곱셈 순서 논쟁에 대하여 (한국어판)

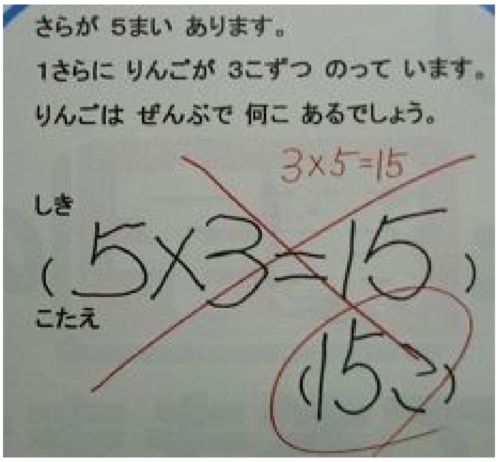
takehikom

차례

1. 머리말

일본 초등학교 2 학년에서 학습하는 수학 중 중요한 사항이 무엇이냐 하면 '곱셈'이다. 곱셈식으로 표현하는 것을 배우면서 곱셈구구라고 불리는 곱셈표를 암기하기도 한다. 현재는 4×12 와 같이 곱셈구구의 범위를 넘는 곱셈식도 2 학년에서 학습한다<1>[1][2]. 이때 필산을 사용하지 않는다. 예를 들어 곱셈구구에서 4×9=36 와 같이 승수가 하나 늘어나면 곱도 피승수만큼 늘어난다는 성질로 4×10=40, 4×11=44, 그리고 4×12=48 이라고 계산할 수 있다. 혹은 교환법칙과 누가로 4×12=12×4=12＋12＋12＋12=48 이라고 계산할 수도 있다.

시험에서는 다음과 같은 문제도 볼 수 있다('사과 문제'라고 부른다).



"접시가 5 장 있습니다. 한접시에 사과가 3 개씩 담겨져 있습니다. 사과가 모두 몇개 있을까요?"라고 하는 문제 글과 함께 계산식과 해답을 기입하는 란이 있었다. 아동이 계산식란에 '5×3=15', 해답란에 '15 개'라고 썼더니 해답란에는 정답으로 동그라미가 쳐져 있었으나 계산식란에는 오답으로 가위표가 쳐져 있었다. 그리고 그 계산식의 정답 '3×5=15'가 붉은 펜으로 적혀져 있었다. 문제 글에서는 5 가 먼저 나오고 3 이 그 뒤에 나오는데 학습한 '곱셈의 뜻'을 바탕으로 2 개 숫자를 뒤집어서 '3×5'라고 써야 옳다. 이것이 '곱셈 순서'의 기본적인 사고이다.

이에 대하여 여러 이유로 '5×3=15'도 정답으로 하여야 한다는 주장도 있다. '곱셈에는 순서가 있는가'라는 서적[3]도 간행되었다. 2013 년 10 월에는 한국의 인터넷 게시판에서도 의론이 일어났으며<2> 거기에서 필자의 영어기사<3>가 링크되었다. 필자는 한국어를 할 줄 모르나 기계번역을 통하여 여러개 코멘트에서 그 의도를 알았으며 이를 계기로 곱셈 논쟁을 세계 수준에서 공유하여야 할 것이 아닌가 하는 생각에 이르렀다.

그러므로 본 문서에서는 '곱셈의 순서' 혹은 '곱셈의 뜻'에 관한 정보를 정비하기로 하였다. 일본 산수 · 수학 교육의 일면에 대하여 일본 국외에서 관심을 가진 사람들이 읽을 수 있도록 하였다. 후술하겠지만 필자는 위의 답안을 오답으로 할 것에 찬성한다.

본론에 들어가기 전에 일본 교육에 관한 전제를 몇가지 들겠다. 곱셈은 '피승수×승수=답'이라는 계산식으로 표현한다. 답안에 쳐진 붉은 동그라미는 정답, 가위표는 오답을 의미한다. 그리고 일본 교육 년도는 4 월에 시작되며 이듬해 3 월에 마친다.

2. 정답과 오답의 이유

2.1 정답으로 하는 6 가지 이유

'5×3=15'를 정답으로 하는 이유에 대하여 인터넷상의 정보나 서적 중에서 주된 것을

골라서 다음 6 가지 항목으로 리스트를 작성하였다.

A-1 피승수와 승수는 교체할 수 있다. 승법의 교환법칙에 의하여 5×3＝3×5 가 성립된다.

A-2 트럼프를 나누어 줄 때 피승수와 승수를 교체할 수 있다. 위의 문제일 경우 '5 장씩 3 번'으로 된다.

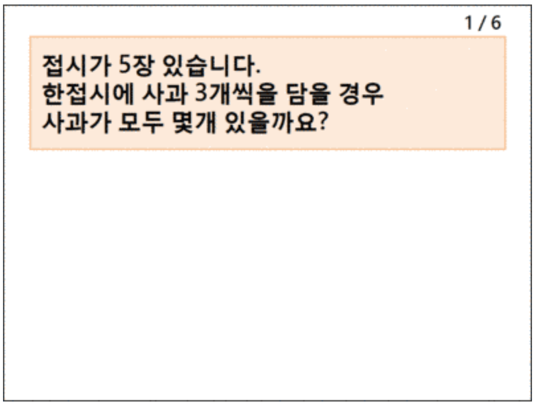
A-3 사과를 장방형 모양으로 배치할 경우 그 총수는 5×3 이라고 표현할 수 있다.

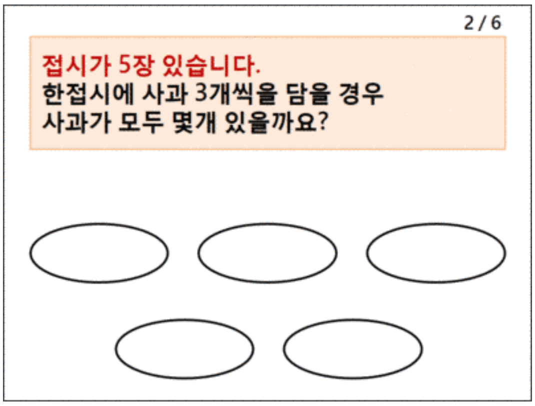
A-4 접시 장수를 피승수, 1 장당 사과 갯수를 승수로 보면 된다.

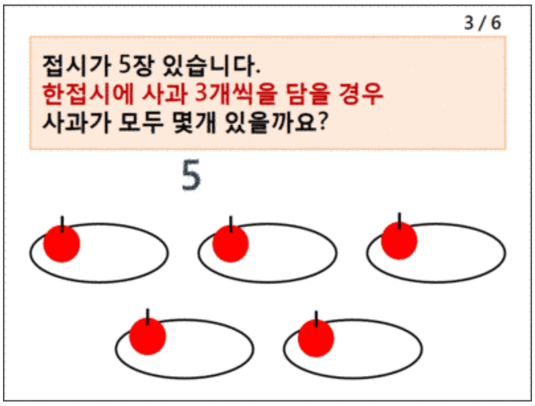
A-5 단위를 붙여서 쓰자면 '5×3 개'와 '3 개×5', '5 장×3 개/장'과 '3 개/장×5 장'이 각각 같은 것이다.

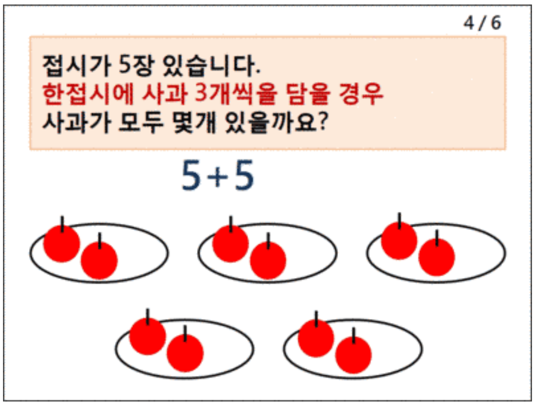
A-6 다른 나라에서는 곱셈식으로 표시하였을 때 피승수와 승수 위치가 반대로 되거나 어느쪽으로 해도 된다고 한다.

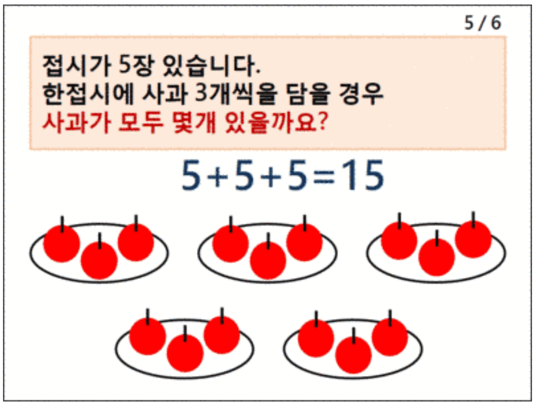
다음 일련의 사진들은 트럼프를 나누어 주면 5×3=15 가 됨을 나타내고 있다.

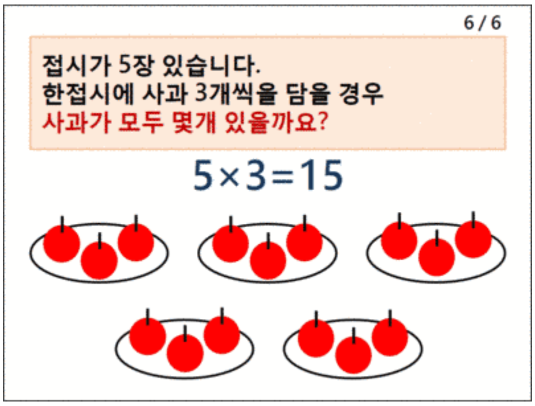












A-2 및 A-4 는 '피승수×승수'로 곱셈식을 나타낸다는 산수 규칙 아래에서도 5×3 이 옳은 곱셈식이라는 이유를 나타내고 있다. 반면 A-5 및 A-6 은 '승수×피승수'도 적절한 곱셈식임을 주장하고 있다.

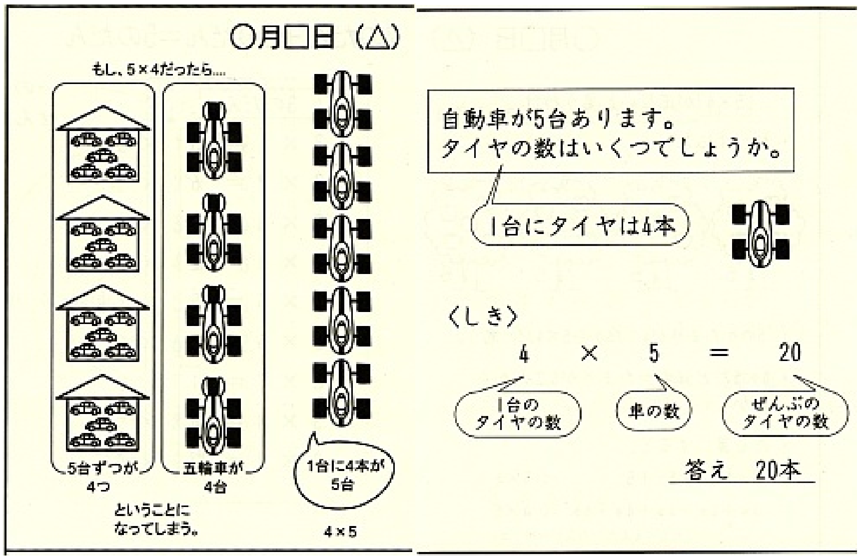
A-5 에서 쓴 '단위'에 관하여 위키백과 일본어판에서는 '조수사'<4>항목에서 자세히 해설하고 있다. 동백과 영어판에는 "Japanese counter word"<5>라는 항목이 있는데 이것은 일본 고유라는 뜻이 아니고 [4]에 기재된 referent 가 이에 상당하는 것이며 일본 국외 수학교육연구에도 사례가 있다. 그러나 단위가 붙은 계산식은 산수 교과서에서는 볼 수 없다. '/(per)'를 사용한 분리량의 단위표기는 1970 년경에 발생한 것이다(이 기호를 적극적으로 추진하는 수학교육협의회 저작물로 1961 년과 1971 년에 발행된 '수도방식입문'[5][6]을 읽고 비교하여 볼 것을 권장한다).

2.2 오답으로 하는 6 가지 이유

'5×3=15'를 오답으로 하는 이유에 대하여도 주된 것을 골라서 다음과 같이 리스트를 작성하였다.

B-1 이 문제에서는 한접시당 사과 갯수가 피승수이며 접시 장수가 승수로 된다.
B-2 5×3 과 3×5 는 곱셈 해답이 같더라도 뜻은 다르다.
B-3 5×3=15 라는 곱셈식에서는 접시 장수와 사과 갯수가 반대이다.
B-4 5×3=15 라는 곱셈식에서는 곱이 접시 장수를 의미하게 된다.
B-5 단위를 붙어서 쓸 경우 '5 개×3'과 '3 개×5', '5 개/장×3 장'과 '3 개/장×5 장'은 각기 다르다.
B-6 언어나 문화 차이에 배려하면서 계산식을 표현할 것이 교육상 유익하다.

B-3 과 B-4 가 그림으로 표시된 수업 예가 있다[7].



"자동차가 5 대 있습니다. 타이어가 몇개 있을까요?"라고 하는 문제에서 '자동차 1 에 타이어는 4 개'라는 힌트를 얻어 4×5=20 이라고 적는다. 여기에서 만약 '5×4'라고 적었을 경우 5 개 타이어가 딸린 '5 륜차량이 4 대'로 되는 그림이나 집에 자동차가 들어간 '5 대가 4 개'라는 그림을 통하여 문제에 맞지 않는 것이 시각화 되어 있다.

2.3 각 이유에 대한 찬부

리스트를 작성함으로써 각각에 대한 찬부를 명확히 하기 쉬워진다. 필자가 어느쪽이냐 하면 A-1 부터 A-6 까지 모두 찬동할 수 없다. 문제문을 읽고 곱셈으로 구할 수 있다고 판단할 것 즉 연산 결정은 교환법칙을 적용(A-1)하기도 이전에 거쳐야 한다.

곱셈식에 대한 해석의 다양성은 A-2 뿐만 아니라 B-3 및 B-4 도 고려할 필요가 있다. 사과 문제에서 '5×3'이라고 쓰면 A-2, B-3, B-4 의 해석이 가능한데 대하여 '3×5'라고 쓰면 지금까지 학습하여 온 곱셈의 뜻에 따른 것이라고 하는 것과 같이 해석할 여지가 없다. 그러므로 보다 오해가 적은 곱셈식을 고르자는 생각이다. 2 가지 곱셈식을 비교하고 선택하는 것은 곱셈의 뜻을 배울 때의 학습지도안에도 자주 기재되는 것이다.

또 트럼프 나누기는 현재 등분제 조작으로서 사용되고 있다[8][9]. 나누는 조작을 할 때 총수가 정해져 있기 때문이다. 반면 "a 명에게 b 개의 사과를 나누고 싶다"는 장면에서는 나누는 조작을 하지 않고 총수를 곱셈으로 구하게 된다(나누는 조작과 가감승제의 관계에 대하여는 [10]에서 상세히 해설하고 있음). 총수가 미지하며 트럼프 나누기의 조작을 고려한 학습지도안도 있으나[11] "놓는 법이 아리나 놓은 결과에 착목시킨다"는 주석을 붙여서 A-2 의 이유를 배제하며 하나의 크기를 결정하고 있다.

A-3 은 '곱'의 곱셈을 수단으로서 '곱절'의 곱셈 문제를 풀자는 접근법이다. School Mathematics Study Group (SMSG)가 1960 년대에 제창한 것으로 수학 교육의 현대화 운동과 함께 소멸되었다고 할 수 있다[8]<6><7>. 수업 예도 학술 조사에 따른 아동

인식의 사례도 찾아볼 수 없다[12][13].

A-4 는 소박한 발상이면서도 베르그노에 의하여 지어진 근거도 있다[14][15]. 그러나 8~9 살 어린이의 경우 인식하기 어렵다고도 한다. 1950 년대 지도 사례[16]와 함께 이 논리는 4 년 또는 5 년에 걸쳐서 수료관계의 이해를 통하여 배울 것이 적절하다.

A-5 는 B-5 와의 비교, A-6 은 B-6 과의 비교이다. 그런데 B-6 은 일본에 한정되는 것이 아니라 한국에서도<8> 벨기에 주재원이 학교 시험에서 0 점을 받은 어린이에 대하여 자신들이 영주할 것도 아니니 '4 개씩 들어간 5 개 바구니'라 생각하고 계산식을 쓰는 단계에서 유럽식 순서로 하도록 지시하였다는 사례가 있다. A-5 에 찬성하는 기술을 포함한 문헌에는 [17]이 있으며 A-6 에는 [18], B-5 에는 [19], 그리고 B-6 에는 [20][21][22]이 있다. 이들을 비교한 결과 복수 이유에서 얻어지는 계산식을 비교하고 하나를 선택한다는 지도를 포함하는 B-5 및 B-6 이 보다 바람직스럽다고 판단하였다.

지금까지 A-1 부터 A-6 까지 항목에 대한 반론을 펼쳐 왔으나 그렇다고 B-1 부터 B-6 까지 모두 찬성하는 것은 아니다. B-1 및 B-2 에 대하여는 그것들을 수업에서 학습하고 그것을 감안하여 시험한다는 조건하에서는 찬성한다. 이 조건이 성립되어 있음은 교과서나 학습지도안에서 추측할 수 있다. 최근의 교육평가론[23]에서도 4×8 의 4 는 '1 당의 양' 8 은 '몇개 분'이라고 구별할 필요성을 기재하고 있다.

B-3이나 B-4는 A-2와 대비하기 위하여 든 것인데 각각 지도의 실례가 있다. 위에서 소개한 예 밖에도 B-3 에 대하여는 2011 년에 '2×8 이라면 낙지발 2 개'라고 하는 주제의 수업 예가 아사히신문에서 게재된 바 있다<9>. 더욱 새로운 수업 예가 [24]에 있다. B-4 에 대하여는 하나 더 예를 들어 후술하겠다. 반대 의견을 더욱 적게 보여 주고 싶은 사람이 편집하였을 경우 이 B-3 과 B-4 를 하나로 묶어서 한 항목으로 다룰 것이다.

B-5 에 대하여는 산수 교육의 범위를 넘어서는 것이지만 '5 개×3 장'과 '3 장×5 개'의 비교도 불가결한 것이다. 베르그노[14]는 "4×15 와 15×4 는 같으나 4 개×15 센트로 60 센트가 얻어지는데 왜 60 개가 아닌가"라고 지적하고 있는데 이것은 '5 개×3 장', '1.5kg×4 상자' 등을 평소부터 볼 수 있는 현재 일본 사회에 대한 문제 제안이라고 할 수 있다. 또 일본 국외에서 필자는 '3×80g', '75g×5'라고 적혀진 상품을 구입한 적이 있다. 피승수에는 단위가 있고 승수에는 없으므로 1 개 양이 어느 만큼이고 그것이 얼마나 있는지를 알 수 있다.

끝으로 B-6 에 대하여 문화에는 국제적인 것 뿐만 아니라 국내의 역사적 관점이 포함될 것을 들고자 한다. 여러가지 계산식의 표기나 해석을 배우고 눈 앞의 문제에 대하여 어린이들이 답을 낼 수 있도록 지원하여 나갈 것이다.

3. 곱셈을 둘러싼 상황

3.1 승수가 먼저 오는 문장제

사과 문제는 승수가 먼저 오고 피승수가 뒤에 출현함으로써 '피승수×승수=답'이라는 곱셈식으로 구할 것을 의도하고 있다. 이 종류의 출제에는 수십년 역사가 있다.

파악하는 한 가장 오래된 지도 예는 1951 년의 초등학교학습지도요령 산수과편(시안)이다<10>. 연필을 나눌 갯수를 구하는 문제에 대하여 피승수와 승수를 반대로 한 곱셈식에서는 "그 수의 뜻을 깊이 생각하지도 않고 나오는 순서 대로 적어 내고 그 사이에 곱셈 기호를 적어 둔다" "문제에 나오는 수를 일단 머리 속에 담아 두고 연산을 결정에 인도하도록 문제 장소를 조직화할 힘이 결여되어 있다"고 분석하고 3 명의 2 곱절로 6 명이 되어 문제에 맞지 않는다고 지도하고 있다. 여기서 B-4 가 사용되고 있다.

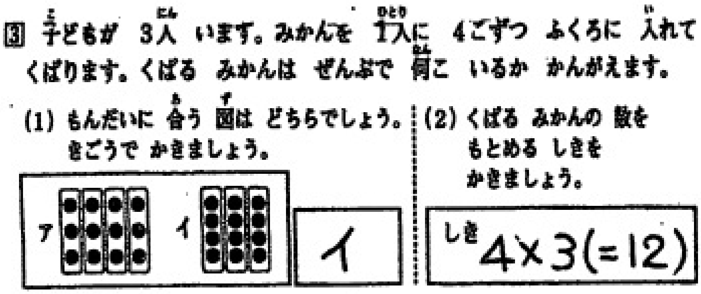
사회적으로는 1972 년의 아사히신문 기사가 중요하다<11>. "6 명 어린이들에게 1 명당 4 개씩 귤을 주고 싶은데 귤이 몇개 있으면 될까요?"라고 하는 시험 출제에서 곱셈식 '6×4'가 오답으로 판단된 것에 대하여 한 아동 부모가 학교나 교육위원회 그리고 문부성에 항의하였다. 수학자이자 산수 · 수학 교육에 깊이 관여하는 도야마 히라쿠는 같은 해에 과학 아사히에 기사를 실었다[25]. 그는 트럼프 나누기를 연상하는 어린이일 경우 6×4=24 이라고 쓸 것이 합리적이라고 하였으며 교환법칙이나 책상의 장방형 배치를 예로 들면서 6×4 와 4×6 어느쪽이라도 된다는 입장을 표명하였다.

그런데 그 후의 산수 교육에서는 곱셈의 뜻을 중시하는 가운데 승수가 먼저 오고 피승수가 뒤에 출현하는 문장제가 산수 교육에 종사하는 교사에 의한 서적에서 소개되었으며 학력조사 · 학술조사에서도 출제되고 있다. 교사에는 다음 2 명 이름을 들고자 한다. 한명은 '100 칸 계산'을 보급시킨 것으로 알려진 기시모토 히로시, 나머지

한명은 쓰쿠바대학부속 초등학교에서 산수를 가르치는 다나카 히로시이다. 각자 저서[26][27]에서 학생들이 십중팔구 잘못 쓴다고 한다.

긴다 시게히로의 학술조사[28]에 의하면 그 종류의 문장제에 대하여 곱셈을 학습한 뒤에 초등학교 2 학년생의 약 20%, 대학생의 약 60%가 승수×피승수로 곱셈식을 적었다고 한다. 피승수가 먼저 출현하는 문장제에서는 대학생이 전원 초등학생도 거의 전원이 피승수×승수의 곱셈식을 적었다고 한다.

도쿄도 산수교육연구회에서는 2 년에 한번 수와 계산 및 수량관계의 학력조사를 실시하고 있으며 각 학년 60,000 명 전후가 해답하고 있는데 2012 년도에는 다음과 같은 출제가 있었다<12>.



"어린이가 3 명 있습니다. 귤을 1 명에게 4 개씩 봉지에 담아 나눠 줍니다. 나눠 줄 귤이 모두 몇개 있을지 생각하시오"라고 출제하고 문제에 맞는 그림을 2 개 중에서 선택시키며 그 뒤에 곱셈식을 쓰게 한다. 이를 통하여 문장에서 장면이나 수량 관계를 적절히 파악하고 있는지 여부 그리고 그 관계를 곱셈식으로 적절히 쓸 수 있을지를 묻는 것이다. 모두 정답한 자는 54%이며 그림만 정답한 자는 28% 곱셈식만의 정답자는 6%이다.

지금까지 봐 온 바와 같이 승수가 먼저 오고 피승수가 뒤에 오는 문장제에서 '피승수×승수'라는 곱셈식만을 정답으로 하는 출제는 적어도 반세기 이상의 역사가 있으며 현재까지 계승되고 있다. 물론 정답 오답을 얻는데 그치지 않고 그 결과는 지도에 반영되어 왔다. 그런데 이러한 종류의 출제는 초등학교 저학년까지이며 고학년에서는 나눗셈이 사용된다. 2010 년도 전국학력·학습상황조사(전국학력시험)에서 초등학교 6 학년생은 "8m 길이에 무게가 4kg 봉이 있습니다. 이 봉의 1m 무게가 몇 kg 일까요?"<13>라고 하는 문제를 풀었는데 나눗셈식의 정답은 8÷4 가 아니라 4÷8 이다.

3.2 a×b 와 b×a

곱셈의 뜻을 정착시키기 위한 지도에는 승수를 먼저 쓰는 문장제 이외의 방법도 있으며 또 일본 국외에서도 볼 수 있다. 그것은 a×b 와 b×a 의 차이점을 배우는 것이다.

우선 교과서를 보면 도쿄서적의 2011 년도판에서는 다음 문제 "연필을 1 명에게 2 개씩

5 명에게 나누고자 합니다. 연필이 모두 몇개 필요할까요?"와 "연필을 2 명에게 5 개씩 나누고자 합니다. 연필이 모두 몇개 필요할까요?"를 나란히 제시하고 있다<14>. 두문제 모두 2 가 먼저 나오고 5 가 뒤에 출현하는데 상황이 다르다. 그리고 전자는 2×5, 후자는 5×2 라는 곱셈식으로 답할 것이 기대된다. 후자는 승수가 먼저 오는 문장제이기도 한다. 그러므로 이 두문제로 곱셈식의 차이점을 학습한 다음에 사과 문제에서 '5×3'이라고 답한 어린이에게는 이것은 '연필을 2 명에게...'의 문제와 같은 것이라며 복습시킬 수가 있다. 다이닛폰도서에 의한 동년도 교과서에도 같은 두문제가 있다<15>.

지금부터 영어 문헌을 살펴보고자 한다. [8]에서는 4 개씩 사탕과자를 들고 있는 3 명 어린이들이 3 개씩 사탕과자를 들고 있는 4 명 어린이들보다 행운하다는 예를 들며 '4 가 3 개', '3 이 4 개'의 차이점을 설명하고 있다. 교환법칙에 대하여도 그것은 수의 성질이며 3×4 가 4×3 과 같은 것은 사실이지만 일상생활에서는 그것들이 꼭 같다는 것이 아니라고 한다. 이들은 B-2 및 B-5 와 관계가 있다.

순수한 수의 곱셈과 산수에서 답을 구하는 것과의 차이점에 대하여는 다른 사람도 지적하고 있다. 베르그노는 상술한 "4×15 와 15×4 는 같으나 4 개×15 센트로 60 센트가 얻어지는데 왜 60 개가 아닌가"를 곱셈의 구조를 상술하기 직전에 적었다. 또 그리어는 "어떤 로켓은 1 초간에 0.85 마일 속도로 진행한다. 16 초이면 얼마나 진행할까?"라고 하는 문제에 대하여 어린이들은 곱셈을 선택하되 0.85 와 16 을 교환한 문제장일 경우 16÷0.85 을 선택하는 경향이 있음을 예시하고 실험을 통하여 인정된 '승수효과'를 해설하고 있다[29]. 여기서 말하는 승수효과라 함은 곱셈으로 구할 수 있다고 인식할 것의 어려움이 승수가 '정수' '1 보다 큰 소수' '1 보다 작은 소수' 중에서 어느쪽인지에 의존하고 피승수의 종류에는 의존하지 않는 것을 말한다. 승수효과는 일본에서도 확인되고 있다[30].

'곱셈의 순서'에 대한 피판자는 자주 '피승수×승수'는 도입시의 편법이며 교환법칙을 학습한다면 '승수 × 피승수'로 하여도 된다고 해설하고 있다(예 [3]). 그런데 이 경우 상술한 베르그노나 그리어의 제안과 관찰을 합리적으로 설명할 수 없다.

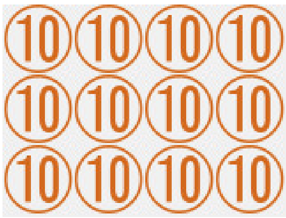
3.3 '곱절'과 '곱'의 곱셈

국내외 문헌에서 곱셈의 분류법에 대하여 여러 사람들이 제안하고 있다. 그 중에서도 곱셈이 '곱절'에 유래되는 것과 '곱'에 유래되는 것으로 대별하는 것이 알기 쉽다. '곱절'은 피승수와 곱셈의 답이 동종의 양이며 승수는 단위 또는 조수사가 있어도 확률 혹은 확대율로 보고 연산시에 무차원이 되는 곱셈을 말한다. '곱'은 2 개의 순수한 수끼리 곱해지는 곱셈과 2 개 양을 곱하고 이들과 다른 양을 얻는 곱셈으로 이루어진다. 2 가지로 대별하면서 더욱 세세하게 분류한 표를 [29]에서 볼 수 있다. 만약 3 가지로 나누자면 '배 개념' '비례관수' '복비례'가 알려져 있다[14][31]. 4 가지로 나눌 경우

'누가'를 포함시키면 좋다[23].

'곱절'과 '곱'에는 간단한 식별법이 있다. $a×b=p$ 로 수량 관계를 나타냈을 때 a 와 b 와 p 가 모두 같은 종류의 양일 때 또는 p 가 a 와 b 의 어느쪽과도 다른 종류의 양일 때에는 '곱'이고 a 와 b 는 p 의 인수로 된다. 이 경우 피승수 · 승수에 의하여 구별하지 않는다. 한편 p 가 a 와 b 의 어느 한쪽과 같은 종류의 양일 때에는 '곱절'이고 만약 a 와 p 가 같은 종류의 양일 때에는 a 가 피승수 b 가 승수로 된다. 세로×가로나 저면적×높이에 따라 면적이나 체적을 구하는 것은 '곱'이고 '5 개×3 장'이나 '4 개×15 센트'는 '곱절'에 해당된다.

'곱절'과 '곱'을 조합한 계산도 가능하다. 10 원 동전을 다음과 같이 늘어놓았을 때 그 총액이 얼마일까. 그리고 어떻게 계산할 것이 좋을까.



세로로 보면 30 원씩 가로로 보면 40 월씩 있다. 그렇다고 30×40＝1200 이라고 계산하여서는 안된다. 현실에는 120 원 밖에 없다. 10 원 동전을 세어 보면 $3×4=12$($4×3=12$ 로 하여도 됨)로 12 개 있다. 그리고 $10×12=120$ 으로 금액을 구할 수 있다. 이 두가지 곱셈식을 조합시켜 $10×3×4=120$ 이라고 적을 수도 있다. 좌변을 $(10×3)×4=30×4=120$ 이라고 계산하면 30 원이 4 열 있음을 표현할 수 있으며 곱셈의 결합법칙도 확인할 수 있다.

10 월 동전을 구슬로 바꾸었을 경우에 대하여는 학습지도요령의 해설에도 실려 있다[1]. 그 총수를 구하는 곱셈식이 3×4 라도 4×3 이라도 되는 것은 그것이 데카르트 곱에 의거한 '곱'의 곱셈이기 때문이다. 한편 사과의 출제를 포함하고 의론 대상으로 된 것은 '곱절'의 곱셈에 속한다.도야마 히라쿠가 1972 년에 [25]를 저술하였던 시점에서는 '곱절'과 '곱'의 구별이 명활화되지 않았던 것으로 추측된다. 인식의 변경이 1979 년(사망할 6 개월 전)의 강연록에서 볼 수 있다[32].

4. 일본 산수 교육의 특징

지금까지 내용을 정리함과 더불어 보충글을 가하며 일본 산수 교육의 특징을 살펴보고자 한다.

가장 큰 특징은 수업 방식이다. 수업할 때마다 교사가 '목표'를 설정하고 보통 45 분 수업시간 동안에 소수 문제에 시간을 들여 학생이 모두 하나의 문제를 풀게 된다. 계산식이나 답을 쓰는 것 뿐만 아니라 그것의 근거에 대하여 답하기도 한다. 주된 문제에서는 그 반응(계산식이나 구하는 법 등)의 다양성을 중시한다[33]. 이

수업방식은 'The Teaching Gap'[34][35]을 통하여 세계적으로 유명해졌다. 수업은 교과서나 교사용지도서를 따라 진행하는 것이 아니다. 그것은 교사가 작성하는 여러 학습지도안에서도 확인할 수 있다[7][11][36]. 인터넷상에서 공개되는 학습지도안도 있어서 교사가 아니어도 Word 나 PDF 문서를 열람할 수 있다. 곱셈을 학습하는데 있어서는 B-1 이나 B-2 와 밀접한 관계가 있는 학습지도안이 많다.

일본은 교육선진국이며 교육내용이나 지도법의 수출국이도 하다<16>. 산수 교과서를 도쿄서적과 게이린칸이 영어로 번역하고 판매하고 있어[37]<17><18><19> 일본 산수교육에 관심이 있는 외국 교사나 연구자 해외에 재외 일본인으로 장래에 일본에 귀국할 아동들이 활용하고 있다.

그렇다고 곱셈의 순서를 포함한 일본 방식을 그대로 타국에 침투시키려는 것이 아니라 각국의 언어나 문화에 대한 배려도 볼 수 있다. 예를 들어 바바 다쿠야[38]는 태국어에 의한 곱셈의 자연스러운 어순이 일본어와 같으나 교과서 곱셈식이 영어와 같다는 관점에서 학습자의 인지적 부담을 지적하고 다른 사례와 함께 국제협력에 의한 교과과정 개발의 주의점을 제시하고 있다. 또 쓰쿠바대학과 멕시코교육부의 공동사업으로 스페인어권 교사를 위한 지도서가 작성되었는데[39] 그 이론적 검토에 있어서 xj(x 에 j 를 아래 첨자로 넣은 기호임)를 일본식 곱셈기호로 사용하는 등 일본어와 스페인어의 곱셈식의 차이점을 고려하고 있다.

일본 상황을 다시 말하자면 곱셈에 대하여는 '피승수×승수'가 당연한 것으로 간주되고 있다. 일상생활에서도 치수나 회계를 제외한 많은 경우에서 이 곱셈식에서 수량을 파악할 수 있다. 'a×b'를 "a 가 b 개'라고 일기만 하면 되기 때문이다. 여기서 a 에는 수량이 아닌 것이 쓰여질 경우도 있다. 예를 들어 어떤 비디오게임<20>에서는 관 그림 오른쪽 밑에 '×2'라고 표시하고 소생되기를 기다리는 몬스터 시신이 2 구 있음을 표현하고 있다.

학력조사에도 특징이 있다. 교내 시험이나 입학 시험과는 별도로 실시되는 학력조사(학술조사를 포함함)에서는 해답자마다 점수를 매기지 않는다. 아동의 정답수나 특점보다도 학생이라는 집단의 해답 유형과 그 확률을 중시하고 교육내용을 개선하는데 참고로 하고 있다. 그리고 조사문제는 실시 후에 공개된다. 전국학력시험은 실시 후에 조속히 시험문제가 공개되며 몇개월 뒤에는 각 문제에 대한 해답유형이나 정답률을 포함한 표 및 분석이 고개되고 있다(2013 년도에 대하여는 <21>).

전국학력시험에서는 '승수와 피승수를 교체한 곱셈식도 허용한다'는 주의가 덧붙여져 있으니 현재 곱셈 순서는 따지지 않는다. 반면 도쿄도산수교육연구회의 학력조사에서는 6 학년생이 푼 분수 곱셈 문장제에서 '승수×피승수'로 적은 곱셈식을 오답으로 하였다. 이 사례 이외에도 고등학교에서는 피승수가 먼저 승수가 뒤에 출현하는 문장제에서 2 개 수를 뒤집은 곱셈식으로 답하였을 경우 곱셈 뜻을 이해하지 못한 것으로 판단되는 사례가 있다.

5. 맺음말

이 문서에서는 주로 2 가지 사항에 관하여 논하였다. 전반에서는 '곱셈 순서'의 논점을 밝힌 다음 그 논거로 되는 정답으로 하는 이유 및 오답으로 하는 이유를 리스트화하였다. 각각 이유를 간결히 기술함으로써 정보를 부여한 찬부를 표명하기 쉬워진다. A-2, B-3, B-4 와 같이 2 개 리스트 사이에서 관련성도 볼 수 있다. 찬성과 반대 의견과 이 리스트를 조합하면 어느 이유를 지지하고 어느 이유를 각하하는지를 쉽게 판단할 수 있다.

후반의 사례 정리는 곱셈을 통한 산수 교육의 국제적 이해를 의도한 것이다. 그렇다고 본 기사에서 소개한 것은 '곱셈 뜻'의 이해 상황이나 지도에 관한 출력 중 일부분에 불과하지 않다. 이번에는 소개하지 못하였으나 1970 년대에 수학자들이 저술한 몇개 '양의 이론'[40][41][42]은 현재에서도 산수 · 수학 교육의 기초로서 활용할 수 있다. 영어 번역된 일본 학습지도요령해설[2]과 미국의 Common Core State Standards for Mathematics <22>를 비교함으로써 얻어질 것이 많다.

향후 과제로서 산수 · 수학 교육과 수학의 관계나 일본 교육과 세계 교육의 관계에 대하여 문헌을 정비하고 '곱셈의 순서'와 연관시킨 의론에 도움이 될 것을 생각하고 있다.

References

[1] 文部科学省：小学校学習指導要領解説 算数編，東洋館出版社 (2008). [isbn:9784491023731]

[2] Isoda, M. (Ed.): Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 1-6), 2010. [http://www.globaledresources.com/products/assets/Teaching%20Guide%20Elementary.pdf]

[3] 高橋誠：かけ算には順序があるのか，岩波科学ライブラリー180，岩波書店 (2011). [isbn:9784000295802]

[4] Schwartz, J. L.: "Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations", Number concepts and operations in the middle grades, National Counsil of Teachers of Mathematics. pp.41-52 (1988). [isbn:0873532651]

[5] 遠山啓(編)：算数に強くなる水道方式入門，国土社 (1961). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000JALYQ0]

[6] 遠山啓，銀林浩(編)：新版 水道方式入門 整数編，国土社 (1971). [isbn:4337478094]

[7] 筑波大学附属小学校算数部（編集）：板書で見る全単元・全時間の授業のすべて 小学校算数２年下，東洋館出版社 (2003). [isbn:9784491019376]

[8] Anghileri, J. and Johnson, D. C.: "Arithmetic Operations on Whole Numbers: Multiplication and Division", Teaching Mathematics in Grades K-8, Longman Higher Education, pp.146-189 (1988). [isbn:0205110762]

[9] 水戸部修治，笠井健一，村山哲哉，杉田洋，直山木綿子，澤井陽介：教科調査官が語るこれからの授業 小学校―言語活動を生かし「思考力・判断力・表現力」を育む授業とは，図書文化社 (2012). [isbn:9784810026160]

[10] 文部省：数と計算の指導―小学校算数指導資料，大日本図書 (1986). [isbn:4477181655]

[11] 前川公一，志水廣：365 日の算数学習指導案 1・2 年編，明治図書出版 (2011). [isbn:9784180808335]

[12] 中島健三：乗法の意味の指導について，日本数学教育会誌, Vol.50, No.2, pp.2-6 (1968). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110003849500]

[13] Mulligan, J.: "Children's Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study", Mathematics Education Research Journal, Vol.4, No.1, pp.24-41 (1992). [http://www.merga.net.au/documents/MERJ_4_1_Mulligan.pdf]

[14] Vergnaud, G.: "Multiplicative Structures", Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, pp.127-174 (1983). [isbn:012444220X]

[15] Vergnaud, G.: "Multiplicative Structures", Number Concepts and Operations in the

Middle Grades, Vol.2, pp.141-161 (1988). [isbn:0873532651]
[16] 中野佐三(編): 算数科の教育心理, 児童心理選書 第八巻, 金子書房 (1957). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000JBN9M6]
[17] 小林道正: 数とは何か?, ベレ出版 (2012). [isbn:9784860643409]
[18] 佐藤俊太郎(編著): 算数・数学教育つれづれ草, 東洋館出版社 (2010). [isbn:9784491026183]
[19] Schuberth, E. (著), 森章吾 (訳): シュタイナー学校の算数の時間, 水声社 (1995). [isbn:4891763159]
[20] 中島健三: 乗法の意味についての論争と問題点についての考察, 日本数学教育会誌, Vol.50, No.6, pp.74-77 (1968). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110003849391]
[21] 森毅: 数の現象学, 筑摩書房 (2009). [isbn:9784480091963]
[22] 守屋誠司: 小学校指導法 算数, 玉川大学出版部 (2011). [isbn:9784472404221]
[23] 田中耕治: 教育評価, 岩波書店 (2008). [isbn:9784000280501]
[24] 礒田正美(監修), 田中秀典, 末原久史(編著): アイディアシートでうまくいく! 算数科問題解決授業スタンダード, 明治図書出版 (2013). [isbn:9784180047208]
[25] 遠山啓: 6×4, 4×6 論争にひそむ意味, 科学朝日 1972 年 5 月号, 朝日新聞社. [43] pp.114-121.
[26] 岸本裕史: どの子も伸びる算数力, 小学館 (2003). [isbn:4093874603]
[27] 田中博史: 田中博史の算数授業のつくり方, 東洋館出版社 (2009). [isbn:9784491023984]
[28] 金田茂裕: 小学 2 年生の乗法場面に関する理解, 東洋大学文学部紀要 教育学科編, No.34, pp.39-47 (2008). [http://ci.nii.ac.jp/naid/40016569351]
[29] Greer, B.: "Multiplication and Division as Models of Situations, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning", National Council of Teachers of Mathematics, pp.276-295 (1992). [isbn:1593115989]
[30] 小原豊: 小学校児童による有理数の乗法における乗数効果の分析, 鳴門教育大学研究紀要, Vol.22, pp.206-215 (2007). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110006184927]
[31] 森毅, 竹内啓: 数学の世界―それは現代人に何を意味するか, 中央公論新社 (1973). [isbn:4121003179]
[32] 遠山啓: 内包量・外延量と微分積分 (1979). [44] pp.78-91.
[33] 相馬一彦, 早勢裕明: 算数科「問題解決の授業」に生きる「問題」集, 明治図書出版 (2011). [isbn:9784180236275]
[34] Stigler, J. W. and Hiebert, J.: "The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom", Free Press (1999). [isbn:0684852748]
[35] Stigler, J. W., Hiebert, J. (著), 湊三郎 (訳): 日本の算数・数学教育に学べ―米国が注

目する jugyou kenkyuu，教育出版（2002) [isbn:4316389106]

[36] 高橋昭彦：算数数学科における学習指導の質を高める授業研究の特性とメカニズムに関する考察―アメリカにおける 10 年間の試行錯誤から学ぶこと―，日本数学教育学会誌, Vol.93, No.12 (算数教育 60-6), pp.2-9 (2011). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110008898076]

[37] Yoshida, M.: "Is Multiplication Just Repeated Addition?―Insights from Japanese Mathematics Textbooks for Expanding the Multiplication Concept", 2009 NCTM Annual Conference (2009). [http://www.globaledresources.com/resources/assets/042309_Multiplication_v2.pdf]

[38] 馬場卓也：数学教育協力における文化的な側面の基礎的研究, 平成 13 年度 国際協力事業団 客員研究員報告書（2002). [http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA65639013] [http://jica-ri.jica.go.jp/IFIC_and_JBICI-Studies/jica-ri/publication/archives/jica/kyakuin/pdf/200203_08.pdf]

[39] Isoda, M. and Olfos, R.: "La enseñanza de la multiplicación: el estudio de clases y las demandas curriculares", Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (2009). [http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA89718362] [http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/MultiplicationIsodaOlfos.pdf]

[40] 小島順：線型代数，日本放送出版協会（1976). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000JA0OCK]

[41] Nagumo, M.: Quantities and real numbers, Osaka Journal of Mathematics, Vol.14, Num.1, pp.1-10 (1977). [http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200770204]

[42] 田村二郎：量と数の理論，日本評論社（1978). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000J8KINM]

[43] 遠山啓：量とはなにか I，遠山啓著作集数学教育論シリーズ, Vol.5 (1978). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000J8MZYC]

[44] 遠山啓：量とはなにか II，遠山啓著作集数学教育論シリーズ, Vol.6 (1981). [http://www.amazon.co.jp/dp/B000J7WQJW]

<1> http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/syokaisetsu/
<2> http://www.todayhumor.co.kr/board/view.php?table=humordata&no=1454118
<3> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20111224/1324659582
<4> http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8A%A9%E6%95%B0%E8%A9%9E
<5> http://en.wikipedia.org/wiki/Japanese_counter_word
<6> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20120125/1327442079
<7> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20120612/1339436326
<8> http://cafe.daum.net/seaugjang/9MER/23

<9> http://www.asahi.com/edu/student/teacher/TKY201101160133.html

<10> http://www.nier.go.jp/guideline/s26em/chap5.htm

<11> http://ameblo.jp/metameta7/entry-10196970407.html

<12> http://tosanken.main.jp/data/H25/happyou/20131018-7.pdf

<13> http://www.nier.go.jp/10chousa/10chousa.htm

<14> http://ten.tokyo-shoseki.co.jp/text/shou/subject/sansu/tsumazuki/ebook/pdf/2.pdf

<15> http://www.dainippon-tosho.co.jp/sho/sansuu/text/index.html

<16> http://www.jica.go.jp/activities/issues/education/index.html]

<17> http://shop.tokyo-shoseki.co.jp/shopap/feature/theme0053/

<18> http://keirin.shop29.makeshop.jp/shopbrand/003/O/

<19> http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/pr/risukeirin/pdf/no001_11.pdf

<20> http://www.dqmp.jp/

<21> http://www.nier.go.jp/13chousa/13chousa.htm

<22> http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

About the author

"takehikom" is a college teacher who is engaged in computer and communication engineering. Not involved with elementary schools directly, he has collected the study guides and professional literature written for the understanding of the multiplication, and evidenced his approval to the present instruction. A few hundred of blog articles about this topic with over 2 million total characters were posted mainly in Japanese. He has also talked about topics written in this article in his class of programming or information security as an aside.

The Japanese and English versions of this article were released on ahead (http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20131115/1384520634). The author prepared a draft in Japanese first and then contracted out the Korean translation. Sorry to say that the translator cannot be unveiled for certain reasons, while the reference and the profile have not been translated into Korean due to an editorial situation.