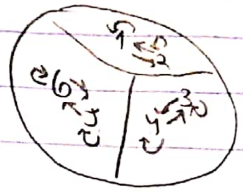
כיתה

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

1

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,4),$
$(4,3),(5,5),(6,6),(5,6),(6,5)\}$



R_1

לכן מחלקות השקילות

$[1]_R = \{1,2\}$

$[3]_R = \{3,4\}$

$[5]_R = \{5,6\}$

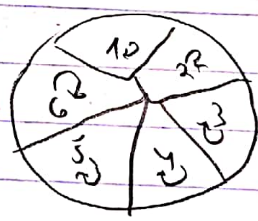
$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),$
$(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),$
$(4,5),(4,6),(5,4),(5,6),(6,4),(6,5)\}$

R_2

$[1]_R = \{1,2,3\}$

$[4]_R = \{4,5,6\}$

$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$



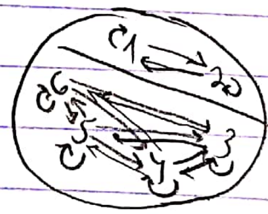
R_3

$[1]_R = \{1\}$ $\quad [4]_R = \{4\}$

$[2]_R = \{2\}$ $\quad [5]_R = \{5\}$

$[3]_R = \{3\}$ $\quad [6]_R = \{6\}$

$R_4 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),$
$(6,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,5),(4,6)$
$(5,3),(5,4),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

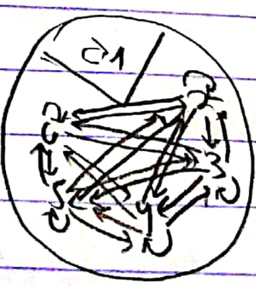


R_4

$[1]_R = \{1,2\}$

$[3]_R = \{3,4,5,6\}$

$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),$
$(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)$
$(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),$
$(5,2),(5,6),(6,2),(6,3),(6,5),(6,4)\}$



R_5

$[1]_R = \{1\}$

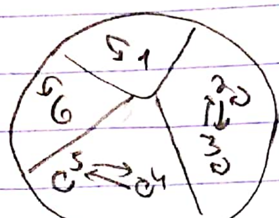
$[2]_R = \{2,3,4,5,6\}$

R_6:

$R_6 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$

$[1]_R = \{1\}$ $[4]_R = \{4,5\}$

$[2]_R = \{2,3\}$ $[6]_R = \{6\}$

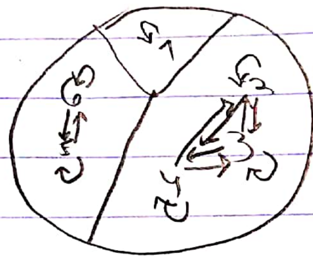


R_7

$R_7 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(5,6),(6,5),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3)\}$

$[1]_R = \{1\}$ $[5]_R = \{5,6\}$

$[2]_R = \{2,3,4\}$



$\equiv_5 = \{(x,y) : x,y\in\mathbb{Z}, 5|(x-y)\}$

נוסף

2) א) נוכיח שהיחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי:

רפלקסיבי - $(x,x)\in\equiv_5$ אז $5|(x-x) \iff 5|0$ כי מתקיים

סימטרי - אם $(x,y)\in\equiv_5$, האם $(y,x)\in\equiv_5$?

$(x,y)\in\equiv_5 \Rightarrow 5|(x-y) \Rightarrow k\in\mathbb{Z} \quad x-y=5k \Rightarrow$ המשוואה
נכפיל את ב- -1

$y-x=-5k \iff y-x=5\cdot(-k), \ -k\in\mathbb{Z} \Rightarrow 5|(y-x) \Rightarrow (y,x)\in\equiv_5$

טרנזיטיבי - אם $(x,y)\in\equiv_5$, וגם $(y,z)\in\equiv_5$, אז $(x,z)\in\equiv_5$

- $(x,y)\in\equiv_5 \Rightarrow 5|(x-y) \Rightarrow x-y=5k, \ k\in\mathbb{Z}$
- $(y,z)\in\equiv_5 \Rightarrow 5|(y-z) \Rightarrow y-z=5m, \ m\in\mathbb{Z}$

נחבר את שתי המשוואות שקיבלנו

$y-z+x-y=5k+5m$

$x-z=5(k+m), \quad k+m\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$5|x-z \Rightarrow (x,z)\in\equiv_5$

תיאור מחלקות השקילות של יחס זה:

$[0]_R=\{\dots -5, 0, 5 \dots\} = 5\mathbb{Z} = \{5k, k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]_R=\{\dots -4, 1, 6 \dots\} = 5\mathbb{Z}+1 = \{5k+1, k\in\mathbb{Z}\}$

$[2]_R=\{\dots -3, 2, 7 \dots\} = 5\mathbb{Z}+2 = \{5k+2, k\in\mathbb{Z}\}$

$[3]_R=\{\dots -2, 3, 8 \dots\} = 5\mathbb{Z}+3 = \{5k+3, k\in\mathbb{Z}\}$

$[4]_R=\{\dots -1, 4, 9 \dots\} = 5\mathbb{Z}+4 = \{5k+4, k\in\mathbb{Z}\}$

ב) נוכיח שהיחס $\equiv_{15} = \equiv_3 \cap \equiv_5$

נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית

א) נניח ש- $(a,b)\in\equiv_3\cap\equiv_5$ אז $(a,b)\in\equiv_{15}$

$(a,b)\in\equiv_3 \Rightarrow 3|a-b \Rightarrow a-b=3k, \ k\in\mathbb{Z}$

$(a,b)\in\equiv_5 \Rightarrow 5|a-b \Rightarrow a-b=5m, \ m\in\mathbb{Z}$

$a-b=3k=5m$

$5m$ מתחלק ב-3, ולכן 5 אינו מתחלק ב-3, לכן m מתחלק ב-3

לכן $m=3n, \ n\in\mathbb{Z}$

$a-b=5m=5\cdot 3n=15n$ הצבה!

$15|a-b \to (a,b)\in\equiv_{15}$

ב) נניח ש אם $(a,b)\in\equiv_{15}$ אז $(a,b)\in\equiv_3\cap\equiv_5$

$(a,b)\in\equiv_{15} \Rightarrow 15|a-b$

המשך

$a-b=15k,\ k\in\mathbb{Z}$

$a-b=5\cdot 3k$

- $a-b=5\cdot(3k),\ 3k\in\mathbb{Z}$

$5/a-b \Rightarrow (a,b)\in\ \equiv_5$

- $a-b=3\cdot 5k,\ 5k\in\mathbb{Z}$

$3/a-b \Rightarrow (a,b)\in\ \equiv_3$

תיאור מחלקות השקילות של יחס זה

$[0]_R=\{\ldots -15,0,15\ldots\}=15\mathbb{Z}=\{15k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]_R=\{\ldots -14,1,16\ldots\}=15\mathbb{Z}+1=\{15k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[2]_R=\{\ldots -13,2,17\ldots\}=15\mathbb{Z}+2=\{15k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[3]_R=\{\ldots -12,3,18\ldots\}=15\mathbb{Z}+3=\{15k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[4]_R=\{\ldots -11,4,19\ldots\}=15\mathbb{Z}+4=\{15k+4,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[5]_R=\{\ldots -10,5,20\ldots\}=15\mathbb{Z}+5=\{15k+5,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[6]_R=\{\ldots -9,6,21\ldots\}=15\mathbb{Z}+6=\{15k+6,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[7]_R=\{\ldots -8,7,22\ldots\}=15\mathbb{Z}+7=\{15k+7,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[8]_R=\{\ldots -7,8,23\ldots\}=15\mathbb{Z}+8=\{15k+8,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[9]_R=\{\ldots -6,9,24\ldots\}=15\mathbb{Z}+9=\{15k+9,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[10]_R=\{\ldots -5,10,25\ldots\}=15\mathbb{Z}+10=\{15k+10,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[11]_R=\{\ldots -4,11,26\ldots\}=15\mathbb{Z}+11=\{15k+11,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[12]_R=\{\ldots -3,12,27\ldots\}=15\mathbb{Z}+12=\{15k+12,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[13]_R=\{\ldots -2,13,28\ldots\}=15\mathbb{Z}+13=\{15k+13,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$[14]_R=\{\ldots -1,14,29\ldots\}=15\mathbb{Z}+14=\{15k+14,\ k\in\mathbb{Z}\}$

בס״ד

(3) $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2\}$ $\quad (x,y)\in R \quad x\setminus B = y\setminus B$

(א) נוכיח כי יחס שקילות:

<u>רפלקסיבי</u> - תהי $X\in P(A)$ $\quad (X,X)\in R$

$X\setminus B = X\setminus B$ כי נכון

<u>סימטרי</u> - אם $(x,y)\in R$, האם $(y,x)\in R$?

$(x,y)\in R \Leftarrow x\setminus B = y\setminus B \Leftarrow y\setminus B = x\setminus B$ לפי סימטריות השוויון

$\Leftarrow (y,x)\in R$

<u>טרנזיטיבי</u> - אם $(x,y)\in R$, ו- $(y,z)\in R$, האם $(x,z)\in R$?

$$\left\{\begin{array}{l} x\setminus B = y\setminus B \Leftarrow (x,y)\in R \\ y\setminus B = z\setminus B \Leftarrow (y,z)\in R \end{array}\right. \quad x\setminus B = z\setminus B$$ (כלל המעבר)

$(x,z)\in R$

(ב)
$$[\phi]_R = \{y\in P(A) \mid \phi T y\} =$$
$$\{y\in P(A) \mid \phi\setminus B = y\setminus B\} = \{y\in P(A) \mid \phi = y\setminus B\}$$
$$= \{y\in P(A) \mid \phi = P(B)\setminus B\} = \{y\in P(B)\}$$

(ג)
$$[A]_R = \{y\in P(A) \mid A T y\} =$$
$$\{y\in P(A) \mid A\setminus B = y\setminus B\}$$
$$= \{y\in P(A) \mid \{3,4\} = y\setminus B\} =$$
$$\{\{3,4\}\cup W \mid W\subseteq P(A)\}$$

(ד)
$$[B]_R = \{y\in P(A) \mid B T y\} =$$
$$\{y\in P(A) \mid B\setminus B = y\setminus B\} =$$
$$\{y\in P(A) \mid \phi = y\setminus B\} = \{1,2\} = B$$

(ה)
$$[A\setminus B]_R = \{y\in P(A) \mid A\setminus B\, T y\} =$$
$$\{y\in P(A) \mid (A\setminus B)\setminus B = y\setminus B\}$$
$$= \{y\in P(A) \mid \{3,4\} = y\setminus B\} =$$
$$\{\{3,4\}\cup W \mid W\subseteq P(A)\}$$

דף 2

5) ג) $\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\dots+\frac{3}{5^{99}}$

נוכל לחשב בעזרת הנוסחה סכום סדרה הנדסית כאשר

$a_1=\frac{3}{5}$, $q=\frac{1}{5}$, $n=99$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{\frac{3}{5}\left(\frac{1}{5^{99}}-1\right)}{\frac{1}{5}-1}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

הוכחנו באינדוקציה את הנוסחה הנ"ל בתרגיל 8 שאלה 1 סעיף 2

ד) $\frac{2}{7}+\frac{4}{49}+\frac{8}{343}+\dots+\left(\frac{2}{7}\right)^{999}$

גם כאן נוכל לחשב בעזרת נוסחת סכום סדרה הנדסית:

$a_1=\frac{2}{7}$ $q=\frac{2}{7}$ $n=999$

$$S_{999}=\frac{\frac{2}{7}\left(\frac{2}{7}^{999}-1\right)}{\frac{2}{7}-1}=\frac{2}{5}$$ (שהוכחנו הנ"ל)

ה) $1+3+5+7+9+\dots+999$

גם כאן נוכל לחשב בעזרת נוסחה לחישוב סכום סדרה חשבונית

$a_1=1$, $q=2$, $n=999$

$$S_{999}=\frac{999[2\cdot1+2(999-1)]}{2}=998{,}001$$

עכשיו באינדוקציה נוכיח כי:

$$1+3+5+7+9+\dots+n=\frac{n[2a_1+d(n-1)]}{2}$$

לכל $n\geq1$ נבדוק:

בסיס האינדוקציה: $n=1$

$$1=\frac{1[2a_1+d(1-1)]}{2}=a_1=1$$

צעד האינדוקציה:

הנחה ← נניח כי עבור $n\geq1$ מתקיים $P(n)$, כלומר: $1+3+5+\dots+n=\frac{n[2a_1+d(n-1)]}{2}$

נוכיח $P(n+1)$ כלומר:

$$1+3+5+\dots+n+(n+1)=\frac{n+1[2a_1+d(n+1-1)]}{2}=\frac{n+1[2a_1+dn]}{2}$$

לפי הנחת האינדוקציה $1+3+5+\dots+n=\frac{n[2a_1+d(n-1)]}{2}$

נבדוק צד

$$L=\frac{n[2a_1+d(n-1)]}{2}+\frac{n+1}{1}$$ // מכנה משותף

$$\frac{n[2a_1+d(n-1)]+2(n+1)}{2}=\frac{2a_1n+dn(n-1)+2(n+1)}{2}$$

Scanned by CamScanner

פתרון שאלה 4 **סעיף** א

טענה: לכל $n>0$ מתקיים $f(n)=2^n$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / ~~שלמה~~ על N (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

<u>בסיס האינדוקציה</u> $n=0$

ואכן $P(0)$ = הגדרה $f(0)=2^0=1$ **מתקיים.**

<u>צעד האינדוקציה</u>

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n>0$ **מסוים מתקיים:** לכל $0\le t\le n$ מתקיים $P(t)$ כלומר

$P(n)$ $f(t)=2^t$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ מתקיים כלומר $f(n+1)=2^{n+1}$

הוכחה:

לפי נוסחאת רקורסיה יודעים

$$f(n+1)=1+\sum_{j=0}^{n}(f(j))$$

כעת לפי הנחת האינדוקציה הטענה מתקיימת עבור כל n קטן מ- $n+1$

$$f(n)=2^n$$

$$F(n+1)=1+\sum_{j=0}^{n}(2^j)=1+2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=1+1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^n$$

ניתן לחשב את הסכום בעזרת נוסחת סכום סדרה הנדסית כאשר

$a_1=2$

$q=2$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\Rightarrow S_n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

נציב זאת חזרה

$$F(n+1)=1+\sum_{j=0}^{n}(2^j)=1+1+2^{n+1}-2=2^{n+1}$$

מש"ל

פתרון שאלה 4 **סעיף** 2

טענה: לכל m ו-n מתקיים: המספר המינימלי של חיתוכים בקו ישר (רק במקבילים לצלעות) שנדרש על מנת לחתוך מלבן n×m לריבועים קטנים בגודל 1×1 הוא $mn-1$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על ______ (מחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה

$n=2$ $m=1$

$1\cdot 2-1=1$ ואכן

2 קוביות שמחוברות צריך לחתוך פעם אחת בלבד

ואכן $P(1,2)$ **מתקיים.**

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה): לכל $1\le s\le m$ ו-$1\le f\le n$

עבור m ו-n **מסוים מתקיים:** המספר המינימלי של החיתוכים הנדרש כך

לחיתוך מלבן $s\times f$ הוא $s\cdot f-1$

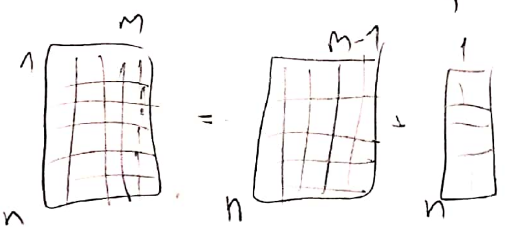
צריך להוכיח:

המספר המינימלי של החיתוכים הנדרש לחיתוך מלבן $(m+1)\times(n+1)$ הוא:

$(m+1)(n+1)-1$

הוכחה:

$$(m+1)\times(n+1)=\underbrace{(m+1)\times n+(m+1)\cdot 1}_{\text{קודם חותכים}}=\underbrace{m\times n+1\times n}_{\text{חיתוך 2}}+\underbrace{m\times 1+1\times 1}_{\text{חיתוך 3}}$$



ניתן לפרק מלבנים כך לפי: ??

כיוון שפתחנו את הסוגריים

ולכן לפי הנחת האינדוקציה

$$\underbrace{m\times n}_{mn-1}+1+n+m\times 1+1\times 1$$

$n-1$ חיתוכים

$m-1$ חיתוכים

0 חיתוכים

מס' החיתוכים שקיבלנו:

$mn-1+n-1+m-1+3=mn+n+m$

$(m+1)(n+1)-1$ השוויון מתקיים

להפרדת המשוואה

מסקנה: הוכחנו את $P(1,2)$ והוכחנו ש- $P(s,f)\ (\forall\ 1\le s,f\le n,m)\longrightarrow P(n+1,m+1)$

לכן לפי עיקרון האינדוקציה $P(n,m)$ נכונה לכל $m,n\in\mathbb{N}$

Scanned by CamScanner

פתרון שאלה 4 **סעיף** ב

טענה: לכל $n\geq 12$ מתקיים ניתן לרשום את n כך $n=4x+5y$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $\mathbb{N}$ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה $12\leq n<16$

ואכן $13=4\cdot 2+5\cdot 1$ $\quad 12=4\cdot 3+5\cdot 0$ **מתקיים.**

$15=4\cdot 0+5\cdot 3$ $\quad 14=4\cdot 1+5\cdot 2$

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n\geq 12$ **מסויים מתקיים:** לכל $12\leq t<n$ קיימים $x_t,y_t\in\mathbb{N}$

$P(n)$ כך ש- $t=4x_t+5y_t$

צריך להוכיח:

קיימים $x_n,y_n\in(\mathbb{N})$ כך ש- $n=4x_n+5y_n$

הוכחה: בהינתן n נתבונן ב $t=n-4$ אם $t\geq 12$ אזי קיימים (עפ"י ההנחה)

$x_t,y_t\in\mathbb{N}$ כך ש- $n=4x_t+5y_t$

$$n-4=4x_{n-4}+5y_{n-4}\ /+4$$

$$n=4x_{n-4}+5y_{n-4}+4\Rightarrow 4(x_{n-4}+1)+5y_{n-4}$$

מצאנו ש- $x_n=x_{n-4}+1$, $y=y_{n-4}\in\mathbb{N}$

כלומר שקיימים 2 מספרים טבעיים כך ש- $n=4x+5y$

• היות נכון כי עבור $12\leq n-4 \Leftarrow 16\leq n$, ולכן הוכחנו להתחלה

עבור $12\leq n<16$ האינדוקציה מתקיימת.

מסקנה: הוכחנו את בסיס האינדוקציה, והוכחנו כי $(P(m)\ \forall m<n)\Rightarrow$

$P(n)$ לכן עפ"י עקרון האינדוקציה $P(n)$ נכונה לכל $n\geq 12$.

פתרון שאלה 2 **סעיף** 4

טענה: לכל $n \geq 1$ מתקיים $\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על N (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

<u>בסיס האינדוקציה</u> $n=1$

ואכן $\overline{A_1} = \overline{A_1}$ **מתקיים.**

<u>צעד האינדוקציה</u>

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \geq 1$ **מסויים מתקיים:** $P(n)$ כלומר

$$\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}$$

צריך להוכיח:

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} \overline{A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j} \qquad P(n+1)$$

הוכחה:

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} \overline{A_j} = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}}_{\text{לפי ההנחה!}} \cup \overline{A_{n+1}}$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}$$

נציב בזה

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} \cup \overline{A_{n+1}}$$

לפי כלל דה מורגן $(\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B})$

$$= \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j \cap A_{n+1}} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j}$$

מש"ל

מסקנה: הוכחנו $P(1)$, הוכחנו כי $P(n) \to P(n+1)$ לכן עפ"י העקרון האינדוקציה $P(n)$ מתקיים לכל $n \geq 1$

Scanned by CamScanner