1. 基本定义与构造

核心思想：一种将球面（去掉一个点）与平面建立一一对应关系的方法。

投影要素：

投影球面：通常是一个单位球面。

投影点：通常是北极点。

投影平面：通常是赤道平面。

目标点：球面上任意一点（非北极）。

投影过程：连接北极点与球面上一点，这条直线会与赤道平面相交于唯一一点，该点即为投影点。

2.核心性质

共形性：也称为保角性。球面上两条曲线相交的角度，与它们在平面上投影的相交角度完全相同。

保圆性：球面上的任何圆（不包括经过北极点的“大圆”）都会投影为平面上的一个圆。特别地，经过北极点的大圆会投影为一条直线（可以看作是半径为无穷大的圆）。

3.核心性质证明

为了简化证明的计算，我们采用以原点为球心的单位球球面$x^2+y^2+z^2=1$ 作为投影球面，以北极点 N=(0,0,1)作为投影点，以赤道平面 z=0 作为投影平面。

3.1.建立投影坐标对应关系

从球面到平面：球面上一点 P=(x,y,z)投影到平面点(X,Y,0)的公式为：

$$(X,Y)=(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z})$$

从平面到球面：平面点(X,Y)对应球面点(x,y,z)的公式为：

$$(x,y,z)=(\frac{2X}{1+R^2},\frac{2Y}{1+R^2},\frac{-1+R^2}{1+R^2})$$

其中$R^2=X^2+Y^2$,为平面点到原点距离的平方。

由此可见，从平面到球面(除北极点 N 外)的映射为双射且为连续映射，逆映射也为连续映射，故两者同胚，即：

$$S^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{C}$$

$$S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

3.2.共形性(保角性)的证明

从平面到球面的映射$F: (X, Y) \to (x, y, z)$

那么$\begin{cases} x(X,Y) = \frac{2X}{1+R^2} \\ y(X,Y) = \frac{2Y}{1+R^2} \\ z(X,Y) = \frac{-1+R^2}{1+R^2} \end{cases}$， 得到 Jacobi 矩阵：

$$J = \frac{1}{(1+R^2)^2} * \begin{bmatrix} 2(1-X^2+Y^2) & -4XY \\ -4XY & 2(1+X^2-Y^2) \\ 4X & 4Y \end{bmatrix}$$

$$J^T J = \frac{4}{(1+R^2)^2} I,\ I\text{为 2 阶单位阵}$$

设平面上两向量为v_1, v_2,那么球面上两向量为Jv_1, Jv_2。设Jv_1, Jv_2夹角为θ，

$$cos\theta = \frac{(Jv_1)^T (Jv_2)}{\|Jv_1\| \|Jv_2\|} = \frac{{v_1}^T J^T J v_2}{\|J^2\| \|v_1\| \|v_2\|} = \frac{{v_1}^T v_2}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

故而保角性成立。

3.3.保圆性的证明

由于球面上的任何圆都是平面在球面上的截线，故而球面上的圆可以视作平面与球面的交线。设平面：$\Gamma: Ax + By + Cz + D = 0,\ A, B, C$不全为零。由于平面与圆须有交线，所以球心到平面的距离小于球的半径，即：$|D| < \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

将$\begin{cases} x(X,Y) = \frac{2X}{1+R^2} \\ y(X,Y) = \frac{2Y}{1+R^2} \\ z(X,Y) = \frac{-1+R^2}{1+R^2} \end{cases}$代入平面方程中，得到：$(C+D)(X^2+Y^2) + 2AX + 2BY + (D-C) = 0$

情况 1：$C + D = 0$，那么平面过北极点，投影在平面上为一条直线。

情况 2：$C + D \neq 0$，那么经过配方后得到：

$$(X + \frac{A}{C+D})^2 + (Y + \frac{B}{C+D})^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(C+D)^2} > 0$$

仍旧为一个圆。球极投影的保圆性得证。