Metody numeryczne
Lista nr 5

rok akademicki 2014/2015, semestr zimowy

Grudzień 2014 r.

`aproksymacja średniokwadratowa za pomocą wielomianów`

Dla danego zbioru $\mathbf{Z} = \{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{N}$ aproksymacją średniokwadratową nazywamy funkcję postaci

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x) \tag{1}$$

gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ są funkcjami bazowymi $m+1$ wymiarowej przestrzeni liniowej X_{m+1} a $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ są współczynnikami rzeczywistymi wyznaczonymi w taki sposób, aby zminimalizować normę

$$||F(x) - f(x)|| = \sum_{i=0}^{N}[F(x_i) - f(x_i)]^2. \tag{2}$$

Minimum normy (2) osiągane jest dla wektora $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$, który jest rozwiązaniem układu równań normalnych, tzn.

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{a} = \mathbf{D}^T\mathbf{f} \tag{3}$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \ldots & \varphi_m(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_N) & \ldots & \varphi_m(x_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

1. Rozwiązać układ (3) dla przykładowych funkcji i węzłów z zadania 1 z listy 4 za pomocą dowolnej metody Gaussa zaimplementowanej na liscie 3. Jako funkcje bazowe przyjąć $\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, \ldots, m = 9$.

Ciąg wielomanów Czebyszewa I rodzaju zdefiniowany jest następującymi zależnościami rekurencyjnymi zachodzącymi dla $x \in [-1, 1]$

$$T_0(x) = 1, \tag{4}$$
$$T_1(x) = x, \tag{5}$$
$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, \ldots. \tag{6}$$

Dla $x \in [a,b]$ zdefiniujmy przeskalowane przesunięte wielomiany Czebyszewa I rodzaju jako

$$\tilde{T}_k(x) = T_k\left(\frac{2}{b-a}\cdot x + \frac{a+b}{a-b}\right) \quad k = 0, \ldots. \tag{7}$$

Zauważmy, że dla $x \in [a,b]$ mamy $\frac{2}{b-a}\cdot x + \frac{a+b}{a-b} \in [-1,1]$.

2. Rozwiązać układ (3) dla przykładowych funkcji i węzłów z zadania z listy 4 za pomocą dowolnej metody Gaussa zaimplementowanej na liscie 3. Jako funkcje bazowe przyjąć $\varphi_i(x) = \tilde{T}_i(x), \quad i = 0, \ldots, m = 9$.

Ciąg wielomianów ortogonalnych $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{m}$ na zbiorze dyskretnym $\{x_0, \ldots, x_N\}$, tzn. taki, że

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) &= 0, \qquad \text{dla } j \neq k,\\
\sum_{i=0}^{N} \varphi_j^2(x_i) &> 0 \qquad \text{dla } j \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

definiuje się zależnością rekurencyjną

$$\varphi_{-1}(x) = 0, \tag{8}$$
$$\varphi_0(x) = 1, \tag{9}$$
$$\varphi_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j\varphi_{j-1}(x), \quad \text{dla} \quad j = 0, \ldots, \tag{10}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= 0,\\
\beta_j &= \frac{\sum_{i=0}^{N} \varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{N} \varphi_{j-1}^2(x_i)}, \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots,\\
\alpha_{j+1} &= \frac{\sum_{i=0}^{N} x_i\varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{N} \varphi_j^2(x_i)}, \qquad \text{dla } j = 0, 1, \ldots.
\end{aligned}$$

Wówczas m-ty wielomian optymalny dla zadania aproksymacji (2) dany jest wzorem (1), gdzie funkcjami bazowymi są wielomiany ortogonalne określone wzorami (8) - (10), a współczynniki a_k dla $k = 0, \ldots, m$ wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{C_k}{S_k},\\
C_k &= \sum_{i=1}^{N} y_i\varphi_k(x_i),\\
S_k &= \sum_{i=1}^{N} \varphi_k^2(x_i),
\end{aligned}$$

3. Obliczyć m-ty wielomian optymalny dla funkcji i węzłów z poprzednich zadań. Porównać uzyskany wynik z wynikami uzyskanymi dla w przeprzednich zadaniach.

4. Skonstruować wielomiany aproksymujące trzema powyższymi metodami dla węzłów i wartości funkcji w węzłach z zadania 2 na liście 4.

Uwaga: We wszystkich zadaniach porównać wielomian aproksymujący z odpowiednim wielomianem interpolacyjnym obliczonym w rozwiązaniach zadań na liście 4.