בס"ד

מבוא לתיאוריה / תרגיל 7

1) **טענה** - א) נתון $|A|=|B|=\aleph_0$ צ"ל $|A\times B|=\aleph_0$

A,B קבוצות מניה, כלומר, ניתן לסדרם כך ש- a_1 ראשון, a_2 שני וכו', וכן כך b_1 ראשון, b_2 שני וכו', ולכן נבנה את המטריצה הבאה -

$$
\begin{array}{cccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
a_1 & (a_1b_1) & (a_1b_2) & (a_1b_3) & \cdots \\
a_2 & (a_2b_1) & (a_2b_2) & (a_2b_3) & \cdots \\
a_3 & (a_3b_1) & (a_3b_2) & (a_3b_3) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

איברי הקבוצה מתקבלים ע"י הליכה לאורך האלכסונים של הטבלה לסירוגין למטה ולמעלה של האלכסון, ולמטה החל מהפינה השמאלית העליונה ונקבל כי נספור את האיברים $(0,0)=1$, $(0,1)=2$, $(1,0)=3$ ...... וכן הלאה..

כלומר קיבלנו שסדרנו את $A\times B$ הנתון שהיא קב' מניה, ולכן $|A\times B|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

ב) נתון $|C|=|D|$, $|A|=|B|$ צ"ל $|A\times C|=|B\times D|$

$|A|=|B|$ ולכן קיימת פונ' $f:A\to B$ חח"ע ועל

$|C|=|D|$ ולכן קיימת פונ' $g:C\to D$ חח"ע ועל

נגדיר $h:A\times C\to B\times D$ $\quad h(x,y)=(f(x),g(y))$ $\quad (x\in A, y\in C)$

(נראה שהפונקציה הנ"ל חח"ע ועל:

חח"ע: יהי $(x,y)\in A\times C$ ו- $(w,z)\in A\times C$

$$h(x,y)=h(w,z)$$

$$(f(x),g(y))=(f(w),g(z))$$

השוויון יתקיים אמ"מ $f(x)=f(w)$ וגם $g(y)=g(z)$

אם $f(x)=f(w)$ אז $x=w$ כי f חח"ע

אם $g(y)=g(z)$ אז $y=z$ כי g חח"ע

הנתון כי השוויון מתקיים ולכן $(x,y)=(w,z)$, ולכן h פונ' חח"ע.

על: יהי $(b,d)\in B\times D$, נוכיח שקיים $(a,c)\in A\times C$ שהוא המקור של (b,d) כלומר נמצא את (a,c)

$$h(a,c)=(b,d)$$

$$(f(a),g(c))=(b,d)$$

השוויון יתקיים אמ"מ $f(a)=b$ וגם $g(c)=d$, כיוון ש- f,g הן פונקציות חח"ע ועל לכן קיימות f^{-1}, g^{-1} כך ש- $f^{-1}\circ f(a)=a$ $\quad g^{-1}\circ g(c)=c$

קבל

נפעיל על השוויונות את הפונקציות ההפוכות שלהן -

$$a = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) \to a = f^{-1}(b)$$

$$c = g^{-1}(g(c)) = g^{-1}(d) \to c = g^{-1}(d)$$

מצאנו ל-(b,d) מקור והוא $(f^{-1}(b), g^{-1}(d))$

לסיכום- מצאנו פונקציה חח"ע ועל $h: A\times C \to B\times D$ ולכן $|A\times C| = |B\times D|$

ב) נוכיח כי בכל קבוצה אינסופית קיימת תת קבוצה שעוצמתה היא $\aleph_0$:

אם A קבוצה אינסופית אזי, אז קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע

<u>הוכחה</u>: נתחיל מ-1 ונבחר $f(1)$, ואחר כך $f(2)$, $f(2)\neq f(1)$ ונמשיך לבחור איברים אחד לא נבחרו האיברים לא יגמרו כי A אינסופית ותמיד יהיה עוד איבר שעוד לא נבחר, וכך הלאה:

$$B = \{f(1), f(2), f(3) \ldots\} \qquad B\subseteq A$$

ו-B היא קבוצה מנויה נקבע אותה כך:

האיבר הראשון הוא $f(1)$, האיבר השני הוא $f(2)$ וכן הלאה...

לכן $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

מצאנו קבוצה האינסופית תת קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$

מ.ש.ל

2) א) נתונה פרמידה משולשת של קודקודיה במספרים $\{1,4,9,16\}$

(i) ההסתברות לכל תוצאה פרופורציונלית לתוצאה

נחשב $30 = 1+4+9+16$

$$Pr(1) = 1/30,\ Pr(4) = 4/30,\ Pr(9) = 9/30,\ Pr(16) = 16/30$$

ומתקיים $Pr(1)+Pr(4)+Pr(9)+Pr(16) = 1$

(ii) ההסתברות לכל תוצאה פרופורציונלית לריבוע התוצאה

נחשב $354 = 1^2+4^2+9^2+16^2$

$$Pr(1) = 1/354,\ Pr(16) = 16/354,\ Pr(81) = 81/354,\ Pr(256) = 256/354$$

ומתקיים $Pr(1)+Pr(16)+Pr(81)+Pr(256) = 1$

(iii) ההסתברות היא אחידה ולכן $Pr(1)=Pr(4)=Pr(9)=Pr(16) = 1/4$

ומתקיים $Pr(1)+Pr(4)+Pr(9)+Pr(16) = 1$

ב) ההסתברות לתוצאה הלה זוגית:

(i) $4/30 + 16/30 = 20/30 = 2/3$

(ii) $16/354 + 256/354 = 272/354 = 136/177$

(iii) $1/4 + 1/4 = 1/2$

ההסתברות לתוצאות הטלה אי זוגית

(i) $1/30 + 9/30 = 10/30 = 1/3$

(ii) $1/354 + 81/354 = 82/354 = 41/177$

(iii) $1/4 + 1/4 = 1/2$

③ נתונות שתי קוביות אדומה וכחולה ועליהן המספרים $\{1,2,3,4,5,6\}$

התפלגות של התוצאות בקוביה הכחולה $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$

האדומה $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$

נגדיר $Pr(i,j) = q_i p_j$

i תוצאת ההטלה בקוביה הכחולה

j תוצאת ההטלה בקוביה האדומה

(א) נוכיח כי הקדמנו מרחב הסתברות סופי $Pr(i,j) \geq 0$

לכל אחד מאיברי המרחב (זוגות סדורים של תוצאות ההטלה של שתי הקוביות)

מכיוון שמכפלה אי שלילית וגם מתקיים $\sum_{1 \leq i,j \leq 6} Pr(i,j) = 1$

לשם כך נגדיר את המטריצה הבאה:

כחול \ אדום	1	2	3	4	5	6
1	q_1p_1	q_1p_2	q_1p_3	q_1p_4	q_1p_5	q_1p_6
2	q_2p_1	q_2p_2	⋮	⋮	⋮	⋮
3	q_3p_1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6	q_6p_1	q_6p_2	q_6p_3	q_6p_4	q_6p_5	q_6p_6

כעת נסכום את תוצאות ההטלה לפי שורות המטריצה

$i=1$ שורה ראשונה:
$$\sum_{1 \leq j \leq 6} q_1 p_j = q_1p_1 + q_1p_2 + \dots + q_1p_6 = q_1\underbrace{(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)}_{} = q_1$$

הסכום שווה 1 לפי ההתפלגות הנתונה

$i=2$ שורה שניה:
$$\sum_{1 \leq j \leq 6} q_2 p_j = q_2p_1 + q_2p_2 + \dots + q_2p_6 = q_2(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6) = q_2$$

וכך הלאה נמשיך לסכום לפי שורות עד השורה השישית ונקבל

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = 1$$

לפי ההתפלגות הנתונה

מכאן ש $Pr(i,j) \geq 0$, לפי ההגדרה: $Pr(i,j) = q_i p_j$

מכפלה של מספרים חיוביים היא חיובית

③ נתון כי $(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)=(\frac16,\frac16,\frac16,\frac16,\frac16,\frac16)$

כאשר הקוביה הכחולה הוגנת והאדומה, נניח ש הסתברות

לכך ש- $i+j$ הוא אי זוגי היא $1/2$

נחזור למטריצה מהתרגול כש-

כחול \ אדום	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{p_1}{6}$	$\frac{p_2}{6}$	$\frac{p_3}{6}$	$\frac{p_4}{6}$	$\frac{p_5}{6}$	$\frac{p_6}{6}$
2						
3						
4						
5						
6	$\frac{p_1}{6}$	$\frac{p_2}{6}$	$\frac{p_3}{6}$	$\frac{p_4}{6}$	$\frac{p_5}{6}$	$\frac{p_6}{6}$

$$\Pr(i,j)=q_i p_j=\frac16\cdot p_j$$

נסמן A המאורע ש $i+j$ הוא אי זוגי

$$\sum_{x\in A}\Pr(x)=\sum_{\substack{i=1\\ i,j\in A}}^{6}\sum_{j=1}^{6}P(x)$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ j=1,3,5}}\Pr(x)+\sum_{\substack{i=2\\ j=2,4,6}}\Pr(x)+\sum_{\substack{i=3\\ j=1,3,5}}\Pr(x)+\dots+\sum_{\substack{i=6\\ j=2,4,6}}\Pr(x)=$$

אם i אי זוגי אז j צריך להיות רק אי זוגי

אם i זוגי אז j צריך להיות רק זוגי

כך אנו מקבלים $i+j$ אי זוגי

$$3\left(\frac{p_1}{6}+\frac{p_3}{6}+\frac{p_5}{6}\right)+3\left(\frac{p_2}{6}+\frac{p_4}{6}+\frac{p_6}{6}\right)=$$

$$\frac{p_1}{2}+\frac{p_3}{2}+\frac{p_5}{2}+\frac{p_2}{2}+\frac{p_4}{2}+\frac{p_6}{2}=\frac{p_1+p_2+\dots+p_6}{2}=\frac12$$

ידוע ש $1=p_1+p_2+\dots+p_6$ כי ההתפלגות מוגדרת. מ.ש.ל

④ א) הסתברות של שלושי חמש לפני 3ני

כאשר שלושי במקום הראשון יש $1\cdot3\cdot2\cdot1=6$ סידורים

כאשר שלושי במקום השני יש $2\cdot1\cdot2\cdot1=4$ סידורים

כאשר שלושי במקום השלישי יש $2\cdot1\cdot1\cdot1=2$ סידורים

סה"כ $6+4+2=12$

נחלק ב-24 הסידורים האפשריים ונקבל: $12/24=1/2$
לכן ההסתברות ששלומי עומד לפני דני היא $1/2$

ב) שלומי עומד לפני דני ולפני גלית
כאשר שלומי ממוקם הראשון יש $1\cdot3\cdot2\cdot1=6$ סידורים
כאשר שלומי ממוקם השני יש $1\cdot1\cdot2\cdot1=2$ סידורים
סה"כ $6+2=8$, נחלק ב-24 הסידורים האפשריים ונקבל:
$8/24=1/3$, לכן ההסתברות ששלומי עומד לפני דני ולפני גלית היא $1/3$

2) ידוע ששלומי עומד לפני רונה, כמה מה ההסתברות לכך ששלומי עומד לפני דני ולפני גלית
כאשר שלומי ממוקם הראשון $1\cdot3\cdot2\cdot1=6$ סידורים
שלומי לא יכול להיות ממוקם השני כיוון שהוא צריך לעמוד לפני כולם,
כמו המרחב המצומצם (ממוקם) עם סידורים אפשריים נחלק ב-12
כיוון שיש רק 12 (חצי מ-24 כמו סעיף א') סידורים בהם שלומי עומד לפני רונה, ונקבל $6/12=1/2$

3) חזרה על סעיף (א)
כששלומי ממוקם הראשון יש $1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ סידורים
" " השני יש $3\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1=18$ סידורים
" " השלישי יש $3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1=12$ סידורים
" " הרביעי יש $3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=6$ סידורים
סה"כ $24+18+12+6=60$
נחלק ב-$5!=120$ הסידורים האפשריים ונקבל $60/120=1/2$
לכן ההסתברות ששלומי עומד לפני דני (מתוך קבוצה של 5 ילדים) היא $1/2$

חזרה על סעיף (ב)
כששלומי ממוקם הראשון יש $1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ סידורים
" " השני יש $2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1=12$ סידורים
" " השלישי יש $2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1=4$ סידורים
סה"כ $24+12+4=40$, נחלק ב-120 הסידורים האפשריים ונקבל $40/120=1/3$ לכן ההסתברות ששלומי עומד לפני דני ולפני גלית (מתוך קבוצה של 5 ילדים) היא $1/3$

בס״ד

תרגיל 4 סעיף ②

בדומה לסעיף הקודם, במקום 120 סידורים אפשריים, יש 60 סידורים אפשריים שבהן שאולי מימין לפני רונה.

כעת ההסתברות ששאולי מימין לה וסמוך לה ונכונות היא:

כששאולי במקום הראשון יש $1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ סידורים

כשהוא רק במקום 3 יכול לשבת לפניו, ואז יש $6=1\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1$ סידורים (שאולי לא יכול לשבת במקומות האחרים) סה״כ

$24+6=30$

נחלק ב-60 ונקבל שההסתברות היא $30/60=1/2$

⑤ מרחב הפתרונות הטבעיים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=2018$ מה ההסתברות שמתקיים "כן" $x_i<800$ לכל i?

$n=4,\ k=2018$

$$|\Omega|=\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{2018+4-1}{3}=\binom{2021}{3}$$

נסמן $A=\{x_i<800$ לכל $i\}$

$$Pr(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|=|\Omega|\setminus|\{x_i\geq 800$ פתרונות בהם לפחות עבור i אחד$\}|$

נסמן A_i פתרונות בהם $x_i\geq 800$

נשתמש עם עקרון ההכלה וההדחה

$$|A_i|=\binom{2018-800+4-1}{4-1}=\binom{1221}{3}$$

$$|A_i\cap A_j|=\binom{1221-800+4-1}{4-1}=\binom{424}{3}$$

לא ניתן את 3 להכיל 800 מ-424

סה״כ:

$$\binom{2021}{3}-\binom{4}{1}\binom{1221}{3}+\binom{4}{2}\binom{424}{3}$$

ואז נקבל את ההסתברות

$$Pr(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=0.1738$$