井田解析力学 4.1 後半

みなと（かなた）

2022 年 8 月 20 日

目次

1　共変性

1.1　方程式の記法

本稿では，関数 q を制限する方程式を $E[q](t)=0$ のように表記することにする．この式で，$E[q]$ は関数 q に依存して変わる関数という意味である．1 次元の Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}(t)=F(x(t))$$

を考えてみる．左辺はまず t の関数で

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(u)}{\mathrm{d}u^2}(\cdot)-F(x(\cdot))$$

のように書ける関数である．[*1] これが $E[x]$ である．なぜ $E[x]$ と x に依存する形で書いているかと言うと，上の式を見ればわかるようにこの関数は明らかに関数 x に依存して値が変わるからである．

このように一般化した方程式の記法をしばしば用いる．さらに，Newton の運動方程式をよく見ると，$E[x]$ はさらに F にも依存している．したがってこれを $E[F][x]$ と記す．$E[F]$ は

$$E[F]=m\frac{\mathrm{d}^2(\cdot)}{\mathrm{d}u^2}-F(\cdot)$$

のように書けるものである．これにさらに x を噛ませると

$$E[F][x]=m\frac{\mathrm{d}^2x(u)}{\mathrm{d}u^2}(\cdot)-F(x(\cdot))$$

となる．このような E を用いて Newton の運動方程式は $E[F][x](t)=0$ と表記することができる．Euler-Lagrange 方程式も同じように $X[L][q](t)=0$ のように書ける．q は座標の関数で，L は Lagrangian である．

1.2　方程式の共変性の定義

Newton の運動方程式も Euler-Lagrange 方程式も物理学の原理を記述する方程式であり，どちらも，「ある関数 F が存在して，方程式

$$X[F][q](t)=0$$

を満たすような関数 q が系の解となる」という形になっている．ここで $X[F][q](t)=0$ の形で書ける方程式の共変性を次のように定義する．

[*1] 微分の中の t は**ダミー変数**なので u で置き換えた．これでも意味は全く変わらない．

Definition 1.
方程式 $X[F][q](t)=0$ が座標変換 $q=f(Q)$ のもとで共変であるとは

$$\{\ q \mid X[F][q](t)=0\ \}=\{\ f(Q) \mid X[\tilde{F}][Q](t)=0\ \}$$

を満たす関数 $\tilde{F}$ が存在することと定義する．ただし $f(Q)=f\circ Q$ で定める．

つぎに方程式の解の集合の包含関係に関する定理を述べる．

Theorem 1.1.
関数 q を解とする方程式 $E[q](x)=0$ があるとき，任意の関数 f に対して次が成り立つ．

$$\{\ q \mid E[q](x)=0\ \}\supset\{\ f\circ Q \mid E[f\circ Q](x)=0\ \}$$

これは，$f\circ Q$ で関数 Q を自由にとっても，f が全射かつ単射でない関数である場合などを考えると，$E[q](x)=0$ で q を自由に動かして解を探す場合に比べて，$E[f\circ Q](x)=0$ で Q を自由に動かして解 $f\circ Q$ を動かす場合の方が探し当てる解の数が少なくなってしまうことからわかる．

ただし，f が全単射の場合は $f\circ Q$ で Q を自由に動かすときに $Q=f^{-1}\circ g$ として，写像 g を自由に動かすことにすれば $f\circ Q$ はすべての関数を自由に動くことになり，包含関係は

$$\{\ q \mid E[q](x)=0\ \}=\{\ f\circ Q \mid E[f\circ Q](x)=0\ \}$$

となる．

この事実を用いると

$$\{\ q \mid X[F][q](t)=0\ \}=\{\ f(Q) \mid X[F][f(Q)](t)=0\ \}$$

であるから，方程式 $X[F][q](t)=0$ の共変性を調べるには

$$\{\ f(Q) \mid X[F][f(Q)](t)=0\ \}=\{\ f(Q) \mid X[\tilde{F}][Q](t)=0\ \}$$

を満たす関数 $\tilde{F}$ を見つければよいということになる．これはすなわち

$$X[F][f(Q)](t)=0 \Leftrightarrow X[\tilde{F}][Q](t)=0$$

を満たす関数 $\tilde{F}$ を見つければよいということになる．

Theorem 1.2.
方程式 $X[F][q](t)=0$ が，座標変換 $q=f(Q)$ のもとで共変であることを確かめるには

$$X[F][f(Q)](t)=0 \Leftrightarrow X[\tilde{F}][Q](t)=0$$

を満たす関数 $\tilde{F}$ が存在することを示せばよい．

1.3 Euler-Lagrange 方程式の共変性

定理 1.2 より，Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial \dot{q}_i}=0\,\Bigg|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t),\,\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{q}}(t)} \tag{1}$$

が座標変換

$$\begin{cases} q_1=f_0(Q_1,\,\dots,\,Q_n)\\ \quad\vdots\\ q_n=f_n(Q_1,\,\dots,\,Q_n)\end{cases}$$

のもとで共変であるとは

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial Q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial \dot{Q}_i}=0\,\Bigg|_{\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(t),\,\dot{\boldsymbol{Q}}=\dot{\boldsymbol{Q}}(t)}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial \dot{q}_i}=0\,\Bigg|_{\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})(t),\,\dot{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})'(t)}\end{aligned} \tag{2}$$

を満たす関数 L' が存在することであった．これは 4.1 章で見たように

$$L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)=L\left(f_1(\boldsymbol{Q}),\,\dots,\,f_n(\boldsymbol{Q}),\,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{Q})}{\partial Q_i}\dot{Q}_i,\,\dots,\,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_n(\boldsymbol{Q})}{\partial Q_i}\dot{Q}_i,\,t\right) \tag{3}$$

と定めれば，偏微分の計算により

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial Q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial \dot{Q}_i}\Bigg|_{\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(t),\,\dot{\boldsymbol{Q}}=\dot{\boldsymbol{Q}}(t)}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(\boldsymbol{Q})}{\partial Q_i}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})(t),\,\dot{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})'(t)}\end{aligned}$$

となることが証明できた．これを行列で書き直せば

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dfrac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial Q_1}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial \dot{Q}_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial Q_n}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L'(\boldsymbol{Q},\,\dot{\boldsymbol{Q}},\,t)}{\partial \dot{Q}_n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(t),\,\dot{\boldsymbol{Q}}=\dot{\boldsymbol{Q}}(t)}\\ =&\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{Q})}{\partial Q_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots\\ & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{Q})}{\partial Q_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial q_1}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial \dot{q}_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial q_n}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},\,t)}{\partial \dot{q}_n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})(t),\,\dot{q}=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Q})'(t)}\end{aligned}$$

と言うことである．ここで，変数変換が逆に解けることより，逆関数定理から右辺の左側の行列は正則行列なので，左辺が 0 ベクトルであることと，右辺の右側のベクトルが 0 ベクトルであることは同値であることがわかった．以上により，Euler-Lagrange 方程式は任意の座標変換に対して共変であることが示された．

1.4 Newton の運動方程式の共変性

Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=F_i(\boldsymbol{x}(t)) \tag{4}$$

が変数変換

$$\begin{cases} x_1=f_0(y_1,\,\ldots,\,y_n) \\ \quad\vdots \\ x_n=f_n(y_1,\,\ldots,\,y_n) \end{cases} \tag{5}$$

に対して共変であるとは

$$m\frac{\mathrm{d}^2y_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=\tilde{F}_i(\boldsymbol{y}(t))\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2f_i(\boldsymbol{y}(t))}{\mathrm{d}t^2}=F_i(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\,\ldots,\,f_n(\boldsymbol{y}(t)))$$

を満たすような関数 $\tilde{F}_i$ が存在するということである．ここで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_i(\boldsymbol{y}(t))=\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}\dot{y_k}(t)$$

であるので

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f_i(\boldsymbol{y}(t))&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}\dot{y_k}(t)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\ddot{y_k}(t)\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}+\dot{y_k}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\ddot{y_k}(t)\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}+\dot{y_k}(t)\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k\partial y_j}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}\dot{y_j}(t)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\ddot{y_k}(t)\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{y_k}(t)\dot{y_j}(t)\left.\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k\partial y_j}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}\end{aligned}$$

となる．最後の式の 2 項目は $y_1(t),\,\ldots,\,y_n(t)$ の 1 階導関数を含んでいる．しかし，どのように F_i を変えても $\tilde{F}_i(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\,\ldots,\,f_n(\boldsymbol{y}(t)))$ から $y_1(t),\,\ldots,\,y_n(t)$ の 1 階導関数を含む項が出てくるような関数 $\tilde{F}_i$ は見つからない．したがって，どんなに F_i を変えても，元の運動方程式と同じ解を与えるような微分方程式として

$$m\frac{\mathrm{d}^2y_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=\tilde{F}_i(\boldsymbol{y}(t))$$

の形のものを得ることはできない．すなわち，Newton の運動方程式は一般の座標変換に対して共変性を持たない．

一方，f_i の任意の 2 階導関数が 0 となるような座標変換では

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{y}_k(t)\, \left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_k}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)} = F_i(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y}(t)))$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y}(t))) \\ \vdots \\ F_n(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y}(t))) \end{bmatrix}$$

であり，左辺の行列は変数変換が逆に解けるという条件から，逆写像定理により正則行列であるから，両辺にその逆行列を左からかけて

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y}(t))) \\ \vdots \\ F_n(f_1(\boldsymbol{y}(t)),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y}(t))) \end{bmatrix}$$

とできる．すなわち，関数 $\tilde{F}_i$ を

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_i(y_1,\, \ldots,\, y_n) \\ \vdots \\ \tilde{F}_n(y_1,\, \ldots,\, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(f_1(\boldsymbol{y}),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y})) \\ \vdots \\ F_n(f_1(\boldsymbol{y}),\, \ldots,\, f_n(\boldsymbol{y})) \end{bmatrix}$$

として定義すれば，$y_1, \ldots, y_n$ に関する微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = \tilde{F}_i(\boldsymbol{y}(t))$$

が元の微分方程式 (4) と同じ解を与えるような $\tilde{F}_i$ を作ることができるということになる．これはすなわち，このような変数変換に対しては，Newton の運動方程式は共変であるということを意味する．

さて，式 (5) において f_i の任意の 2 階導関数が 0 であるような変数変換とはどのようなものであろうか．このとき f_i の任意の 1 階導関数が定数であることを意味する．このような変数変換の中には線形変換があり，次のように行列 A を用いて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

と表される．さらに，変数変換が逆に解けることより，A は正則行列であることがわかる．このような変換は $\mathbb{R}^n$ の基底を取り換える変換である．A は基底変換行列である．つまり，Newton の運動方程式は $\mathbb{R}^n$ の基底の変換に関して共変であることがわかった．

これは，高校物理などで斜面を運動する物体の問題を解くときに，基底を斜面に沿った方向のベクトルと斜面に垂直な方向のベクトルを基底に取って運動方程式をたてても，うまく運動方程式が立てられたことを意味する．さらに，そのように新しく定めた基底での力の各成分を初等幾何的な操作で求めていたことは，上の式で，基底変換行列の逆行列で新しい座標系での力 $\tilde{F}$ を求めていることに対応している．

そのほか，Newton の運動方程式がガリレイ変換に対して共変であることも，上で見たように $\tilde{F}$ をうまく作ることができることから説明される．

一方で，Newton の運動方程式は極座標変換に対しては共変ではない．なぜなら，極座標変換では三角関数を含むので，三角関数の変数に関する 2 階偏微分は 0 にはならないからである．たとえば

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

などでは，$\dfrac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} = -r\cos\theta$ となり，常に 0 にはならないので，この変換に対して運動方程式は共変ではない．当然，Euler-Lagrange 方程式は任意の座標変換に対して共変だったから，極座標変換に対しても共変である．

2　ケプラー問題

2.1　運動方程式の導出

質量 M の恒星のまわりを質量 m の惑星が運動するケプラー問題を考える．このとき，恒星も惑星も共に質点とみなすことができる*2 ので，恒星を中心とする 3 次元デカルト座標における惑

*2 なぜなら恒星は球対照な質量分布であるから，恒星が生み出す重力場は，恒星の質量をすべて恒星の中心に集めた場合に作られる重力場に等しいからである．[1] また，惑星は近似的に剛体 (質点同士の距離が不変な質点系) とみなすことができるが，重力や電場のように剛体内の場所によらず一様に力が加わる力のもとにおいては，剛体が受ける力は，剛体を構成するすべての質点が受ける力の合成力を剛体の**慣性中心**で受ける力に等しいことが知られている．さらに，このような場のもとにおいては，剛体の慣性中心まわりの力のモーメントは，0 であることが知られている．すなわち惑星はその慣性中心，すなわち惑星の中心に，惑星の全質量を集めた質点と同じであるとみなすことができる．

星の位置を $(x,\, y,\, z)$ とすれば，惑星が従う運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{x(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}\\
m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{y(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}\\
m\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{z(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

となる．ところが，今惑星の周回軌道に対して垂直に z 軸を取る事にすれば，惑星は常に $z=0$ を運動することになるので 3 本目の式の右辺は常に 0 になる[*3]．すなわち解くべき方程式は 2 本であり，解として $x(t),\, y(t)$ を求めればよい．すなわち，これは 2 自由度の系である．結局解くべき微分方程式 (運動方程式) は

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{x(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}\\
m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{y(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

である．

2.2 Newton の運動方程式での計算

先に説明したように Newton の運動方程式は極座標変換のもとで共変ではない．すなわち，元の運動方程式を極座標で書き直したときに 1 階導関数を含む項が出てきてしまうはずである．それを実際に計算してみて確かめる．極座標表示ではヤコビアンは

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\
\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}
\end{vmatrix} = r
$$

なので，$r \neq 0$ であれば座標変換は逆に解ける．この問題では $r=0$ を考えることはない (重力が無限大に発散する)．すなわち $r=0$ の点だけを除いた空間 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ が配位空間なのであるから，そのような配位空間を考えている限りこの極座標変換は全単射である．上で見たように，運動方程式 (6) にて，$x,\, y$ を写像として $r,\, \phi$ で書き換える，すなわち

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos\phi(t)\\
y(t) &= r(t)\sin\phi(t)
\end{aligned}
$$

[*3] もしこのように都合のいい座標系を最初に取らなかったとしても，適当な直交行列を用いて惑星が $z=0$ を運動するような座標系に変換すればいい．このようにしてもこの場合は運動方程式が不変であることが証明できる．

の置き換えを行うと

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 r(t)\cos\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{\cos\phi(t)}{r(t)^2} \\ m\frac{\mathrm{d}^2 r(t)\sin\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -GMm\frac{\sin\phi(t)}{r(t)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\cos\phi(t) &= \dot{r}(t)\cos\phi(t) - r(t)\dot{\phi}(t)\sin\phi(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)\cos\phi(t) &= \ddot{r}(t)\cos\phi(t) - \dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\sin\phi(t) \\ &\qquad - \{\dot{r}(t)\dot{\phi}(t) + r(t)\ddot{\phi}(t)\}\sin\phi(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\cos\phi(t) \\ &= \{\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\}\cos\phi(t) - \{r(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\}\sin\phi(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\sin\phi(t) &= \dot{r}(t)\sin\phi(t) + r(t)\dot{\phi}(t)\cos\phi(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)\sin\phi(t) &= \ddot{r}(t)\sin\phi(t) + \dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\cos\phi(t) \\ &\qquad + \{\dot{r}(t)\dot{\phi}(t) + r(t)\ddot{\phi}(t)\}\cos\phi(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\sin\phi(t) \\ &= \{\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\}\sin\phi(t) + \{r(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\}\cos\phi(t) \end{aligned}$$

であるから，2 階導関数を式 (7) に代入すると

$$m\{\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\}\cos\phi(t) - m\{r(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\}\sin\phi(t) = -GMm\frac{\cos\phi(t)}{r(t)^2} \tag{8}$$

$$m\{\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\}\sin\phi(t) + m\{r(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\}\cos\phi(t) = -GMm\frac{\sin\phi(t)}{r(t)^2} \tag{9}$$

となる．(8) $\times\cos\phi(t)$ + (9) $\times\sin\phi(t)$ より

$$m\{\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\phi}(t)^2\} = -\frac{GMm}{r(t)^2}$$

を得る．一方，式 (9) $\times\cos\phi(t)$ - (8) $\times\sin\phi(t)$ より

$$m\{r(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)\} = 0$$

を得る．これらを整理すると

$$\begin{aligned} m\ddot{r}(t) &= mr(t)\dot{\phi}(t)^2 - \frac{GMm}{r(t)^2} \\ m\ddot{\phi}(t) &= -\frac{2m\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)}{r(t)} \end{aligned} \tag{10}$$

となる．この連立方程式の解 $r(t)$, $\phi(t)$ を用いて

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\phi(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\phi(t) \end{aligned}$$

とすると，この $x(t)$, $y(t)$ は，定理 1.2 により元の運動方程式 (6) の解 $x(t)$, $y(t)$ に一致する．ところが式 (10) は，$r(t)$, $phi(t)$ の 1 階導関数を含んでいるので，ある関数 F_1, F_2 を用いて

$$m\ddot{r}(t) = F_1(r(t),\, \phi(t))$$
$$m\ddot{\phi}(t) = F_2(r(t),\, \phi(t))$$

と書き表すことができない．運動方程式 (6) は極座標変換のもとで共変でないことがわかった．

2.3 Lagrangian の導出

この運動方程式を再現するような Lagrangian を求める．運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(t))$$

を再現する Lagrangian L (Euler-Lagrange 方程式がこの運動方程式に一致するもの) は

$$L(\boldsymbol{x},\, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x_i}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

で与えられるのであった．まず，力のポテンシャル $U(x,\, y)$ を求めたい．今 $U(x,\, y)$ は具体的には

$$\frac{\partial U(x,\, y)}{\partial x} = GMm\frac{x}{\{x^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial U(x,\, y)}{\partial y} = GMm\frac{y}{\{x^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

から定まる関数である．ここでベクトル解析の grad(勾配) に関する線積分の公式

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} \nabla F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \cdot (\mathrm{d}x_1,\, \ldots,\, \mathrm{d}x_n) \\
&= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)},\, \ldots,\, \left.\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\lambda},\, \ldots,\, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\lambda} + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{x}(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \Big[F(\boldsymbol{x}(\lambda))\Big]_{\lambda_0}^{\lambda_1} \\
&= F(\boldsymbol{x_1}) - F(\boldsymbol{x_0})
\end{aligned}$$

を用いる．上の証明の途中で次のようなパラメータ λ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(\lambda)\\ \boldsymbol{x_0} &= \boldsymbol{x}(\lambda_0)\\ \boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{x}(\lambda_1)\end{aligned}$$

を用いた．この公式を用いると，パラメータは同様にとって，U は

$$\begin{aligned}U(x_1,\,y_1) - U(x_0,\,y_0) &= \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} \frac{GMm}{\{x^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}(x,\,y)\cdot(\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)\\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{GMm}{\{x(\lambda)^2+y(\lambda)^2\}^{\frac{3}{2}}}(x(\lambda),\,y(\lambda))\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda},\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda\\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{GMm}{\{x(\lambda)^2+y(\lambda)^2\}^{\frac{3}{2}}}(x(\lambda)x'(\lambda)+y(\lambda)y'(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \left[-\frac{GMm}{\sqrt{x(\lambda)^2+y(\lambda)^2}}\right]_{\lambda_0}^{\lambda_1}\\ &= -\frac{GMm}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}} + \frac{GMm}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}\end{aligned}$$

と計算できる．したがって，U は

$$U(x,\,y) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}} + const.$$

である．ここで任意定数 $const.$ は，$\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ で U が 0 になるようにするため，$const.=0$ で定めることにする．この U を，運動方程式を再現する Lagrangian の式 (12) に代入すれば

$$L(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{12}$$

を得る．当然この Lagrangian は運動方程式 (6) を再現する．

2.4 Euler-Lagrange 方程式での計算

まずは極座標における Lagrangian を計算する．新しい座標での Lagrangian は式 (3) にしたがって計算すればよかったので

$$
\begin{aligned}
L'(r,\,\phi,\,\dot{r},\,\dot{\phi}) &= L(r\cos\phi,\,r\sin\phi,\,\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi,\,\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) \\
&= \frac{m}{2}\left\{(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi)^2 + (\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)^2\right\} \\
&\qquad + \frac{GMm}{\sqrt{(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2}} \\
&= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}
\end{aligned}
$$

となる．このように Lagrangian を構成すれば，新しい Lagrangian L' の Euler-Lagrange 方程式の解 $r(t)$, $\phi(t)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos\phi(t) \\
y(t) &= r(t)\sin\phi(t)
\end{aligned}
$$

として計算した $x(t)$, $y(t)$ が，元の Lagrangian 式 (12) の Euler-Lagrange 方程式，すなわち運動方程式 (6) の解と一致することは，Euler-Lagrange 方程式の共変性のところで証明した．すなわち，L' の Euler-Lagrange 方程式は式 (10) と同値な方程式になるはずである．実際にそうなることを確認しよう．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial r} &= mr(t)\dot{\phi}(t)^2 - \frac{GMm}{r(t)^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r}(t) \\
\frac{\partial L'}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mr(t)^2\dot{\phi}(t) \\
&= 2mr(t)\dot{r}(t)\dot{\phi(t)} + mr(t)^2\ddot{\phi}(t)
\end{aligned}
$$

なので，L' の Euler-Lagrange 方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L'}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} \\
&= mr(t)\dot{\phi}(t)^2 - \frac{GMm}{r(t)^2} - m\ddot{r}(t) = 0 \\
&\frac{\partial L'}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} \\
&= 0 - 2mr(t)\dot{r}(t)\dot{\phi(t)} + mr(t)^2\ddot{\phi}(t) = 0
\end{aligned}
$$

となる．ケプラー問題では $r(t) \neq 0$ であるから，整理すると

$$
\begin{aligned}
m\ddot{r}(t) &= mr(t)\dot{\phi}(t)^2 - \frac{GMm}{r(t)^2} \\
m\ddot{\phi}(t) &= -\frac{2m\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)}{r(t)}
\end{aligned}
$$

となり，確かに (10) と一致した．

参考文献

[1] 新物理入門，駿台文庫，山本義隆，1987 年，p.93，球対称な質量分布の及ぼす重力．