מטלה 13 | חדו"א 1

(1) $f(x) = \ln(\tan^{-1} x)$

תחום ההגדרה:

$\tan^{-1} x > 0$

$\arctan x > 0$

$\downarrow$

$D(f)\ (0,\infty)$

טווח:

$$f((0,\infty)) = \left(\lim_{x\to 0} f(x)\ ,\ \lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

(בדוק אם הפונקציה עולה או יורדת בתחום)

$$f'(x) = \frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה

כעת נחשב את הגבולות:

$$f((0,\infty)) = \left(\lim_{x\to 0}\ln(\arctan x)\ ,\ \lim_{x\to\infty}\ln(\arctan x)\right)$$

$$R(f) = \left(-\infty\ ,\ \ln(\pi/2)\right)$$

(1) (2)

$$f(x) = \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

תחום הגדרה: $x^2+1>0$ לכל x *

$D(f) = R$

(גבולות בקצוות של תחום ההגדרה

$$* \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}}} = \frac{x+1}{1} = x+1 = \infty$$

נבדוק אסימפטוטה משופעת ב- ∞

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{2x+1}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{2} = 1$$

יש אסימפטוטה משופעת $a=1$

*

מציאת נק' b

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}} - x =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x\sqrt{1+0}} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x} - x$$

$$\lim \frac{x^2+x+2-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ לופיטל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{y = x+1}$$

נבדוק אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{-x\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2x+1}{-2x} = \frac{2}{-2} = -1$$

$a=-1$

מציאת נקודת b

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}} + x =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{-x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2-\cancel{x^2}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{-x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{y = x-1}$$

קטב

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x^2}{-x}+\frac{x}{-x}+\cancel{\frac{2}{-x}}^{\,0}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}} = \frac{-x-1}{1} = \infty$

נקודות הקיצון:

* $f'(x) = \frac{2x+1\left(\sqrt{x^2+1}\right)-(x^2+x+2)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$0 = (2x+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{(x^3+x^2+2x)}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{x^3+x^2+2x}{\sqrt{x^2-1}} = (2x+1)\sqrt{x^2+1}$

$x^3+x^2+2x = (2x+1)(x^2+1)$

$x^3+\cancel{x^2}+\cancel{2x} = 2x^3+\cancel{2x}+\cancel{x^2}+1$

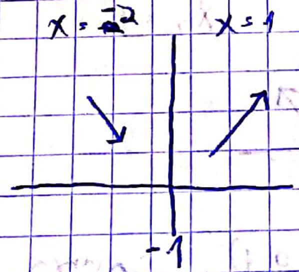
$0 = x^3+1$

$x = -1$

$f(x=-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$(-1,\sqrt{2})$ נקודה קיצון

* תחומי עליה וירידה



עליה: $(-1,\infty)$

ירידה: $(-\infty,-1)$

* קמירות וקעירות

$f''(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{x^3-x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$

$\frac{\frac{(2x+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x^3-x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$$\frac{(2x+1)(x^2+1) - x^3 - x^2 - 2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\frac{2x^3 + \cancel{2x} + x^2 + 1 - x^3 - \cancel{x^2} - \cancel{2x}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(\frac{x^3+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)' =$$

$$f''(x) = \frac{3x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - (x^3+1)\cdot\frac{3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$0 = \frac{3x^2(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}) - (x^3+1)\cdot 3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

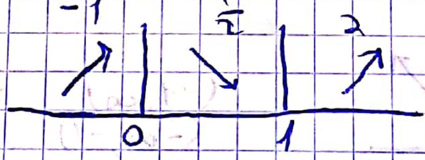
$$0 = 3x^2(x^2+1)^2 - (x^3+1)(3x^3+3x)$$

$$0 = 3x^2(x^4+2x^2+1) - (3x^6+3x^4+3x^3+3x)$$

$$0 = \cancel{3x^6} + 6x^4 + 3x^2 - \cancel{3x^6} - 3x^4 - 3x^3 - 3x$$

$$0 = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x$$

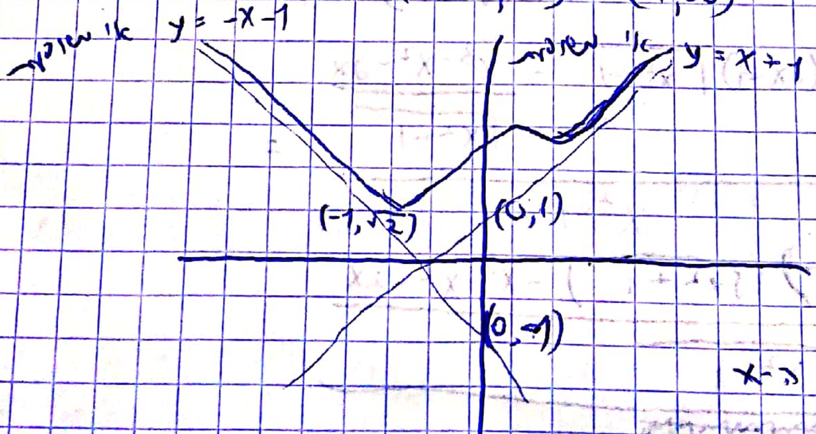
$$0 = x(3x^3 - 3x^2 + 3x - 3) \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$



קעירות $\cap$ $(0,1)$

קמירות $\cup$ $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

סקיצה:



חיתוך עם x

$0 = x^2+x+2$

אין חיתוך עם ה-x

חיתוך עם ה-y

$f(x) = \frac{2}{1} = 2$

② $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$

$D(f) \cdot R \setminus \{-1\}$ — תחום הגדרה:

$x \neq -1$

קווים אנכיים ב תחום ההגדרה:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x^2} = 0$

אס. אופקית: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x^3+1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{3x^2} = 0$

אס' אופקית: $0 = y$

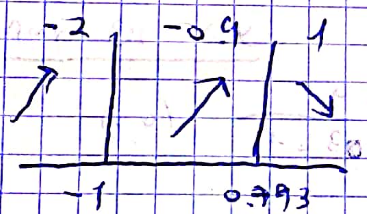
נקודות קריטיות:

$f'(x) = \dfrac{(x^3+1) - x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$0 = \dfrac{x^3+1-3x^3}{(x^3+1)^2} \Rightarrow 0 = 1-2x^3 \Rightarrow 2x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$y = 0.529$

תחומי עליה וירידה:



עליה: $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \setminus \{-1\}$

ירידה: $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \infty)$

$Max(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0.529)$

קמירות וקעירות:

$f'(x) = \dfrac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-6x^2(x^3+1)^2 - (1-2x^3)\,2(x^3+1)\,3x^2}{(x^3+1)^2} =$

$0 = -6x^2(x^3+1)^2 - 6x^2(1-2x^3)(x^3+1)$

לחלק ב- (x^3+1)

$0 = -6x^2(x^3+1) - 6x^2(1-2x^3)$ ונחלק ב- $-6x^2$

$0 = x^3+1+1-2x^3$

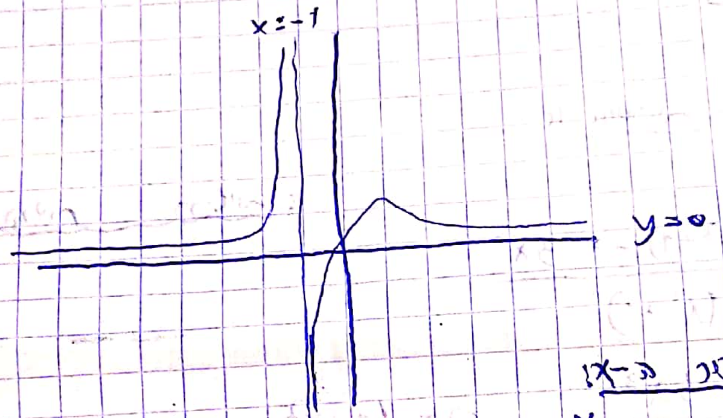
$x^3 = 2$

$x = \sqrt[3]{2}$

$(-\infty, \sqrt[3]{2}) \setminus \{-1\}$ קמורה $\cup$

1.25 $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ קעורה $\cap$

<u>שרטוט!</u>



<u>חיתוך עם ה-x:</u>

$0 = \frac{x}{x^3+1}$

$x = 0$ $(0,0)$

<u>חיתוך עם ה-y:</u>

$y = \frac{0}{0^3+1}$ $(0,0)$

③ $f(x) = x^3 e^x$

<u>תחום הגדרה:</u> כל x

<u>גבולות בקצוות של תחום ההגדרה:</u>

$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0$

אין לה אסימ' אנכית, אך אופקית $y=0$

גם אין לה אסימ' משופעת!

$\lim_{x \to \infty} x^3 e^x = \infty$

המשך

בדיקת אסימפטוטה משופעת:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3e^x}{x} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2e^x+x^3e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x(x^3+3x^2) = \infty$$

גם אין אסימפטוטה משופעת

נקודות קריטיות:

$$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$$

$$0 = e^x(x^3+3x^2)$$

$$0 = x^3+3x^2$$

$$0 = x^2(x+3)$$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = -3$

$y_1 = 0$ $\quad$ $y_2 = -27e^{-3} = -1.344$

תחומי עליה וירידה:

מינ' $(-3, -27e^{-3})$

קמירות וקעירות:

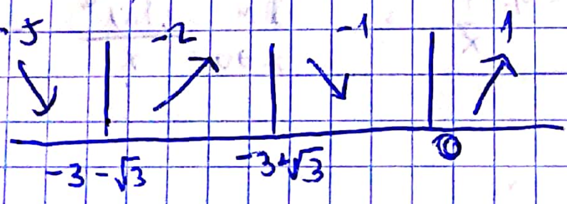
$$f''(x) = e^x(x^3+3x^2) + e^x(3x^2+6x)$$

$$0 = e^x(x^3+6x^2+6x)$$

$$0 = x(x^2+6x+6)$$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_3 = -3-\sqrt{3} \;/\; -4.73$

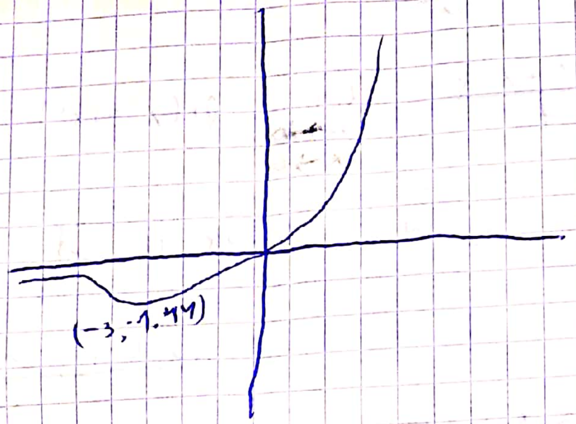
$x_2 = -3+\sqrt{3} \;/\; -1.26$



$(-\infty, -3-\sqrt{3}) \cup (-3+\sqrt{3}, 0)$ קעור $\cap$

$(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}) \cup (0, \infty)$ קמור $\cup$

שרטוט:



$0 = x^3 e^x$

$x=0 \rightarrow (0,0)$

חיתוך ציר ה-x

$y = 0^3 e^0$

$y=0 \rightarrow (0,0)$

חיתוך עם ציר ה-y

(4) $f(x) = 4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3$

תחום ההגדרה: $D(f) = (0,\infty)$

גבולות בקצוות של תחום ההגדרה!

$\ast \lim\limits_{x\to 0} 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 =$

$\lim\limits_{x\to 0} 4\ln^2 x = 4\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^2 = 4(-\infty)^2 = \infty$

(בדוק ~~...~~ אסימפטוטה משופעת:

$\ast \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\ln^2 x - 4\ln x - 3}{x} = "\frac{\infty}{\infty}"$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\ln x \cdot \frac{1}{x} - 4\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\ln x}{x} - \frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\ln x}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\ln x}{x} - 0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x}}{1} = 0$

אס' אנכית $x=0$

$\ast \lim\limits_{x\to\infty} 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 = \infty$

Scanned by CamScanner

ק"ד

<u>נקודות קיצון</u>

$f'(x) = \frac{8\ln x}{x} - \frac{4}{x}$

$0 = \frac{8\ln x}{x} - \frac{4}{x}$

$\frac{4}{x} = \frac{8\ln x}{x}$

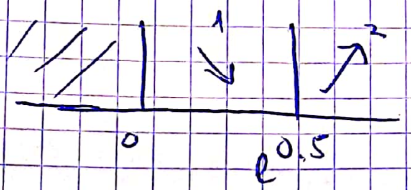
$8x\ln x = 4x$

$0 = x(8\ln x - 4)$

אינו בתחום $x_1 \neq 0$ $\qquad x_2: \ln x = \frac{1}{2} \to e^{0.5}$

$y_2 = -4$

<u>תחומי עליה וירידה !</u>



$(e^{0.5}, -4)$ min

<u>קמירות וקעירות</u>

$f'(x) = \frac{8\ln x - 4}{x}$

$f''(x) = \frac{\frac{8}{x}\cdot x - (8\ln x - 4)}{x^2}$

$0 = 8 - 8\ln x + 4$

$8\ln x = 12$

$\ln x = \frac{12}{8}$

$x = e^{\frac{3}{2}}$

$(-\infty, e^{\frac{3}{2}})$ קמירות $\cup$

$(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$ קעירות $\cap$

סקיצה