(1)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \quad \mathbb{Z}_7$$

$$+3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$+3 \cdot 0 - 2 \cdot -7 + 5 \cdot -14 = \quad = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \quad 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_4 = R_4 + R_1]{R_2 = R_2 + R_1}$$

$$6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2} R_2} 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 = R_4 + R_2} 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 = R_4 - R_3}$$

$$6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot -2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot -6 = 144$$

(2)

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{R_1 \Leftrightarrow R_2}{=} \quad = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{R_2 \Leftrightarrow R_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ 2d & 2e & 2f \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} = \begin{array}{r} 2 \cdot \\ 2 \cdot \\ -1 \cdot \end{array} \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{R_1 \Leftrightarrow R_3}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 20$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ a-g & b-h & c-i \end{vmatrix} \quad R_1 = R_1 + 2R_3$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d-g & b-3h & c-i \end{vmatrix} \quad R_2 = R_2 + R_3$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ a-g & b-h & c-i \end{vmatrix} \quad R_1 = \frac{1}{2}R_1$$

הוצאת מונין של

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ a-g & b-h & c-i \end{vmatrix} \underset{R_2 = R_2 - R_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ a-g & b-h & c-i \end{vmatrix} =$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a-g & b-h & c-i \end{vmatrix} \underset{R_3 = R_3 - R_1}{=} \quad = 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -20$$

③ ב) נחשב את הדטרמיננטה (מסדר n):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-2 & 1 & n-2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \xrightarrow[(i=2,3,\dots,n)]{-R_1+R_i \to R_i}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n-3 & & 0 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[(i=2,3,\dots,n)]{-R_i+R_n \to R_n}$$

מספר ($n \times n$)

$n \leftarrow$ השורה האחרונה

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & & 0 & 1 \\ 0 & & 2 & & 0 & 0 & 2 \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & n-3 & & n-3 \\ & & & & & n-2 & n-2 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & X \end{vmatrix}$$

$$X = n-1 - S_{n-2}$$

$$S_{n-2} = \frac{(n-2)(1+n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$X = (n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2(n-1)-(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)\underbrace{(2-(n-2))}_{2-n+2}}{2}$$

$$X = \frac{-n^2+5n-4}{2}$$

כלומר, שקבלנו מטריצה משולשת עליונה, שהדטרמיננטה ~~שלה~~, והיא שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי:

$$\det = (n-2)! \cdot \left(\frac{-n^2+5n-4}{2}\right)$$ לכן:

בס"ד

דטרמיננטות

(4) יש שני מקרים שיכולים להיות,

כאשר $x=0$ וכאשר $x\neq 0$

כאשר $x=0$: המכפלה האלכסונית היחידה שלא מתאפסת היא

$a_0\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)=a_0(-1)^{n-1}$

התמורה המתאימה ←

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1\end{pmatrix}$

הסימן תלוי ב-n:

כאשר $(n-1)$ זוגי $= +$ $\longrightarrow N=n-1$

$(n-1)$ אי זוגי $= -$

$(-1)^{(n-1)}$ כלומר הסימן

$det = a_0(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}$

כלומר, במקרה בו $x=0$, הדטרמיננטה תהיה:

$det = a_0\,(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}$

$= a_0\cdot(-1)^{2(n-1)}$ ⟶ כלומר החזקה בכל מקרה תהיה

זוגית ולכן ה-det תהיה

תמיד $\Downarrow$

$det=a_0$

כאשר $x\neq 0$: אם $x\neq 0$ ניתן לבצע את הפעולה הבאה:

$\frac{1}{x}\cdot R_i + R_{i+1}\rightarrow R_{i+1}\quad (1\leq i\leq (n-1))$

i פעמים שורה במספר נקבל:

$$\begin{vmatrix} x & & & & & a_0\\ & x & 0 & & & a_1+\frac{1}{x}a_0\\ & & x & & & a_2+\frac{1}{x}a_1+\frac{1}{x^2}a_0\\ & 0 & & x & & a_3+\frac{1}{x}a_2+\frac{1}{x^2}a_1+\frac{1}{x^3}a_0\\ & & & & x & a_{n-2}+\frac{1}{x}a_{n-3}+\ldots+\frac{1}{x^{n-2}}a_0\\ & & & & & x+a_{n-1}+\frac{1}{x}a_{n-2}+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}a_0\end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow$ זוהי מטריצה ~~משולשת~~ עליונה, כלומר, ניתן לחשב את הדטרמיננטה שלה ע"י הכפלת איברי האלכסון

$$\Rightarrow det = x^{(n-1)}\cdot\left(x+a_{n-1}+\frac{1}{x}a_{n-2}+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}a_0\right)=$$

רמז

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

(וזה מה שהיה צריך להוכיח)

משל

(כמו שציינו המטריצה A קיים רק $x=0$ ⇐ כל ה-x במשוואה הזו הן אפסים) והתוצאה היא כמו שכתוב אחרון $= a_0$

⑤

עם $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$ מטריצה

פתרון: נמצא את ה-λ המספרים הממשיים

λ שעבורם המטריצה $\lambda I - A$ היא מטריצה הפיכה.

$(\lambda I - A)$ הפיכה $\iff \det(\lambda I - A) \neq 0$

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 4 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2) \cancel{+(-1)\cdot 4 \cdot 0 + (-3)\cdot 0 \cdot 4}$$
$$\cancel{-(-3)\cdot(\lambda-1)\cdot 0} - (\lambda-2)\cdot 1 \cdot 4 \cancel{- (-1)\cdot 0 \cdot (\lambda-2)}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2) - (\lambda-2)\cdot 4 = (\lambda-2)\big((\lambda-1)(\lambda-2)-4\big) \neq 0$$

נמצא את הערכים של λ עבורם הדטרמיננטה מתאפסת

(ולכן לא נוכל לומר ל-λ להיות שווה כדי ש-$(\lambda I - A)$ תהיה הפיכה)

$$(\lambda-2) \neq 0 \quad \wedge \quad (\lambda-1)(\lambda-2)-4 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \neq 2 \quad \wedge \quad \lambda^2 - 3\lambda - 2 \neq 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \qquad \lambda_1 \neq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \qquad \lambda_2 \neq \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

⇐ כאשר $\lambda \neq 2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ הדטרמיננטה לא מתאפסת

ואז $(\lambda I - A)$ תהיה הפיכה.

משל

6 אב

שאלה: תהא $A\in M_n(F)$

צ"ל: אם $A^t=A^{-1}$ אז $\det(A)=\pm 1$

הוכחה: ידוע כי – $\det(A)=\det(A^t)$, $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

כמו כן, אם $A^t=A^{-1}$ ⇐ $\det(A^t)=\det(A^{-1})$

$$\Downarrow$$

$$\det(A)=\det(A^t)=\det(A^{-1})$$

$$\det(A)=\frac{1}{\det(A)} \quad /\cdot\det(A)$$

$$(\det(A))^2=1 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \det(A)=\pm 1$$

מש"ל.

ב **צ"ל:** כי אם סכום האיברים בכל שורה של A שווה ל-0 אז $\det(A)=0$

נגדיר את הווקטור $\vec{x}$ כך:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A\cdot\vec{x}=A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix}=\vec{0}$$

⇐ למערכת ההומוגנית יש פתרון שהוא לא טריוויאלי

$$\Downarrow$$

A היא לא הפיכה

וידוע כי אם A לא הפיכה ⟺ $\det(A)=0$! **מש"ל:**

ג תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אנטי-סימטרית ונניח כי n אי-זוגי, אז $\det(A)=0$ ← **צ"ל:**

הוכחה! A אנטי-סימטרית ⇐ $A^t=-A$ ⇐ $\det(A^t)=\det(-A)$

ידוע → $\det(A)=\det(A^t)$

$$\Downarrow$$

$$\det(A)=\det(-A)(=\det(A^t))$$

$$\det(A)=-1^n(A)$$

הוצאת סקלר

ומשום ש-n הוא אי-זוגי (לפי ההנחה) ⇐ $-1^n<0$

כלומר, המקרה היחיד שמקיים את השוויון הוא כאשר $\det(A)=0$!

מש"ל