Fourier 変換による微分方程式の解法と信号処理

みなと (@mntneko_)

2022 年 8 月 3 日

目次

1　Fourier 変換と微分方程式

1.1　Laplace 変換，Fourier 変換による微分方程式の求解

Laplace 変換を用いて微分方程式を解くことはやったことがある人も多いだろう．実は全く同じことは Fourier 変換を用いても行うことができる．両者の違いは次のような感じである．

表 1　Laplace 変換または Fourier 変換を用いた線形微分方程式の解法

変換	求まる解
Laplace 変換	一般解の任意定数に具体的な値を代入したもの
Fourier 変換	特殊解

1.2　微分演算子について

$\mathcal{L}$ を微分演算子としよう．つまり，ある関数 f を用いて $\mathcal{L}[f]$ と書いたならば，これは (新しい f の形に依存するような) 関数である．すなわち $\mathcal{L}[f](x)$ のように引数を噛ませて初めて数になる．$\mathcal{L}$ の例としては単純に微分とか，n 階微分とか，それらを定数倍して足し合わせたものとかいろいろある．また，$\mathcal{L}$ は線形とする．

1.3　非斉次線形微分方程式の解について

非斉次 n 線形微分方程式

$$\mathcal{L}[f](x) = g(x)$$

の解 f というのは次のような感じだった．

$$f(x) = q(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x) \qquad (C_k \text{ は任意定数}) \tag{1}$$

特殊解というのは上の式の q のことで，$u_1, \ldots, u_n$ は与えられた微分方程式で非斉次項 $g(x)$ を無視した方程式

$$\mathcal{L}[f](x) = 0$$

の n 個の線形独立な解である．Laplace 変換を使った解法では Laplace 変換をするのに初期条件が必要だった．実はその初期条件を決めるというのは一般解の任意定数 $C_1, \ldots, C_n$ をその時点で決定しているのであった．Fourier 変換を使った解法ではそうではなく，特殊解を求める．

2 Fourier 変換による解法 (1)

2.1 解法の概要

定数係数非斉次線形微分方程式

$$\mathcal{L}[f](x) = g(x) \tag{2}$$

を Fourier 変換を使って解くことを考えよう．まず両辺を Fourier 変換する．このとき，Fourier 変換の性質

$$\mathcal{F}[f'](\phi) = j\phi\mathcal{F}[f](\phi)$$

に注意すると，微分演算子は ϕ の多項式に対応することがわかる．その多項式は $\mathcal{L}$ に依存しているのだから，とりあえず $P_{\mathcal{L}}(\phi)$ と記す．式 (2) の両辺を Fourier 変換すれば

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}}(\phi)\mathcal{F}[f](\phi) &= \mathcal{F}[g](\phi) \\ \therefore\quad \mathcal{F}[f](\phi) &= \frac{1}{P_{\mathcal{L}}(\phi)}\mathcal{F}[g](\phi) \end{aligned}$$

である．今，式 (2) の解を式 (1) にしたがって特殊解 q と斉次方程式の解 $u_1, \ldots, u_n$ に分解する．このとき実は $u_1, \ldots, u_n$ の Fourier 変換については

$$P_{\mathcal{L}}(\phi)\mathcal{F}[u_k](\phi) = 0$$

が成り立っているので，結局

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\mathcal{L}}(\phi)}\mathcal{F}[g](\phi) &= \mathcal{F}[q](\phi) + \sum_{k=1}^{n} C_k\mathcal{F}[u_k](\phi) \\ &= \mathcal{F}[q](\phi) \end{aligned} \tag{3}$$

である点に注意する．このことがあるから Fourier 変換を用いた解法では特殊解が求まる．ここまでくれば，あとは Fourier 変換

$$\mathcal{F}[g](\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\phi x}\,\mathrm{d}x$$

を計算して式 (3) に代入して q の Fourier 変換を求めて，さらにそれを Fourier 逆変換すれば，特殊解 q を得る．

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_{\mathcal{L}}(\phi)}\mathcal{F}[g](\phi)e^{j\phi x}\,\mathrm{d}\phi \tag{4}$$

この解法の流れは次の図のようになる．

微分方程式の両辺を Fourier 変換する

$$\Big\downarrow$$

(ϕ**の多項式**)$\mathcal{F}$[**解**](ϕ) $=$ $\mathcal{F}$[**非斉次項**](ϕ) **の形に変形する**

$$\Big\downarrow$$

両辺を ϕ **の多項式で割って特殊解の Fourier 変換を計算する**

$$\Big\downarrow$$

非斉次項の Fourier 変換を計算し，上で求めた式に代入する

$$\Big\downarrow$$

逆 Fourier 変換の積分を実行し特殊解を求める

図 1　Fourier 変換による解法 (1) の概要

2.2　三角関数の Fourier 変換

式 (2) に書き表した微分方程式で，よく g として与えられるのは三角関数であるので，三角関数の Fourier 変換を求めておく．実は三角関数の Fourier 変換は δ 関数の和であるので，積分 (4) は非常に簡単に計算できる．Laplace 変換でやったように部分分数分解や留数定理を使う必要はない．

まず，δ **関数の積分表示**を求めて置きたいと思う． Fourier 変換したものを Fourier 逆変換すれば元の関数に戻るから，適当な関数 f に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[F[f]](x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{j\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(x-u)\omega}\,\mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

である．ここで δ 関数の性質より

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(x-u)\,\mathrm{d}u$$

だったので，これらの式を比較することにより

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jxu}\,\mathrm{d}u$$

である．これを δ **関数の積分表示**と呼ぶ．これを用いると，$V_s(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ の Fourier 変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[V_s](\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \sin(\omega t + \theta) e^{-j\phi t}\,\mathrm{d}t \\
&= V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t + j\theta} - e^{-j\omega t - j\theta}}{2j} e^{-j\phi t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{jV_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\theta} e^{j(\omega - \phi)t} - e^{-j\theta} e^{-j(\omega + \phi)t} \right) \mathrm{d}t \\
&= -j\pi V_0 \left(\frac{e^{j\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \phi)t}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{-j\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega + \phi)t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -j\pi V_0 \left(e^{j\theta} \delta(\omega - \phi) - e^{-j\theta} \delta(\omega + \phi) \right) \\
&= j\pi V_0 \left(e^{j\theta} \delta(\omega + \phi) - e^{-j\theta} \delta(\omega - \phi) \right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる．また，$V_c(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$ の Fourier 変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[V_c](\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \cos(\omega t + \theta) e^{-j\phi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{V_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t + j\theta} + e^{-j\omega t - j\theta}}{2} e^{-j\phi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{V_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\theta} e^{j(\omega - \phi)t} + e^{-j\theta} e^{-j(\omega + \phi)t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \pi V_0 \left(\frac{e^{j\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \phi)t}\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-j\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega + \phi)t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \pi V_0 \left(e^{j\theta} \delta(\omega - \phi) + e^{-j\theta} \delta(\omega + \phi) \right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる．

2.3 信号処理への応用例

電気回路論では KVL (キルヒホッフの第 2 法則，電圧に関するもの) や KCL (キルヒホッフの第 1 法則，電流に関するもの) から**回路の方程式**と呼ばれる，回路の振る舞いを決定する微分方程式が得られる．この方程式を Fourier 変換で解く．

例として次に示す回路，**ローパスフィルタ**を解くことにする．ローパスフィルタは入力電圧 $v_{\mathrm{in}}(t)$ のうち低周波域の信号のみを出力電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ に反映させる回路であり，ノイズの除去などに使われる．

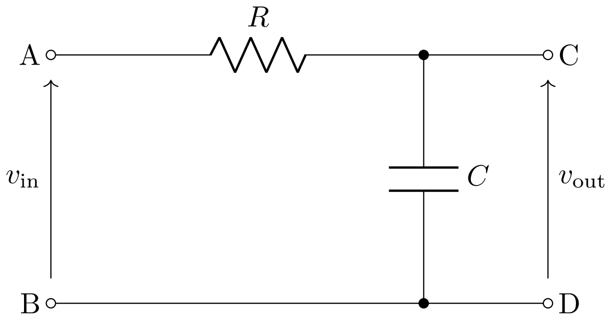

図 2　ローパスフィルタ

ローパスフィルタでは入力側の端子間 (A-B) では電流が流れ，出力側の端子間 (C-D) では電流が流れないものとする．そうすることで，コンデンサ C の上側極板に蓄えられている電荷を $q(t)$ とすれば，抵抗 R を左から右に流れる電流は $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$ なので，KVL より回路の方程式は

$$v_{\mathrm{in}}(t) - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{q(t)}{C} = 0$$

となる．これに $q(t) = Cv_{\mathrm{out}}(t)$ を代入して $q(t)$ を消去すると，解くべき方程式は

$$v_{\mathrm{out}}(t) + CR\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}t}(t) = v_{\mathrm{in}}(t) \tag{7}$$

となる．この両辺を Fourier 変換すると

$$(1 + j\phi CR)\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = \mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi)$$

となる．両辺を $(1 + j\phi CR)$ で割ることで，出力電圧 v_{out} の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = \frac{1}{1 + j\phi CR}\mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi)$$

となる．ここで

$$H(\phi) = \frac{1}{1 + j\phi CR}$$

とすれば

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = H(\phi)\mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi) \tag{8}$$

である．この式の意味するところは，出力電圧の周波数分布は入力電圧の周波数分布に関数 H をかけたものということである．したがって，$|H(\phi)| \ll 1$ となる周波数 ϕ の信号は出力電圧に反映されにくいことが分かる．ローパスフィルタにおいては

$$|H(\phi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2 C^2 R^2}}$$

であるので，ϕ が大きい信号，すなわち高周波の信号は出力電圧に反映されにくいことが分かる．また，たとえば $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \sin \omega t$ のように，特定の周波数しか含まない信号が入力された場合を考えると

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega CR} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} - j\frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \end{aligned}$$

であるので，出力電圧の位相は入力電圧の位相より $argH(\omega) = -\tan^{-1}(\omega CR)$ だけ進む，すなわち $\tan^{-1}(\omega CR)$ だけ位相が遅れることがわかる．さらに，高周波の信号 ($\phi \gg 1$) のみを成分として含む入力電圧を与えたとき

$$H(\phi) \approx \frac{1}{j\phi CR}$$

であるので，出力電圧と入力電圧の関係は

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) \approx \frac{1}{j\phi CR}\mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi)$$

となる．これは出力電圧が入力電圧の時間積分となっていることを示している (Fourier 変換の性質を思い出してほしい)．このことからローパスフィルタは**積分回路**と呼ばれる．

このように，一般に出力電圧と入力電圧を $\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = H(\phi)\mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi)$ の関係で結ぶ関数 H はそのシステムを特徴づける関数であり，**伝達関数**と呼ばれる．

式 (8) はローパスフィルタの振る舞いを特徴づける式であると同時に，入力電圧 v_{in} を具体的に与えたときに出力電圧 v_{out} を求めるための式でもある．両辺を逆 Fourier 変換すれば v_{out} が求まるからである．つまり式 (8) は 2 つの意味で重要である．

さて，ローパスフィルタにある特定の入力電圧を与えたときの出力電圧を求めてみよう．入力電圧として $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \sin \omega t$ を与えてみる．このとき式 (5) から

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi) = j\pi V_0(\delta(\omega + \phi) - \delta(\omega - \phi))$$

であるので，式 (8) に代入すると

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = \frac{j\pi V_0}{1 + j\phi CR}(\delta(\omega + \phi) - \delta(\omega - \phi))$$

であるので，両辺を逆 Fourier 変換すれば，v_{out} は

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{out}}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi)e^{j\phi t}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\pi V_0}{1+j\phi CR}(\delta(\omega+\phi)-\delta(\omega-\phi))e^{j\phi t}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{jV_0}{2(1-j\omega CR)}e^{-j\omega t} - \frac{jV_0}{2(1+j\omega CR)}e^{j\omega t} \\
&= \frac{jV_0}{2(1+\omega^2C^2R^2)}\,((1+j\omega CR)(\cos\omega t - j\sin\omega t) \\
&\qquad -(1-j\omega CR)(\cos\omega t + j\sin\omega t)) \\
&= \frac{jV_0}{2(1+\omega^2C^2R^2)}\,(2j\omega CR\cos\omega t - 2j\sin\omega t) \\
&= -\frac{\omega CR}{1+\omega^2C^2R^2}V_0\cos\omega t + \frac{1}{1+\omega^2C^2R^2}V_0\sin\omega t \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\sin\bigl(\omega t - \tan^{-1}(\omega CR)\bigr) \\
&= |H(\omega)|V_0\sin(\omega t + \mathrm{Arg}(H(\omega)))
\end{aligned}
$$

となる．これは他の解法による解と一致する．ところでこれは式 (7) の特殊解であり一般解ではないが，応用上はこれを v_{out} として問題ない．なぜなら式 (7) の一般解は，上で求めた特殊解に，簡単な計算で求められる斉次方程式の解を定数倍して足し合わせたものであり

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathrm{out}}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_0\sin\bigl(\omega t - \tan^{-1}(\omega CR)\bigr) + X\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)
\end{aligned}
$$

(X は任意定数)

であるが，任意定数がかけられた項は $t\to\infty$ で 0 に収束するので，回路の定常的な振る舞いにおいては，出力電圧には含まれない項となるからである．

3 Fourier 変換による解法 (2)

3.1 解法の概要

Fourier 変換による解法 (1) で $H(\phi) = \dfrac{1}{P_{\mathcal{L}}(\phi)}$ とおき

$$
\mathcal{F}[q](\phi) = H(\phi)\mathcal{F}[g](\phi) \tag{9}
$$

まで変形した時点から考えてみよう．Fourier 変換による解法 (1) では，ここで非斉次項 g の Fourier 変換を求めて上の式に代入していた．それはすなわち，非斉次項 g が具体的に与えられない限りここから先に計算を進めることができないということを意味している．この解法では，ここからさらに，g を具体的に定めないまま変形を進めることを考える．

2 つの関数から 1 つの関数を作り出す演算として**畳み込み**がある．関数 f_1 と f_2 の畳み込み $f_1 * f_2$ は次で定義される．

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,\mathrm{d}x$$

畳み込み $f_1 * f_2$ を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_1 * f_2](\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\phi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-j\phi t} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-j\phi t} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-j\phi x} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) e^{-j\phi(t-x)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\phi x}\,\mathrm{d}t \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)^{-j\phi(t-x)}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \mathcal{F}[f_1](\phi) \mathcal{F}[f_2](\phi)
\end{aligned}$$

となる．したがって，$f_1(t) = h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H](t)$，$f_2(t) = g(t)$ とすれば，式 (9) より，特殊解 q は

$$q(t) = (h * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g(t-x)\,\mathrm{d}x$$

と表示できることがわかる．したがって，このような表示を得るためには H の逆 Fourier 変換 h を計算すればよい．

3.2 信号処理への応用例

Fourier 変換による解法 (1) で扱ったローパスフィルタの特殊解をこの解法で求めてみよう．まず，KVL から回路の方程式を得て，それを Fourier 変換することで

$$\mathcal{F}[v_{\mathrm{out}}](\phi) = \frac{1}{1 + j\phi CR} \mathcal{F}[v_{\mathrm{in}}](\phi)$$

を得る．したがって，伝達関数

$$H(\phi) = \frac{1}{1 + j\phi CR}$$

の逆 Fourier 変換 h を求めれば，出力電圧 v_{out} は

$$v_{\mathrm{out}}(t) = (h * v_{\mathrm{in}})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) v_{\mathrm{in}}(t-x)\,\mathrm{d}x$$

と表される．伝達関数 H の逆 Fourier 変換 h は，そのシステムの**インパルス応答**と呼ばれる．

では，ローパスフィルタのインパルス応答 h を求めてみよう．逆 Fourier 変換の定義から

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\phi)e^{j\phi x}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

非積分関数は $\phi = \dfrac{j}{CR}$ に特異点を持つので，積分経路 C_r を

$$C_r : [0,\,\pi] \to \mathbb{C},\, \theta \mapsto re^{j\theta}$$

と，ガウス平面の上半面をまわるようにとって

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi = 0$$

を示すことが出来れば，留数定理から h が計算できる．したがって，上の極限を示す．

まず，絶対値によって抑えると

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right| &\le \int_{C_r}\left|\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\right||\mathrm{d}\phi| \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|\exp\bigl(jxre^{j\theta}\bigr)|}{|1+jCRre^{j\theta}|}|jre^{j\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|\exp(jxr\cos\theta)\exp(-xr\sin\theta)|}{|1+jCRre^{j\theta}|}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= r\int_0^{\pi} \frac{\exp(-xr\sin\theta)}{|1+jCRre^{j\theta}|}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

である．ここで $xr\cos\theta \in \mathbb{R}$ より $|\exp(jxr\cos\theta)| = 1$ を用いた．三角不等式 $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ で $\alpha = z_1 - z_2,\, \beta = z_2$ とすると $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$ であり，$\alpha = z_2 - z_1,\, \beta = z_1$ とすると $|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1|$ なので，結局任意の複素数に対して $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$ である．ここで $z_1 = jCRre^{j\theta},\, z_2 = -1$ とすることで

$$0 < rCR - 1 < |1 + jCRre^{j\theta}|$$

なので

$$\left|\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right| \le \frac{r}{rCR-1}\int_0^{\pi}\exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

である．ここでジョルダンの不等式 (これはグラフを描けばすぐにわかる) より

$$\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つので，$x > 0$ のとき

$$-xr\sin\theta \le -\frac{2xr\theta}{\pi} \le 0$$

なので

$$\exp(-xr\sin\theta) \leq \exp\left(-\frac{2xr\theta}{\pi}\right)$$

である．これにより

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2xr\theta}{\pi}\right)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[-\frac{\pi}{2xr}\exp\left(-\frac{2xr\theta}{\pi}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2xr}\left(1-e^{-xr}\right)\end{aligned}$$

を得る．また，$u=\pi-\theta$ で変換すると

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \exp(-xr\sin\pi-u)(-1)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-xr\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

なので結局

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{xr}\left(1-e^{-xr}\right)\end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right| &\leq \frac{r}{rCR-1}\int_0^{\pi} \exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{r}{rCR-1}\frac{\pi}{xr}\left(1-e^{-xr}\right) \\ &= \frac{\pi}{x(rCR-1)}\left(1-e^{-xr}\right)\end{aligned}$$

であるので

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi = 0$$

が示された．したがって留数定理から，$x>0$ のときは

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi &= 2\pi j\mathrm{Res}_{\phi=\frac{j}{CR}}\left(\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\right)\\
&= 2\pi j\lim_{\phi\to\frac{j}{CR}}\left(\phi-\frac{j}{CR}\right)\left(\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\right)\\
&= 2\pi j\lim_{\phi\to\frac{j}{CR}}\frac{1}{jCR}(1+j\phi CR)\left(\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\right)\\
&= \frac{2\pi}{CR}\lim_{\phi\to\frac{j}{CR}}e^{j\phi x}\\
&= \frac{2\pi}{CR}\exp\left(-\frac{x}{CR}\right)
\end{aligned}$$

となる．$x<0$ のときはさきほどのように上半面をまわる経路の積分は $r\to\infty$ で収束しないので積分経路 C_r を

$$C_r:[0,\,\pi]\to\mathbb{C},\,\theta\mapsto re^{-j\theta}$$

と，ガウス平面の下半面をまわるようにとって

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi=0$$

を示す．

$x>0$ のときの証明と同じく絶対値で抑えると

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right| &\leq \int_{C_r}\left|\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\right||\mathrm{d}\phi|\\
&= \int_0^{\pi}\frac{|\exp\bigl(jxre^{-j\theta}\bigr)|}{|1+jCRre^{-j\theta}|}|jre^{j\theta}|\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\pi}\frac{|\exp(jxr\cos-\theta)\exp(-xr\sin-\theta)|}{|1+jCRre^{-j\theta}|}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= r\int_0^{\pi}\frac{\exp(xr\sin\theta)}{|1+jCRre^{-j\theta}|}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

であり，同様に三角不等式から

$$0<rCR-1<|1+jCRre^{-j\theta}|$$

を得るので

$$\left|\int_{C_r}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right|\leq\frac{r}{rCR-1}\int_0^{\pi}\exp(xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

である．ここで $x>0$ のとき

$$\int_0^{\pi}\exp(-xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\leq\frac{\pi}{xr}\left(1-e^{-xr}\right)$$

だったのだから，$x<0$ のときは

$$\int_0^{\pi} \exp(xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \leq -\frac{\pi}{xr}\left(1-e^{xr}\right)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_r} \frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi\right| &\leq \frac{r}{rCR-1}\int_0^{\pi}\exp(xr\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{r}{rCR-1}\frac{-\pi}{xr}\left(1-e^{xr}\right) \\ &= -\frac{\pi}{x(rCR-1)}\left(1-e^{xr}\right)\end{aligned}$$

なのだから，$x<0$ のときは，下半面をまわる経路 C_r で

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi = 0$$

が成り立つ．このとき，実軸上を $-\infty$ から ∞ に進む経路と下半面をまわる経路 C_r をつなげて得られる単一閉曲線上とその内部で被積分関数は正則であることから，$x<0$ のときは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi = 0$$

であることがわかる．また，$x=0$ のときは

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-j\phi CR}{\sqrt{1+\phi^2C^2R^2}}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\phi^2C^2R^2}} - j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi CR}{\sqrt{1+\phi^2C^2R^2}}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \left[\frac{1}{CR}\log\left(1+\sqrt{\phi^2C^2R^2+1}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - j\left[\frac{1}{CR}\sqrt{1+\phi^2C^2R^2}\right]_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}$$

なので，実部も虚部も不定値の極限だから，この積分は収束しない．以上により h は $x=0$ では定義されないものの

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\phi x}}{1+j\phi CR}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{CR}\theta(x)\exp\left(-\frac{x}{CR}\right)\end{aligned}$$

となる．なお，θ はヘヴィサイドの階段関数で

$$\theta(x) = \begin{cases}1 & (x>0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

である．h は区分的に滑らかな関数であるから Fourier 変換可能であり

$$H(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\phi x} \, \mathrm{d}x$$

が成り立つ．実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\phi x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \frac{1}{CR} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) e^{-j\phi x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{CR} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) (\cos\phi x - j \sin\phi x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin\phi x \, \mathrm{d}x &= \left[-CR \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin\phi x\right]_0^{\infty} \\
&\quad + \phi CR \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x \\
&= \phi CR \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x &= \left[-CR \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x\right]_0^{\infty} \\
&\quad - \phi CR \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin\phi x \, \mathrm{d}x \\
&= CR - \phi CR \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin\phi x \, \mathrm{d}x \\
&= CR + \left[\phi C^2 R^2 \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin\phi x\right]_0^{\infty} \\
&\quad - \phi^2 C^2 R^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

より

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x = \frac{CR}{1 + \phi^2 C^2 R^2}$$

であることを用いれば

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\phi x} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{CR} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) (\cos\phi x - j \sin\phi x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1 - j\phi CR}{CR} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \cos\phi x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1 - j\phi CR}{CR} \frac{CR}{1 + \phi^2 C^2 R^2} \\
&= \frac{1 - j\phi CR}{1 + \phi^2 C^2 R^2} \\
&= \frac{1}{1 + j\phi CR} \\
&= H(\phi)
\end{aligned}$$

と，確かめられる．

以上の議論より結局，ローパスフィルタでは，伝達関数 H の逆 Fourier 変換であるインパルス応答 h は

$$h(x) = \frac{1}{CR}\theta(x)\exp\left(-\frac{x}{CR}\right)$$

であるので，出力電圧 v_{out} は畳み込み積により

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{out}}(t) &= (h * v_{\mathrm{in}})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) v_{\mathrm{in}}(t-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{CR}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) v_{\mathrm{in}}(t-x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{10}$$

と表示できる．v_{in} を具体的に与えると積分を一回実行するだけで出力電圧 v_{out} が得られる形まで変形出来ていることに注目してほしい．

さて，Fourier 変換による解法 (1) での例と同じく入力電圧として $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \sin\omega t$ を与えたときに，式 (10) を用いて出力電圧 v_{out} を求め，それが既知の解に一致することを確かめよう．式 (10) に $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \sin\omega t$ を代入すると，出力電圧 v_{out} は

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{out}}(t) &= \frac{V_0}{CR}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right) \sin(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x \\ &= V_0\left[-\exp\left(-\frac{x}{CR}\right)\sin(\omega(t-x))\right]_0^{\infty} \\ &\quad - \omega V_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right)\cos(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x \\ &= V_0\sin\omega t + \left[\omega CR\exp\left(-\frac{x}{CR}\right)\cos(\omega(t-x))\right]_0^{\infty} \\ &\quad - \omega^2 CRV_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{CR}\right)\sin(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x \\ &= V_0\sin\omega t - \omega CRV_0\cos\omega t - \omega^2C^2R^2 v_{\mathrm{out}}(t) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{out}}(t) &= -\frac{\omega CR}{1+\omega^2C^2R^2}V_0\cos\omega t + \frac{1}{1+\omega^2C^2R^2}V_0\sin\omega t \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\sin\bigl(\omega t - \tan^{-1}(\omega CR)\bigr) \\ &= |H(\omega)|V_0\sin\left(\omega t + \mathrm{Arg}(H(\omega))\right) \end{aligned}$$

となり，確かに既知の解と一致する．

4　フェーザ表示と Fourier 変換

フェーザ表示による電気回路の解析は，回路の方程式の非斉次項が三角関数である場合にのみ適用できる方法だった．加えて，その理論的構成には綺麗でないところがある (非自明な事実でも証

明が書かれていない場合が多い)．それに対し Fourier 変換を用いた理論は三角関数以外の関数にも適用できる上，理論構成もしっかり行うことができる．

両者には，回路の方程式のフェーザ表示で表したものと Fourier 変換したものが等しくなるという共通点がある．これは，フェーザ表示と Fourier 変換ではともに微分を行うことがともに $j\omega$ をかけることに等しいことに起因する．同じ形の方程式であっても Fourier 変換のものの方が扱える関数の範囲が広いことは言うまでもない．