являются решением следующей совокупности уравнений:

1) условие гладкости порядка $p - 1$:

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dx^m} b_0^{(n)}(1) = 0 \\ \frac{d^m}{dx^m} b_k^{(n)}(1) = \frac{d^m}{dx^m} b_{k-1}^{(n)}(0), \quad k = \overline{1, p} \quad , m = \overline{0, p-1} \\ \frac{d^m}{dx^m} b_p^{(n)}(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

2) дополнительная нормировка:

$$\sum_{k=0}^p b_k^{(n)}(0) = 1 \quad (8)$$

Замечание. Система (7)-(8) совместна, т.к. число уравнений равно числу неизвестных.

Замечание. Т.к. система функций $\{1, u, u^2, \dots, u^p\}$ образует базис в $C^{p-1}([0, 1])$, то коэффициенты разложения также принято записывать в матричной форме следующего вида:

$$(\mathbf{b}^{(n)})^T(u) = \begin{pmatrix} b_0^{(n)}(u) & b_1^{(n)}(u) & \dots & b_{p-1}^{(n)}(u) & b_p^{(n)}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u & \dots & u^{p-1} & u^p \end{pmatrix} \mathcal{B}_p^{(n)}, \quad (9)$$

$$\text{где } \mathcal{B}_p^{(n)} = \begin{bmatrix} b_{00}^{(n)} & b_{10}^{(n)} & \dots & b_{p-1,0}^{(n)} & b_{p0}^{(n)} \\ b_{01}^{(n)} & b_{11}^{(n)} & \dots & b_{p-1,1}^{(n)} & b_{p1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{0,p-1}^{(n)} & b_{1,p-1}^{(n)} & \dots & b_{p-1,p-1}^{(n)} & b_{p,p-1}^{(n)} \\ b_{0p}^{(n)} & b_{1p}^{(n)} & \dots & b_{p-1,p}^{(n)} & b_{pp}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ — матрица коэффициентов В-сплайн разложе-}$$

ния, а саму функцию В-сплайна — почти как скалярное произведение:

$$\mathbf{B}_p^{(n)}(u) = (\mathbf{b}^{(n)})^T(u) \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}^{(n+p)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Замечание. При $p = 3$ и $p = 4$ на равномерном разбиении $U^{(n)} = U_{h_u}$ ([4]) матрицы коэффициентов аппроксимации имеют вид соответственно

$$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_4 = \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 & 0 \\ -4 & -12 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

1.3.3 Смешанные В-сплайны. Форм-параметр

Иногда искусственное условие $n'' - n' + 1 = p + 1$ не накладывается на узлы сетки. Появляется степень свободы в смысле подчёркивания формы сплайн-аппроксимации — вводятся т.н. *форм-параметры* (от англ. *shape-parameter*) — глобальные переменные, отвечающие за величину «приближения» к узлам. Полагая $n'' - n' = 3$, будем считать

$$b_k^{(n)}(u; \lambda) = \sum_{q=0}^p b_{kq}^{(n)}(\lambda) u^q = \tilde{b}_k^{(n)}(\varphi_1^{(n)}(u), \varphi_2^{(n)}(u), \varphi_3^{(n)}(u), \lambda), \quad (12)$$

где λ — форм-параметр.

Методика, описанная в ([5], [6]), даёт возможность получать «расширенные» до более высоких степеней кубические В-сплайны. Для определения коэффициентов $b_{kq}^{(n)}(\lambda)$, к примеру, в случае $p = 4$, достаточно потребовать, чтобы при $\lambda = 0$ на равномерном разбиении $U^{(n)} = U_{h_u}$, смешанный В-сплайн 4 степени давал стандартный кубический В-сплайн. Не вдаваясь в подробности данного процесса, сразу запишем матрицу искомых коэффициентов $\hat{\mathcal{B}}_4(\lambda)$:

$$\hat{\mathcal{B}}_4(\lambda) = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2(8 + \lambda) & 4 - \lambda & 0 \\ -12 & 0 & 12 & 0 \\ 3(4 + 3\lambda) & -12(2 + \lambda) & 6(2 + \lambda) & 0 \\ -4(2 + \lambda) & 12(1 + \lambda) & -12 & 4(1 - \lambda) \\ 3\lambda & -3\lambda & -3\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Замечание. При $p = 5$ и $p = 6$ матрицы коэффициентов аппроксимации имеют вид соответственно

$$\hat{\mathcal{B}}_5(\lambda) = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 2(15 + \lambda) & 5 - \lambda & 0 \\ 20 & 0 & 20 & 0 \\ 10(3 + \lambda) & -20(3 + \lambda) & 10(3 + \lambda) & 0 \\ -20(1 + \lambda) & 40(1 + \lambda) & -20(1 + \lambda) & 0 \\ 5(1 + 3\lambda) & -5(1 + 7\lambda) & -5(1 - 5\lambda) & 5(1 - \lambda) \\ -4\lambda & 12\lambda & -12\lambda & 4\lambda \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_6(\lambda) = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 2(24 + \lambda) & 6 - \lambda & 0 \\ -30 & 0 & 30 & 0 \\ 15(4 + \lambda) & -30(4 + \lambda) & 15(4 + \lambda) & 0 \\ -20(3 + 2\lambda) & 40(3 + 2\lambda) & -20(3 + 2\lambda) & 0 \\ 15(2 + 3\lambda) & -30(2 + 3\lambda) & 15(2 + 3\lambda) & 0 \\ -6(1 + 4\lambda) & 6(3 + 7\lambda) & -6(3 + 2\lambda) & 6(1 - \lambda) \\ 5\lambda & -5\lambda & -5\lambda & 5\lambda \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Замечание. Множество допустимых значений форм-параметра λ : $\Lambda = [-p(p - 2), 1]$, $p = 4, 5, 6$. При данных λ коэффициенты $b_k^{(n)}(u; \lambda)$ неотрицательны.

Замечание. Соответствующие этим матрицам B-сплайны также представляются в виде

$$\mathbf{B}_p^{(n)}(u; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & u & \dots & u^{p-1} & u^p \end{pmatrix} \hat{\mathcal{B}}_p(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}^{(n+3)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

1.4 Теоретические заключения

Введённые определения и обозначения мы будем использовать в следующем разделе данной статьи, посвящённого описанию алгоритма программы, реализующей параллельные вычисления и построения B-сплайн аппроксимаций. Самостоятельный интерес представляет сравнение результатов работы программы при различных p и λ . Для этого будут приведены соответствующие графические иллюстрации.

2 Описание алгоритма программы

2.1 Структура программы

2.1.1 Общее описание алгоритма

Главной задачей программы является построение В-сплайн аппроксимации функции по заданному набору дискретных значений. Для упрощения установления соответствия получаемых данных с действительностью уже в процессе выполнения сама программа производит вычисление проекции теоретической функции на расчётную сетку (двумерная кривая), которая и служит моделью производства дискретных значений.

2.1.2 Математическое описание

Программа состоит из, в общей сложности, 8 файлов: «main.cpp», «Vector.cpp», «Vector.h», «Curve.cpp», «Curve.h», «BSpline.cpp», «BSpline.h» и заголовочного файла библиотеки парсинга (от англ. *parsing*³) функций — «atmsp.h». По заданным узлам (или, что то же самое, виду функции) строится В-сплайн аппроксимация на любом указанном множестве, согласно (16) и (12) (с зависимостью коэффициентов аппроксимации от форм-параметра, п. 1.3.3), а также матрицам (13), (14) и (15). При этом, каждому внутреннему i -ому узлу в цикле ставится в соответствие действительное число $u = \frac{i}{_steps}$, тем самым определяется описанная в п. 1.3.1 параметризация Φ .

2.1.3 Вычислительное ядро и макроструктура алгоритма

Вычислительное ядро алгоритма определяется подсчётом значений В-сплайн аппроксимации на локальных участках, а именно, последовательностями сложений векторов и умножений их на число. Макроструктура алгоритма представляет собой множество вычислений аппроксимаций и записи их в файл.

2.1.4 Схема реализации последовательного алгоритма

Схему можно представить в виде следующих 3 блоков:

- 1) даны функция $y = f(x)$, отрезок $[a, b]$ и число внутренних узлов аппроксимации N , количество шагов между узлами M , порядок В-сплайна p и значение форм-параметра λ ;

³Дословный перевод — «разбор». В целом же данное понятие применяется для распознавания различных синтаксических или информационных выражений путём разделения на более мелкие структурные единицы.

- 2) между каждым из узлов, начиная со второго и заканчивая предпоследним, строится последовательно $M + 1$ узел (с учётом крайних), в которых вычисляется величина (16), с учётом выбранных матриц (13), (14) или (15);
- 3) после окончания всех вычислительных процедур происходит запись посчитанных данных в файл с целью дальнейшего графического анализа любым известным способом.

2.1.5 Оценка сложности последовательной реализации

Для вычисления значения в каждом построенном узле требуется строго константное число делений (порядка 5–6), умножений (порядка 20–35) и сложений (порядка 20–35). Таким образом, время работы программы есть $T = O(NM)$, где N — число внутренних точек аппроксимации, а M — число шагов между узлами.

2.1.6 Информационный граф

На рисунке 1 представлен информационный граф алгоритма для простейшего случая 3-х исполнителей, 6 узлов с шагом 2 (графы больших размерностей строятся аналогично). Обращение к данным в памяти, или, что то же самое, парсинг данной функции можно считать операцией, выполняемой за константное время. Далее производится расчёт, описанный в п. 2.1.4 и запись в память, осуществляемая с помощью *кругового алгоритма взаимного исключения*⁴. Условные обозначения приведены на рисунке. Знаком умножения (\times) для краткости обозначено умножение на число (12).

2.1.7 Описание ресурса параллелизма

При числе N внутренних узлов и M шагов между ними:

- **высота ЯПФ** = $\text{const} \cdot \max\{\log_2 K, NM/K\}$, где K — число исполнителей;
- **ширина ЯПФ** = $\text{const} < 100$.

При малых объёмах входных данных гораздо более выгодно не использовать распараллеливание, из-за огромных накладных расходов на рассылку данных и общение между процессами. Неограниченный рост числа исполнителей K также может привести к увеличению времени выполнения алгоритма. Рациональным соотношением в данном случае является $K = \lfloor NM/3 \rfloor$

⁴Право на запись в общую память каждый процесс получает только при наличии специального маркера, который последовательно передаётся от текущего процесса последующему, начиная с процесса ранга 0.

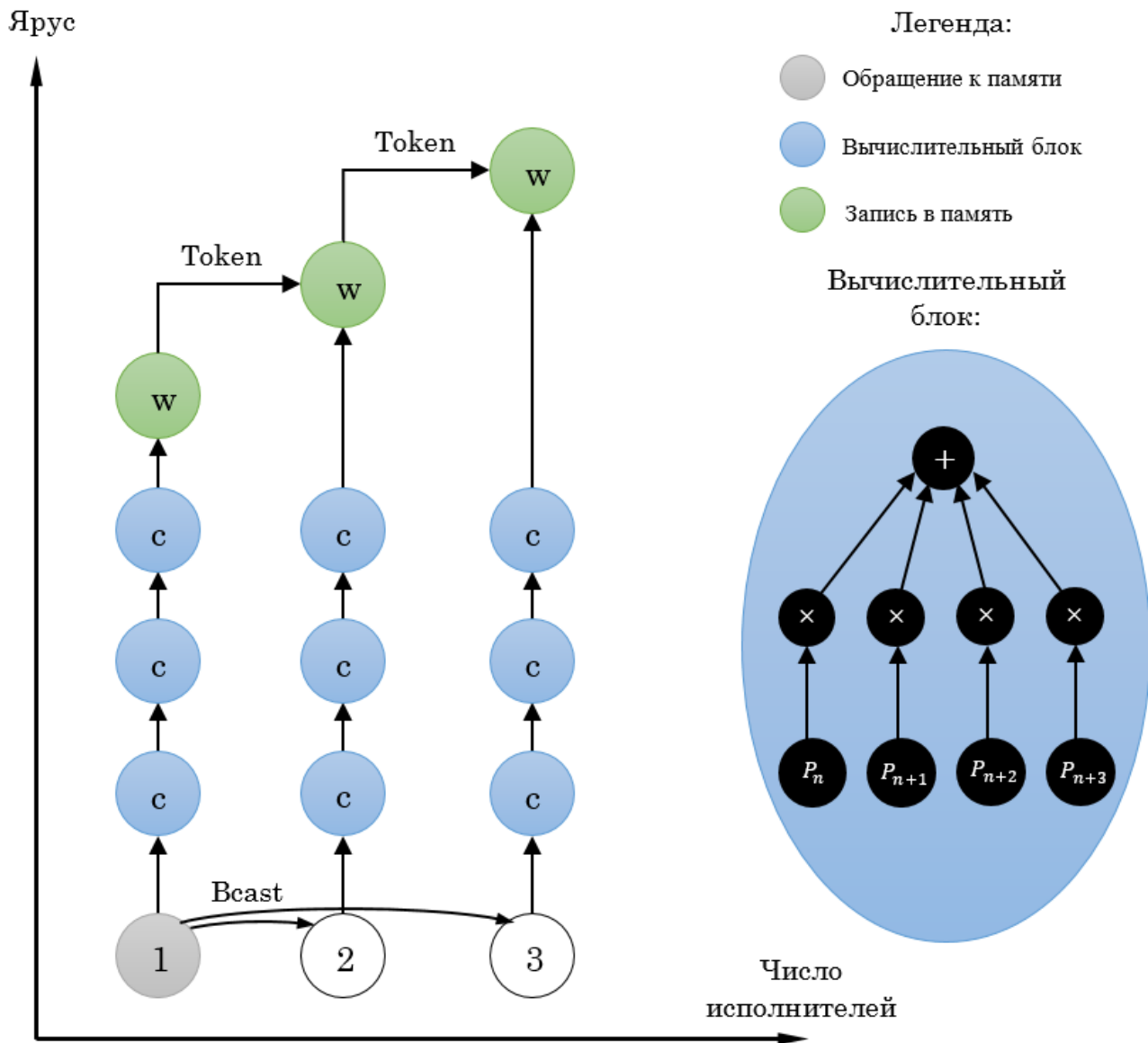


Рис. 1. Информационный граф

2.1.8 Входные и выходные данные

Входные данные:

- строка **func** длины 128 байт — логически и синтаксически правильная последовательность символов, представляющих аналитический вид функции, записанной согласно всем математическим правилам;
- тройка чисел **a**, **b**, **N** — левая и правая границы и число внутренних узлов аппроксимации ($a, b \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$);
- положительное число **M** — количество шагов между узлами;
- положительное число **p** — порядок В-сплайна;

- число λ — форм-параметр (см. п. 1.3.3);

Выходные данные:

- файл с данными аппроксимации «test_approx.txt»;
- файл с данными проекции введённой функции на сетку «test_func.txt»;

Объём входных данных: $\text{len}\{\text{func}\}$ символов (по умолчанию — 128) + 6 чисел.

Объём входных данных: $2 * 3 * (N - 1) * (M + 1)$.

2.1.9 Свойства алгоритма

Оценка *вычислительной мощности*: $\frac{NM}{134K}$.

Оценка *сбалансированности*: алгоритм в целом является сбалансированным, т.к. операции типа сложения и умножения, а также деления не перегружают вычислительные ресурсы отдельных исполнителей.

Оценка *детерминированности*: алгоритм является детерминированным.

2.2 Тесты и примеры

Здесь приведены примеры кривых на плоскости.

Для анализа наилучшей аппроксимации в проблемных местах в качестве примера была выбрана функция $y(x) = x^3 e^{-x^2}$, $x \in [0, 10]$, $N = 8$, $M = 1000$ (Рис. 2). Соответствующие носители — В-сплайны 3, 4, 5 и 6 степеней.

Замечание. Согласно сказанному в п. 1.3.3, линия красного цвета — кубический В-сплайн — есть результат аппроксимации сплайном 4 степени, при $\lambda = 0$.

Любопытен и результат аппроксимации даже относительно медленно осциллирующих функций, таких как $y(x) = \sin x$, $x \in [-5, 5]$, $N = 8$, $M = 1000$. На рис. 3 показана разница в аппроксимации между В-сплайном 6 степени при $\lambda = 0$ (фактически — 5 степень)

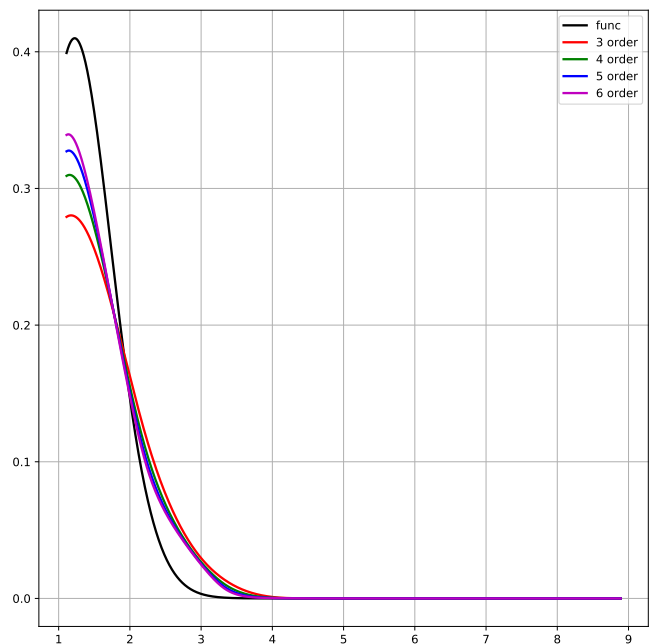


Рис. 2. Аппроксимация функции $y(x) = x^3 e^{-x^2}$

и при $\lambda = -24$.

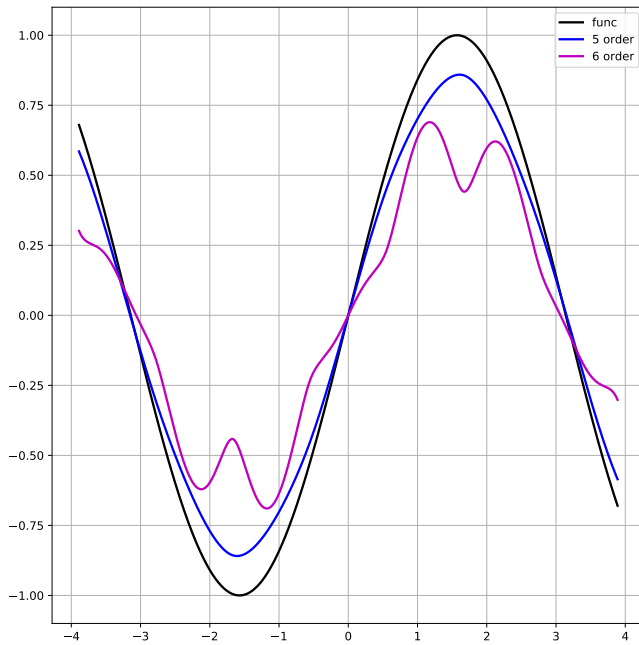


Рис. 3. Аппроксимация функции $y(x) = \sin x$

находится в полном соответствии с законом Амдала при приблизительно половине нераспараллеленной работы ($\alpha = 0.5$):

$$S = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{30}} \approx 2.00$$

Таким образом, из графиков видно, что скорость сходимости аппроксимации к функции достаточно невелика, что однако не позволяет сделать вывод о её отсутствии.

Точнейшая аппроксимация получается в случае линейных функций, таких как $y(x) = x$, $x \in [0, 10]$, $N = 100$, $M = 1000$ (Рис. 4).

На втором примере также было произведено сравнение времени работы алгоритма в случае последовательного и параллельных вычислений при $x \in [0, 100]$, $N = 1000$, $M = 1000$. В случае одного исполнителя

Work time: 11.34545 seconds,

а уже в случае 30 —

Work time: 7.18723 seconds,

Полученное соотношение в ~ 1.57 составляет практическое ускорение алгоритма, что

находится в полном соответствии с законом Амдала при приблизительно половине нераспараллеленной работы ($\alpha = 0.5$):

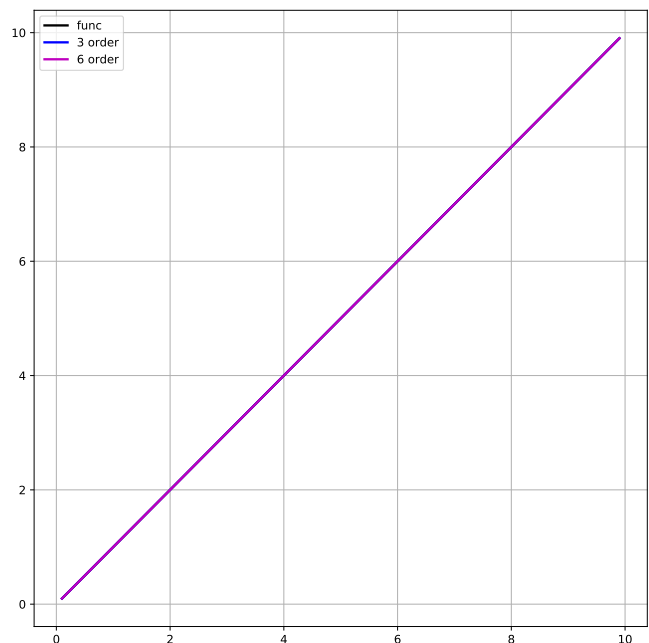


Рис. 4. Аппроксимация функции $y(x) = x$

Литература

- [1] Н. Н. Калиткин, Н. М. Шляхов. В-сплайны высоких степеней. Матем. моделирование, 1999, том 11, номер 11, 64–74;
- [2] Yonggang Lü, Guozhao Wang, Xunnian Yang. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2002, стр. **383—384**;
- [3] QIN Kaihuai. A matrix method for degree-raising of B-spline curves. SCIENCE IN CHINA (Series E), 1996, стр. **78—80**.
- [4] Les Piegl, Wayne Tiller. B-Spline approximation. [Доступ: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F0-387-28452-4_7.pdf], 1996, стр. **268—269, 302**;
- [5] XU Gan, WANG Guo-Zhao. Extended cubic uniform B-spline and α -B-spline. ACTA AUTOMATICA SINICA, 2008;
- [6] Houjun Hang, Xing Yao, Qingqing Li, Michel Artiles. Cubic B-spline curves with shape parameter and their applications. Hindawi: Mathematical Problems in Engineering, 2017, стр. **1—3**.