בס"ד

תרגיל 11 דיסקרטית

① (א) נתון $f:A\to B$ הפיכה, קיימת פונ' $f^{-1}:B\to A$ כך ש:

$f\circ f^{-1}=I_B$

$f^{-1}\circ f=I_A$

נתון $f^{-1}:B\to A$ הפיכה קיימת פונ' $f:A\to B$ כך ש:

$f\circ f^{-1}=I_B$

$f^{-1}\circ f=I_A$

ואכן לפי הנתון זה מתקיים ולכן f^{-1} הינה הפיכה

(ב) • $g:B\to C$ הפיכה, קיימת פונ' $g^{-1}:C\to B$ כך ש:

$g\circ g^{-1}=I_C$

$g^{-1}\circ g=I_B$

• $f:A\to B$ פונ' הפיכה, קיימת פונ' $f^{-1}:B\to A$ כך ש: $f\circ f^{-1}=I_B$

$f^{-1}\circ f=I_A$

רוצים להוכיח כי $g\circ f:A\to C$ פונ' הפיכה, כלומר שקיימת $(g\circ f)^{-1}$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ — $f^{-1}\circ g^{-1}:C\to A$

צריך להוכיח ש:

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=I_C$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=I_A$$

$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(f\circ g)$

$(f^{-1}\circ \underbrace{g^{-1}\circ g}\circ f = f^{-1}\circ I_B\circ f$

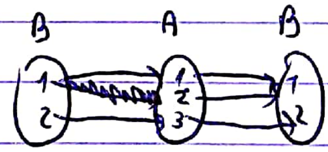
$f^{-1}\circ f=I_A$

$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$

$= g\circ\underbrace{f\circ f^{-1}}\circ g^{-1}$

$g\circ I_B\circ g^{-1} = g\circ g^{-1}=I_C$

③



$g(2)=3$ $f(3)=2$

$g(1)=2$ או $g(1)=1$ $f(1)=f(2)=1$

היות והפונ' f על B, אזי לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$ (לפחות אחד)

לכן נבנה פונקציה $g:B\to A$ כך ש- $g(b)=a$, (אם יש כמה אפשרויות, נבחר את אחת מהן)

אז! $f\circ g(b)=f(a)=b$ כלומר $f\circ g=I_B$

א ב

<u>הוכחה:</u> נפעיל על הפונקציה את ההרכבה $g \circ f$

$$g \circ f\,(g(z)+g(t)) =$$

$$g \circ (\cancel{f \circ g}(z) * \cancel{f \circ g}(t)) =$$

$$= g \circ ((z) \times (t)) =$$

$$g(z)+g(t)$$

לפי הנתון! ומציין ש-g ו-f הן הפכיות הם מתבטלות

ב) i) $\log_b y^2 = 2\log_b y$

$$\log_b y^2$$

$$b^{2\log_b y} = y^2$$ לפי הגדרת $\log$

נשתמש ב פונקציה מעריכית $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ \

$$b^{2\log_b y} = b^{\log_b y} \cdot b^{\log_b y}$$

$$y \cdot y = y^2 = R$$

<u>מ.ש.ל</u>

ii) $\log_{\sqrt{b}} b = 2$

$$\sqrt{b}^2 = b$$

$$b = b$$

מ.ש.ל

iii) $(\log_a b) \times (\log_b c) = \log_a c$

<u>הגדרה 1</u>

$$\log_a b = x$$

$$\log_b c = y$$

$$a^x = b$$

$$b^y = c$$

$$(a^x)^y = b^y \quad \backslash \cdot (\,)^y$$

$$a^{xy} = b^y \Longleftrightarrow a^{xy} = c$$

$$\log_a c = xy$$ הגדרת הלוג

$$\log_a c = (\log_a b) \times (\log_b c)$$ \ הצבת ההגדרה

מ.ש.ל

סעיף

(iv)

$$\log_a b = \frac{1}{(\log_b a)}$$

נבדוק:

$$L = \log_a b = x$$

$$a^x = b \qquad / \sqrt[x]{\ }$$

$$a = \sqrt[x]{b} \iff a = b^{\frac{1}{x}}$$

נפעיל log /

$$= \log_b a = \frac{1}{x}$$

נוכיח ש:

$$R = \frac{1}{\log_b a} = x$$

$$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{\log_b a} = x$$

גם L ~~[illegible]~~ שווה ל:

$$\log_a b = x$$

$$x = x$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

ק) ד)

כן

כאשר קיים פונקציה חחע וכאשר נפעיל עליה שוב את הפונקציה עדיין נקבל פונקציה חחע

לדוג': $f(n)=2n$

$f\circ f(n)=2(2n)=4n$

א) כן ~~הפונקציה~~

בפונקציה הזהות לכל $a\in A$ קיים $f(a)$ והפונקציה $f:A\to A$

אז $f(a)=f(a)$ $a=a$, לכן הפונקציה על.

ב) לא,

$f(n)=x \quad g(x)=-x$

$f+g: R\to R$

0 מספר אשר נקבל? $x+(-x)=0$

$(f+g)(n)$, נקבל שווה ל-0 וזה בסתירה להגדרה על חח"ע

ג) לא,

$f(n)=n \quad g(n)=n \quad (f+g)(n)=2n$

$(f+g)(n)=2n$ אינה פונקצית על, כיוון

$n\in R$ כך ש- $(f+g)(n)=1$

$2n=1$

$n=\frac{1}{2}$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}\in R}$

ד) כן,

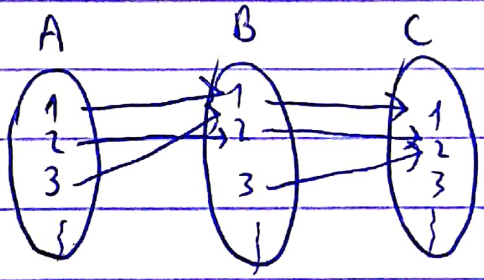
כאשר $a,b\in A$ $\quad a\neq b$ $\quad f(a)=f(b)$ ושן אינה חח"ע

ו- $f(b)=f(a)=c$ $\quad c\in B$ $\quad$ ו- $d\in C$ $\quad g(c)=d$

אז $(f\circ g)(a)=d$

$(f\circ g)(b)=d$

הפונ' אינה חח"ע



(5) (א) $A = \mathbb{N} \cup \{-1\}, B = \mathbb{N}$

הפיכה $f: A \to B$

קיימת $f^{-1}: B \to A$

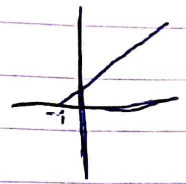
נוכיח שהפונ' אכן הפיכה ע"י $f \circ f^{-1}(x) = I_B$

$f^{-1} \circ f(x) = I_A$

$f \circ f^{-1}(x) = f(\mathbb{N} \cup \{-1\}) = \mathbb{N} = I_B$

$f^{-1}(x) \circ f = f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{-1\} = I_A$

לדוגמה:



$-1 \leq x$

$0 \leq y$ $\quad y = x+1$

(ב) $A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{N}$

הפיכה $f: A \to B$

קיימת $f^{-1}: B \to A$

נוכיח שהפונ' אכן הפיכה, ע"י, $f \circ f^{-1}(x) = I_B$

$f^{-1} \circ f(x) = I_A$

$f \circ f^{-1}(x) = f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N} = I_B$

$f^{-1} \circ f(x) = f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z} = I_A$

לדוגמה:

$f(\underset{z}{-1}) = (\underset{z}{-1})^2 = \underset{n}{1}$

$f(x) = x^2$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^2$

(ג) $A = \mathbb{Z}$, ~~B~~

$B = 3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

הפיכה $f: A \to B$

קיימת $f^{-1}: B \to A$

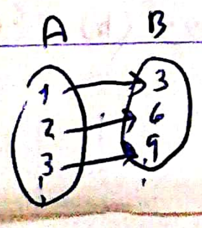
נוכיח שהפונ' אכן הפיכה ע"י $f \circ f^{-1} = I_B$

$f^{-1} \circ f = I_A$

$f \circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{\mathbb{Z}}{3}\right) = \frac{3\mathbb{Z}}{3} = \mathbb{Z} = I_A$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(3\mathbb{Z}) = \frac{3\mathbb{Z}}{3} = \mathbb{Z} = I_A$

$f(\mathbb{Z}) = 3\mathbb{Z}$



לדוגמה!