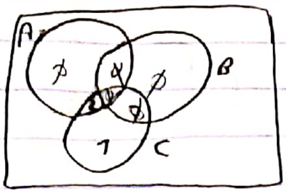
קס



(1) $A \oplus B \subseteq C$

$A \subseteq C \setminus B$

$B \subseteq A \cap C$

תנאי ראשון: $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \phi$, $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} = \phi$

תנאי שני: $A \cap B \cap \bar{C} = \phi$, $A \cap B \cap C = \phi$

תנאי שלישי: $\bar{A} \cap B \cap C = \phi$

אז נבנה קבוצה שמקיימות את התנאים האלו:

$A = \{2\}$ $B = \{\phi\}$ $C = \{1,2\}$

בדיקה: $A \oplus B \subseteq C$ ✓

$A \subseteq C \setminus B$ ✓

$B \subseteq A \cap C$ ✓

(3) (א) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^3$

$f \circ g = f(g(x)) = 2x^3$

(ב) $f(x) = 2x$, $g(x) = \cos x$

$f \circ g = f(g(x)) = 2\cos x$

(ג) $f(x) = x+1$, $g(x) = x-1$

$f \circ g = f(g(x)) = (x-1)+1$

(ד) $f(x) = x+2$, $g(x) = x+5$

$f \circ g = f(g(x)) = (x+5)+2$

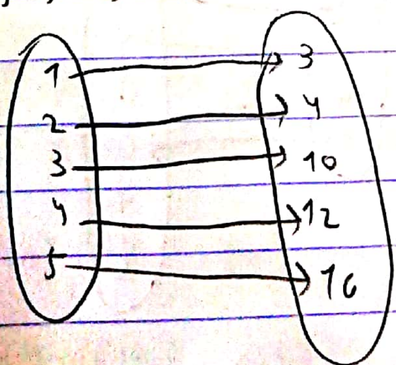
(ה) $f(x) = 3x+5$, $g(x) = 2x+1$

$f \circ g = f(g(x)) = 3(2x+1)+5$

(2) (א) $\{1,2,3,4,5\}$ $\{3,4,10,12,16\}$

(ב) הפונקציה $\{3,4,10,12,16\}$

הוא ק על

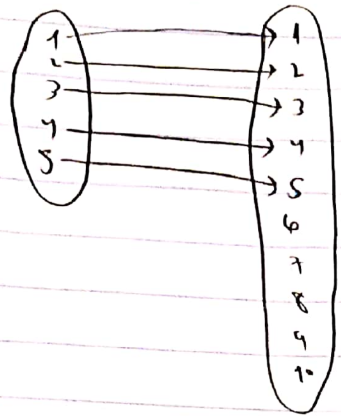


$F = \{(1,3), (2,4), (3,10), (4,12), (5,16)\}$

Scanned by CamScanner

ב.

② $\{1,2,3,4,5\}$ $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

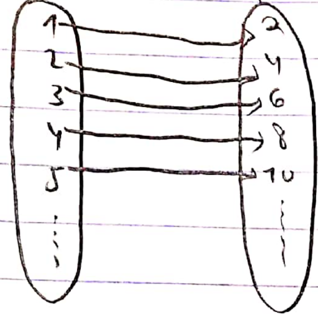


$f=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

③ הפונקציה $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ אינה על, כי אין מספר
a מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ כך ש- $f(a)=9$

ג. $A=\mathbb{Z}$ $B=2\mathbb{Z}$ $f(z)=2z,\ z\in\mathbb{Z}$

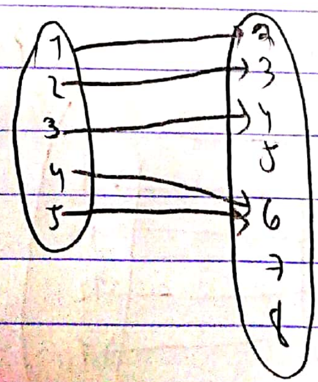
$\mathbb{Z}$ $2\mathbb{Z}$



① הוכחה: שהפונקציה על B, איבר ששייך לקבוצה B היא מהצורה $2z$,
אם $a\in B$, אז קיים $a'\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a=2a'$ $\boxed{\frac{a}{2}=a'}$

⑤ $\{1,2,3,4,5\}$ $\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,6),(5,6)\}$



$f(z)=2z$

① הוכחה: שהפונקציה חח"ע

$f(a)=f(b)$
$a2=b2$ $/:2$
$\boxed{a=b}$

לא על $\mathbb{Z}$

אין איבר $z\in\mathbb{Z}$ כך ש- $f(z)=-1$
$2z=-1$
$z=-\frac{1}{2}$
$z\notin\mathbb{Z}$

פתרון שאלה 4 **סעיף** א

טענה: לכל $n \ge 1$ מתקיים $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $\mathbb{N}$ (מחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה $n=1$

ואכן $P(1)$ מתקיים $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \overset{\text{הצבה}}{=} 1$ **מתקיים.**

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \ge 1$ **מסוים מתקיים:** $P(n)$

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

צריך להוכיח: $P(n+1)$

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}+(n+1)^2=\frac{(n+1)\overset{n+2}{(n+1+1)}\overset{2n+3}{(2(n+1)+1)}}{6}$$

הוכחה:

לפי הנחת האינדוקציה

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \overset{\text{מכנה משותף}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} =$$

$$\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ מש"ל

הוכחנו ש $P(1)$ מתקיים וכי $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ עבור כל $n \ge 1$

ולכן על עיקרון האינדוקציה, $P(n)$ מתקיים עבור כל $n \ge 1$.

Scanned by CamScanner

חוג ל

י להגי
יאתם

פתרון שאלה 4 סעיף ב'

טענה: לכל $n \geq 1$ מתקיים $3 \mid [n^3+2n]$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על n (מחקו את המיותר, השלימו את החסר)

שלוש

בסיס האינדוקציה $n=1$

ואכן $P(1)$ מתקיים ? הבדיקה $3 \mid [1^3+2\cdot 1]=1$ **מתקיים.**

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \geq 1$ **מסוים מתקיים:** $P(n)$

$3 \mid [n^3+2n]$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ $3 \mid [(n+1)^3+2n+2]$

הוכחה:

$(n+1)(n+1)(n+1)$

$(n^2+2n+1)(n+1)$

$3 \mid [(n+1)^3+2n+2] =$

צריך להוכיח

$n^3+2n^2+n+n^2+2n+1 =$

$n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$3 \mid [n^3+3n^2+5n+3] =$

$3 \mid [n^3+2n+3n^2+3n+3] =$

$3 \mid [n^3+2n$

$3 \mid [\underbrace{n^3+2n}_{\text{עפ הנחת האינדוקציה מתחלק ב-3}}+3\underbrace{[n^2+n+1]}_{\text{מתחלק ב-3 כי } 3 \mid 3\cdot k}$

$(n^2+n+1) \in \mathbb{Z}$ $[k \in \mathbb{Z}]$

סכום של 2 איברים שמתחלקים ב-3 מתחלק ב-3 ; נוכיח

$3k+3\cdot m = 3(k\cdot m)$ $k,m \in \mathbb{Z}$

מסקנה!

הוכחנו כי $P(1)$ וכי $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ עבור כל $n \geq 1$

לכן עפ עיקרון האינדוקציה, $P(n)$ מתקיים עבור כל $n \geq 1$

Scanned by CamScanner

פתרון שאלה 4 סעיף 2

טענה: לכל $n\geq 1$ מתקיים $4^0+4^1+4^2+\dots 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{4-1}$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על n (מחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה $n=1$

ואכן $P(1)$ מתקיים הצבה! $\underbrace{4^0+4^1}_{5} = \frac{\overbrace{4^{1+1}-1}^{16-1}}{\underbrace{4-1}_{3}} = 5$ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n\geq 1$ מסויים מתקיים: $P(n)$

$$4^0+4^1+4^2+\dots 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{4-1}$$

צריך להוכיח: $P(n+1)$

$$\underbrace{4^0+4^1+4^2+\dots 4^n}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}+4^{n+1} = \frac{\overbrace{4^{(n+1)+1}}^{4^{n+2}}-1}{4-1}$$

הוכחה:

שימוש בהנחת האינדוקציה $\rightarrow$ $\frac{4^{n+1}-1}{4-1}+4^{n+1} = \frac{4^{n+1}-1+3\cdot 4^{n+1}}{3}$

$$\frac{-1+4^{n+1}(3+1)}{3} = \frac{4^{n*1}\cdot(4)-1}{4-1} = \frac{4^{n+2}-1}{4-1}$$

מסקנה: הוכחנו כי מתקיים $P(1)$ וגם $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ עבור G $n\geq 1$ ולכן לפי עיקרון האינדוקציה, $P(n)$ מתקיים עבור G $n\geq 1$

פתרון שאלה 4 **סעיף** 3

טענה: לכל $n\geq3$ מתקיים $2n+1<2^n$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על n (מחקו את המיותר, השלימו את החסר)

<u>בסיס האינדוקציה</u> $n=3$

ואכן $P(3)$ מתקיים: הצבה: $2\cdot3+1<2^3 = 7<8$ **מתקיים.**

<u>צעד האינדוקציה</u>

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n\geq3$ **מסוים מתקיים:** $P(n)$

$2n+1<2^n$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ $\quad 2(n+1)+1<2^{n+1}$

$2n+3<2^{n+1}$

הוכחה:

נשען מצד האינדוקציה $\rightarrow$ $2n+1<2^n$

נכפיל בשני האגפים ב 2 $\rightarrow$ $2(2n+1)<2^n\cdot2$

$4n+2<2^{n+1}$

אני מניח ש- $2(n+1)\leq4n+2$, נקבל:

$2(n+1)+1\leq4n+2<2^{n+1}$

$2(n+1)+1\leq4n+2$

$2n+2+1\leq4n+2$

$2n+3\leq4n+2$ / :2

$n+1.5\leq2n+1$

$0.5\leq n$ $\longrightarrow$ קיבלנו שזה תמיד מתקיים עבור $n\geq0.5$, וזה תמיד מתקיים עבור $n\geq3$, ולכן קיבלנו ש $2(n+1)+1\leq4n+2<2^{n+1}$

ומכאן מתקיים: $2(n+1)+1<2^{n+1}$

<u>לסיכום:</u>

הוכחנו ש מתקיים $P(3)$ וכי $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ עבור כל $n\geq3$, לכן,

על פי עיקרון האינדוקציה $P(n)$ מתקיים עבור כל $n\geq3$

<u>מש"ל</u>