בס״ד

(1) $(a,b)T(c,d)$ אם $a^2-d^2=c^2-b^2$

(א) רפלקסיבי - $(a,b)T(a,b) \iff a^2-b^2=a^2-b^2$ וזה נכון לפי רפלקסיביות השוויון

סימטרי - אם $(a,b)T(c,d) \Leftarrow a^2-d^2=c^2-b^2 \Leftarrow c^2-b^2=a^2-d^2$

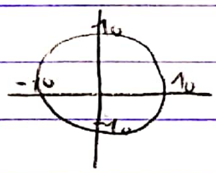
לפי סימטריות השוויון, לכן $(c,d)T(a,b)$

טרנזיטיבי - אם $(a,b)T(c,d)$ ו- $(c,d)T(e,f)$, אזי

$a^2-d^2=c^2-b^2$ ו- $c^2-b^2=e^2-f^2 \Leftarrow a^2-d^2=e^2-f^2 \Leftarrow$

$(a,d)T(e,f)$ לכן לפי טרנזיטיביות השוויון

(ב) $a^2+b^2=c^2+d^2$



$$[6,8]_T=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=6^2+8^2\}$$
$$=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=36+64\}$$
$$=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=100\} \quad 100=10^2$$

כלומר מרכז ההקפיים של מעגלים הצירים והוא רדיוס $\sqrt{100}=10$

(ג) $$[1,2]_T=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=1^2+2^2\}$$
$$=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=5\} \quad \sqrt{5}=2.236$$

כלומר מרכז ההקפים של מעגלים הצירים ורדיוס 2.236

(ד) $$[2,1]_T=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=2^2+1^2\}=$$
$$\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=5\}= \quad \sqrt{5}=2.236$$

כלומר מרכז ההקפים של מעגלים הצירים 2.236

(ה) $$[0,0]_T=\{(a,b)\in R\times R \mid a^2+b^2=0\}$$
$$[0,0]_T=\{(a,b)\in R\times R \mid a=b=0\}$$

כלומר מרכז ההקפים של מעגלים הצירים 0

קבצ

ב) $T \subseteq (N\times N)\times(N\times N)$

$(a,b)\,T\,(c,d)$ אמ"מ $a+d=b+c$

א) רפלקסיבי – $(a,b)T(a,b) \Rightarrow a+b=a+b$ וזה נכון לפי רפלקסיביות השוויון

סימטרי – אם $(a,b)T(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow b+c=a+d \Rightarrow$ לפי סימטריות השוויון, ולכן $(c,d)T(a,b)$

טרנזיטיבי – אם $(a,b)T(c,d)$ ו- $(c,d)T(e,f)$ אז $a-b=c-d$

ו- $c-d=e-f \Rightarrow a-b=e-f \Rightarrow$

$(a,b)T(e,f) \Rightarrow$ ולכן לפי טרנזיטיביות השוויון

ב)

$$[6,8]_T = \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=6-8\}$$
$$= \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=-2\}$$
$$= \{(a,a+2)\in N\times N\}$$

$$[1,2]_T = \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=1-2\}$$
$$= \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=-1\}$$
$$= \{(a,a+1)\in N\times N\}$$

$$[2,1]_T = \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=2-1\}$$
$$= \{(a,b)\in N\times N \mid a-b=1\}$$
$$= \{(a,a-1)\in N\times N\}$$

ג)

$$[(0,n)] = \{(a,a+n) \mid a,n\in N\}$$
$$= \{[(0,n)]_T \mid n\in N\}$$

מסק $R_f\subseteq A\times A$ $(x,y)\in R_f$ אמ"מ $f(x)=f(y)$

(4) <u>רפלקסיבי</u> - $f(x)=f(x) \Leftarrow (x,x)\in R_f$ וזה נכון לפי רפלקסיביות השוויון

<u>סימטרי</u> - אם $f(y)=f(x) \Leftarrow f(x)=f(y) \Leftarrow (x,y)\in R_f$ $\Leftarrow$ לפי סימטריות השוויון, ולכן $(y,x)\in R_f$

<u>טרנזיטיבי</u> - אם $(x,y)\in R_f$ ו- $(y,z)\in R_f$, אז $f(x)=f(y)$ ו- $f(y)=f(z)$ $\Leftarrow$ $f(x)=f(y)=f(z)$ $\Leftarrow$ $f(x)=f(z)$ $\Leftarrow$ $(x,z)\in R_f \Leftarrow$ ולכן לפי טרנז' השוויון

<u>מחלקות שקילות</u>

$a\in b \quad | \quad F[A]$

$[a]_{R_f}=f^{-1}[b]$

$[a]_{R_f}=\{a\in b \mid f^{-1}[b]\}$

פתרון שאלה 3 סעיף א

טענה: לכל $n \geq 0$ מתקיים $f(n)=5\cdot 2^n+3$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $n\geq 0$ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה

ואכן $n=0$ $P(0)$ $f(0)=5\cdot 2^n+3=8$ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n\geq 0$ מסויים מתקיים: $P(n)$ $f(n)=5\cdot 2^n+3$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ $f(n+1)=5\cdot 2^{n+1}+3$

הוכחה: עפ"י הנחת האינדוקציה

$f(n)=5\cdot 2^n+3$

לפי נוסחת הנסיגה

$f(n)=3f(n-1)-2f(n-2)$

$$f(n+1)=3f(n)-2f(n-1)$$
$$=3(5\cdot 2^n+3)-2(5\cdot 2^{n-1}+3)$$
$$=3\cdot 5\cdot 2^n+3\cdot 3-2\cdot 5\cdot 2^{n-1}-2\cdot 3$$
$$=3\cdot 5\cdot 2^n+3\cdot 3-5\cdot 2^n-2\cdot 3$$
$$=30^n+9-10^n+6$$
$$=20^n+3$$
$$=5\cdot 2\cdot 2^{2n}+3$$
$$=5\cdot 2^{n+1}+3$$

מסקנה: הוכחנו $P(0)$ מתקיים $P(n)\to P(n+1)$ עבור $n\geq 0$ ולכן $P(n)$ מתקיים עבור $n\geq 0$ עפ"י עקרון האינדוקציה

פתרון שאלה 3 סעיף ב'

טענה: לכל $n \geq 1$ מתקיים $g(n) < 2^n$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $n \geq 1$ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

<u>בסיס האינדוקציה</u>

ואכן $n=1$ ✓ $g(1) < 2^1$ **מתקיים.**

<u>צעד האינדוקציה</u>

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \geq 1$ **מסויים מתקיים:** $P(n)$ $g(n) < 2^n$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ $g(n+1) < 2^{n+1}$

הוכחה: עפ"י הנחת האינדוקציה $g(n) < 2^n$

עפ"י נוסחת הנסיגה $g(n) = g(n-3) + g(n-2) + g(n-1)$

$$
\begin{aligned}
g(n+1) &= g(n-2) + g(n-1) + g(n) \\
&< 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&< 2^n \cdot 2^{-2} + 2^n \cdot 2^{-1} + 2^n \\
&< 2^n(2^{-2} + 2^{-1} + 1) \\
&< 2^n\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + 1\right) \\
&< 2^n + 1\tfrac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$2^{n+1} < 2^n + 1\tfrac{3}{4}$$

מסקנה: הוכחנו $P(1)$ מתקיים, $P(n) \to P(n+1)$ עבור $n \geq 1$ לכן $P(n)$

מתקיים עבור $n>0$ עפ' עקרון האינדוקציה

Scanned by CamScanner