Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)

Факультет: “Информационные технологии и прикладная математика”
Кафедра: 806 “Вычислительная математика и программирование”

Отчет по лабораторной работе №7

по курсу «Численные методы»

Студент:
Полей-Добронравова
Амелия Вадимовна
Группа: М8О-407Б,
№ по списку 20
Дата: 22.12.2021
Итоговая оценка:
Подпись преподавателя:

Москва, 2021

Постановка задачи

Лабораторная работа 3

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.

Вариант 10

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y)\cos y,$$

$$u(\frac{\pi}{2}, y) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x)\cos x,$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x - y)\cos x \cos y$.

Описание темы

Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или уравнение Лапласа при $f(x,y) \equiv 0$.

Функция $u(x,y)$ имеет различный физический смысл: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т.п.

Разностно-итерационный метод Либмана численного решения задачи Дирихле.

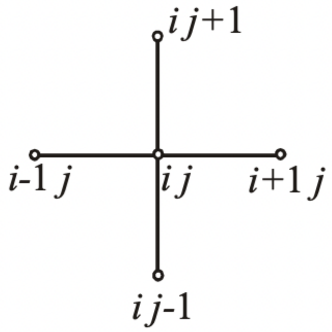


Рис. 5.5. Центрально-симметричный шаблон для уравнения Лапласа

При решении задач с граничными условиями 2-го и 3-го родов наряду с аппроксимацией дифференциального уравнения производится также аппроксимация граничных условий.

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\alpha_1 \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_1} + \beta_1 u_{0j} = \varphi_1(y_j), \; j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_2 \frac{u_{N_1 j} - u_{N_1 j}}{h_1} + \beta_2 u_{N_1 j} = \varphi_2(y_j), \;\; j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_3 \frac{u_{i1} - u_{i0}}{h_2} + \beta_3 u_{i0} = \varphi_3(x_i), \; i = \overline{1, N_1 - 1}$$

$$\alpha_4 \frac{u_{iN_2} - u_{iN_2 - 1}}{h_2} + \beta_4 u_{iN_2} = \varphi_4(x_i), \; i = \overline{1, N_1 - 1}.$$

В результате получена СЛАУ, содержащая $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1) - 4$ уравнений относительно неизвестных u_{ij} $(i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$, при этом угловые узлы с координатами (i, j), равными $(0,0)$, $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, (N_1, N_2) в вычислениях не участвуют). Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

Описание программы

MPI(...) - МПИ для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона.

ZEI(...) - метод Зейделя, модификация МПИ. При вычислении очередного приближения x^{k+1} его уже полученные компоненты с 1 по i-1 используются для вычисления i-го.

В координатной форме записи метод Зейделя имеет вид:

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1$$
$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2$$
$$\ldots$$
$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n$$

где $x^{(0)}$ - некоторое начальное приближение к решению.

Таким образом i-тая компонента ($k+1$)-го приближения вычисляется по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij}x_j^{(k)} + d_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε в упрощенной форме имеет вид:

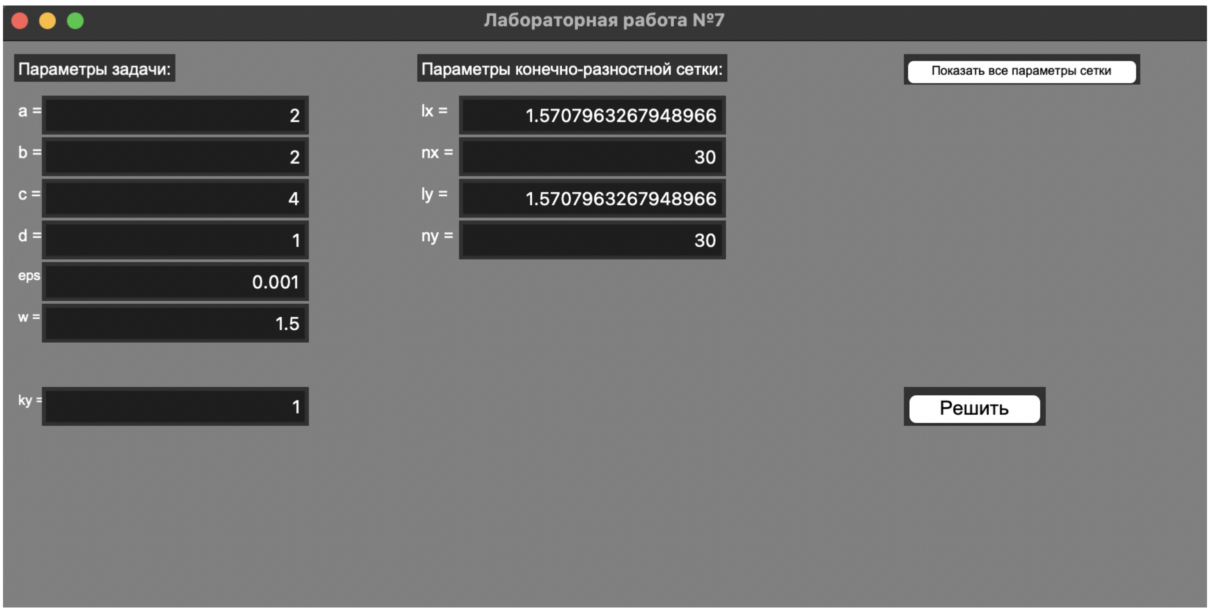
$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le \varepsilon.$$

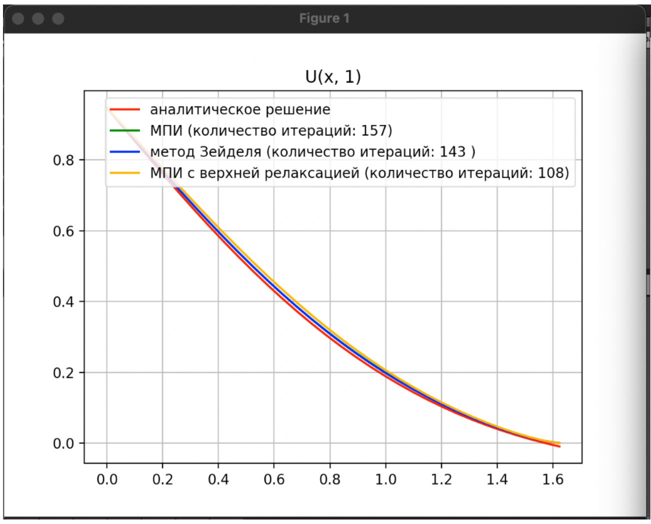
MPIR(...) - МПИ с верхней релаксацией.

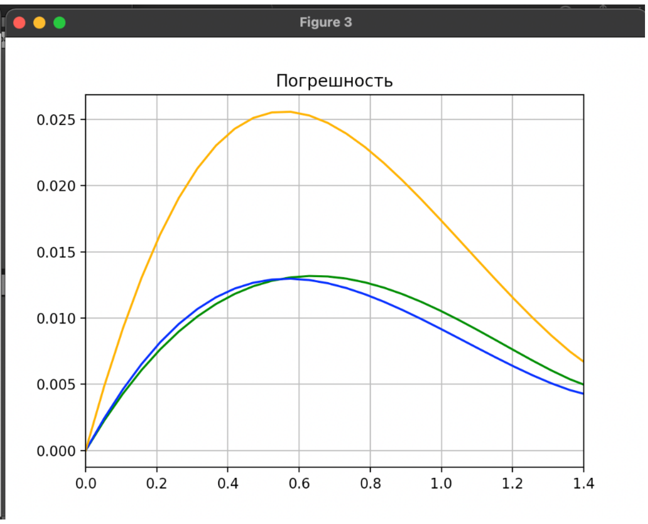
Среди явных одношаговых итерационных методов наибольшее распространение получил метод верхних релаксаций. Это связано с тем, что метод верхних релаксаций содержит сво- бодный параметр ω, изменяя который можно получать различную скорость сходимости итера- ционного процесса.

$$x_j := x_j - \omega \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{jk}}{a_{jj}} x_k + \omega \frac{f_i}{a_{jj}}.$$

Примеры выполнения







Выводы

1) Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим.
2) Преимущества и недостатки итерационных методов

   Преимущества:
   1. имеют простую вычислительную процедуру;
   2. не требуют сложных специальных процедур для экономии памяти ЭВМ под нулевые элементы матрицы коэффициентов, как метод Гаусса;
   3. самоисправление ошибок.

   Недостатки:

   1. не всегда могут решить систему уравнений (требуется выполнение условий сходимости)
   2. сходимость итерационных процессов может быть медленной;
   3. корни системы могут быть определены только приближенно с точностью ε.