פסק

$[-1,2]$ $f(x)=2x^3-12x^2+18x+3$ (a) (1)

שלב I: מציאת נק' קיצון

$f'(x)=6x^2-24x+18$ $6(x^2-4x+3)$

$x_1=3$ $x_2=1$

שלב II:

~~f(3)~~

$f(1)=11 \longrightarrow max$

$f(3)=3$

$f(-1)=-29 \longrightarrow min$

$f(2)=7$

$[-8,1]$ $f(x)=\sqrt[3]{x}(1+x)$ (b)

מציאת נק' קיצון

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(1+x)+\sqrt[3]{x}=$$

$$\frac{1+x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}=0 \longrightarrow 1+x+3\sqrt[3]{x^3}=0$$

$$\frac{1+x}{3x^{\frac{2}{3}}}+x^{\frac{1}{3}}=0$$

$1+x+3x=0$

$1+4x=0$

$4x=-1$

$x=-\frac{1}{4}$

$f(-0.25)=-0.472 \rightarrow min$

$f(-8)=14 \longrightarrow max$

$f(1)=2$

$[-1,0.5]$ $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$ (c)

$$f'(x)=\frac{1(x^2+2)-x(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2+2-2x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$0=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow 0=-x^2+2$$

$x^2=2$ $x_1=\sqrt{2}$

$x_2=-\sqrt{2}$

$f(-1) = -\frac{1}{3}$

$f(0.5) = \frac{2}{4}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \max$

$f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \min$

(d)

$[0.3, 2]$ $\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2}$

$0 = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$

$0 = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ $\quad 2 = x\pi$

$x = \pm\frac{2}{\pi}$

$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1 \longrightarrow \max$

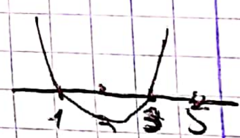
$f\left(-\frac{2}{\pi}\right) = -1 \longrightarrow \min$

$f(0.3) = -0.19$

$f(2) = 0.479$

(e)

$f(x) = |x^2 - 4x + 3| + x \quad [2, 5]$



$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 + x & x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 + x & x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & 3 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 5x - 3 & 2 < x < 3 \end{cases}$

$f'(x) = 2x - 3$ $\quad 3 \leq x \leq 5$ (תחום) לפי

$2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow = 1.5$

$f'(x) = -2x + 5$ $\quad 2 < x < 3$ (תחום) לפי

$-2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = 2.5$

$f(1.5) = \frac{9}{4} \longrightarrow \min$

$f(2.5) = \frac{13}{4}$

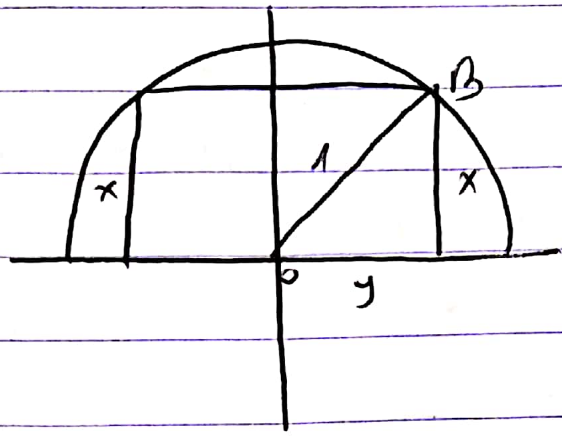
$f(2) = 3$

$f(3) = 3$

$f(5) = 13 \longrightarrow \max$

ל׳ך

רס׳ 2



$$x^2+y^2=1^2$$

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

$$f(x)=2x+4\sqrt{1-x^2}$$ היקף =

$$f'(x)=2+4\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=2-4\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2-4\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$2=4\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$/:2$

$$1=2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\quad \cancel{2x=\sqrt{1-x^2}}\quad \sqrt{1-x^2}=2x$$

$$4x^2=1-x^2$$

$$5x^2=1$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$f(0)=4$$

$$f(1)=2$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=2\sqrt{5}\rightarrow max$$

דסי

נקדה:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 4\sqrt{1-\frac{1}{5}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$f(0) = 4$

$f(1) = 2$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5} = 4.47$

4

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 0.5$$

$f(-1) = \frac{1}{2}$ $\qquad f(0) = -0.5$

$f(-2) = -\frac{1}{2}$ $\qquad f(1) = 2.5$

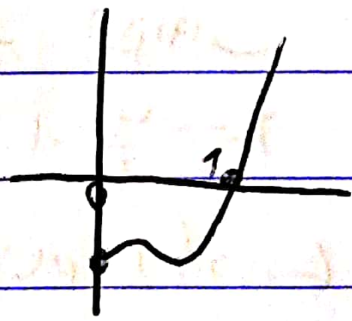
מצאנו 3 קטעים מהצורה $[a, a+1]$ שיש בהן

פתרונות של המשוואה $f(x) = 0$

כי לכל אחד מהקטעים $[0,1]$, $[-1,0]$, $[-2,-1]$

יש פתרון למשוואה $f(x) = 0$

לפי משפט ערך הביניים.



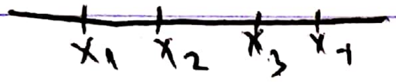
נניח בשלילה שיש (לפחות) 4 פתרונות

למשוואה $f(x)=0$,

נסמן ב- $x_1<x_2<x_3<x_4$ - 4 שורשים

כלומר: $f(x_1)=f(x_2)=$

$f(x_3)=f(x_4)=0$



f גזירה ברציפות על R ולכן לכל קטע סגור

לפי רול בקטע $[x_1,x_2]$

קיימת נקודה $y_1\in(x_1,x_2)$ שמקיימת $f'(y_1)=0$

לפי רול בקטע $[x_2,x_3]$

קיימת נקודה $y_2\in(x_2,x_3)$ שמקיימת $f'(y_2)=0$

לפי רול בקטע $[x_3,x_4]$ קיימת נקודה

$y_3\in(x_3,x_4)$ שמקיימת $f'(y_3)=0$

$f(x_n)=0$

$f'(y_j)=0$

$$f'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$$

$f'(x)$ מתאפסת בנקודות

$x=0$ ו- $x=-\frac{4}{3}$

אם היו 4 שורשים (לפחות) ל- f, אז היו

3 שורשים (לפחות) ל- f'

אבל ל- f' יש רק שני שורשים סתירה

$f(x) = x^4$ (a) 3

$f(2.98) \simeq f(3) + f'(3) \cdot -0.02 =$

$3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot -0.02 = 78.84$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (b)

$f(26.8) \simeq f(27) + f'(27) \cdot -0.2 =$

$27^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot -0.2 = 2.99$

$f(x) = \sin(x)$ (c)

$360 = 2\pi$

$180 = \pi$

$30 = \frac{\pi}{6}$

$1 = \frac{\pi}{180}$

$\sin 151 = \sin\left(\frac{151}{180}\pi\right)$

$\sin 150 = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

$\sin 151 = \sin\left(\frac{151}{180}\pi\right) \simeq \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \cdot \frac{1}{180}\pi = 0.4848$

$f(x) = \sqrt{5+x^2}$ (d)

$f(2.01) \simeq f(2) + f'(2) \cdot 0.01 =$

$\sqrt{9} + \frac{2.2}{2\sqrt{5+2^2}} \cdot 0.01 = 3.006$