# Introduction à la Théorie des Graphes

Sy, Ibrahima

Institut Supérieur Informatique (**ISI**)
Licence 2 RI & GL

April 21, 2021

# Overview

# Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'**Euler au XVIIIe siècle** et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg ( les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ) illustration avec la figure (1).

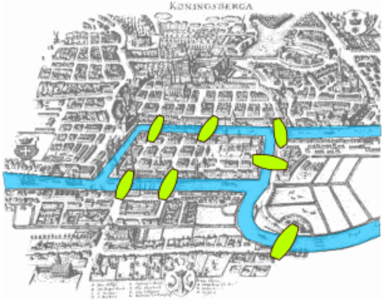



Figure: Les septs ponts de Königsberg

# Introduction

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que l'Informatique , la chimie, la biologie et les sciences sociales . Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

# Graphes non orientés

## Définition

Un graphe non orienté $G = (S, \mathcal{A})$ est déterminé par la donnée :

1. d'un ensemble $S$
2. d'un ensemble $\mathcal{A}$ inclus dans $S \times S$

Les éléments de $S$ sont appelés des **sommets**, ceux de $A$ portent le nom d' **arêtes**.

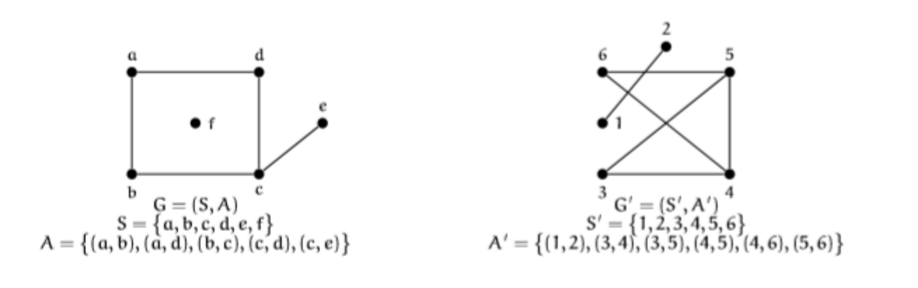



Figure: Graphe non orienté

# Graphes orientés

## Définition

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée :

1. d'un ensemble $S$
2. d'un ensemble $A$ inclus dans $S \times S$

Les éléments de $S$ sont appelés des **sommets**, ceux de $A$ portent le nom d' **arcs**.

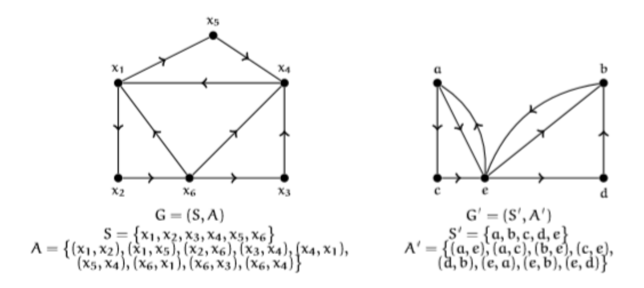



Figure: Graphe orienté

Nous distinguerons deux types d'adjacence:l'adjacence entre sommets et celle entre arcs (ou arêtes). Chacun des cas est associé à une matrice d'adjacence. Dans le cadre de ce cours, nous nous limitons à la matrice d'adjacence de sommets appelée aussi matrice d'adjacence sommet-sommet La matrice d'adjacence (sommet-sommet) $M = (a_{ij})$ d'un graphe $G = (S, A)$ est obtenue comme suit : ses lignes et ses colonnes représentent les sommets du graphe;

1. si l'arc $(i, j) \in G$ , on place le chiffre 1 à l'intersection de la ligne $i$ et la colonne $j$ du tableau i.e $a_{ij} = 1$;
2. sinon, on met le chiffre 0 à cette position i.e $a_{ij} = 0$;

## Représentation Matricielle

### 1.Matrice d'adjacence

**exemple 1:** Le graphe orienté $G_1$ est représenté par la matrice $M_1$

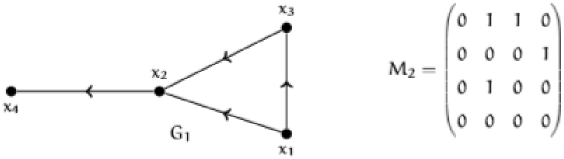
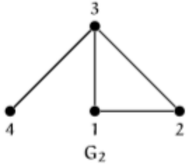



Figure: Matrice booléenne d'un graphe oriené

**exemple 2:** Le graphe non orienté $G_2$ est représenté par la matrice $M_2$




$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice booléenne d'un graphe oriené

Contrairement à la matrice d'adjacence, la matrice d'incidence est construite en considérant un sommet et un arc à la fois. En enffet , dans la matrice d'incidence $M = (a_{iu})$, les lignes correspondent aux sommets et les colonnes aux arcs. Cette matrice est obtenue comme suit :

1. $a_{iu} = 0$ si le sommet i n'est pas une extrémité de l'arc $u$
2. $a_{iu} = +1$ si le sommet $i$ est l'extrémité initiale de l'arc $u$
3. $a_{iu} = -1$ si le sommet $i$ est l'extrémité finale de l'arc $u$

**Exemple:** Cherchons la matrice d'incidence $M_1$ du graphe $G_1$ . Pour cela, aidons nous du tableau suivant comportant sur sa première colonne les sommets de $G_1$ et sur sa première ligne les arcs de $G_1$

| | $(x_1, x_2)$ | $(x_1, x_3)$ | $(x_2, x_4)$ | $(x_3, x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_2$ | −1 | 0 | 1 | −1 |
| $x_3$ | 0 | −1 | 0 | 1 |
| $x_4$ | 0 | 0 | −1 | 0 |

On en déduit alors $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

# Notions liées aux sommets

- **ordre d'un graphe** : L'ordre d'un graphe (orienté ou non) est le nombre de sommets de ce graphe.
  Exemple: Calculer l'odre des graphes $G_1$ et $G_2$
- **Boucle**: On appelle boucle un arc reliant un sommet à lui même.
  Un graphe ne possédant pas de boucle est appelé graphe simple.
- **multigraphe** : Si dans un graphe G, un arc ou une arête est répété(e) plusieurs fois , on dit alors que G est un multigraphe.

# Cas d'un graphe orienté

Sauf précision, tous les graphes considérés dans cette sous section sont supposés orientés. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

### Chemin

Un chemin est une suite ordonnée de sommets:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

telle que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{A}$.
Les sommets $x_1$ et $x_p$ sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale du chemin.

### Circuit

Un circuit est un chemin dont les extrémités finale et initiale sont identiques.

# Cas d'un graphe orienté

**Exemple** : Considérons le graphe suivant.

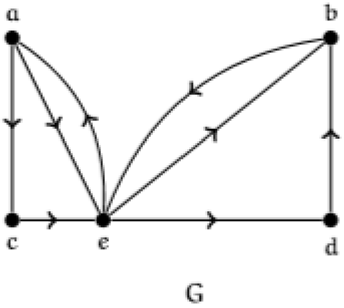



Figure: Chemin et Circuit

# Cas d'un graphe orienté

- $\mathcal{P}_1 = (a, c, e, d, b)$ et $\mathcal{P}_2 = (a, e, b, e, d)$ sont deux chemins de ce graphe.
- $\mathcal{C}_1 = (a, c, e, d, b)$ et $\mathcal{C}_2 = (a, e, b, e, d)$ sont deux circuits de ce graphe.

### Chemin élémentaire

C'est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par chacun de ses sommets.

### Chemin hamiltonien

C'est un chemin passant une fois et une seule par chacun des sommets du graphe.

### Chemin simple

C'est un chemin ne passant pas plus d'une fois par chacun de ses arcs.

# Cas d'un graphe orienté

## Chemin eulérien

C'est un chemin passant une fois et une seule par chacun des arcs du graphe.

## exemple

Dans le graphe $G$ de la figure 6, le chemin $\mathcal{P}_1 = (a, c, e, d, b)$ est élémentaire, hamiltonien, simple mais n'est pas eulérien, par contre le chemin $\mathcal{P}_2 = (a, c, e, a, e, b, e, d, b)$ est eulérien.

## Exemple

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement de longueurs 4 et 8.

# Cas d'un graphe orienté

## Remarque

Les qualificatifs élémentaire, hamiltonien, simple et eulérien peuvent être utilisés dans le cas de circuits. Il suffit de remplacer le terme "chemin" par "circuit".

## Exemple

Le circuit $\mathcal{C}_2 = (e, b, e)$ du graphe $G$ est élémentaire et simple.

# Cas d'un graphe orienté ou non

### Chaîne

Considérons un graphe (orienté ou non) $G = (S, \mathcal{A})$. Une chaîne est une suite ordonnée de sommets de $G$ telle que $(x_i, x_{i+1})$ ou $(x_{i+1}, x_i)$ appartienne à $\mathcal{A}$.

### Cycle

Un cycle est une chaîne dont les extrémités finale et initiale sont identiques.

### Remarque

De même que pour les chemins et circuits, on parlera de chaînes et cycles élémentaires, hamiltoniens, simples et eulériens.

# Cas d'un graphe orienté ou non

Dans ce graphe, $\mathcal{N}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ est une chaîne hamiltonienne et $\mathcal{N}_2 = (2, 4, 5, 3, 1, 2)$ est un cycle hamiltonien mais non eulérien.

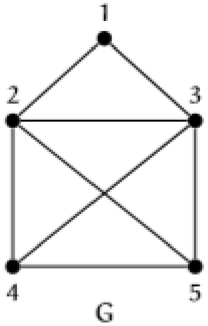



Figure: Chaines et cycles

# Qualificatifs de sommets

## Sommets adjacents

Deux sommets $i$ et $j$ sont dits adjacents s'ils sont reliés par un arc. Cet arc est alors dit incident à chacun de ces sommets Soient $G = (S, \mathcal{A})$ un graphe orienté, $i$ et $j$ deux sommets de G.

Soient $G = (S, \mathcal{A})$ un graphe orienté, $i$ et $j$ deux sommets de G.

## Suivant, Précédent

On dit que le sommet $j$ est un suivant ou successeur du sommet $i$ si l'arc $(i, j)$ est un arc de $\mathcal{A}$ Le sommet $i$ est alors appelé précédent de $j$.

## Descendant, Ascendant

On dit que le sommet $j$ est un descendant du sommet $i$ s'il existe un chemin quittant $i$ et aboutissant à $j$. Le sommet $i$ est alors appelé ascendant du sommet $j$.

# Qualificatifs de sommets

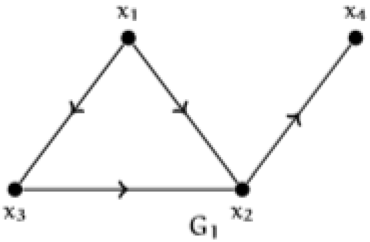



Figure: Succession de sommets

le sommet $x_2$ est un suivant des sommets $x_1$ et $x_3$. Le sommet $x_4$ est un descendant des sommets $x_1$ et $x_3$. Par convention, l'ensemble des ascendants de $x$ contient $x$. De même, l'ensemble des descendants de $x$ contient $x$.

## degré

Considérons un graphe $G$ et un sommet $u$ de $G$. On appelle degré du sommet $u$ le nombre d'arcs incidents à $u$. Le degré du sommet u est noté $d(u)$. Dans le cas d'un graphe orienté, on définit en outre

- le degré intérieur $d^{-}(u)$ comme étant le nombre d'arcs ayant pour extrémité finale le sommet $u$.
- le degré extérieur $d^{+}(u)$comme étant le nombre d'arcs ayant pour extrémité initiale le sommet $u$.

Bien évidemment, on a la relation

$$d(u) = d^{-}(u) + d^{+}(u)$$

# Graphes partiels

Soit $G = (S, \mathcal{A})$ un graphe donné. Un graphe partiel $G' = (S', \mathcal{A}')$ de G est le graphe G auquel on a enlevé quelques arcs.
**NB** : $G$ et $G'$ ont même ensemble de sommets $S$, tandis que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$

Un sous graphe $G_X = (X, A_X)$ de G est le graphe $G$ auquel on a enlevé quelques sommets.

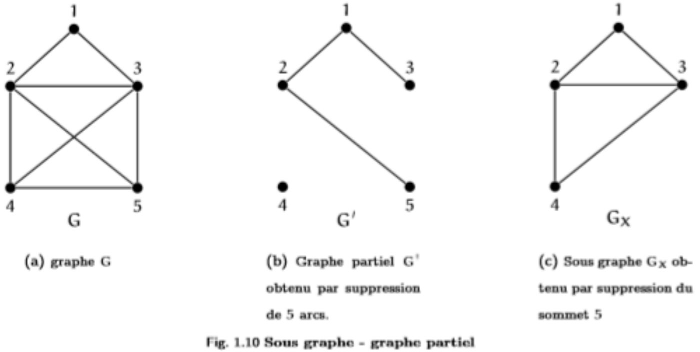



Figure: Sous graphe - graphe partiel

# Sous graphes

**Remarque**

Quand on enlève un sommet, on supprime de même tout arc qui lui serrait incident.

# Graphe symétrique

Un graphe $G = (S, \mathcal{A})$ est symétrique si l'existence de l'arc $(x, y)$ entraîne celle de $(y, x)$.

**Propriété**

Tout graphe non orienté est symétrique.

# Graphe transitif

Un graphe $G = (S, \mathcal{A})$ est dit transitif si à chaque fois que l'on a deux arcs $(x, y)$ , $(y, z)$ dans $\mathcal{A}$ alors l'arc $(x, z)$ existe dans $\mathcal{A}$.

## Exemple

Le graphe suivant $G_1$ n'est pas transitif car $(b, d)$ et $(d, c)$ sont dans $G_1$ mais $(b, c)$ n'existe pas. Par contre le graphe $G_2$ est transitif.

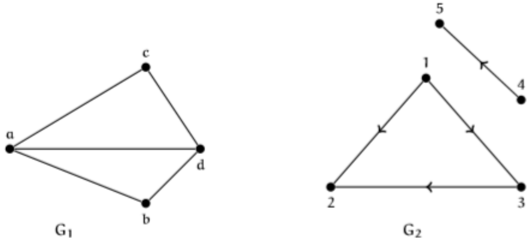



Figure: Transitivité dans un graphe

# Graphe Transitive

Dans un graphe transitif, s'il existe un chemin d'un sommet$x$ à un autre sommet $y$, alors il $y$ existe l'arc $(x, y)$

# Graphe complet

Un graphe est dit complet si toute paire de sommet est reliée par un arc ou une arête. On note $K_N$ le graphe simple complet à $N$ sommets. Ce type de graphe correspond à un tournoi : rencontres dans lesquelles chaque équipe en compétition affronte toute autre équipe.

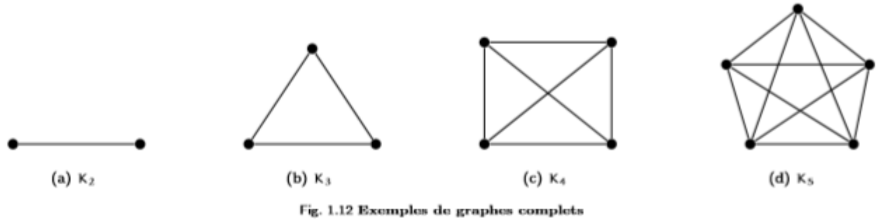



Figure: Exemple de graphe complets