$\int x^3 e^x \, dx =$

10 ← 4

מיידי

$\int e^x dx = e^x$

3

$\int x e^{x^2} dx = \Big/ \begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2} du \end{matrix} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2}$

$\int x e^x dx =$

חלקים

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$

$x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$

$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x \cdot x^2 e^{x^2} dx = \Big/ \begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ \frac{1}{2} du = x\,dx \end{matrix} = \frac{1}{2}\int u e^u du =$

$f(u) = u$ חלקים [illegible]

$g'(u) = e^u$

$= \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2}$

5

תחום הגדרה:

* מהו תחום ההגדרה של $\ln x$? $0 < x$
* מהו תחום ההגדרה של $\frac{1}{\sqrt{x}}$? $0 < x$
* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}$

מוגדר צריך $0 < x$

נרצה ש- $\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}$ יהיה מוגדר, צריך גם ש- $0 < 1 + \ln x$

$-1 < \ln x$

$e^{-1} < e^{\ln x} \qquad \begin{matrix} a < b \\ e^a < e^b \end{matrix}$

$\frac{1}{e} < x$

תשובה: $\frac{1}{e} < x$

Scanned by CamScanner

קס"ג

שאלה אחרת

$\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$ $0<x$ כדי ש- $\ln x$ יהיה מוגדר

$0<1-\ln x$

$\ln x<1$

$e^{\ln x}<e^{1}$

$x<e$

תשובה: $0<x<e$

ב)

$\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}$ כי היא פונ' יורדת ולכן נחפש את הקצוות

תחום ההגדרה $(\frac{1}{e},\infty)$

$\ln(\frac{1}{e})=\ln(e^{-1})=-1$

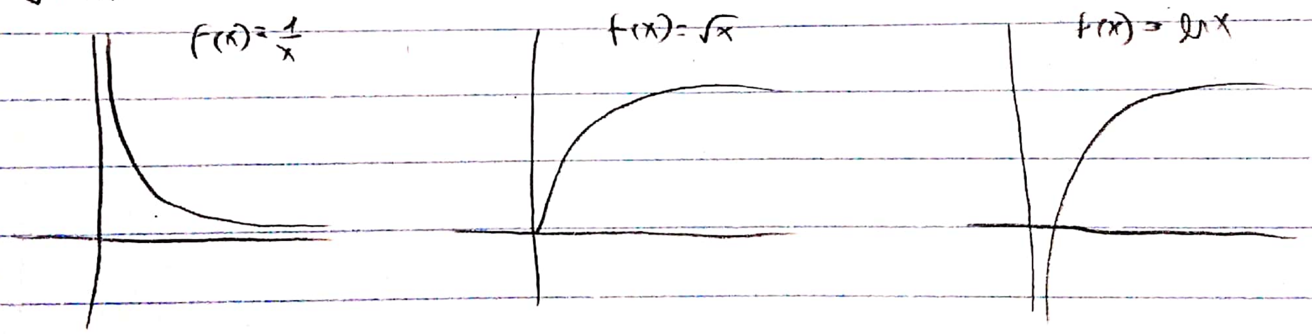
$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^{+}}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}=\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^{+}}}=\frac{1}{0^{+}}=\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}=0$

טווח: $(0,\infty)$

הרכבה של שתי פונקציות עולות היא פונקציה עולה, ולכן $\sqrt{1+\ln x}$ עולה

הרכבה של פונקציה עולה ופונקציה יורדת היא פונקציה יורדת, ולכן $\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}$ יורדת



נגזרת:

$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}\right)'=-\frac{1}{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{x}<0$

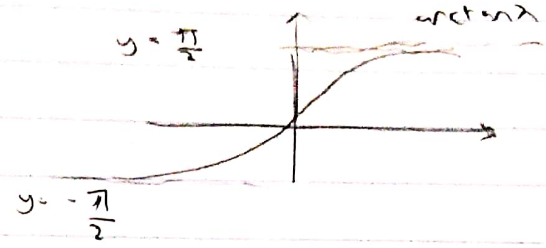
(עבור $x>\frac{1}{e}$)

בס"ד

6 מה תחום ההגדרה של $\arctan x$? $(-\infty, \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



$$f(x) = \arctan(\ln x)$$

תחום הגדרה:

כדי ש- $\ln x$ יהיה מוגדר צריך $x>0$ וזהו גם תחום ההגדרה של הפונקציה

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} > 0$$

$$\left((\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

לכן f עולה בתחום ההגדרה

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(\ln x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \arctan(\ln x) = -\frac{\pi}{2}$$

לכן הטווח של f הוא $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

תמר חריזי

חדו"א - תרגיל 10

(1) $y = \ln 5x = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$

(2) $y = \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x}{1+x^2}} \cdot \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$

$x(1+x^2)^{-1}$

$\frac{(1+x^2)(1-x^2)}{x(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{x(1+x)} = \frac{1-x^2}{x^2+x}$

(3) $y = \ln x^2 \quad y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

(4) $y = (\ln x)^3 \quad y' = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3(\ln x)^2}{x}$

(5) $y = \ln \ln(x) \quad y' = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(x)}$

(6) $y = \ln(x^2+3x+1) \quad y' = \frac{1}{x^2+3x+1} \cdot 2x+3 = \frac{2x+3}{x^2+3x+1} =$

(7) $y = e^{3x^2} = e^{3x^2} \cdot 6x = 6x e^{3x^2}$

(8) $y = e^{\tan(2x)} = e^{\tan(2x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{2e^{\tan(2x)}}{\cos^2 2x}$

(9) $y = \frac{3^x}{3^x+2} = \frac{e^{x\ln 3}}{e^{x\ln 3}+2} \quad y' = \frac{e^{x\ln 3} \cdot \ln 3\,(e^{x\ln 3}+2) - ((e^{x\ln 3} \cdot \ln 3) \cdot e^{x\ln 3})}{(e^{x\ln 3}+2)^2} =$

$= \frac{2e^{x\ln(3)} \cdot \ln(3)}{(e^{x\ln 3}+2)^2}$

(10) $y = (x^2+1)e^{3x} = 2x \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot 3\,(x^2+1) =$

$2xe^{3x} + 3x^2e^{3x} + 3e^{3x}$

בס"ד

2) כדי למצוא שיפוע של הקו בנקודה מסוימת יש לגזור את הפונ' ולהציב את הנקודה:

$y = \log_2(3x+1) = \frac{1}{(3x+1)\cdot \ln 2}\cdot 3 =$

$y' = \frac{3}{\ln 2(3x+1)}$

נציב $x=1$

$y = \frac{3}{\ln 2(4)} = 1.082$

or

2.772

3)

1) $y = 3^x = e^{\ln 3} \cdot =$
$e^{\ln 3} \cdot \ln 3 = 3^x \ln 3$

2) $y = (2x^4+1)^{\tan x} = e^{\tan x \ln(2x^4+1)} =$

$(\tan x \ln(2x^4+1))' = \frac{\ln(2x^4+1)}{\cos^2 x} + \tan x \cdot \frac{8x^3}{2x^4+1} =$

$\frac{\ln(2x^4+1)}{\cos^2 x} + \frac{8x^3 \tan x}{2x^4+1}$

$y' = e^{\tan x \ln(2x^4+1)} \cdot \frac{\ln(2x^4+1)}{\cos^2 x} + \frac{8x^3 \tan x}{2x^4+1}$

3) $y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \sin^3 x}$ $\quad y' = \frac{(x\sqrt{2x+1})' \cdot (e^x \sin^3 x) - ((x\sqrt{2x+1}) \cdot (e^x \sin^3 x)')}{(e^x \sin^3 x)^2}$

$(x\sqrt{2x+1})' = 1\sqrt{2x+1} + \frac{2x}{2\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

$(e^x \sin^3 x)' = \frac{e^x \sin^3 x + e^x 3\sin^2 x + \cos x = e^x \sin^2 x(\sin x + 3\cos x)}{(e^x \sin^3 x)^2}$

$= \frac{e^x \sin^2 x \left[\left(\sin x\left(\sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\right) - x\sqrt{2x+1}(\sin x + 3\cos x)\right]}{(e^x \sin^3 x)^2}$

307

(4)

$$y = (3x)^{5x} = e^{5x \ln 3x}$$

$$y' = e^{5x \ln 3x} + (5x \ln(3x))' =$$

$$= e^{5x \ln 3x} \cdot 5\ln 3x + \frac{3}{3x} \cdot 5x =$$

$$e^{5x \ln 3x} \cdot 5\ln 3x + 5 =$$

$$(3x)^{5x} \cdot (5\ln 3x + 5)$$

(5)

$$y = (3x+2)^{2x-1} = e^{2x-1 \ln 3x+2}$$

$$y' = e^{2x-1 \ln 3x+2} + (2x-1 \ln 3x+2)' =$$

$$e^{2x-1 \ln 3x+2} \cdot 2\ln 3x+2 + (2x-1) \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x+2} =$$

$$e^{2x-1 \ln 3x+2} \cdot 2\ln 3x+2 + (2x-1) \cdot \frac{3}{3x+2}$$

(6)

$$y = (\ln x)^x = e^{x \ln(\ln x)} \cdot (x \ln(\ln x))' =$$

$$e^{x \ln(\ln x)} \cdot \ln(\ln x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$e^{x \ln(\ln x)} \cdot \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

(7)

$$y = (5x)^{\ln x} = e^{\ln x \ln(5x)} \cdot (\ln x \ln(5x))'$$

$$e^{5x \ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(5x) + \ln x \cdot \frac{5}{5x} =$$

$$e^{5x \ln(\ln x)} \cdot \frac{\ln(5x)}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

(8)

$$y = x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x =$$

$$\sin x + x \cos x$$

Scanned by CamScanner

1. $\int 3e^{x}\,dx = 3e^{x}+c$

2. $\int (2e^{x}-\frac{6}{x}+\ln 2)\,dx = 2e^{x}-6\ln x+\ln 2x+c$

4. $\int x^{5}e^{1-x^{6}}\,dx = \left| \begin{array}{l} u=1-x^{6} \\ du=-6x^{5}\,dx \\ dx=\frac{du}{-6x^{5}} \end{array} \right. = \int x^{5}e^{u}\frac{du}{-6x^{5}} =$

$-\frac{1}{6}\int \cancel{x^{5}}e^{u}\frac{du}{\cancel{x^{5}}} = -\frac{1}{6}\cdot e^{u} = -\frac{1}{6}e^{1-x^{6}}$

5. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \\ dx=du\,x \end{array} \right. = \int \frac{1}{\cancel{x}u}\,du\cancel{x} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u =$

$\ln(\ln(x))+c$

6. $\int \frac{\ln x^{2}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x^{2} \\ du=\frac{2x}{x^{2}}dx \\ dx=\frac{du\,x^{2}}{2x} \end{array} \right. = \int \frac{u}{\cancel{x}}\frac{du\,\cancel{x^{2}}}{2x} = \frac{1}{2}\int u\frac{du\cancel{x}}{\cancel{x}} =$

$\frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2}}{2}+c = \frac{(\ln x^{2})^{2}}{4}+c$

7. $\int xe^{0.1x}\,dx = \quad f(x)=x \qquad f'(x)=1$

$g'(x)=e^{0.1x} \qquad g(x)=\int e^{0.1x}\,dx = \frac{1}{0.1}e^{0.1x}$

$\left| \begin{array}{l} u=0.1x \\ du=0.1\,dx \end{array} \right. = \int e^{u}\frac{du}{0.1} = \frac{1}{0.1}\int e^{u}\,du = \frac{1}{0.1}e^{u} = \frac{1}{0.1}e^{0.1x}$

[illegible]

$\int xe^{0.1x}du = x\cdot\frac{1}{0.1}e^{0.1x} - \int \frac{1}{0.1}e^{0.1x}\cdot x =$

$x\cdot\frac{1}{0.1}e^{0.1x} - \frac{1}{0.1}\underbrace{\int e^{0.1}\,dx}$

כבר חשבנו אינטגרל זה, יופי רק נציב:

$\int xe^{0.1x}\,dx = x\cdot\frac{1}{0.1}e^{0.1x} - \frac{1}{0.1}\cdot\frac{1}{0.1}e^{0.1x}+c$

(8)

$$\int (3-2x)e^{-x}\,dx = \qquad f(x)=3-2x \qquad g'(x)=e^{-x}$$

$$f'(x)=-2 \qquad g(x)=\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

(פתור באמצעות ההצבה!)

$$\Big/ \begin{matrix} u=-x \\ du=-1dx \end{matrix} = \int e^{u}\,-du = -\int e^{u}\,du = -e^{u} = -e^{-x}$$

(נציב את הנתונים בנוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int (3-2x)e^{-x}\,dx = (3-2x)(-e^{-x}) - \int -2\cdot e^{-x} =$$

$$(3-2x)(-e^{-x}) - 2\int e^{-x}$$

האינטגרל הזה כבר פתרנו, ולכן רק נציב:

$$\int (3-2x)e^{-x}\,dx = (3-2x)(-e^{-x}) - 2\cdot -e^{-x} =$$

$$-e^{-x}(3-2x) + 2e^{-x} + C$$

(9)

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \qquad f(x)=\ln x \qquad g'(x)=x^3$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=\frac{x^4}{4}$$

(נציב בנוסחה!)

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}\,dx = \frac{\ln(x)\cdot x^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\,dx =$$

$$\frac{\ln x\cdot x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C$$

(11)

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{2} (e^{t}-e^{-t})\,dt = [e^{t}]_{\ln\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\ln\frac{1}{2}}^{2} -e^{-t}\,dt =$$

$$[e^{t}]_{\ln\frac{1}{2}}^{2} + \underbrace{\int_{\ln\frac{1}{2}}^{2} e^{-t}\,dt}$$

(פתור בהצבה!)

$$\Big/ \begin{matrix} u=-t \\ du=-dt \end{matrix} = \int_{-\ln\frac{1}{2}}^{-2} e^{u}\,-du = -\int_{-\ln\frac{1}{2}}^{-2} e^{u}\,du = \int_{-2}^{-\ln\frac{1}{2}} e^{u}\,du = [e^{u}]_{-2}^{-\ln\frac{1}{2}} =$$

$$e^{-\ln(\frac{1}{2})} - e^{-2}$$

(נציב בחזרה!)

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{2} (e^{t}-e^{-t})\,dt = [e^{t}]_{\ln\frac{1}{2}}^{2} - \left(e^{-\ln\frac{1}{2}} - e^{-2}\right) =$$

$$e^{2} - \frac{1}{2} - e^{-\ln\frac{1}{2}} + e^{-2}$$

(12)

$$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx ,\ \Big/ \begin{matrix} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \end{matrix} = \int_{1}^{2} \frac{1}{\cancel{x}u}\,\cancel{x}du = \int_{1}^{2} \frac{1}{u}\,du =$$

$$[\ln u]_{1}^{2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

קל

(13) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} t\ln 2t\,dt = \left| \begin{array}{l} u=\ln 2t \\ du=\frac{1}{2t}\cdot 2dx \end{array} \right. = \int_0^1 \cancel{t}\, u\,\frac{2\cancel{t}\,du}{2} = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 =$

$\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

(14) $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx =$

$f(x) = x^2 \qquad g'(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2x \qquad g(x) = \underbrace{\int e^{2x}\,dx} = \frac{1}{2}e^{2x}$

נחשב מלמעלה
בנפרד:

$\int e^{2x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u=2x \\ du=2dx \end{array} \right. = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

נציב את הנתונים
בנוסחה!!

$\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx = \left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \cancel{2}x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}e^{2x} =$

$\left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}$

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים II:

$f(x) = x \qquad g'(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

נציב:

$\int_0^1 xe^{2x} = \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx =$

$\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^{2x}\,dx} = \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2$

אינטגרל זה כבר פתרנו, רק ללא גבולות
יש להציב

נציב חזרה את קישור האינטגרל

$\int_0^1 x^2e^{2x}\,dx = \left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \left(\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2\right) =$

$\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot e^2\right) - 0 - \left[\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot e^2\right) - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^4\right) - 1\right\}\right] =$

$\frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{2}\right] = \cancel{\frac{e^2}{2}} - \cancel{\frac{e^2}{2}} + \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}$

כ-2

(15) $\int_0^5 te^{-\frac{5-t}{20}}dt$

$f(t)=t \qquad g'(t)=e^{-\frac{5-t}{20}}$

$f'(t)=1 \qquad g(t)=\int e^{\frac{-5-t}{20}}dt = -20e^{\frac{-5-t}{20}}$

נכתוב לפי הגדרה

$\int e^{\frac{-5-t}{20}}dt = \left/ \begin{matrix} u=\frac{-5-t}{20} \\ du=-\frac{dx}{20} \end{matrix} \right. = \int e^{u}\cdot -20\,du = -20\int e^{u}du = -20e^{u} = -20e^{\frac{-5-t}{20}}$

נציב

בהתאם לנוסחה:

$\int_0^5 te^{\frac{-5-t}{20}}dt = \left[t\cdot -20e^{\frac{-5-t}{20}}\right]_0^5 - \int 1\cdot -20e^{\frac{-5-t}{20}}dt =$

$\left[t\cdot -20e^{\frac{-5-t}{20}}\right]_0^5 + 20\int_0^5 e^{\frac{-5-t}{20}}dt$

הערה: כדי את האינטגרל, יש צורך לשנות את הגבולות לפי:

$u=\frac{5-t}{20} \Rightarrow \int_0^5 e^{\frac{-5-t}{20}} = \left[-20e^{\frac{-5-t}{20}}\right]_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2}}$

נציב את הערכים:

$\int_0^5 te^{\frac{-5-t}{20}}dt = \left[t\cdot -20e^{\frac{-5-t}{20}}\right]_0^5 + 20\left\{\left[-20e^{\frac{-5-t}{20}}\right]_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2}}\right\} =$

$5\cdot -20e^{-\frac{1}{2}} + 20\left\{\left(-20e^{-\frac{9}{40}}\right)-\left(-20e^{-\frac{21}{80}}\right)\right\} =$

$5\cdot -20e^{-\frac{1}{2}} - 20\cdot 20e^{\frac{-9}{40}} + 20\cdot 20e^{\frac{-21}{80}}$

$= -100e^{-\frac{1}{2}} - 400e^{\frac{7}{40}} + 400e^{-\frac{21}{80}}$