

有限要素法の数学的基礎理論の 最近の話題について

土屋 卓也 (大阪大学)

第 15 回 三部会連携「応用数理セミナー」

2023 年 12 月 27 日 Zoom セッション

メインテーマ

有限要素法の数学的基礎理論において、三角形分割のメッシュサイズ h がよく出てくる。いろいろな状態をメッシュサイズ h で表現している。

しかし、 h 以外の量を使うともっとうまく状況を表現でき、さらに単体の幾何学的形状に仮定をおく必要がなくなる場合がある。この講演では、単体（三角形、四面体）の形状正則性を説明した後、以下の例を紹介する。

- 単体上のトレース逆不等式の係数.
- 単体上の Lagrange 補間の係数.
- 逆不等式の係数.

Model problem

Let $d = 2, 3$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$: a bounded polygonal (polyhedral) domain

Model problem: For a given $\phi \in L^2(\Omega)$, find $u \in C^2(\overline{\Omega})$ such that

$$-\Delta u = \phi \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Weak form: Find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \phi v \, dx \quad \text{for } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

In this talk, we assume that the exact solution of the model problem belongs to $H^2(\Omega)$:

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Meshes and the shape-regularity condition

We suppose that simplices (triangles and tetrahedrons) are closed set in \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$).

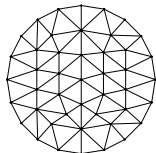
- \mathcal{T}_h : a proper (face-to-face) mesh of Ω . That is, \mathcal{T}_h is a finite set of triangles ($d = 2$), or tetrahedrons ($d = 3$) such that

(i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T,$

- (ii) If $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, $(T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h)$, $T_1 \cap T_2$ is either their common node, edge, or face.

For $T \in \mathcal{T}_h$, let $h_T := \text{diam } T$.

Then, $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ is called **mesh size** of \mathcal{T}_h .



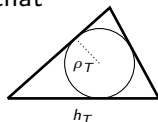
Meshes and the shape-regularity condition

Suppose that we consider a (infinite) family of meshes $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$.

Definition

A family of meshes $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ is said to be **shape-regular** (形状正則) with respect to σ , if there exists a positive constant σ such that

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0,$$



where ρ_T is the radius of the inscribed ball of T . The constant σ is called the **shape-regularity constant**, or **chunkiness parameter**.

Note: (1) If σ is too large (say, $\sigma > 10$), we commonly say that \mathcal{T}_h is **anisotropic** even if \mathcal{T}_h is shape-regular.

(2) The shape-regularity condition requires that simplices are not too “flat”.

Trace operator on simplices

Let $T \subset \mathbb{R}^2$ be a triangle and e is an edge of T . The trace operator $\gamma : W^{1,p}(T) \rightarrow W^{1-1/p,p}(e)$ ($1 \leq p < \infty$) is well-defined, and the following inequality holds:

$$\|\gamma(v)\|_{W^{1,1-1/p}(e)} \leq C_T \|v\|_{W^{1,p}(T)}, \quad \forall v \in W^{1,p}(T).$$

The coefficient C_T depends on T in general. The trace $\gamma(v)$ is the “restriction” of v on e .

In the sequel, we denote $\gamma(v)$ as v , and we only consider the case $p = 2$. Then, the inequality becomes

$$\|v\|_{L^2(e)} \leq \|v\|_{H^{1/2}(e)} \leq C_T \|v\|_{H^1(T)}, \quad \forall v \in H^1(T).$$

Inverse trace inequality of polynomials

Let $\mathcal{P}_k(T)$ be the set of polynomials with degree at most k . Because $\mathcal{P}_k(T)$ is a finite-dimensional vector space, we have

$$\|v\|_{L^2(e)} \leq C_T \|v\|_{H^1(T)} \leq C(T, k) \|v\|_{L^2(T)}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T),$$

where the coefficient $C(T, k)$ depends on T and k .

In many textbooks of finite element methods, the following inverse trace inequality

$$\|v\|_{L^2(e)} \leq \frac{C}{h_e^{1/2}} \|v\|_{L^2(T)}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T)$$

is mentioned under the shape-regularity condition on T . The constant C strongly depends on the shape-regularity constant. This inequality is called the **inverse trace inequality** (トレース逆不等式) of $\mathcal{P}_k(T)$.

Inverse trace inequality of polynomials

We have to realize that the above trace inequality is a “simplified version” of *general* inverse trace inequalities

$$\|v\|_{0,e} \leq C \frac{|e|^{1/2}}{|T|^{1/2}} \|v\|_{0,T}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T),$$

which are valid for any triangles (and tetrahedrons).

Note that, under the shape-regularity, we have

$$C \frac{|e|^{1/2}}{|T|^{1/2}} \approx C \frac{|h_e|^{1/2}}{C(\sigma)h_e} \approx \frac{C(\sigma)}{h_e^{1/2}}.$$

Therefore, we see that

Shape-regularity \implies (Ordinary) inverse trace inequality.

一般的な trace 逆不等式

以下、 $|v|_{0,f} := |v|_{L^2(f)}$, $|v|_{0,T} := |v|_{L^2(T)}$, $|v|_{1,f} := |\nabla v|_{L^2(f)}$ とします。

Theorem

任意の d -単体 T とその facet $f \subset \partial T$ に対して、trace 逆不等式

$$|v|_{0,f}^2 \leq \frac{|f|}{|T|} (|v|_{0,T}^2 + h_T |v|_{0,T} |v|_{1,T}), \quad \forall v \in H^1(T)$$

が成り立つ。

Di Pietro, Ern, Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods, Springer (2012) (Lemma 1.49)

証明

f の頂点を $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, d$ とし、それ以外の T の頂点を \mathbf{x}_0 とする。発散定理より任意の $v \in H^1(T)$ に対して

$$\int_T \nabla \cdot [v^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] d\mathbf{x} = \int_{\partial T} v^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} ds$$

が成り立つ。ここで、 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \partial T \setminus f \\ \frac{d|T|}{|f|} & \text{for } \mathbf{x} \in f \end{cases}$,

$$\int_T \nabla \cdot [v^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] d\mathbf{x} = d \int_T v^2 d\mathbf{x} + \int_T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla(v^2) d\mathbf{x}, = d \int_T v^2 d\mathbf{x} + 2 \int_T v[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v] d\mathbf{x}$$

であることに注意する。ただし、 $\frac{d|T|}{|f|}$ は f を底面としたときの T の高さ（あるいは、 \mathbf{x}_0 から f を含む affine 空間に垂直に下ろした線分の長さ）である。よって、

$$\int_{\partial T} v^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} ds = \frac{d|T|}{|f|} \int_f v^2 ds \quad (1)$$

であり、さらに $|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v| \leq h_T |\nabla v|$ より、Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\frac{d|T|}{|f|} \int_f v^2 ds \leq d \int_T v^2 d\mathbf{x} + 2h_T \int_T v |\nabla v| d\mathbf{x} \leq d|v|_{0,T}^2 + dh_T |v|_{0,T} |v|_{1,T}$$

を得る。□

Corollaries

Corollary

任意の d -単体 T とその $\text{facet } f \subset \partial T$ に対して、 trace 逆不等式

$$|v|_{0,f} \leq \frac{|f|^{1/2}}{|T|^{1/2}} (|v|_{0,T} + h_T |v|_{1,T}), \quad \forall v \in H^1(T)$$

が成り立つ。

証明： 定理より、任意の $v \in H^1(T)$ に対して

$$|v|_{0,f}^2 \leq \frac{|f|}{|T|} |v|_{0,T} (|v|_{0,T} + h_T |v|_{1,T}) \leq \frac{|f|}{|T|} (|v|_{0,T} + h_T |v|_{1,T})^2$$

であることがわかる。□

Cases of polynomials

ある一つの d -単体 $\hat{T} \subset \mathbb{R}^d$ をとり、参照単体 (reference simplex) とする。

Theorem

参照単体 \hat{T} とその任意の facet $\hat{f} \subset \partial \hat{T}$ に対して、trace 逆不等式

$$|\hat{v}|_{0,\hat{f}} \leq C |\hat{v}|_{0,\hat{T}}, \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{P}_k(\hat{T})$$

が成り立つ。ただし、定数 C は、 \hat{T} , k (と次元 d) のみに依存する。

証明： $\mathcal{P}_k(\hat{T})$ は有限次元ベクトル空間なので、任意のノルムは同値であることを使う。□

Cases of polynomials

Corollary

任意の d -単体 T とその facet $f \subset \partial T$ に対して、trace 逆不等式

$$|v|_{0,f} \leq C \frac{|f|^{1/2}}{|T|^{1/2}} |v|_{0,T}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T)$$

が成り立つ。ただし、定数 C は、 \hat{T} , k (と次元 d) のみに依存する。

証明： Affine 写像 $\varphi_T : \hat{T} \rightarrow T$ を使って、上の Corollary の \hat{T} 上の評価を T 上の評価に pull-back する。□

Kashiwabara, Tsuchiya;

A robust discontinuous Galerkin scheme on anisotropic meshes,
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **38** (2021)
1001–1022.

Lagrange interpolation on simplices

k : a positive integer,

\mathcal{P}_k : the set of polynomials whose order are at most k ,

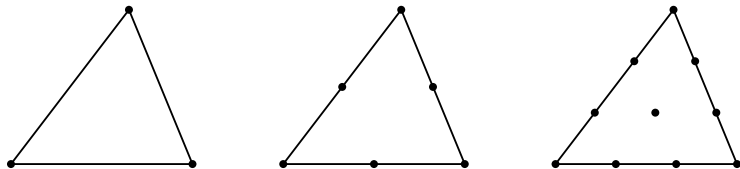
$T \subset \mathbb{R}^2$: any triangle on \mathbb{R}^2 ,

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$: the barycentric coordinate on T ,

a_i : integers,

$$\Sigma^k(T) := \left\{ \left(\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k} \right) \in T \mid 0 \leq a_i \leq k, a_1 + a_2 + a_3 = k \right\}.$$

Lagrange interpolation on simplices



T and $\Sigma^k(T)$, $k = 1, k = 2, k = 3$.

For $v \in C^0(\overline{T})$, define $\mathcal{I}_h^k v \in \mathcal{P}_k$ by

$$(\mathcal{I}_h^k v)(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma^k(T).$$

Let \hat{T} be an reference triangle, and T is any triangle. Then, \hat{T} is mapped to T by an affine transformation $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) := A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$.

Error estimates of Lagrange interpolation

Error analysis is first performed on the reference element \hat{T} . Then, the “pull back” with $v \circ \varphi$ is used to transfer the result obtained on \hat{T} to the “physical element” T .

Theorem

Let $\sigma > 0$ be a constant. If $h_T/\rho_T \leq \sigma$, then there exists a constant $C = C(\hat{T}, p, k, m)$ independent of T such that, for $v \in W^{k+1,p}(T)$,

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{I}_K^k v|_{m,p,T} &\leq C \|A\|^{k+1} \|A^{-1}\|^m |v|_{k+1,p,T} \\ &\leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,p,T} \leq (C\sigma^m) h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}. \end{aligned}$$

Lemma

We have $\|A\| \leq h_T \rho_{\hat{T}}^{-1}$, $\|A^{-1}\| \leq h_{\hat{T}} \rho_T^{-1}$.

Standard position of triangles

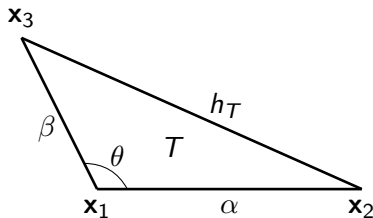
T : an arbitrary triangle.

$h_K \geq \alpha \geq \beta > 0$: the lengths of its three edges.

We transform T into a triangle with vertices

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0)^\top, \quad \mathbf{x}_2 = (\alpha, 0)^\top, \quad \mathbf{x}_3 = (\beta s, \beta t)^\top, \quad s = \cos \theta, \quad t = \sin \theta,$$

where $0 < \theta < \pi$ is the inner angle of T at \mathbf{x}_1 . This triangle is called the **standard position** of T .



Note that $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \pi$.

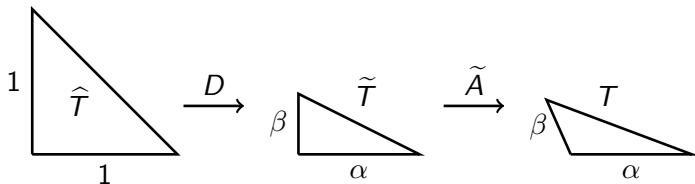
Standard position of triangles

We use the triangle with vertices $(0,0)^\top$, $(1,0)^\top$, and $(0,1)^\top$ as the reference \hat{T} .

If T is at its standard position, the affine map $\varphi: \hat{T} \rightarrow T$ is written as $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, and $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta s \\ 0 & \beta t \end{pmatrix}$. The important point is the matrix A is decomposed as

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta s \\ 0 & \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

That is, \hat{T} is mapped as



Let

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Then, $A = \tilde{A}D$, and the error estimation of Lagrange interpolation is rearranged as

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{I}_K^k v|_{m,p,T} &\leq C \|A\|^{k+1} \|A^{-1}\|^m |v|_{k+1,p,T} \\ &\leq C \|\tilde{A}\|^{k+1} \|\tilde{A}^{-1}\|^m \|D\|^{k+1} \|D^{-1}\|^m |v|_{k+1,p,T}. \end{aligned}$$

Recall that $\alpha \geq \beta > 0$. It is easy to see that

$$\|D\|^{k+1} \|D^{-1}\|^m = \frac{(\max\{\alpha, \beta\})^{k+1}}{(\min\{\alpha, \beta\})^m} = \frac{\alpha^{k+1}}{\beta^m}.$$

Therefore, if $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$ (the triangle T is going to be very flat), the right-hand side seems to blowup!.

Babuška-Aziz trick

Babuška-Aziz (and Kobayashi-Tsuchiya) pointed out that the transformation defined by D does not make approximation property “bad”, and

$$\|D\|^{k+1}\|D^{-1}\|^m = \frac{\alpha^{k+1}}{\beta^m} \quad \text{may be replaced with } C_1\alpha^{k+1-m}.$$

Then, the error estimation becomes

$$|v - \mathcal{I}_K^k v|_{m,p,T} \leq C \|\tilde{A}\|^{k+1} \|\tilde{A}^{-1}\|^m \alpha^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}.$$

Estimation of $\|\tilde{A}\|^{k+1}\|\tilde{A}^{-1}\|^m$

It is easy to see that $\|\tilde{A}\| = (1 + |s|)^{1/2}$ and $\|\tilde{A}^{-1}\| = (1 - |s|)^{-1/2}$ (recall that $s = \cos \theta$, and θ is the maximum angle of T).

Note that $\|\tilde{A}\| \leq \sqrt{2}$. For $\|\tilde{A}^{-1}\|$, we observe that

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}^{-1}\| &= \frac{1}{(1 - |s|)^{1/2}} = \frac{(1 + |s|)^{1/2}}{t} \quad (\because s^2 + t^2 = 1) \\ &\leq \frac{2^{1/2}\alpha\beta h_T}{\alpha\beta h_T t} = \frac{\alpha\beta h_T}{2^{1/2}h_T|T|} \quad \left(\because |T| = \frac{1}{2}\alpha\beta t\right) \\ &= \frac{2^{3/2}R_T}{h_T} \quad \left(\because R_T = \frac{\alpha\beta h_T}{4|T|} : T \text{ の外接半径}\right).\end{aligned}$$

Error estimation of Lagrange interpolation

Hence, the error estimation becomes

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{I}_K^k v|_{m,p,T} &\leq C \|\tilde{A}\|^{k+1} \|\tilde{A}^{-1}\|^m \alpha^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T} \\ &\leq C \left(\frac{R_T}{h_T} \right)^m h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}. \end{aligned}$$

- The constant C does not depend on the geometry of T .
- $\frac{R_T}{h_T}$ is bounded above if and only if the maximum angle θ of T satisfies $\theta \leq \theta_{\max} < \pi$ (the **maximum angle condition** (最大角条件)).

逆不等式

有限要素法の数学的基礎理論には、しばしば逆不等式 (inverse inequality) というものが現れる。それは、例えば

$$|v|_{m,p,T} \leq \frac{C}{h_T^{2(1/q-1/p)}} \cdot \frac{1}{h_T^m} |v|_{0,q,T}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T)$$

という形をしている。この形の逆不等式では、定数 C は形状正則性の定数 σ に強く依存する。しかし、形状正則性に依存しないような逆不等式を求めることもできる。

参照三角形上の“逆不等式”

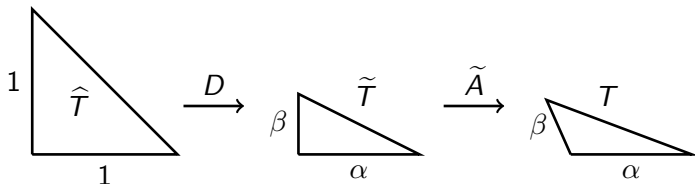
以下、三角形の場合を考える。

$\mathcal{P}_k(\hat{T})$ は有限次元ベクトル空間なので、その上の任意のノルムは同値になる。よって、 $1 \leq q, p \leq \infty$ について

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{T}} \leq \|\hat{v}\|_{m,p,\hat{T}} \leq C_{m,p,q} \|\hat{v}\|_{0,q,\hat{T}}, \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{P}_k(\hat{T})$$

が成り立つ。ただし、定数 $C_{m,p,q}$ は \hat{T} , m , k , p , q に依存する。

任意の三角形 $T \subset \mathbb{R}^2$ はその標準的位置にあるとする。すると、 T は \hat{T} から行列 A による線形変換で移されるが、この行列 A は $A = \tilde{A}D$ と分解される。線形変換 $D\hat{x}$ による \hat{T} の像を \tilde{T} とする。



このとき、 $\tilde{v} \in \mathcal{P}_k(\tilde{T})$ を $\widehat{v}(\hat{x}) := \tilde{v}(A\hat{x})$ として $\mathcal{P}(\tilde{T})$ に pull-back すると、単純な計算より

$$\frac{|\tilde{v}|_{0,p,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}} \geq \beta^m \frac{|\widehat{v}|_{0,p,\hat{T}}}{|\widehat{v}|_{m,p,\hat{T}}}$$

が成り立つ。以上の準備より、 $\tilde{v} \in \mathcal{P}_k(\tilde{T})$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{v}|_{0,q,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}} &= \frac{|\tilde{v}|_{0,p,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}} \frac{|\tilde{v}|_{0,q,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{0,p,\tilde{T}}} \\ &\geq \beta^m \frac{|\widehat{v}|_{0,p,\hat{T}}}{|\widehat{v}|_{m,p,\hat{T}}} \cdot (\det D)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{|\widehat{v}|_{0,q,\hat{T}}}{|\widehat{v}|_{0,p,\hat{T}}} \\ &\geq \frac{\beta^m}{C_{m,p,q}} (\det D)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

さらに、線形写像 \tilde{A} により $v \in \mathcal{P}_k(T)$ を $\tilde{v} \in \mathcal{P}_k(\tilde{T})$ に pull-back すると、

$$|v|_{0,q,T} = |\det \tilde{A}|^{\frac{1}{q}} |\tilde{v}|_{0,q,\tilde{T}}, \quad |v|_{m,p,T} \leq C_1 |\det \tilde{A}|^{\frac{1}{p}} \|\tilde{A}^{-1}\|^m |\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}$$

なので、

$$\frac{|v|_{0,q,T}}{|v|_{m,p,T}} \geq \frac{|\det \tilde{A}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}}{C_1 \|\tilde{A}^{-1}\|^m} \cdot \frac{|\tilde{v}|_{0,q,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}}$$

を得る。ただし、定数 C_1 は p, q, m (と次元 $d = 2$) に依存する。
よって、前ページの評価と合わせると

$$\frac{|v|_{0,q,T}}{|v|_{m,p,T}} \geq \frac{|\det \tilde{A}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}}{C_1 \|\tilde{A}^{-1}\|^m} \cdot \frac{|\tilde{v}|_{0,q,\tilde{T}}}{|\tilde{v}|_{m,p,\tilde{T}}} \geq \frac{|\det \tilde{A}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}}{C_1 \|\tilde{A}^{-1}\|^m} \cdot \frac{\beta^m}{C_{m,p,q}} (\det D)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

を得る。

ここで、 $\det \tilde{A} \det D = \det A = |T|/|\hat{T}|$ を使うと、

$$\frac{|v|_{0,q,T}}{|v|_{m,p,T}} \geq \frac{\beta^m |\det A|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{C_2 \|\tilde{A}^{-1}\|^m} = \left(\frac{\beta}{\|\tilde{A}\|^{-1}} \right)^m \frac{|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{C_3},$$

または

$$|v|_{m,p,T} \leq C_3 \left(\frac{\|\tilde{A}\|^{-1}}{\beta} \right)^m |T|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |v|_{0,q,T}$$

を得る。ただし、定数 C_3 は \hat{T} , m , p , q (と次元 d) に依存する。

ここで、 T が三角形の場合、行列 \tilde{A} のノルムは、

$$\|\tilde{A}^{-1}\| = (1 - |s|)^{-1/2}$$

と計算できる。さらに、

$$\frac{\|\tilde{A}^{-1}\|}{\beta} = \frac{1}{\beta(1 - |s|)^{1/2}} = \frac{(1 + |s|)^{1/2}}{\beta t} = \frac{(1 + |s|)^{1/2} \alpha}{\alpha \beta t} \leq \frac{\sqrt{2} \alpha}{2|T|} \leq \frac{h_T}{\sqrt{2}|T|}$$

を得る。ただし $|T|$ は T の面積で、また

$$|T| = \frac{1}{2} \alpha \beta t = \frac{1}{2} \alpha \beta \sin \theta$$

であることを使った。

逆不等式

Theorem (一般の三角形上の逆不等式)

整数 $m \geq 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ に対して、任意の三角形 $T \subset \mathbb{R}^2$ 上で次の逆不等式

$$|v|_{m,p,T} \leq C \left(\frac{h_T}{|T|} \right)^m |T|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |v|_{0,q,T}, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T)$$

が成り立つ。定数 C は、 m, k, p, q, \hat{T} のみに依存し、 T の形状には依存しない。

まとめ

このように、メッシュサイズ h 以外を使い、三角形の形状正則性にこだわらずに考えていくと、有限要素法の数学的基礎に現れるさまざまな不等式を三角形の形状に依らない形に書き換えられることがある。みなさんも、いろいろ考えてみてください。

References

- Kashiwabara, Tsuchiya; A robust discontinuous Galerkin scheme on anisotropic meshes, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **38** (2021) 1001–1022.
- Kenta Kobayashi, Takuya Tsuchiya: Lectures on the error analysis of interpolation on simplicial triangulations without the shape regularity assumption and its applications to finite element methods, Part 1: Lagrange interpolation on triangles, *Memoirs of the Faculty of Science, Ehime University*, **24** (2022) 9–42. arXiv:1908.03894.