תרגיל 10 / מבוא לתאוריה

(1) נמצא קבוצה בת הקבוצות הסופיות. G קבוצת המספרים הטבעיים הוא כל בנות שונות בת מניה, ושלה באות!

נציג את השורה הראשונה להיות קבוצות בגודל 1, את השורה השניה G את קבוצות שגודלן 2 וכן הלאה..

שורה 1 $\{0\}$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ ——

שורה 2 $\{0,1\}$ $\{0,2\}$ $\{0,3\}$ ——

$\{0,1,2\}$ $\{0,1,3\}$ ——

$\}$

G שורה היא אינסופית וכן G מנויה. יש אינסופיות ולכן נמנה את איברי הקבוצה ע"י הליכה באלכסונים החל מהפינה השמאלית כך

הראנו שהקבוצה היא בת מניה ולכן עוצמתה היא $\aleph_0$.

(2) נמצא את שונות הסכום תוצאות של 2 הקוביות; כאשר ידוע לנו כבר ש-:
$E(f)=7$

$$Var[f] = E[f^2]-(E[f])^2$$

נחשב את $E[f^2]$

$$E[f^2]=\sum f(x)^2 Pr(x)$$

$$\frac{1}{36}\sum_{1\le i,j\le 6}(i+j)^2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)^2 \quad // \text{ שימוש בנוסחת הסכום}$$

$$\frac{1}{36}\cdot\frac{6^2(6+1)(42+5)}{6} = \frac{1}{36}\,1974 = \frac{329}{6}$$

$$\left(E[f]\right)^2 = 49$$

ולכן

$$Var[f] = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$$

(3) במבחן אמריקאי יש 25 שאלות, לכל שאלה יש 4 תשובות, רק אחת מהן היא נכונה. תשובה נכונה שווה 4 נק' ותשובה לא נכונה 0 נק'. תלמיד מגיע למבחן בלי ללמוד למבחן ולכן עונה על כל השאלות

דף 2

שאלה אחת שווה 4 נקודות

(א) נחשב את תוחלת הציון של תלמיד בוחר באקראי:

$\Omega = \{$ 25 שאלות במבחן לכל שאלה יש 4 תשובות $\}$

נגדיר משתנה מקרי ציון. f: מספר הנקודות שצבר תלמיד על המבחן.

$$f_i = \begin{cases} 4 & \text{תשובה נכונה} \\ 0 & \text{תשובה לא נכונה} \end{cases} \quad 1 \le i \le 25$$

$$F = \sum_{i=1}^{25} f_i \longrightarrow E[f] = E\left[\sum_{i=1}^{25} f_i\right] = \sum_{i=1}^{25} E(f_i)$$

$$E[f_i] = 0 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$\frac{1}{4} = Pr(i)$ קל של הבחירה אחידה.

ולכן: $E[f] = E\left(\sum_{i=1}^{25} f_i\right)$

מלינאריות של תוחלת: $= \sum_{i=1}^{25} E[f_i] = 25 \cdot 1 = 25$

(ב) נחשב שונות של ציון:

$$Var(f) = Var\left(\sum_{i=1}^{25} f_i\right) = \sum_{i=1}^{25} Var(f_i)$$

נחשב את $Var(f_i)$:

$$Var(f_i) = E[f_i^2] - [E(f_i)]^2$$

$$E[f_i^2] = E\left(\begin{cases} 16 & \text{תשובה נכונה} \\ 0 & \text{תשובה לא נכונה} \end{cases}\right) = 16 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = 4$$

$$Var(f_i) = 4 - 1^2 = 3$$

$$\sum_{i=1}^{25} [Var(f_i)]^2 = \sum_{i=1}^{25} 3 = 75$$

(ג) כדי שתוחלת הציון של תלמיד כזה תהיה אפס נשנה את הניקוד כך שיש קנס לתשובה לא נכונה מהו הקנס

נדרוש $E[f] = 0$ כאשר $E\left(\sum_{i=1}^{25} f_i\right) = E[f]$ ו- $f_i \ne f_j$ לכל $1 \le i,j \le 25$

ולכן: $E[f] = E\left[\sum_{i=1}^{25} f_i\right] = \sum_{i=1}^{25} E(f_i) = 25E(f_i)$

$$f_i = \begin{cases} 4 & \text{תשובה נכונה} \\ x & \text{נסמן את הקנס ב:} \end{cases}$$

$E[f_i] = 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x$

$25\left(1+\frac{3}{4}x\right) = 25 + \frac{75}{4}x$

$25 + \frac{75}{4}x = 0$ ⇐ נרצה שהתוחלת תהיה שווה 0

$x = -\frac{4}{3}$ ולכן הקנס הוא $-\frac{4}{3}$

③ נמצא תוחלת למבחן ללא קנסות:

כאשר התלמיד יודע 4 תשובות אחת לא נענה והסתברות שיזכה בה

בציון 0, ולכן הוא יכול לבחור תשובה לגובה מבין 3 תשובות, ולכן

ההסתברות שתשובה נכונה היא $\frac{1}{3}$ ושתשובה לא נכונה היא $\frac{2}{3}$,

כעת נחשב את התוחלת:

$$E[f] = E\left(\sum_{i=1}^{25} f_i\right) = \sum_{i=1}^{25} E[f_i]$$

נשתמש בנתונים הקודמים אשר קבענו בסעיף א (תוחלת).

$$E[f_i] = 4 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{25} \frac{4}{3} = 25 \cdot \frac{4}{3} = \frac{100}{3}$$

ב) כעת, נחשב את התוחלת של מבחן עם קנס

לכן ההתפלגות של f_i היא:

$f=a$	4	$-4/3$
$Pr(f=a)$	$1/3$	$2/3$

$$E[f_i] = 4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

ולכן $E[F] = \sum_{i=1}^{25} \frac{4}{9} = 25 \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{9}$

$$E[f] = \frac{100}{9}$$

① נמצא את השונות:

$$Var[f_i] = E[f_i^2] - (E[f_i])^2$$

$$E[f_i^2] = E\left(\begin{cases} 16 & \text{תשובה נכונה} \\ 0 & \text{תשובה לא נכונה} \end{cases}\right) = 16 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

$$Var(f_i) = \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

$$Var(f) = \sum_{i=1}^{25} \frac{32}{9} = 25 \cdot \frac{32}{9} = \frac{800}{9}$$

דף 2

(4) בחנות תיקונים נמצאים מכשירים הדורשים תיקון.
30% - מהמכשירים דורשים שעה תיקון אחת
40% - מהמכשירים דורשים שעתיים
30% - מהמכשירים דורשים שלוש שעות תיקון
לחנות הגיעו 2 מכשירים לתיקון אחרים
מצאו את השונות של מספר השעות הדרוש לתיקון שני המכשירים

נסמן f את מספר השעות הדרוש לתיקון... כמו במקרה הקודם: הגדרנו משתנים:
f_1 מ"מ המציין את מספר השעות הדרושות לתקן את המכשיר הראשון
f_2 מ"מ המציין את מספר השעות הדרושות לתקן את המכשיר השני
f מ"מ המציין את מספר השעות הדרושות לתקן 2 מכשירים.

$$E[f]=4$$

$$Var[f]=E[f^2]-(E[f])^2$$

נחשב את $E[f^2]$:

$f^2=a^2$	4	9	16	25	36
$Pr(f^2=a)$	$(0.3)^2$ $=0.09$	$2\cdot(0.3)(0.4)$ $=0.24$	$2(0.3)(0.3)$ $+(0.4)^2=$ 0.34	$2(0.3)(0.4)$ $=0.24$	$(0.3)^2$ $=0.09$

קיבלנו כמו במקרה הקודם

$$E[f^2]=4(0.09)+9(0.24)+16(0.34)+25(0.24)+36(0.09)$$

$$E[f^2]=\frac{86}{5}$$

$$Var(f)=\frac{86}{5}-4^2=\frac{86}{5}-16=\frac{6}{5}$$

(5) n אנשים מניחים תיקים בשולחן, אחרי הסעודה כל אחד לוקח תיק כדי לבדוק אם הוא שייך לו. נמצא את שונות מספר האנשים לוקחים את התיק הנכון:
תחילה נמצא את התוחלת:
נגדיר משתנה מקרי מציין f = מספר האנשים שלוקחים את התיק הנכון

$$f_i=\begin{cases}1 & \pi(i)=i \quad \text{לקח תיק נכון}\\ 0 & \pi(i)\neq i \quad \text{לקח תיק לא נכון}\end{cases}$$

$$f=\sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$E[f]=E\left(\sum f_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E[f_i]$$

לכל i $\quad 1\le i\le n$

$$E[f_i]=\sum_{\pi\in\Omega}f_i(\pi)\cdot Pr(\pi)$$

$$=\sum_{\substack{\pi(i)=i\\ \pi\in\Omega}}Pr(\pi)+\left(0\cdot\sum_{\pi\in\Omega}Pr(\pi)\right)$$

$$=\sum_{\substack{\pi\in\Omega\\ \pi(i)=i}}\frac{1}{n!}=(n-1)!\cdot\frac{1}{n!}=\frac{1}{n}=Pr\left(\pi(i)=i\right)$$

כעת, התוחלת של המשתנה המקרי המציין = ההסתברות של המאורע

לכן, $\quad E[f]=\sum_{i=1}^{n}E[f_i]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$

כעת נחשב את השונות:

$$Var(f)=E[f^2]-E[f]$$

$$E[f^2]=\sum Pr(x)f(x^2)$$

נסמן ב-f את המשתנה המקרי שמונה את מספר האנשים שלוקחים את התיק הנכון. נסמן ב-f_i עבור $n\ge i\ge 1$ את המשתנה המקרי המציין שמציין 1.

אזי מס' האנשים שלקחו נכון את התיק, אזי $\quad f=\sum_{i=1}^{n}f_i$

נכון משום ש תוחלת של f מתקיים:

$$E[f_i]=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

כעת, נחשב את התוחלת של f^2

$$E[f^2]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i)^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}f_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}f_if_j\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[f_i^2]+2\sum_{1\le i<j\le n}E[f_if_j]$$

מתקיים ש-f_i הוא משתנה מקרי מציין שמקבל 0 או 1 ולכן $f_i^2=f_i$

ולכן $\quad [f_i]^2=\frac{1}{n}$

נותר לחשב $\quad E[f_if_j]$

f_if_j הוא משתנה מקרי שמקבל 1 כאשר i וגם j הם נק' שבת מתקיים:

$$E[f_if_j]=\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{n(n-1)!}$$

$$E[f^2] = n\cdot\frac{1}{n} + 2\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 1 + \frac{2\, n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n(n-1)} = 1+1=2$$

נציב את נוסחת השונות:

$$var(f) = E[f^2] - (E[f])^2 = 2-1^2 = 1$$

(6) הוכיחו או הפריכו: $f,g:\Omega\to R$ הם שני משתנים מקריים בלתי תלויים

אז $E[fg]=E[f]\cdot E[g]$

הוכחה או הפרכה:

אם $E[fg]=E[f]\cdot E[g]$ אז f,g הם לא תלויים.

נפריך את הטענה:

$\Omega\{H,T\}$ זריקה אחת

נגדיר משתנים מקריים:

$f=$ מה יצא את ההטלה הראשונה

$g=$ מה יצא את ההטלה השנייה

$$f=\begin{cases}1 & \text{יצא עץ}\\ -1 & \text{יצא פלי}\end{cases}$$

$$g=\begin{cases}1 & \text{יצא עץ}\\ 1 & \text{יצא פלי}\end{cases}$$

$$E[f] = 1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$E[f]\cdot E[g] = 0\cdot E[g] = 0$$

כעת, נחשב את $f\cdot g$

$f\cdot g=a$	-1	1
$Pr(f\cdot g)$	$1/2$	$1/2$

$$E[fg] = -1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0$$

אבל קיבלנו ש: $E[f]\cdot E[g] = E[f\cdot g]$

כלומר, נראה כי f ו-g הם אינם בלתי תלויים

$$Pr(f=a, g=b) \neq Pr(f=a)\, Pr(g=b)$$

רפא

ואולם כאשר נקח $f=-1$, $g=-1$ ו- $b=1$ נקבל!

ולא יתכן ש-g T וגם H בהסתברות אחת → $Pr(f=-1\ g=1)=0$

$Pr(f)=-1/_2$ $Pr(g)=1$ $Pr(f)Pr(g)=-1/2 \neq 0$

ולכן המשתנים המקריים אינם בלתי תלויים

והטענה אינה נכונה. מ.ש.ל.

(7) נתון פסוק לוגי בצורת CNF המוגדר ע"י n משתני $x_1 \dots x_n$ ונתון כי בכל אחת מהפסוקיות מופיעים 6 משתנים (או שלילת משתנים) כמו כן, כל משתנה מופיע ב-6 פסוקיות בדיוק. צ"ל:

כי קיימת השמה מספקת לפסוק ע"י משפט Hall

הוכחה:

נגדיר גרף דו צדדי $G=(L \cup R, E)$

$L=\{c_i \ 1 \leq i \leq n\}$

$R=\{y_j \ 1 \leq j \leq m\}$

בצד L יש n פסוקיות ובצד R יש m משתנים

קיימת קשת בין משתנה לפסוקית אם המשתנה מופיע בפסוקית.

נתון שבכל פסוקית מופיעים 6 משתנים ושכל משתנה מופיע בדיוק ב-6 פסוקיות.

לכן G הוא גרף 6 רגולרי דו צדדי עפ"י הוכחות קודמות

ולפי מסקנה ממשפט Hall ב-G, קיים בגרף זיווג מושלם $|L|=|R|$

נסמן, נקרא זיווג כזה.

נסמן ב-G פסוקית ונבחר את המשתנה שמסיים את הזיווג מופיע

בצורת y_i, נסמן $y_i = T$ אם היא מופיע בצורה $\bar{y_i}$ נשים $\bar{y_i}=F$ ואז $y_i=T$

כך נוכל שבכל פסוקית יש משתנה שערכו T ונקבל שבמשתנים

ב- c_i מחוברים ב- OR, אז c_i מקבל את T ולכן

לא משנה איזה משתנים יש בה של ערכם.

נקבל שכל ה- c_i מחוברים ביחד ולכן נקבל T וכך נקבל

את $X=T \cap T \cap T$ ולכן יש לנו השמה מספקת לפסוק.

(8) נתונה קבוצה של n נקודות ולכל קבוצה של n נקודות

לכל אחת מהקודקודים יש את הדרגות של G הנשים ולא אחת מהנשים

יש סגר הדרגות של G נקודים. המטרה היא למצוא ניגוד F

בס"ד

השידוך להיות יציב, כלומר אסור שיהיו שני זוגות שבהן כל אחד מעדיף
המעדיף לשבור את הקשר הקיים ולהחליף בין בני זוג
נראה כי תמיד קיים שידוך כזה.

נראה כיצד ניתן לשדך בין האנשים כך שלא יהיו בעתיד זוגות מרוצים
שרוצים להחליף ביניהם:

נסדר את קבוצת הגברים בשורה כך שיהיה $M_1, M_2 \dots M_n$
ניקח את הגבר הראשון ונשדך אותו עם האשה הראשונה לפי סדר
העדפות שלו שפנויה וכך נמשיך

ולא יתכן שבסוף יהיו זוגות שירצו להחליף ביניהם. כי נניח שגבר
M_i עם אישה L_i וגבר M_j עם אישה L_j רוצים להחליף,
נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $i<j$:

כאשר M_j השתדך עם האישה והיתה פנויה לו ברשימת העדפות
שלו ולכן ברור שלא רוצה להשתדך עם L_i כי לא היתה בהעדפות
ואם גבר M_i השתדך עם L_i רק ברור שלא ירצה להשתדך
עם L_j כי היא היתה ברשימת העדפות ובחר דווקא ב- L_i
ולכן אפשר להסיק שאין 2 זוגות שרוצים להחליף