תמר חריצי

ש.ב בחדו"א - תרגיל 6

(a) $[-1,1]$ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$f'(c) = \frac{c^2-4c+1}{(c-2)^2} = \frac{f(1)-f(-1)}{1+1} = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$\frac{c^2-4c+1}{(c-2)^2} = 0 \rightarrow c^2-4c+1=0$$

לא בתחום

$c_1 = \cancel{2+\sqrt{3}}$

$c_2 = 2-\sqrt{3}$

לכן ה-c בתחום $[1,-1)$ מקיימים את מסקנת המשפט הוא $c=2-\sqrt{3}$

(b) $[0,3]$ $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+1}} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$3 = 2\sqrt{c+1} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{c+1} \Leftrightarrow c+1 = \frac{3^2}{2^2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = c+1$$

$$\boxed{c = \frac{5}{4}}$$

לכן ה-c בתחום $(0,3)$ המקיימים את מסקנת המשפט הם $c = \frac{5}{4}$

(c) $[a,b]$ $f(x) = x^2+\alpha x+\beta$

$$f'(x) = 2x+\alpha$$

$$f'(c) = 2c+\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$(2c+\alpha)(b-a) = f(b)-f(a)$$

$f(b) = b^2+\alpha b+\beta$

$f(a) = a^2+\alpha a+\beta$

$$(2c+\alpha)(b-a) = b^2+\alpha b+\beta-(a^2+a\alpha+\beta)$$

$$(2c+\alpha)(b-a) = b^2+\alpha b+\cancel{\beta}-a^2-a\alpha-\cancel{\beta}$$

$$(2c+\alpha)(b-a) = b(b+\alpha)-a(a+\alpha)$$

$$(2c+\alpha)\cancel{(b-a)} = \cancel{(b-a)}(b+a+\alpha)$$

$$2c+\alpha = b+a+\alpha \quad \Big| -\alpha$$

$$2c = b+a \iff c=\frac{b+a}{2}$$

לכן ה-c בתחום (a,b) המקיימים את ~~מיקום~~ השפט
הן $c=\frac{b+a}{2}$

② נתונות הפונ' $f(x)$ ו- $g(x)$ $f'(x)=g(x)$

צ"ל $f(x)^2+g(x)$ היא פונ' קבועה

כדי שפונ' תהיה קבועה, צריך שהנגזרת שלה תהיה שווה לאפס רק 0.

אז:
$$\left(f(x)^2+g(x)^2\right)' = 2f(x)\cdot f(x)' + 2g(x)\cdot g(x)' =$$
$$= 2f(x)\cdot g(x) + 2g(x)\cdot -f(x)$$
$$= 2f(x)\cdot g(x) - 2f(x)\cdot g(x) = 0$$

לכן הפונ' קבועה

<u>דוגמא:</u>

$f(x)=\cos(x)$ $\quad g(x)=\sin(x)$

$f'(x)=-\sin(x)$ $\quad g'(x)=\cos(x)$

$$\left((\cos x)^2+(\sin x)^2\right)' = 0$$
$$2\cos x\cdot -\sin x + 2\sin x\cdot\cos x$$
$$= -2\cos x\cdot\sin x + 2\sin x\cos x = 0$$

מ.ש.ל

③

ⓐ $f(x)=x^4-8x^2+16$

$$f'(x)=4x^3-16x = 4x(x^2-4) = 4x(x+2)(x-2)$$

הנגזרת מתאפסת ב-3 נקודות ± 2, 0 – אלו נקודות קריטיות

	$(-\infty,-2]$	-2	$[-2,0]$	0	$[0,2]$	2	$[2,\infty)$
$f(x)$	↘	min	↗	0	↘	max	↗
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

תחומי עליה $[-2,0]\cup[2,\infty)$

תחומי ירידה $[-\infty,-2)\cup[0,2]$

בס"ד

נק' מינימום $(-2,0)$, נק' מקסימום $(2,0)$
$(2,0)$

b $f(x)=\frac{x^2}{(x-2)^3}$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)^3-x^2\cdot3(x-2)^2}{(x-2)^6}$$

$$\frac{(x-2)^2(2x(x-2)-3x^2)}{(x-2)^6}=\frac{2x(x-2)-3x^2}{(x-2)^4}$$

$$\frac{2x^4-4x-3x^2}{(x-2)^4}=\frac{-x^2-4x}{(x-2)^4}=\frac{-x(x+4)}{(x-2)^4}$$

לא מוגדר ב- $x=2$ נק' קריטיות $x=-4$, $x=0$

x	$(-\infty,-4]$	-4	$[-4,0]$	0	$[0,2)$	2	$[2,\infty)$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘		↘
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$

תחום עליה $[-4,0]$

תחום ירידה $(-\infty,-4]\cup[0,2)\cup[2,\infty)$

נק' מינימום $(-4,-\frac{2}{27})$ נק' מקסימום $(0,0)$

c $f(x)=\frac{(x-2)^3}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{3(x-2)^2\cdot(x^2+1)-(x-2)^3\cdot2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{3x^4-12x^3+12x^2+3x^2-12x+12-2x^4+12x^3-24x^2+16x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4-9x^2+4x+12}{(x^2+1)^2}=0$$

פולינום!

$$\begin{array}{l} x^3-x^2-8x+12 \\ \hline x^4-9x^2+4x+12 \;|\; x+1 \\ x^4+x^3 \\ \hline -x^3-9x^2+4x+12 \\ -x^3-x^2 \\ \hline -8x^2+4x+12 \\ -8^2-8x \\ \hline 12x+12 \\ 12x+12 \\ \hline = \;\; = \end{array}$$

פולינום!

$$\begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x^3-x^2-8x+12 \;|\; x-2 \\ x^3-2x^2 \\ \hline x^2-8x+12 \\ x^2-2x \\ \hline -6x+12 \\ -6x+12 \\ \hline = \;\; = \end{array}$$

בס"ד

לפי פולינום: $(x+1)(x^3-x^2-8x+12)=0$

לפי פולינום: $(x+1)(x-2)(x^2+x-6)=0$

$(x+1)(x-2)(x+3)(x-2)=0$

נק' קריטיות

x	$(-\infty,-3]$	-3	$[-3,-1]$	-1	$(-1,2)$	2	$[2,\infty)$
$f(x)$	↗	Max	↘		↗	Min	↗
$f'(x)$	+	0		0		0	

תחום עליה $(-\infty,3]\cup[-1,\infty)$

תחום ירידה $[-3,-1]$

נק' מינימום $(-1,-13.5)$

נק' מקסימום $(-3,-11.5)$

(d) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

$$x=\sqrt{x^2+1}$$

$$x^2=x^2+1$$

אין פתרון