Metody numeryczne
Lista nr 4

rok akademicki 2014/2015, semestr zimowy

Listopad 2014 r.

`interpolacja wielomianowa funkcji jednej zmiennej`

Niech dany będzie zbiór punktów $\mathbf{Z} = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$ takich, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Zaimplementować następujące 3 metody rozwiązania zadania interpolacyjnego:

1. **Wielomianu interpolacyjny w postaci Lagrange'a.**
   Jeśli oznaczymy
   $$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \qquad (k = 0, \ldots, N)$$
   to wielomian postaci
   $$W_N(x) = \sum_{k=0}^{N} L_k(x) y_k \tag{1}$$
   jest wielomianem interpolacyjnym.

2. **Wielomian interpolacyjny w postaci Newtona.**
   Niech
   $$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_k(x) &= \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \qquad (k = 1, \ldots, N). \end{aligned}$$
   oraz
   $$\begin{aligned} b_0 &= f[x_0], \\ b_k &= f[x_0, \ldots, x_k] \qquad (k = 1, \ldots, N), \end{aligned}$$
   są ilorazami różnicowymi, które są określone rekurencyjnie wzorami:
   $$\begin{aligned} f[x_i] &= y_i, \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \\ f[x_i, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$W_N(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k p_k(x) \tag{2}$$

jest wielomianem interpolacyjnym.

3. **Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego z układu warunków interpolacyjnych**
   Warunki interpolacyjne dla wielomianu stopnia N można zapisać w postaci układu

$$\begin{bmatrix} x_0^N & x_0^{N-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^N & x_1^{N-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ x_N^N & x_N^{N-1} & \dots & x_N^2 & x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ a_{N-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

   Jest to układ o macierzy Vandermonde'a. Przy założeniu, że punkty w zbiorze $\mathbf{Z}$ są parami różne macierz ta jest zawsze nieosobliwa. Rozwiązując ten układ względem wektora $[a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ wielomian interpolacyjny można zapisać w postaci naturalnej

$$W_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i. \tag{3}$$

Zadania

1. **Interpolacja znanej funkcji**
   Korzystając z zaimplentowanych algorytmów skonstruować wielomiany interpolacyjne dla następujących węzłów przedziału $[a, b]$

   (a) węzły równoodległe: $x_i = a + \frac{b-a}{15} \cdot i, \quad i = 0, \dots, 15,$

   (b) przeskalowane przesunięte zera 16-tego wielomianu Czebyszewa I rodzaju: $x_i = \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2 \cdot i - 1}{2n} \cdot \pi\right) + \frac{a+b}{2}, \quad i = 1, \dots, n = 16.$

   Dane interpolowane proszę wygenerować w węzłach dla funkcji e^x i $1/(1+x^2)$, tzn.

   (a) $y_i = e^{x_i} \quad i = 1, ..., 16,$

   (b) $y_i = 1/(1 + x_i^2) \quad i = 1, ..., 16.$

   Wyniki zaprezentować w formie graficznej. Zwiększyć również liczbę węzłów do 20 a następnie do 25.

2. **Interpolacja danych nieznanej funkcji**
   Korzystając z zaimplentowanych algorytmów skonstruować wielomiany interpolacyjne dla danych znajdujących się w pliku
   `http://zsjpw.ict.pwr.wroc.pl/~mbazan/2011_12_zima/mn/dane.mat`