解析力学ノート

みなと (@mntneko_)

2022 年 7 月 2 日

1　Lagrangian の発見と最小作用の原理

Newton の力学では，質量 m の小物体が力 $F(t)$ を受けて時刻 t_0 から t_1 で運動 $x(t)$ を行うとき

$$F(x(t)) = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

が成り立った．ここで x および F はベクトル値関数で，$x(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))$，$F(x) = (F_1(x),\, F_2(x),\, F_3(x))$ であるとする．各座標系での方程式に書き直せば

$$F_i(x(t)) - m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad (t_0 \leq t \leq t_1,\, i = 1,\, 2,\, 3)$$

このとき，$[t_0,\, t_1]$ を定義域とする任意の関数 $f_1,\, f_2,\, f_3$ に対して

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3} \left(F_i(x(t)) - m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} \right) f_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

が成り立つ．逆に，任意の関数 $f_1,\, f_2,\, f_3$ に対して上式が成り立つのならば，Newton の運動方程式が成り立つ．よって上式は Newton の運動方程式と同値な方程式であり，上式の解 $x(t)$ は Newton の運動方程式の解に一致する．上式で $f_1,\, f_2,\, f_3$ に**端点条件**

$$f_i(t_0) = f_i(t_1) = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

としても同値性は失われない．今は物理的な意味はよくわからないが，この関数 f_i は後で見るように運動の解にずれを課して $x_i \to x_i + f_i$ のようにすることに対応する．ここで，今は 3 自由度系で論じているが，今後の一般化も考えて n 自由度系で論じることにする．古典力学の 3 自由度系の話に戻したければ，単にすべての式で $n = 3$ とすればよい．さて，議論を進めるために力 F が保存力で，ポテンシャルに U よって与えられている場合を考えよう．ポテンシャル U は位置の関数である．

$$F_i(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = -\frac{\partial U(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_i}$$

ここで $x = x_1, \ldots, x_n$ とした．他にも，$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ などの記号を今後断りなく用いることにする．これを式 (1) に代入すれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) - m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} \right) f_i(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) f_i(t) - m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} f_i(t) \right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

ここで積の微分公式により

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} f_i \right) = m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} f_i(t) + m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\dot{f}_i(t)
$$

から

$$
-m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} f_i(t) = m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\dot{f}_i(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} f_i(t) \right)
$$

を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) f_i(t) + m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\dot{f}_i(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} f_i(t) \right) \right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) f_i(t) + m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\dot{f}_i(t) \right)\,\mathrm{d}t - \left[m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} f_i(t) \right]_{t_0}^{t_1} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) f_i(t) + m\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\dot{f}_i(t) \right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

ここで端点条件 $f_i(t_0) = f_i(t_1) = 0$ より最後の項を消去した．今

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}(x(t)) = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t), t) \\
\qquad m\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i}(x(t), \dot{x}(x), t)
\end{cases}
\tag{2}
$$

を満たすある関数 L が存在すれば，それを用いて

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t), t) f_i(x) + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i}(x(t), \dot{x}(t), t)\dot{f}_i(x) \right)\,\mathrm{d}t \\
&\approx \int_{t_0}^{t_1} \Big(L(x(t) + f(t), \dot{x}(t) + \dot{f}(t), t) - L(x(t), \dot{x}(t), t) \Big)\,\mathrm{d}t \qquad (3) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L(x(t) + f(t), \dot{x}(t) + \dot{f}(t), t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L((x + f)(t), (x + f)'(t), t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t \\
&= S[x + f] - S[x]
\end{aligned}
$$

である．ここで汎関数 S を

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\,\mathrm{d}t$$

で定めた．さらに，関数 f, g の和 $f+g$ を

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

で定め，そのとき

$$(f+g)'(t) = (f(t)+g(t))' = \dot{f}(t) + \dot{g}(t)$$

であることを用いた．ところで，式 (3) での $\approx$ を $=$ に変えたい．そこでまず，一般に n 変数実数値関数 F の $a+b = (a_1+b_1,\, \ldots,\, a_n+b_n)$ での値を $a = (a_1,\, \ldots,\, a_n)$ まわりのテイラー展開で表示することを考える．そのために 1 変数関数

$$\phi(t) = F(a+tb) = F(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n)$$

を考える．$\phi(1)$ を $t=0$ まわりの ϕ の 1 変数関数テイラー展開で表示すれば F のテイラー展開を得ることが出来る．

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_i}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\phi''(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_i}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_1} \right)(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i b_j \frac{\partial^2 F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n)
\end{aligned}$$

である．ここで $\phi^{(k)}(t)$ を数学的帰納法で求める．

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} \frac{\partial^k F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n) \tag{4}$$

とすると，$\phi^{(k+1)}(t)$ は

$$\begin{aligned}
\phi^{(k+1)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial^k F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} \sum_{i_{k+1}=1}^{n} b_{i_{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \frac{\partial^k F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right)(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1} F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}(a_1+tb_1,\, \ldots,\, a_n+tb_n)
\end{aligned}$$

であり，$\phi'(t)$ も式 (4) を満たすので，式 (4) は正しい．したがって $\phi^{(k)}(0)$ は

$$\phi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} \frac{\partial^k F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a_1,\, \ldots,\, a_n)$$

これを用いて ϕ の $t=0$ まわりの 1 変数関数テイラー展開を経ることにより，F の多変数関数テイラー展開は

$$\begin{aligned}
&F(a_1+b_1,\, \ldots,\, a_n+b_n) \\
&= \phi(1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} 1^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1} \cdots b_{i_k} \frac{\partial^k F(x_1,\, \ldots,\, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&= F(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + b_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \cdots + b_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} b_1 b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \cdots + \frac{1}{2} b_1 b_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} b_2 b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \cdots + \frac{1}{2} b_2 b_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{2} b_n b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \cdots + \frac{1}{2} b_n b_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + \frac{1}{3!} b_1 b_1 b_1 \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \frac{1}{3!} b_1 b_1 b_2 \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(a_1,\, \ldots,\, a_n) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{3!} b_n b_n b_n \frac{\partial^3 F}{\partial x_n \partial x_n \partial x_n}(a_1,\, \ldots,\, a_n) + \cdots
\end{aligned}$$

となる．よって，$2n+1$ 変数関数 $L(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \dot{x_1},\, \ldots,\, \dot{x_n},\, t)$ の $(x(t)+\epsilon f(t),\, \dot{x}(t)+\epsilon \dot{f}(t),\, t)$ での値を $(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)$ まわりのテイラー展開で表示すると

$$\begin{aligned}
&L(x(t)+\epsilon f(t),\, \dot{x}(t)+\epsilon \dot{f}(t),\, t) \\
&= L(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(t) \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_j(t) \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x_j}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \dot{f}_i(t) \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(t) \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x_j}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_j(t) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x_i} \partial \dot{x_j}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \epsilon^3 (\cdots) + \cdots
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&L(x(t)+\epsilon f(t),\, \dot{x}(t)+\epsilon \dot{f}(t),\, t) - L(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \\
&= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) + o(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&S[x+\epsilon f] - S[x] \\
&= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \mathrm{d}t + o(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

したがって結局，式 (3) を $\approx$ ではなく $=$ に書き換えると

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x+\epsilon f] - S[x]}{\epsilon} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

である．さて，式 (5) を見ると，運動の軌跡 $x(t)$ に微小変位 $\epsilon f(t)$ を加えたときの汎関数 S の値のずれの，ϵ に比例する項が 0 であり，ϵ^2 に比例する項，ϵ^3 に比例する項などしかないということがわかる．

$$
S[x+\epsilon f] - S[x] = \epsilon(\cdots) + \epsilon^2(\cdots) + \epsilon^3(\cdots) + \cdots
$$

もし $S[x+\epsilon f] - S[x]$ が ϵ^2 に比例すれば，ずれは ϵ に関して放物線を成すから S は x で極値を取っている．その他の場合も同様であり，式 (5) は S が x で極値を取っているということを示している．また，最初の方で f の物理的意味を後回しにしたが，式 (5) を見れば運動の軌跡 x に加える変位量 (ずれ) に相当していることは明らかである．f はそのような意味をもつ関数だったのである．なおここで，式 (2) を満たす関数 L のひとつは

$$
L(x,\, \ldots,\, x_n,\, \dot{x_1},\, \ldots,\, \dot{x_n},\, t) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{n} \dot{x_i}^2 - U(x_1,\, \ldots,\, x_n) \qquad (6)
$$

と与えられる．今論じてきたことは，この関数 L を用いて，汎関数 S を

$$
S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\,\mathrm{d}t
$$

で定めると，方程式

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x+\epsilon f] - S[x]}{\epsilon} = 0
$$

が運動方程式と同値になるということであった．運動方程式では，それぞれの物理系に依存し，運動方程式を決定する関数が複数存在した．U と，汎関数

$$
m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : f \mapsto m\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}
$$

である．これに対し，変形後の理論においては物理系に依存し，解を求める問題を決定する関数は L ひとつのみになっている．しかも，むしろ L の関数形を式 (6) で定めたから運動方程式が再現したと考えることができる．関数 L を使った理論の方がより広い，すなわち原理としてふさわしいと考えることが出来る．関数 L を **Lagrangian** といい，汎関数 S を**作用**，S の定義式の積分を**作用積分**と呼ぶ．最後に，古典力学では，斜面上を運動する物体や滑車に吊るされた 2 物体の運動の問題などの拘束条件付きの問題は，それぞれの場合において初等幾何学的な考察を行って拘束力を計算して運動方程式を考える必要があった．ところが，Lagrangian を使った議論では，運動が満たす拘束条件を $g(x) = 0$ としたとき，$g(x(t)) = g(x(t) + \epsilon f(t)) = 0$ であり，しかも g をテイラー展開することで

$$g(x(t) + \epsilon f(t)) = g(x(t)) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(t) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} f_i(t) f_j(t) + \cdots$$

なので，結局

$$0 = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(t) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} f_i(t) f_j(t) + \cdots$$

である．左辺は ϵ に依らずに 0 なので

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(t) = 0$$

を得る．このことを利用すれば，Lagrangian を用いた理論では拘束力を手で計算する必要はなく

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) \mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(t) = 0 \end{cases}$$

という条件付き汎関数極値問題を解けばいいということになる．この問題を解くには Lagrange 未定乗数関数を利用して微分方程式に書き直す必要があるが，それは今後のゼミで扱う．このように，Lagrangian を用いた議論は，運動方程式そのものよりもより根源的な議論であることがわかる．そこで，Lagrangian を用いた議論を原理として採用して整理したものが**最小作用の原理**である．実は次の幾何学的理論でみるように，Lagrangian をうまく構成した空間の上の関数として考えたとき，座標変換を行っても Lagrangian の第 $n+i$ 引数に第 i 引数の導関数が来るという関係性を保つように Lagrangian の座標変換を定めることが出来るので，その意味で $L(q_1,\, \ldots,\, q_n,\, \dot{q_1},\, \ldots,\, \dot{q_n})$ と記すことにする．

1.1 最小作用の原理

Lagrangian が L で与えられる系で行われる運動 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は，**作用**を

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\, \dot{q}(t),\, t)\,\mathrm{d}t$$

で定めると，任意の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{S[q+\epsilon f]-S[q]}{\epsilon}=0$$

を満たすような q として求まる．

1.2 汎関数微分

関数 f の関数 ϕ による**テスト**[*1] $\langle f,\,\phi\rangle$ を

$$\langle f,\,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx$$

で定める．関数のテストは**超関数**に関係のある理論であり，たとえば**デルタ関数** δ は，任意の関数 f に対し

$$\langle\delta,\,f\rangle=f(0)$$

を満たす超関数として定義できる．テストに入れられる関数は超関数[*2] も含むわけである (当然普通の関数も含む)．汎関数 I の**汎関数微分** $\dfrac{\delta I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\delta f_i}$ を，任意の**テスト関数** ϕ に対して

$$\left\langle\frac{\delta I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\delta f_i},\,\phi\right\rangle=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I[f_1,\,\ldots,\,f_i+\epsilon\phi,\,\ldots,\,f_n]-I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\epsilon}$$

を満たす超関数として定義する．これは関数のテストの定義に戻れば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\delta f_i\,(x)}\phi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I[f_1,\,\ldots,\,f_i+\epsilon\phi,\,\ldots,\,f_n]-I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\epsilon}$$

を満たす (超) 関数ということである．なお，汎関数微分の x での値は，慣例的に，分母に (x) をつけて $\dfrac{\delta I[f_1,\,\ldots,\,f_n]}{\delta f_i\,(x)}$ のように表記決まりになっている．作用

$$S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q(t),\,\dot{q}(t),\,t)\,\mathrm{d}t$$

の汎関数微分 $\dfrac{\delta S[q]}{\delta q_i}$ を求めよう．このとき，便宜上 f は $-\infty<t<t_0,\,t_1<t<\infty$ の範囲では $f(t)=0$ であるとしよう．そうすると，ちょうど運動方程式から作用を導き出したときと逆順の計

[*1] 一般的な用語ではないみたいだが，**テスト関数**だけ用語として存在し，**テスト**が存在しないのは言語運用の面から不都合に感じたので便宜上用いた．

[*2] 超関数にはいろいろあり，この場合は**シュワルツ超関数**と言うらしい．

算によって，同様に部分積分と端点条件を用いて，任意の関数 $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&S[q_1, \ldots, q_i + \epsilon f_i, \ldots, q_n] - S[q_1, \ldots, q_n] \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big(L(q_1(t), \ldots, q_i(t) + \epsilon f_i(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_i(t) + \epsilon \dot{f}_i(t), \ldots, \dot{q}_n(t), t) \\
&\quad - L(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t), t) \Big) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\epsilon \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) + \dot{f}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) + o(\epsilon) \right) \mathrm{d}t \\
&= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - f_i(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \right) \mathrm{d}t + o(\epsilon) \\
&= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - f_i(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \left[f_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right]_{t_0}^{t_1} + o(\epsilon) \\
&= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(f_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - f_i(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \mathrm{d}t + o(\epsilon) \\
&= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) f_i(t) \, \mathrm{d}t + o(\epsilon)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[q_1, \ldots, q_i + \epsilon f_i, \ldots, q_n] - S[q_1, \ldots, q_n]}{\epsilon} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) f_i(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

を得る．したがって，作用 S の汎関数微分は

$$
\frac{\delta I[q_1, \ldots, q_n]}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t)
$$

である．

1.3 幾何学的議論

運動方程式でも最小作用の原理でも，その解は座標系の上のパスであるが，座標系を複数考えれば解には複数の表現があることになる．それらの解は座標変換則によって結ばれている．解がそのようであるならば，座標系とは別のある空間 M 上に本質的な解が存在して，その空間 M から座標系への関数で本質的な解を座標系に写したものが現れていると考えるのは自然だろう．すなわち，運動方程式，あるいはもっと一般に微分方程式はそのような座標系とは異なる空間上のパスを解として求めているわけである．とりわけ，最小作用の原理のもとで議論をするとき，そのような解の空間 M を**配位空間**という．

このように考えると，物理系の特徴情報をすべて格納している関数である Lagrangian が座標系上の関数であるというのはおかしい．なぜなら，解は座標系に依らないものであるのに，その解を制限する関数が座標系に依っていれば，矛盾であるからである．そこで，Lagrangian も同じように座標系に依らない本質が存在しているはずである．Lagrangian は，各座標系の上ではなく，ある空間 N から実数への関数として定まっており，$L : N \to \mathbb{R}$ とする．ある座標系 $U \subseteq R^n$ 上の Lagrangian L_φ を，**局所座標系** $\varphi : V \to U \quad (V \subseteq N)$ を用いて $L_\varphi = L \circ \varphi^{-1}$ で定める．この L_φ こそ今まで考えてきた Lagrangian であり，これを局所座標系 φ による L の**局所座標表示**という．

Lagrangian が座標系に依らない概念であるだけでは不十分である．解を制限する問題の記述の仕方も座標系に依らないものでなければならない．例えば，デカルト座標系 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ では，問題の記述は

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L_x(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t$$

が最小になるような関数 x に対応する配位空間 M 上のパス c が解であるというものであるのに，適当な座標変換を施した座標系 $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_n) \\
x_2 &= f_2(y_1, \ldots, y_n) \\
\cdots& \\
x_n &= f_n(y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

においては，デカルト座標系で求めた配位空間上の解 c に対応する座標系 y での解は

$$S[y] = \int_{t_0}^{t_1} L_y(y(t), 2\dot{y}(t))\, \mathrm{d}t$$

で求まるという具合では，座標系ごとに解を制限する問題が異なるので，物理系の情報として Lagrangian だけでは完全ではなく，他に解を制限する方法を与えるような情報がどこかに存在するということになる．これでは Lagrangian のみによって物理が決まるという原理の記述に適さない．そこで次のようにする．配位空間 M の局所座標系を 2 つ取って $\varphi_1 : V_1 \to U_1, \varphi_2 : V_2 \to U_2$ とし，U_1 から U_2 への座標変換 $f = \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$ を考える．さらに座標系 U_1 で作用積分を書く際に用いられる Lagrangian の局所座標表示の定義域を $U_1 \times {U_1}^*$ とし，対応する局所座標系を ${\varphi_1}^* : {V_1}^* \to U_1 \times {U_1}^*$ とするとする．また，座標系 U_2 で作用積分を書く際に用いられる Lagrangian の局所座標表示の定義域を $U_2 \times {U_2}^*$ とし，対応する局所座標系を ${\varphi_2}^* : {V_2}^* \to U_2 \times {U_2}^*$ とするとする．このとき，最小作用の原理の記述が座標系によって不変であるために $U_1 \times {U_1}^*$ から $U_2 \times {U_2}^*$ への座標変換 $f^* = {\varphi_1}^* \circ {\varphi_2}^{*-1}$ が満たすべき条件を考察しよう．運動 $c : \mathbb{R} \to M$ の座標系 U_1 での表示を $q = {\varphi_1}^{-1} \circ c$，座標系 U_2 における表示を $Q = {\varphi_2}^{-1} \circ c$ とする．このとき，2 つの汎関数極値問題の解

$$S_{\varphi_1}[q] = \int_{t_0}^{t_1} L_{\varphi_1}(q(t), \dot{q}(t))\, \mathrm{d}t$$

が極値を取るような q を q^* としたときの解 ${c_1}^* = {\varphi_1}^{-1}(q^*)$ と

$$S_{\varphi_2}[Q] = \int_{t_0}^{t_1} L_{\varphi_2}(Q(t),\, \dot{Q}(t))\,\mathrm{d}t$$

が極値を取るような Q を Q^* としたときの解 ${c_2}^* = {\varphi_2}^{-1}(Q^*)$ が一致する，すなわち ${c_1}^* = {c_2}^*$ となる十分条件を求めよう．実は，座標変換 $f^* = {\varphi_1}^* \circ {\varphi_2}^{*-1}$ が

$$\begin{cases} {f_i}^*(Q_1,\, \ldots,\, Q_n,\, {Q_1}^*,\, \ldots,\, {Q_n}^*) = f_i(Q_1,\, \ldots,\, Q_n) \\ {f_{n+i}}^*(Q_1,\, \ldots,\, Q_n,\, {Q_1}^*,\, \ldots,\, {Q_n}^*) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} {Q_k}^* \end{cases} \tag{7}$$
$$(i = 1,\, \ldots,\, n, \quad (Q_1,\, \ldots,\, Q_n) \in U_2, \quad ({Q_1}^*,\, \ldots,\, {Q_n}^*) \in {U_2}^*)$$

を満たせばよいことがわかる．なぜならこのとき

$$\begin{aligned} &L_{\varphi_2}(Q(t),\, \dot{Q}(t)) \\ &= L_{\varphi_1}\left(f_1(Q(t)),\, \ldots,\, f_n(Q(t)),\, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k(t),\, \ldots,\, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial Q_k} \dot{Q}_k(t) \right) \end{aligned}$$

が成り立つが，L_{φ_1} は $i = 1,\, \ldots,\, n$ について，第 $n+i$ 番目の引数が第 i 番目の引数の導関数になっているので，このとき Q を自由に取って汎関数極値問題を考えることは

$$L_{\varphi_1}(q(t),\, \dot{q}(t))$$

で q を自由に取って汎関数極値問題を考えることと同じであるからである．このことから，Lagrangian の定義域となっている空間 N は，座標変換が式 (7) を満たすような空間であることがわかる．式 (7) は空間 N に対する制約で，Lagrangian がどのような空間の上の関数になっているかという情報を与えている．この座標変換のもとでは，ある座標系の Lagrangian の局所座標表示 L_φ に引数として $(q(t),\, \dot{q}(t))$ のように，ある関数とその導関数を与えると，対応するその他の局所座標表示でも常に第 $n+i$ 番目の引数が第 i 番目の導関数であるという構造が保たれる．その意味で，これからは Lagrangian の引数を $L(q_1,\, \ldots,\, q_n,\, \dot{q}_1,\, \ldots,\, \dot{q}_n)$ と記す．座標が q になっているのは，どの座標系でもこの引数の構造が保たれるという意味である．ところで，空間 N は次のようなものであることが証明できる．空間 N の元の表示は，N の局所座標系の選び方に依存する (もちろん N の元自体は局所座標系には依存しない) ので，$\varphi^* : V^* \to \mathbb{R}^{2n}$ を N の局所座標系のひとつとすると，M の局所座標表示 φ があって，N の元は，N 上の C^∞ 級関数 F に対して

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left. \frac{\partial F_\varphi}{\partial x_i} \right|_{\varphi^{-1}(x_1,\, \ldots,\, x_n)} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F_\varphi}{\partial x_i}(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \varphi^{*-1}(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)$$

を満たす微分作用素

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left. \frac{\partial \quad \varphi}{\partial x_i} \right|_{\varphi^{-1}(x_1,\, \ldots,\, x_n)} = \varphi^{*-1}(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)$$

であり，これを**接ベクトル**という．N の局所座標系が決まれば M の局所座標系がひとつ定まり，逆も成り立つので，N と M の局所座標系は一対一に対応している．偏微分記号の中の ${}_{\varphi}$ は与えられた関数を φ による局所座標表示に直してから偏微分するという意味である．このような空間 N の座標変換が式 (7) になることを確かめよう．M の局所座標系を定めれば N の局所座標系が定まるので，M の局所座標系を 2 つとって φ_1, φ_2 とし，それに対応する N の局所座標系を ${\varphi_1}^*, {\varphi_2}^*$ とし，さらに座標変換を $f = \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$，$f^* = {\varphi_1}^* \circ {\varphi_2}^{*-1}$ とする．このとき，F を任意の N 上の C^∞ 級関数とすると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} {Q_i}^* \frac{\partial F_{\varphi_2}(Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial Q_i}(Q_1, \ldots, Q_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {Q_i}^* \frac{\partial F_{\varphi_1}(f_1(Q), \ldots, f(Q))}{\partial Q_i}(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {Q_i}^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial F_{\varphi_1}(q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_j}(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} {Q_i}^* \right) \frac{\partial F_{\varphi_1}(q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_j}(f_1(Q), \ldots, f_n(Q))
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
&{\varphi_2}^{*-1}(Q_1, \ldots, Q_n, {Q_1}^*, \ldots, {Q_n}^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {Q_i}^* \frac{\partial \ \ {}_{\varphi_2}}{\partial Q_i}(Q_1, \ldots, Q_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} {Q_i}^* \right) \frac{\partial \ \ {}_{\varphi_1}(q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_j}(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)) \\
&= {\varphi_1}^{*-1} \left(f_1(Q), \ldots, f_n(Q), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial Q_i} {Q_i}^*, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial Q_i} {Q_i}^* \right)
\end{aligned}
$$

なので，両辺を ${\varphi_1}^*$ に作用させれば式 (7) を得る．N は M 上の接ベクトル全体を集めてきた空間であり，M の**接バンドル**とよばれ，TM で表記される．したがって，Lagrangian は，配位空間 M の接バンドル TM 上の関数であると言える．というよりむしろ，幾何学的な理論から，TM 上の関数として Lagrangian を構成すれば，物理系の情報はすべて Lagrangian が持つことが証明できると言った方がよい．

2　関数，偏微分に関する記法についての補足

物理学では関数 F が実際には $F(x(t))$ のような構造で t の関数になっていることを考えるときでも

$$
F = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}
$$

などと簡易的に書いてしまうことがある．このような書き方は文字数を削減できる反面，解析力学においては重大な勘違いや理解不足を生むことが多いので，くどすぎるくらいに

$$F(x(t)) = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}(t)$$

と書くことにする．次に偏微分に関する記法について説明する．$2n$ 変数の関数 L を，i 番目の変数で偏微分して得られる偏導関数に，引数として $(a_1, \ldots, a_n, \dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})$ を与えた（つまりこの点での偏導関数の値という意味である）を

$$\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})}{\partial q_i}(a_1, \ldots, a_n, \dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n}) \tag{8}$$

と書くことにする．もし $a_i = q_i, \dot{a_i} = \dot{q_i}$ のときでも，くどいけれども

$$\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})$$

と書くことにする．このとき，式 (8) は

$$\frac{\partial L(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n, \dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})$$

と書いてもなんら意味が変わらないことがわかる．つまり，式 (8) の q_i や $\dot{q_i}$ は，式の外部で説明が与えられている変数や関数ではなく，もし記号を置き換えてしまっても式の意味は変わらない記号であることがわかる．このような変数を**ダミー変数**という．式の外部で説明が与えられているとは，式本体ではなく，その上下の文章に q_i や $\dot{q_i}$ の説明が書かれていることを言う．つまり，ラグランジアン L で指定される系で運動 q が行われるとき，q は次の方程式 (9) を満たす:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})}{\partial q_i}(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q_1}(t), \ldots, \dot{q_n}(t)) \\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})}{\partial \dot{q_i}}(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q_1}(t), \ldots, \dot{q_n}(t)) = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

と言った時は，q はダミー変数ではない．なぜなら式 (9) で q を別の記号に置き換えてしまったら，式の上にある説明とかみ合わなくなり言っている意味が異なってしまうからである．このときの q は関数であり，**系の解の運動**を表している．一方，偏導関数の記号

$$\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})}{\partial \dot{q_i}}$$

に現れる q_i や $\dot{q_i}$ は変数である．決して関数ではないので，$q_i(t)$ や $\dot{q_i}(t)$ とはできない．しかも，このときの $q_i, \dot{q_i}$ はそれぞれ座標空間のある元，速度空間のある元という意味である．ここで座標空間，速度空間とは，それぞれ座標，速度として許される値をすべて集めてきた集合という意味で，ここで便宜上用いる用語であって，一般的な用語ではない．偏微分の記号で現れる q_i や $\dot{q_i}$ は座標空間，速度空間の元としての意味なので，$\dot{q_i}$ は $\dot{q_i}(t) = q(t)$ という意味ではない．つまり偏微

分記号の中では q_i と $\dot{q}_i$ は独立に動かせる変数である (決して関数ではない). そもそも偏微分という操作は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_i}(a_1, \ldots, a_n, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n) \\
&= \lim_{\dot{q}_i \to \dot{a}_i} \frac{L(a_1, \ldots, a_n, \dot{a}_1, \ldots, \dot{q}_i, \ldots, \dot{a}_n) - L(a_1, \ldots, a_n, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_i \ldots, \dot{a}_n)}{\dot{q}_i - \dot{a}_i}
\end{aligned}
$$

という意味なので, 他の変数をとめて $\dot{q}_i$ だけを動かして行う操作であるから, この場合は $\dot{q}_i$ がほかの q_i などの変数とは独立であることは明らかである. 一方で, Euler-Lagrange 方程式 (9) においての偏微分記号の中にない $q_i(t)$ と $\dot{q}_i(t)$ は $\dot{q}_i(t) = q'(t)$ の意味なので明らかに関係性がある. このように, q_i と $\dot{q}_i$ の独立性について考えるときはそれが関数であるのか変数であるのか意識することは重要である.