מכללת הדסה- קמפוס שטראוס, חוג למדעי המחשב ג' אב תשע"ט

תרגיל 4-מבוא לתיאוריה של מדעי המחשב

מועד הגשה: י"א אב תשע"ט

עליכם להגיש את התרגיל הזה כתוב בתוך התרגיל, מוגש כחוברת עבודה (מודפסת משני צדדיה). על התרגיל להיות כתוב בצורה עצמאית. הגדרות יכולות להכתב בשפת הספר, אבל הוכחות צריכות להיות כתובות בשפה עצמאית (ולא מועתקות). כל השאלות מתייחסות לספר הלימוד שלנו.
קישור לפרק נמצא פה: http://www.cs.huji.ac.il/~nati/PAPERS/dm5.pdf

יפים מישוריים (עמודים 183-187).

1. (183) הגדירו גרף מישורי.

גרף G נקרא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות יחתכו

2. (184) הגדירו פאה ופאה חיצונית.

G אשר החסום ע"י צלעות הגרף נקרא פאה. האיזור שאינו חסום ע"י צלעות הגרף נקרא הפאה החיצונית או הפאה האינסופית של הגרף.

3. (184): נוסחת אוילר – נסחו והוכיחו. שימו לב לנקודות הבאות: הנוסחה חלה על גרף קשיר. היכן אתם משתמשים בכך? שימו לב לאינדוקציה – על מה עושים אינדוקציה? כתבו את האינדוקציה לפי התבנית "שלנו".

נוסחת אוילר: יהי G גרף מישורי קשיר. אזי $n-m+f=2$, כאשר n מספר הקודקודים, m מספר הצלעות ו-f מספר הפאות של הגרף G.

הוכחה: נקבע את מספר הקודקודים n, ונעשה את האינדוקציה על מספר הצלעות m של הגרף. מכיוון ש-G קשיר להנחה $m \geq n-1$

בסיס האינדוקציה: $m=n-1$. במקרה זה G הוא עץ. הפאה היחידה היא הפאה האינסופית, כלומר, $f=1$. מכיוון ש-$m=n-1$ נוסחת אוילר מתקיימת.

צעד האינדוקציה: נניח גרף קשיר עם $m \geq n$ צלעות. יש ב-G צלע e שהסרתה אינה מנתקת את הגרף. לכן, נסמן $G'=G\setminus\{e\}$ יש $n'=n$ קודקודים ו-$m'=m-1$ צלעות והוא קשיר. מכאן, עפ"י הנחת האינדוקציה לגבי G' מתקיים $n'-m'+f'=2$, כאשר n', m', f' הם מספר הקודקודים, הצלעות והפאות של G' בהתאמה. נשים לב ש-f הסרת הצלע e מורידה

לעיתים את הפאות שבהן היא גובלת. לכן מספר הפאות

יהי גרף G' קטן ב-1 מספר הצלעות ב-G, כאשר
$f'=f-1$ מכאן אם כן

$$n-m+f=n-(m-1)+(f-1)=n'-m'+f'=2$$

4. נסחו והוכיחו את המקבילה של נוסחת אוילר לגרף מישורי עם 3 רכיבי קשירות.

יהי G גרף מישורי קשיר, n קודקודים, m צלעות, f מס' פאות
$(f'=f_1+f_2+f_3-2)$

יהי G גרף עם 3 רכיבי קשירות.

מתקיים: $n=n_1+n_2+n_3$ $m=m_1+m_2+m_3$ $f=f_1+f_2+f_3-2$

(הפאה החיצונית נספרת 3 פעמים)

מנוסחת אוילר

$$\begin{cases} n_1+f_1-m_1=2 \\ n_2+f_2-m_2=2 \\ n_3+f_3-m_3=2 \end{cases} \Rightarrow n_1+n_2+n_3+f_1+f_2+f_3-m_1-m_2-m_3=6$$

$$n+f+2-m=6$$

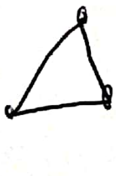
$$n+f-m=4$$

5. (185) נסחו והוכיחו את משפט 5.2.30. במהלך ההוכחה התייחסו לשאלה הנשאלת בספר: מדוע כל צלע נמנית לכל היותר פעמיים ולא בדיוק פעמיים. תנו דוגמא לגרף מישורי ובו צלע שנמנית רק פעם אחת.

__משפט:__ יהי G גרף קשיר עם $n\ge 3$ קודקודים ו-m צלעות אז $m\le 3(n-2)$

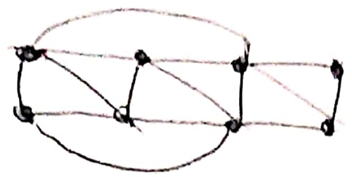
__הוכחה:__ יהי t_f מס' הצלעות התוחמות קבוצה f. G פאה מוכלה לפחות 3 צלעות ולכן $t_f\ge 3$ לכל פאה f. מאידך, $2m\ge\sum_f t_f$ מפני שכל צלע משותפת __לכל היותר__ ל-2 פאות. ולכן שני על היותר פעמיים קטטט הינו, כיוון שאין ל-G קודקוד דרגה 2 לפחות, G ישר, שקצותיו מאינן לפחות 2 צלעות, ואין יש צלע ב-G צלע נספרת ל-G היותר פעמיים ש חוצה צדדיה.

לכן, $2m\ge\sum_f t_f\ge 3f$. כאשר, $f\le\frac{2}{3}m$ כאשר f מס' הפאות ב-G. (נשתמש כעת בנוסחת אוילר ונקבל, $2=n-m+f\le n-m+\frac{2}{3}m$



ולכן $m\le 3(n-2)$ ∎

6. תנו דוגמא של גרף מישורי עם 8 קדקודים ומספר מרבי של צ



7. (185) הוכיחו כי K_5 אינו מישורי.

נוכיח: מס' הקודקודים G בגרף K_5 הוא $n=5$, ומס' הצלעות

הוא $m=\frac{5\cdot4}{2}$ לו היה K_5 ~~מ~~ מישורי היינו

מקבלים מהמשפט: בשאלה 5

e - $10 \le 3(5-2) = 9$ וזו סתירה.

לכן לא קיים ∎

8. הוכיחו כי K_8 אינו מישורי.

Scanned by CamScanner

נוכיח מס' הקודקודים של K_8 הוא $n=8$, ומס' הצלעות הוא $m=\frac{8\cdot7}{2}$

$m=28$ לו היה K_8 מישורי היינו מקבלים מהמשפט (שאלה 5)

וזו סתירה! לכן לא קיים.

$28 \le 3\cdot(8-2) \Rightarrow 28 \le 18$

9. (186) הוכיחו כי $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הוכחה: נניח בשלילה כי $K_{3,3}$ מישורי, לכן $m=9$, $n=6$ ולכן לפי נוסחת אוילר $f=5$. להגיד לאי שוויון $18=2m \ge \sum_F t_f$ כאשר t_f הוא מס' הצלעות התוחם דפאה f. אנו מסכמים דפאות $\sum_F t_f$ אנו מסכמים בעיקר נה חמישה מספרים טבעיים, ולכן, לפי הממוצע

פאה f מס' הצלעות אינו עולה על הממוצע הוא לכל היותר; $\frac{1}{5}\sum t_f \le \frac{18}{5}=3.6$ ולכן היתכן להיות

צלע-ועולם בגרף $K_{3,3}$ אין משולשים, (כיוון שגרף הוא דו צדדי אזי G מעגלים שלא באורך זוגי) הממוצע יש לכל היותר $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$

10. (186) נסחו את משפט קורטובסקי. מהו הומיומורף?

המשפט: כמוקן מימין קרביים $K_{3,3}$, K_5 אחראיים תמיד לאי מישוריות של גרפים.

הגרף G אינו מישורי אם הוא מכיל תת גרף שהוא הומיאומורף של K_5

או תת גרף שהוא הומיאומורף ל-G $K_{3,3}$

הומיאומורף: היא גרף היקף מתחלפה G לגרף K_5 ל-G דקדוק כאשר

המסלולים צריך, היא נקראו הומיאומורף ל-K_5 (אפשר גם לרשות

גם לגבי $K_{3,3}$)

11. (187) נסחו והוכיחו את הטענה בדבר קיומו של קדקוד מדרגה נמוכה בגרף מישורי.

~~[illegible]~~

משפט 5.2.34 - בכל גרף מישורי $G=(V,E)$ קיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5.

הוכחה: נראה כי הדרגה הממוצעת של קודקודי G קטנה ממש מ-6,

ולכן חייב להיות לפחות קודקוד אחד שדרגתו אינה עולה על הממוצע

ומכאן קטנה מ-6, הדרגה הממוצעת של קודקודי הגרף היא

$\frac{1}{|V|}\cdot\sum_{v\in V}\deg(v)$, כלומר חישוב ממוצע הדרגות (סכום הדרגות הקודקודים / קודקודים סה"כ)

אולם לפי משפט 5.1.5, סכום הדרגות הקודקודים G שווה ל-$2|E|$. כמו כן,

לפי משפט 5.2.30 $E \le 3(|V|-2)$. משילוב G האחרונות כל נקבל:

$|E| \le 3(|V|-2)$

$\frac{1}{|V|}\cdot 2|E| \le \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot 3(|V|-2)$

$$\frac{1}{|V|}\sum\deg(v) = \frac{1}{|V|}\cdot 2|E| \le \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot 3(|V|-2) = 6\,\frac{|V|-2}{|V|} < 6$$

מונה קטן מהמכנה ולכן זה שבר ולכן קטנה מתמיד

Scanned by CamScanner