

黎曼面工程部分分享

摘要：

本报告旨在探讨黎曼面的几何与拓扑性质，并阐述如何通过3D打印实体模型来直观理解复变函数的多值性与单值化过程。

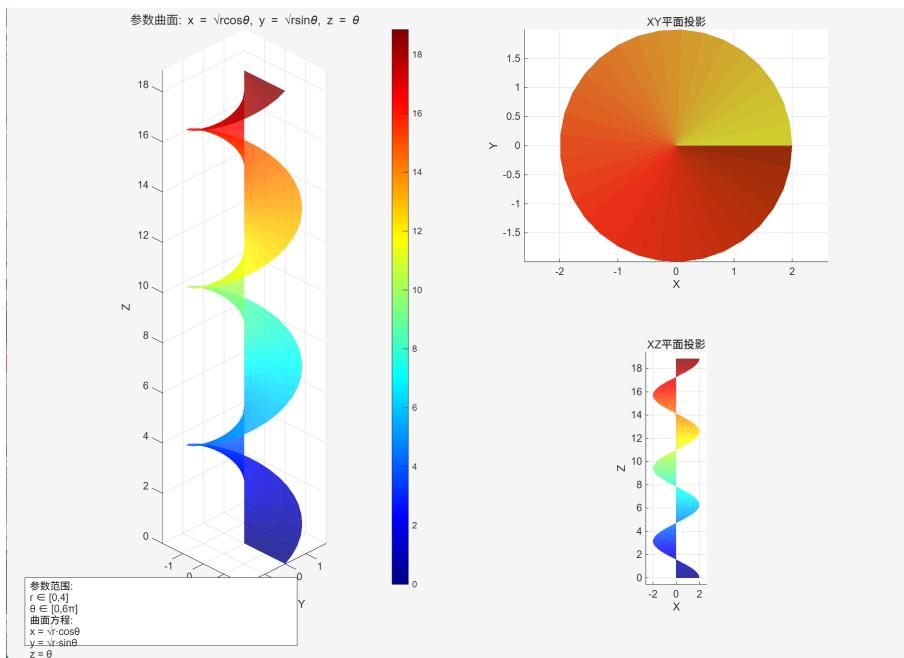
第一部分：从复变函数到3D打印的数学建模

在复平面 C 上，多值函数无法通过简单的平面图形表示。为了在三维欧几里得空间 R^3 中构建黎曼面的实体模型，我们需要将复数域的四维信息（输入实部、虚部与输出实部、虚部）投影或嵌入到三维空间中。

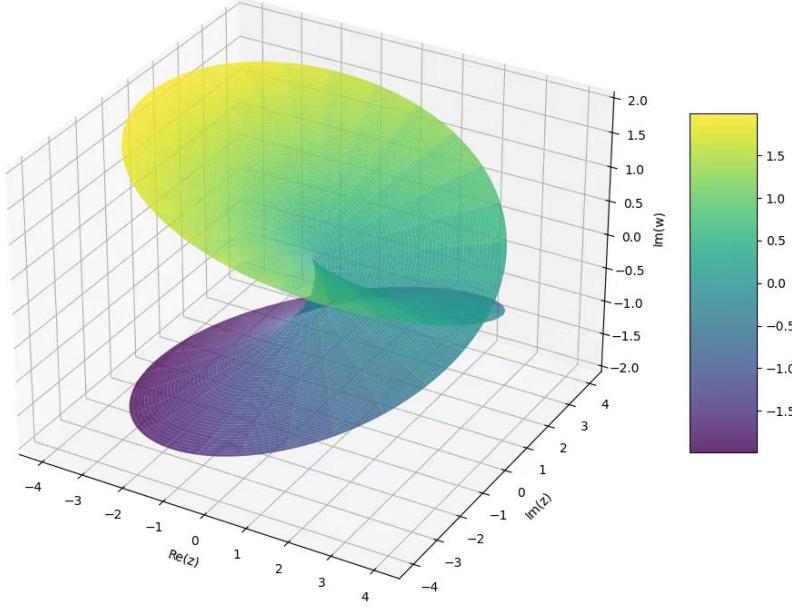
1.1 建模的基本映射方法

设复变函数为 $w = f(z)$ ，其中 $z = x + iy$, $w = u + iv$ 。

为了进行3D打印，常用的建模映射方法是将输出的实部（或虚部、模长）作为高度轴（Z轴），保留输入的复平面作为 XY 平面，并通过颜色或分层表示虚部（或实部），利用参数方程构建曲面。



Riemann surface for $w = \sqrt{z}$ ($Z = \operatorname{Im}(w)$)



最直观的实体化映射 F 定义为:

$$\vec{P}(x, y) = (x, y, \operatorname{Re}(f(x + iy)))$$

或者使用极坐标 $z = re^{i\theta}$:

$$\vec{P}(r, \theta) = (rcos\theta, rsin\theta, \operatorname{Re}(f(re^{i\theta})))$$

1.2 具体函数的建模实例

实例 A: 平方根函数 $w = \sqrt{z}$

定义: $w = z^{1/2}$ 是最简单的二值函数。在复平面上绕原点一周, 幅角增加 2π , 函数值变号; 需绕 4π 才能复原。

建模方程:

$$\text{令 } z = re^{i\theta}, \text{ 则 } w = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

取实部作为高度 h :

$$X = r\cos\theta$$

$$Y = r\sin\theta$$

$$Z = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

3D结构特征:

- 定义域: $r > 0, \theta \in [0, 4\pi)$ 。
- 自相交: 在 R^3 投影中, 当 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 时, 虽然 Z 值不同 (分别为 \sqrt{r} 和 $-\sqrt{r}$) , 但在 XY 平面上重合。模型呈现为两个互相交织的曲面 (“叶”), 在原点 (分支点) 处相连。

实例 B: 三次代数函数 $w = \sqrt[3]{1 - z^3}$

定义: 该函数具有三个分支。其分支点由 $1 - z^3 = 0$ 决定, 即 z 为三次单位根 $1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$ 。

建模方程：

令 $1 - z^3 = Re^{i\Phi}$, 则 $w = R^{1/3}e^{i(\Phi+2k\pi)/3}$, 其中 $k = 0, 1, 2$ 。

$$Z_k = \operatorname{Re}(w_k) = |1 - z^3|^{1/3} \cos\left(\frac{\arg(1 - z^3) + 2k\pi}{3}\right)$$

3D结构特征：

- 该模型由三叶 (3 Sheets) 组成。
 - 在三个分支点处，三层曲面汇聚在一起。
 - 割线 (Branch Cuts)：在数学处理上通常在分支点之间连线作为割线，在3D模型中，这表现为曲面层之间的“楼梯”或平滑过渡区域。模型展现为一个亏格非零的紧致曲面的一部分（该函数对应的紧致黎曼面亏格为1，即环面）。
-

第二部分：复变函数到三维黎曼面的一一对应性质与单值化定理证明

本部分旨在揭示复变函数（特别是多值函数）与其黎曼面几何结构之间深层的数学联系。我们将证明，多值函数在复平面上的“混乱”可以通过提升 (Lift) 到黎曼面上变为“有序”的单值映射。

2.1 覆叠空间与覆叠映射：定义的数学基础

2.1.1 覆叠空间 (Covering Space) 的定义

设 X 是一个连通的局部道路连通的拓扑空间（在复分析中，这通常指除去分支点的复平面域）。

定义：一个覆叠空间是一个二元组 (\tilde{X}, p) , 其中 \tilde{X} 是一个拓扑空间, 且存在一个连续满射 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ (称为覆叠映射), 满足以下条件：

对于 X 中的任意一点 x , 都存在 x 的一个开邻域 U (称为均匀覆盖邻域), 使得 $p^{-1}(U)$ 是 \tilde{X} 中一组互不相交的开集 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的并集, 即:

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

且对于每一个 α , 映射限制 $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ 是一个同胚 (在复分析背景下, 是共形映射)。

- 解释：这意味着在局部范围内, \tilde{X} 看起来和 X 一模一样, 但在全局上, \tilde{X} 可能在 X 上卷绕多次。
- 纤维 (Fiber)：对于 $x \in X$, 集合 $p^{-1}(x)$ 称为 x 上的纤维。对于 n 阶代数函数 (如 \sqrt{z}), 纤维包含 n 个离散点。

2.1.2 关键性质：路径提升 (Path Lifting) 与同伦

这是理解“为何黎曼面能让函数单值化”的关键性质。

路径提升性质定理：

设 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ 是覆叠映射, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 是 X 上的一条路径, 且起始点为 $\gamma(0) = x_0$ 。如果我们在覆叠空间 \tilde{X} 的纤维 $p^{-1}(x_0)$ 中任选一点 \tilde{x}_0 , 那么存在且唯一一条路径 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, 满足：

- $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ (起点对应)
- $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ (投影回原路径)

物理意义：

在复平面 X 上，当你沿着围绕原点的圆周 γ 走一圈回到起点时，函数值 \sqrt{z} 变了。但在覆盖空间（黎曼面） \tilde{X} 上，根据唯一提升性质，路径 $\tilde{\gamma}$ 并未回到起点 \tilde{x}_0 ，而是到达了纤维上的另一个点。这解释了多值性的来源：底空间的一个闭回路，在覆盖空间上可能是一条非闭合的路径。

2.1.3 万有覆盖空间 (Universal Covering Space)

如果覆盖空间 \tilde{X} 是单连通的（即没有孔洞，所有闭曲线都能收缩为一点），则称其为 X 的万有覆盖空间。

- 性质：万有覆盖在同构意义下是唯一的。
 - 重要性：任何黎曼面都可以看作是万有覆盖空间对覆盖变换群（基本群）的商空间。
-

2.2 单值化定理 (Uniformization Theorem)

2.2.1 定理陈述

单值化定理：

设 S 是任意单连通的黎曼面，则 S 必与下列三种标准区域之一共形等价（双全纯同构）：

1. 椭圆型 (Elliptic): 黎曼球 $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ 。
2. 抛物型 (Parabolic): 复平面 C 。
3. 双曲型 (Hyperbolic): 单位圆盘 $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ (或上半平面 H)。

2.2.2 定理的一一对应推论

对于任意（非单连通）的黎曼面 M （即任意代数函数对应的自然定义域），其万有覆盖 \tilde{M} 必是上述三种之一。因此，任何在 M 上的多值函数，都可以拉回到 \tilde{M} 上成为一个定义在标准区域（如圆盘）上的单值全纯函数。

结论：复变函数 $f(z)$ 的多值性，本质上是其定义域黎曼面 M 的拓扑非平凡性（亏格 $g > 0$ 或有穿孔）造成的。通过单值化定理，我们建立了一一对应：

多值函数 f 在 $C \setminus \{P_i\} \iff$ 单值函数 F 在黎曼面 M

2.3 单值化定理的证明 (基于格林函数与狄利克雷原理)

单值化定理的严格证明非常复杂，此处提供基于位势论 (Potential Theory) 和格林函数 (Green's Function) 的证明逻辑框架。主要关注如何将单连通黎曼面映射到标准区域。

证明目标：给定一个单连通黎曼面 S ，构造一个共形映射 $f: S \rightarrow D$ ，其中 D 为 \hat{C}, C, D 之一。

步骤 1：拓扑区分

首先，根据黎曼面 S 是否紧致 (Compact) 进行分类：

- 情形 A (紧致)：如果 S 是紧致的（封闭曲面），由拓扑分类定理，单连通闭曲面同胚于球面。在复结构下，可以证明它全纯同构于黎曼球 \hat{C} 。（通常利用黎曼-罗赫定理证明）。
- 情形 B (非紧致)：这是证明的难点。我们需要证明 S 要么等价于 C ，要么等价于 D 。

步骤 2：构造格林函数 (Green's Function)

我们试图在 S 上寻找一个类似于“电势”的调和函数。

选取 S 上一点 p_0 。我们寻找一个在 $S \setminus \{p_0\}$ 上调和，且在 p_0 附近具有对数奇点的函数 $g(p, p_0)$ 。即：

$g(p) \approx -\ln|z(p)| + \text{harmonic}$, 在 p_0 的局部坐标 z 下
且满足边界条件 (如果存在边界)。

为了证明这样的函数存在，我们使用佩龙方法 (Perron's Method) 或 狄利克雷原理 (Dirichlet's Principle)。

- 狄利克雷原理指出：调和函数是使狄利克雷积分（能量泛函） $E(u) = \iint_S (|\nabla u|^2) dA$ 最小化的函数。虽然早期的证明有漏洞（黎曼本人使用时未考虑下确界的可达性），但后来由希尔伯特修复。

步骤 3：双曲型与抛物型的判别

根据格林函数的存在性，将非紧致黎曼面分为两类：

1. 双曲型 (对应 D) :

如果在 S 上存在正的格林函数 $g(p, p_0)$ (即 S 的边界“足够大”，能维持一个非零电势)，则 S 共形等价于单位圆盘 D 。

映射构造：

设 g 是格林函数。由于 S 单连通，调和函数 g 存在共轭调和函数 h (使得 $g + ih$ 全纯)。

定义映射：

$$f(p) = e^{-(g(p) + ih(p))}$$

- 由于 g 在 p_0 处有 $-\ln|z|$ 的奇点， e^{-g} 刚好消去奇点， $f(p_0) = 0$ 。
- 由于 $g > 0$ ，则 $|f(p)| = e^{-g} < 1$ ，映射像在单位圆盘内。
- 可以进一步证明 f 是双射，从而 $S \cong D$ 。

2. 抛物型 (对应 C) :

如果在 S 上不存在正的格林函数 (或者说格林函数退化为常数，意味着边界“太远”或不存在，电势无法维持)，则 S 共形等价于复平面 C 。

在这种情况下，我们构造形式为 $f(p)$ 的全纯函数，使其像覆盖整个平面。

步骤 4：总结证明

综上所述，对于任意单连通黎曼面 S :

1. 若紧致 $\Rightarrow \hat{C}$ 。
2. 若非紧致且存在格林函数 $\Rightarrow D$ 。
3. 若非紧致且不存在格林函数 $\Rightarrow C$ 。

这涵盖了所有情况，证明了单值化定理。

2.4 总结：复变函数与黎曼面的一一对应

结合覆盖空间和单值化定理，我们可以严谨地描述第一部分中3D打印模型的数学本质：

1. 模型即覆盖：我们在3D打印中构建的 $\vec{P}(x, y)$ 实体，实际上是函数 $w = f(z)$ 的黎曼面 S_f 在三维空间的一个浸入 (Immersion)。

2. 单值性保证：在这个实体模型（黎曼面 S_f ）上的每一个点 p ，都唯一对应一对数值 (z, w) 。

- 在复平面 C 上：一个 z 对应多个 w 。
- 在黎曼面 S_f 上：一个点 p 对应一个 w 。

3. 拓扑分类：

- $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面同胚于 C （抛物型）。
- $w = \sqrt[3]{1 - z^3}$ （紧致化后）是一个亏格为1的环面（Torus），其万有覆盖是 C ，但在局部几何上它通常由椭圆积分描述。

这一理论部分证明了：通过构建黎曼面，我们将“多值函数”这一分析学难题，成功转化为“复杂拓扑空间上的单值函数”这一几何学问题，从而为3D可视化提供了坚实的数学合法性。

第三部分：覆盖空间与实体黎曼面的性质解析

本部分将抽象的“覆盖空间”概念与3D打印的实体模型结合进行讲解。

3.1 覆盖空间 (Covering Space) 的定义

设 \tilde{X} 和 X 是拓扑空间， $p: \tilde{X} \rightarrow X$ 是连续满射。若对于 X 中任意一点 x ，都存在开邻域 U ，使得 $p^{-1}(U)$ 是 \tilde{X} 中一组不相交开集 $\{V_\alpha\}$ 的并，且每个 $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ 都是同胚，则称 (\tilde{X}, p) 是 X 的覆盖空间。

3.2 结合3D模型的性质讲解

在3D打印模型中，我们通常打印的是黎曼面在三维空间的投影。

1. 叶 (Sheets) 与光纤 (Fiber) :

- 理论：对于非分支点 z_0 ，逆映射 $p^{-1}(z_0)$ 包含 n 个点（对于 n 阶映射）。
- 模型观察：在 $w = \sqrt{z}$ 模型上，选择底面复平面上非原点的一点，向上做垂线，会穿过模型的两层曲面（两个点）。这两层就是覆盖空间的“叶”。垂线与曲面的交点集合就是纤维。

2. 分支点 (Branch Points) 与单值性：

- 理论：分支点是无法定义覆盖映射同胚性质的点。
- 模型观察：在 $w = \sqrt{z}$ 的原点， $w = \sqrt[3]{1 - z^3}$ 的三个根处，多层曲面合并为一层。在3D模型中，这是结构最“紧”的地方，也是几何曲率最大的地方。绕着这个实体柱子（分支点）转一圈，你不会回到原来的高度，而是平滑地滑到了另一层。

3. 单复连通性与割线：

- 理论：为了在平面上定义单值分支，我们引入割线 (Branch Cut)。
- 模型观察：3D模型不需要割线也能存在（它是连续曲面），割线只是我们为了把模型“压平”到书本上而人为画出的线。在实体模型上，通过手指滑动模拟路径积分，可以直观看到如果不穿过模型实体，路径是如何从一叶变换到另一叶的，从而解释了为何单值化需要特定的拓扑结构。

第四部分：复变函数黎曼面图像展示

4.1 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面



4.2 $w = \sqrt[3]{1 - z^3}$ 的黎曼面



(在接近 $z=0$ 处截断)