

Санкт-Петербургский национальный
исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия»
Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет
По лабораторной работе №2
«Разложение Холецкого»

Выполнил студент:
Бабушкин А.М. (Р3221)
Преподаватель:
Перл О.В.

Санкт-Петербург
2024

Описание численного метода:

Разложение Холецкого - это метод разложения симметричной положительной матрицы на произведение двух матриц: нижней треугольной и верхней треугольной.

Разложение Холецкого используется для решения СЛАУ.

Алгоритм:

Если матрица симметрична и положительно определена, то действуем по алгоритму:

$$A = LL^T$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},$$

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}, \quad j \in [2, n],$$

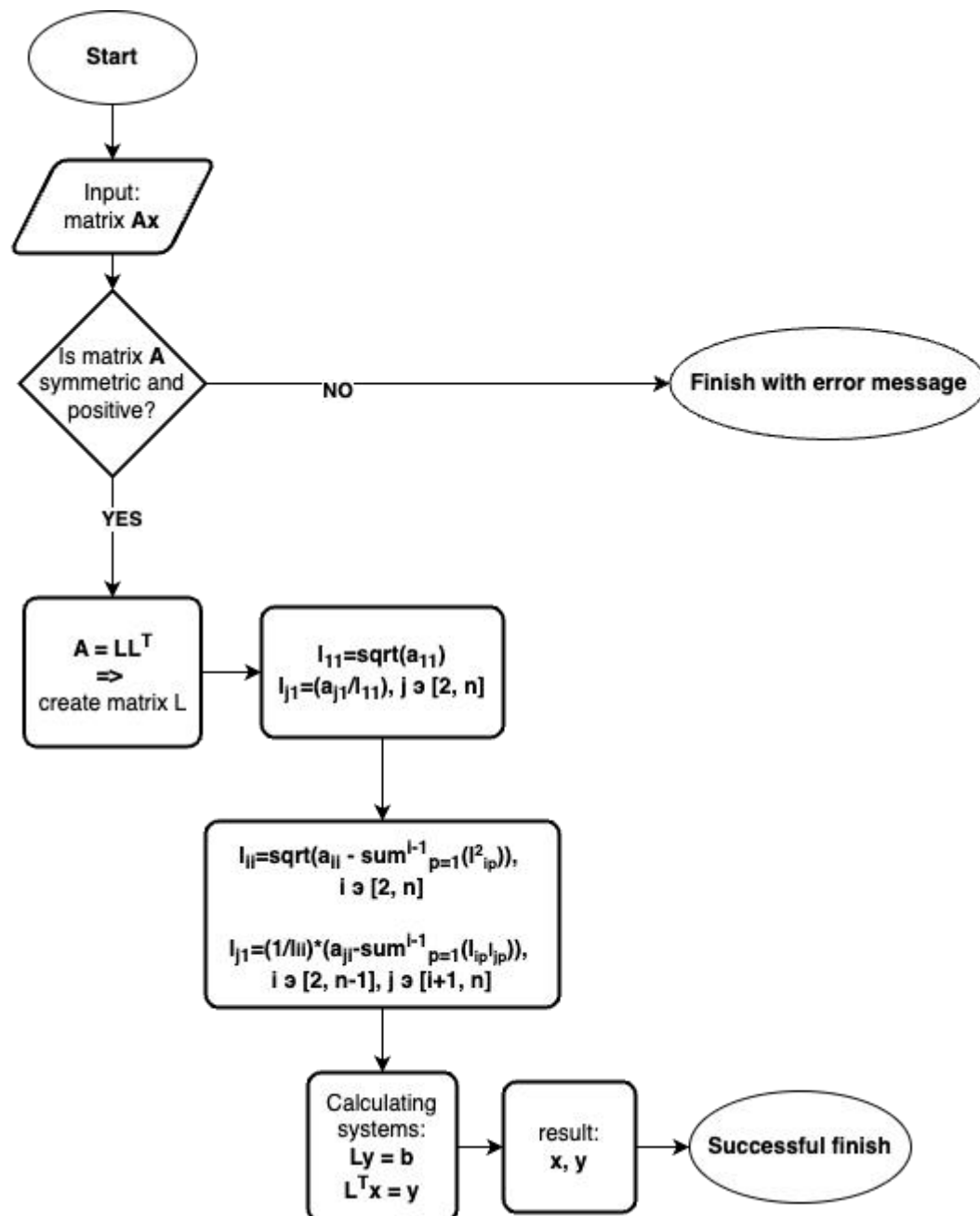
$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \quad i \in [2, n],$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp} \right), \quad i \in [2, n-1], j \in [i+1, n].$$

$$Ly = b$$

$$L^T x = y$$

Блок-схема:



Метод реализованный на языкеPython:

```
9 class Solution:
10     isSolutionExists, errorMessage = True, ""
11
12
13     def cholesky_decomposition(matrix):
14         n = len(matrix)
15         L = [[0.0] * n for _ in range(n)]
16         for i in range(n):
17             for j in range(i+1):
18                 s = sum(L[i][k] * L[j][k] for k in range(j))
19                 if i == j:
20                     L[i][j] = (matrix[i][i] - s) ** 0.5
21                 elif L[j][j] != 0.0:
22                     L[i][j] = (1.0 / L[j][j] * (matrix[i][j] - s))
23                 else: raise ValueError("Zero diagonal encountered, Cholesky decomposition cannot proceed.")
24         return L
25
26
27     def forward_substitution(L, b):
28         n = len(b)
29         y = [0.0] * n
30         for i in range(n):
31             y[i] = (b[i] - sum(L[i][j] * y[j] for j in range(i))) / L[i][i]
32         return y
33
34
35     def backward_substitution(LT, y):
36         n = len(y)
37         x = [0.0] * n
38         for i in reversed(range(n)):
39             x[i] = (y[i] - sum(LT[i][j] * x[j] for j in range(i+1, n))) / LT[i][i]
40         return x
41
42
43     def solveByCholeskyDecomposition(n, matrix):
44         try:
45             L = Solution.cholesky_decomposition(matrix)
46         except ValueError as e:
47             Solution.isSolutionExists = False
48             Solution.errorMessage = str(e)
49             return
50
51         b = [row[-1] for row in matrix]
52         y = Solution.forward_substitution(L, b)
53         LT = [[L[j][i] for j in range(n)] for i in range(n)]
54         x = Solution.backward_substitution(LT, y)
55
56         result = x + y
57         return result
```

Тесты:

Тест 1

Ввод	Вывод
3	-4.0000000000000002-4.15315001449972e-16
8 2 1	-15.0000000000000012-2.0765750072498613e-15
3 4 6	39.000000000000003+4.77612251667468e-15
2 2 1	0.35355339059327373
	3.3174440134851855
	-4.979451940146111e-16+8.132062148225918j

Тест 2

Ввод	Вывод
2	3.148854961832061
25 66	-0.3854961832061071
33 75	13.2
	-2.161530416269459

Тест 3

Ввод	Вывод
4	1-2.80772680780125e-17
1 1 1 1	0.024390243902439036-6.848114165368909e-19
7 2 3 6	-0.1463414634146342+4.1088684992213424e-18
2 8 9 1	0.12195121951219509+2.465321099532805e-17
1 1 1 1	1.0
	-8.931654747277623e-18+0.14586499149789456
	-0.3632873556232738+9.465759339959908e-18
	0.1060665475120455+2.856299137735052e-17

Тест 4

Ввод	Вывод
3	7.815760368812383e-33
1 2 1	-8.392497208503151e-17+4.144879575328952e-32
3 2 0	0.1666666666666667-2.2027024604780157e-32
6 0 0	1.0
	-6.943094730932494e-17+1.1338934190276817
	0.5345224838248489+1.472852809998886e-16

Тест 5

Ввод	Вывод
4	Zero diagonal encountered, Cholesky decomposition cannot proceed.
0 1 2 9	
44 0 44 1	
55 52 0 9	
3 7 47 0	

Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы мной был изучен метод разложения Холецкого для решения систем линейных алгебраических уравнений, рассмотрены принципы работы метода и его особенности.

Алгоритм имеет сложность $O(n^3)$, где n - размерность матрицы.

Метод разложения Холецкого применяется для решения систем линейных уравнений с симметричными и положительно определенными матрицами. В случае, если матрица не соответствует этим условиям, алгоритм неприменим и следует применять LU-разложение, которое и лежит в основе метода Холецкого.

Может показаться, что метода LU-разложения достаточно для решения СЛАУ и в разложении Холецкого нет необходимости, однако если входная СЛАУ удовлетворяет условиям, описанным выше, данный метод будет давать на выходе более точные значения.