黎曼面的拓扑性质

摘要

本报告从多值函数 $w = \sqrt{z}$ 出发，通过构造黎曼面解决多值性问题，并深入分析其拓扑性质。我们采用两种独立方法计算黎曼面的亏格：几何直观法和黎曼-胡尔维茨公式法，并通过三角剖分严格证明相关公式。

一、多值函数的问题

1.1 多值性的数学描述

考虑函数 $w = \sqrt{z}$ ，设 $z = r·e^{\wedge}(iϑ)$，则：$w = \sqrt{r}·e^{\wedge}(iϑ/2)$

多值性体现：

1. 当 $ϑ \to ϑ + 2π$ 时：$e^{\wedge}[i(ϑ+2π)/2] = -e^{\wedge}(iϑ/2)$
2. 函数值发生符号变化：$w \to -w$
3. 需要 $ϑ \to ϑ + 4π$ 才能回到初始值

1.2 拓扑障碍分析

在单复平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上：

1. 基本群 $π_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cong \mathbb{Z}$
2. 绕原点的环路不可收缩
3. 导致函数无法单值化

二、黎曼面构造与几何实现

2.1 黎曼面构造步骤

步骤1： 准备两个复平面副本 S_1 和 S_2

步骤2： 沿负实轴进行分支切割：

S_1：上岸：$\arg z = 0^+$ 下岸：$\arg z = 2π^-$ S_2：上岸：$\arg z = 2π^+$ 下岸：$\arg z = 4π^-$ (0^-)

步骤3： 交叉粘合：

S_1 下岸 $\leftrightarrow$ S_2 上岸 S_2 下岸 $\leftrightarrow$ S_1 上岸

2.2 3D几何实现

在我们的物理模型中：

1. **柱坐标参数化**：$r = |z|$，$φ = \arg z$
2. **垂直坐标**：$z = \mathrm{Im}(\sqrt{z}\ ) = \sqrt{r}·\sin(φ/2)$
3. **水平坐标**：$(x,y) = (r·\cosφ, r·\sinφ)$

三、几何直观法计算亏格

通过观察构造后的黎曼面:

曲面同胚于球面,无"洞"结构直接得出：$\mathbf{g = 0}$

四、黎曼-胡尔维茨公式法计算亏格

4.1 公式

对于覆叠映射 f: Y → X：2g_Y - 2 = d(2g_X - 2) + Σ($e(y)$ - 1)
其中:

1.g_X, g_Y：底空间和覆叠空间的亏格

2.d：覆叠重数

3.e_p：分支点 p 的分支指数

4.B：分支点集合

4.2 应用于 $\mathbf{w} = \sqrt{z}$

参数确定:

1.底空间 X：黎曼球面，g_X = 0

2.覆叠映射：f(w) = w^2，d = 2

3.分支点：w = 0 和 w = ∞

4.分支指数：e_0 = e_∞ = 2

计算过程:
2g_Y - 2 = 2(2×0 - 2) + [(2-1) + (2-1)]
= 2(-2) + [1 + 1]
= -4 + 2
= -2

解得:
2g_Y = 0 ⇒ g_Y = 0

五、黎曼-胡尔维茨公式的严格证明

5.1 准备工作

考虑紧黎曼面间的覆叠映射 f: Y → X，度数为 d。在 X 上选取三角剖分，使得所有分支值点都是顶点。

记号说明:

1.V_X, E_X, F_X：X 的顶点、边、面数

2.V_Y, E_Y, F_Y：Y 的顶点、边、面数

3.B：分支点集合

5.2 拉回三角剖分面和边的计算

面的拉回:
每个面 F_X 拉回得到 d 个面：F_Y = d·F_X

边的拉回:
每条边 E_X 拉回得到 d 条边：E_Y = d·E_X

5.3 顶点数计算

(a) 如果 x 不是分支值点
则对于所有 $y \in f^{-1}(x)$，有 $e(y) = 1$，且 $|f^{-1}(x)| = d$。
贡献的顶点数：d

(b) 如果 x 是分支值点
设 $f^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$，对应的分支指数为 $e(y_1), \ldots, e(y_k)$。
根据分支理论的基本性质:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{e(y_i)} = 1$$

每个 y_i 在 Y 的三角剖分中贡献 1 个顶点。
因此来自 x 的顶点数为：k

顶点总数公式:

$$V_Y = \sum_{x \in V_X} |f^{-1}(x)|$$

为了关联 V_Y 和 V_X，我们使用以下技巧:

$$|f^{-1}(x)| = \sum_{y \in f^{-1}(x)} 1 = \sum_{y \in f^{-1}(x)} [e(y) - (e(y) - 1)]$$

$$= \sum_{y \in f^{-1}(x)} e(y) - \sum_{y \in f^{-1}(x)} (e(y) - 1)$$

但根据定义，$\sum_{y \in f^{-1}(x)} e(y) = d$（覆叠度数），所以:

$$|f^{-1}(x)| = d - \sum_{y \in f^{-1}(x)} (e(y) - 1)$$

因此:

$$V_Y = \sum_{x \in V_X} |f^{-1}(x)| = \sum_{x \in V_X} \left[d - \sum_{y \in f^{-1}(x)} (e(y) - 1) \right]$$

$$= d \cdot V_X - \sum_{x \in V_X} \sum_{y \in f^{-1}(x)} (e(y) - 1)$$

由于求和 $\sum_{x \in V_X} \sum_{y \in f^{-1}(x)}$ 就是对所有 $y \in Y$ 求和，我们得到:

$$V_Y = d \cdot V_X - \sum_{y \in Y} (e(y) - 1)$$

5.4 证明

黎曼面上的V E F的值:
V_Y = dV_X - $\Sigma(e(y)$ - 1)
E_Y = dE_X
F_Y = dF_X

欧拉示性数:
χ(Y) = V_Y - E_Y + F_Y
= [dV_X - $\Sigma(e(y)$ - 1)] - dE_X + dF_X
= d(V_X - E_X + F_X) - $\Sigma(e(y)$ - 1)
= dχ(X) - $\Sigma(e(y)$ - 1)

亏格:
代入 χ = 2 - 2g:
2 - 2g_Y = d(2 - 2g_X) - $\Sigma(e(y)$ - 1)
2g_Y - 2 = -d(2 - 2g_X) + $\Sigma(e(y)$ - 1)
2g_Y - 2 = -2d + 2dg_X + $\Sigma(e(y)$ - 1)
2g_Y - 2 = d(2g_X - 2) + $\Sigma(e(y)$ - 1)

证毕!

六、结论

通过两种独立方法:

1. **几何直观法**：直接观察黎曼面同胚于球面，得出 g = 0
2. **黎曼-胡尔维茨公式法**：通过分支点计算，严格证明 g = 0

我们确认了 w = $\sqrt{z}$ 的黎曼面确实是一个亏格为 0 的曲面（球面）。并用拓扑工具研究复函数的性质，体现了数学各分支之间的深刻联系。