1) א) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_1]{R_2 = R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 \cdot -\frac{1}{3}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_3]{R_1 = R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Big/ \cdot A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ולכן פתרון המערכת הוא:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

קודם?

ב) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

נשתמש במשפט:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ולכן נכפול את המשוואה ב- $(A^t)^{-1}$ (נקבל):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{4} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\frac{2}{3} \\ 5 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

ולכן פתרון המערכת הינו

$$x_1 = 6\frac{2}{3}$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = -\frac{4}{3}$$

(2)

$$\boxed{A}\;\boxed{} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

נבחר עבור $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ מתקיים

$$A\cdot\vec{e}_1=\vec{0}$$

הנתון אומר ש-

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}}_{\text{העמודה הראשונה של } A}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\text{מהנתון}}$$

קיבלנו שהעמודה הראשונה של A אפסים.

$$\vec{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}}_{\text{העמודה השנייה של } A}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\text{מהנתון}}$$

לכן העמודה השנייה של A שווה 0.

$$\vec{e}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

המיקום ה-i $\rightarrow$ 1

עבור $1\le i\le n$ מהנתון $A\cdot\vec{e}_i=\vec{0}$

אבל $A\cdot\vec{e}_i$ שווה לעמודה ה-i של A.

לכן העמודה ה-i של A שווה ל-$\vec{0}$

עמ' 26

(3) (א) $A \in M_{m \times n}(F)$

3ג: סכום איברי אלכסון A $tr(AA^t) =$

$$m\{\boxed{A}\}^{n} \; n\{\boxed{A^t}\}^{m}_{b_{ij}} = m\{\boxed{A \cdot A^t}\}^{m}$$

$$A = (a_{ij})$$
$$A^t = (b_{ij}) \qquad b_{ij} = a_{ji}$$

$$(AA^t)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$(AA^t)_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \dots + a_{in}b_{ni} =$$
$$a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + \dots + a_{in}a_{in} =$$
$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2$$

$$(AA^t) = (AA^t)_{11} + (AA^t)_{22} + \dots + (AA^t)_{mm} =$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 +$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 +$$
$$\vdots$$
$$+ a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \dots + a_{mn}^2$$

(ב) הוכחה: נתון $A \cdot A^t = 0$

לכן $tr(A \cdot A^t) = 0$

מסעיף א' נובע $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$

מתקיים $0 \le a_{ij}^2$

לכן הסכום שווה 0 אמ"מ לכל $1 \le i \le m$ ולכל $1 \le j \le n$

$a_{ij} = 0$ כלומר $A = 0$

(5) (i) ד: $i^2 = -1$

מחפשים מטריצה $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ כך ש $AA^t = 0$ אך $A \ne 0$

ג.2

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$i^2 + 1^2 = -1 + 1 = 0$

$\mathbb{Z}_5$

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{Z}_5$ בשדה

$1^2 + 2^2 = 0$

Scanned by CamScanner

(4) כן A הפיכה ו- B הפיכה

$$(AB)\cdot(AB)^{-1}=I \Rightarrow (AB)\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=I \Rightarrow A(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=I$$

נניח ש- B הפיכה:

$$(AB)\cdot(AB)^{-1}=I \Rightarrow AB\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=I$$ / נכפיל ב- A^{-1} משמאל כיוון שהוכחנו מקודם ש- A הפיכה

$$=\underbrace{A^{-1}A}_{I}BB^{-1}A^{-1}=A^{-1} \quad BB^{-1}A^{-1}=A^{-1}$$ / נכפיל ב- A מימין

$$=BB^{-1}A^{-1}A=A^{-1}A=B\cdot B^{-1}\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}=I$$

$$B\cdot B^{-1}=I$$

(5) אם $A\cdot\vec{X}=0$ קיים פתרון טריוויאלי אז זה אומר שקיבל שורת אפסים ולא ניתן לדרג את המטריצה וזה אומר ש- A היא לא הפיכה

לכן $B=A^{t}\cdot A$ אז נניח ש- B היא הפיכה, אם B הפיכה אז מה שהוכחנו בשאלה 4, כי A הפיכה וגם A^{t} הפיכה, אך A לא הפיכה

סתירה, ולכן B אינה הפיכה, אם B אינה הפיכה, אז למערכת $B\cdot\vec{X}=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי

(6) (א) נתון $A\cdot\vec{c_1}=0$ ו- $A\cdot\vec{c_2}=0$ צ"ל $A\cdot(t\vec{c_1}+t\vec{c_2})=\vec{0}$

$$\underbrace{At\vec{c_1}+At\vec{c_2}}_{\text{לפי התכונה ש-}} \Rightarrow t(\underbrace{A\vec{c_1}}_{0})+t(\underbrace{A\vec{c_2}}_{\text{לפי שהוכחנו } 0})=t\cdot\vec{0}+t\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

$A(B+C)=AB+AC$

לפי התכונה t סקלר ו- A,0 מטריצות

אז $(tA)B=A(tB)\cdot t(AB)$ כיון שהמכפלה מוגדרת עבור $A_{n\times n}$ ו- $t\vec{c_1}_{n\times 1}$

אז $A\cdot t\vec{c_1}$ מוגדרת ותהיה מסדר $M\times 1$

(1) נתון $A\cdot\vec{d}_1=\vec{b}$ ו- $A\cdot\vec{d}_2=\vec{b}$ צ"ל $A\cdot(\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2)=\vec{b}$

$$A\cdot(\vec{d}_1-\vec{d}_2)=\underbrace{A\vec{d}_1-A\vec{d}_2}_{\text{לפי התכונה}}=\underbrace{\vec{b}-\vec{b}}_{\text{לפי הנתון}}=0$$

לפי התכונה $A(B+C)=AB+AC$ -ש

וכיוון שהמכפלה מוגדרת בסדר

מטריצות מסדר כי

$A_{m\times n}$ $\vec{d}_2\cdot\vec{d}_1$ $_{n\times 1}$ אזי המכפלה

$A\cdot\vec{d}_1$ ו- $A\cdot\vec{d}_2$ מוגדרת

(2) נתון $A\cdot\vec{c}=\vec{0}$ ו- $A\cdot\vec{d}=\vec{b}$ צ"ל $A\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{b}$

הוכחה:

$$A(\vec{c}+\vec{b})=\underbrace{A\vec{c}+A\vec{b}}_{\text{לפי התכונה}}=\underbrace{\vec{0}+\vec{b}}_{\text{לפי הנתון}}=\vec{b}$$

לפי התכונה $A(B+C)=AB+AC$

נכון שהכפלה מוגדרת כיוון

ש- $A_{m\times n}$ ו- $\vec{c}_{n\times 1}$

ו- $\vec{d}_{n\times 1}$ אזי

$\underbrace{A_{m\times n}\cdot d_{n\times 1}}_{\text{מוגדר}}$ מוגדר כמו כן $A_{m\times n}\cdot\vec{c}_{n\times 1}$

(3) נתון לך קבוצה G הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\cdot\vec{x}=\vec{0}$

ו- d_0 פתרון ספציפי $A\cdot\vec{d}_0=\vec{0}$, T קבוצת G הפתרונות

של המערכת הלא הומוגנית $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ צ"ל: $T=\vec{d}_0+S=\{\vec{d}_0+\vec{c}\mid\vec{c}\in S\}$

כלומר $A\cdot T=\vec{b}$ (קבוצה) צ"ל: $T=\vec{d}_0+\vec{c}$ כך ש- $\vec{c}\in S$

הוכחה:

$$\underbrace{A(\vec{d}_0+\vec{c})}_{\text{לפי התכונה}}=A\cdot\vec{d}_0+\underbrace{A\vec{c}}$$

$\vec{c}$ שייך ל- S ולכן לפי הנתון $A\cdot\vec{c}=\vec{0}$

$A(B+C)=AB+AC$

ולכן $A\cdot\vec{d}_0+A\vec{c}=A\vec{d}_0+\vec{0}=$

וזאת כי שהמכפלה מוגדרת

$$=\underbrace{A\cdot\vec{d}_0=\vec{b}}_{\text{לפי הנתון}}$$