Mathematical Logic HW#4

(1) (b)

1	E	P R₁
2	A→D	P R₁
3	D →(E →B)	P R₁
4	A	supposition IP R3
5	D	2,4 I₁₁ R₂
6	E→B	3,5 I₁₁ R₂
7	B	1,6 I₁₁ R₂

(d)

1	¬(B→G) →¬A	P R₁
2	A→ B	P R₁
3	A	supposition IP R3
4	B	2,3 I₁₁ R₂
5	A→ (B→G)	1 E₂₁ R₂
6	B →G	3,5 I₁₁ R₂
7	G	4,6 I₁₁ R₂

(f)

1	B∧A	P R₁
2	A	1 I₄ R₂
3	A∨B	2 I₁ R₂

(h)

1	A→ (B∨C)	P		12	¬B	6,11, S11
2	B→D	P		13	C	8, 12 I₆
3	¬C·∨E	P		14	E	3, 13 I₆
4	(D∨E) →¬A	P		15	¬E	10, I₄
5	A→ ¬(D∨E)	4, E₂₁		16	¬A	7,14,15 (RAA)/R₄
6	¬D → ¬B	2, E₂₁				
7	A	supposition (RAA)/R₄				
8	B∨C	1,7, I₁₁				
9	¬(D∨E)	4,5, I₁₁				
10	¬D ∧¬E	9, E₁₆				
11	¬D	10, I₃				

(i)

1	$r \leftrightarrow s$	P
2	$\neg(r \wedge s)$	P
3	$z \to [y \to (r \vee s)]$	P
4	$(r \to s) \wedge (s \to r)$	1,E↔
5	$(r \to s)$	4,I3
6	$(\neg r \vee s)$	5,E10
7	$(s \to r)$	4,I4
8	$(\neg s \vee r)$	7,E20
9	$\neg r \vee \neg s$	2,E17
10	$(\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg r \vee s)$	6,9,I5
11	$\neg r \wedge (\neg s \vee s)$	10,E15
12	$\neg r$	11,E7,E4
13	$(\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee r)$	8,9,I5
14	$\neg s \wedge (\neg r \vee r)$	13,E15
15	$\neg s$	14,E7,E4
16	$\neg r \wedge \neg s$	12,15,I5
17	$\neg(r \vee s)$	16,E16
18	$y \to z$	Supposition (R3) IP
19	$y \to (y \to (r \vee s))$	18,3,I13
20	$(y \wedge y) \to (r \vee s)$	19,E23
21	$y \to (r \vee s)$	20,E6
22	$\neg(r \vee s) \to \neg y$	21,E11
23	$\neg y$	22,17,I11
24	$(y \to z) \to \neg y$	18-23, IP/R3

②(b)

1	$\neg\neg X$	Supposition IP/R3			
2	$\neg\neg X \to (\neg X \to \neg\neg X)$	A1	9	$\neg X \to (\neg X \to \neg X)$	A1
3	$(\neg X \to \neg\neg X) \to ((\neg X \to \neg X) \to X)$	A3	10	$\neg X \to \neg X$	8,9 MP
4	$\neg X \to \neg\neg X$	1,2 MP	11	X	10,5 MP
5	$(\neg X \to \neg X) \to X$	3,4 MP	12	$\neg\neg X \to X$	1-11 deduction law IP/R3
6	$\neg X \to ((\neg X \to \neg X) \to \neg X)$	A1			
7	$(\neg X \to ((\neg X \to \neg X) \to \neg X)) \to ((\neg X \to (\neg X \to \neg X)) \to (\neg X \to \neg X))$	A2			
8	$((\neg X \to (\neg X \to \neg X)) \to (\neg X \to \neg X))$	6,7 MP			

③ⓑ

1	$\neg\alpha$	deduction IP
2	α	deduction IP
3	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to \beta)$	A3
4	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	A1 $\{\begin{array}{l}\alpha = \neg\alpha \\ \beta = \neg\beta\end{array}$
5	$\neg\beta \to \neg\alpha$	1,4 MP
6	$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	3,5 BP
7	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	A1 $\{\begin{array}{l}\alpha = \alpha \\ \beta = \neg\beta\end{array}$
8	$\neg\beta \to \alpha$	2,7 MP
9	β	6,8 mp

ⓓ

1	$\neg\beta \to \neg\alpha$	deduction IP
2	α	deduction IP
3	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	A3
4	$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	1,3 mp
5	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	A1 $\{\begin{array}{l}\alpha = \alpha \\ \beta = \neg\beta\end{array}$
6	$\neg\beta \to \alpha$	2,5 mp
7	β	4,6 mp

④ A1! $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

1	α	supposition (B3/IP)
2	$\beta \to \alpha$	1, I7
3	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	1-2, B3/IP

A2! $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

1	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$	supp (SP/A3)
2	$(\alpha \to \beta)$	supp (IP/B3)
3	α	supp (SP/B3)
4	$\beta \to \gamma$	1,3 I11
5	β	2,3 I11
6	γ	4,5 I11
7	$\alpha \to \gamma$	3-6 SP/B3
8	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	2-7 IP/B3
9	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	1-8, SP/B3

A3! $(\neg\beta \to \alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$

1	$(\neg\beta \to \neg\alpha)$	supp (IP/B3)
2	$(\neg\beta \to \alpha)$	supp (SP/B3)
3	$\neg\alpha \to \beta$	2, E21
4	$\neg\beta \to \beta$	1,3 I13
5	$\beta \vee \beta$	4, E10
6	β	5, E5
7	$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	2-6, IP/B3
8	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	1-7 IP/B3

⑤

1	$\neg(R \to S)$	P
2	$(\neg R \to \neg(R \to S)) \to ((\neg R \to (R \to S)) \to R)$	A3 $\begin{cases} \alpha = (R \to S) \\ \beta = R \end{cases}$
3	$\neg(R \to S) \to (\neg R \to \neg(R \to S))$	A1 $\begin{cases} \alpha = \neg(R \to S) \\ \beta = \neg R \end{cases}$
4	$\neg R \to \neg(R \to S)$	1,3 MP
5	$(\neg R \to (R \to S)) \to R$	2,4 MP
6	$\neg R \to (R \to S)$	A3 $\begin{cases} \alpha = R \\ \beta = S \end{cases}$
7	R	5,6 MP