פתרון שאלה 1 **סעיף** א

טענה: לכל $n \geq 0$ מתקיים לפי הנתון $\forall n \geq 2: f(n) = f(n-1)+f(n-2)$, $f(0)=f(1)=1$ – [illegible] הנוסחה הבאה

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $P(n)$ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

בסיס האינדוקציה

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$$

ואכן $P(0)$ **מתקיים.**

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור n **מסויים מתקיים:** לכל $m \leq n$:

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right]$$

צריך להוכיח:

$$P(n+1): f(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

הוכחה: לפי הנתון $f(n+1) = f(n+1-1)+f(n+1-2) \rightarrow f(n+1) = f(n)+f(n-1)$

לפי הנחת האינדוקציה השלמה מתקיימת עבור 0 עד N [illegible] $n+1$ ולכן

ולפי הנחת האינדוקציה

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

וגם:

$$f(n-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

ולכן:

$$f(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] +$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] = [illegible]$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 = 2.6180$ $\qquad$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1 = 0.381$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2.6180$ $\qquad$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0.381$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

pn

pn

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

פתרון שאלה 1 סעיף ק

טענה: לכל $n \geq 1$ מתקיים $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על n (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה

$n=1$

ואכן $P(1)$ מתקיים כדלק: $1^3=1$ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \geq 1$ מסוים מתקיים: $P(n)$

$1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

צריך להוכיח: $P(n+1)$

$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\dots+n+(n+1))^2$

הוכחה:

עפ"י הנחת האינדוקציה

שימוש בנוסחה: $S_n=\frac{n[2a_1+d(n-1)]}{2}$

$(1+2+\dots+n)$: $a_1=1$, $d=1$

$S_n=\frac{n[2+(n-1)]}{2}$ // $(1+2+\dots+n)^2=\left(\frac{n[2+(n-1)]}{2}\right)^2=$

$\left(\frac{n[n+1]}{2}\right)^2=\frac{n^2[n+1]^2}{4^2}$

לכן:

$(1+2+\dots+n)^2+(n+1)^3=\frac{n^2[n+1]^2}{4}+(n+1)^3=$

$\frac{n^2[n+1]^2+(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2[n^2+(n+1)\cdot 4]}{4}=\frac{(n+1)^2[n^2+4n+4]}{4}=$

$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

ועכשיו אנו צריכים להוכיח שזה שווה ל

$$(1+2+\ldots+n+n+1)^2$$

לפי נוסחת הסכום

$$(1+2+\ldots+n+n+1)^2=\left(\frac{(n+1)[2+(n-1+1)]}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Scanned by CamScanner

פתרון שאלה __1__ סעיף __2__

טענה: לכל $n\geq 1$ מתקיים $a_1+a_2+\dots+a_n=a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על __n__ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה $n=1$

$$a_1\left(\cancel{\frac{q^1-1}{q-1}}\right)=a_1$$

ואכן __$P(1)$ מתקיים הגדרה $S_1=a_1$__ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור __$n\geq 1$__ מסוים מתקיים: __$P(n)$__

$$a_1+a_2+\dots+a_n=a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

צריך להוכיח:

$$a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) \qquad P(n+1)$$

הוכחה:

$$\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}+a_{n+1}=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

$$a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)+a_{n+1}=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

נתון: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

הגדרה:

$$a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)+a_1q^n=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

$$a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{q^n(q-1)}{q-1}\right)=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

$$a_1\left(\frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1}\right)=a_1\left(\frac{q^n(1+q-1)-1}{q-1}\right)=a_1\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

מסקנה: (1) מתקיים $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ עבור $n\geq 1$ ולכן

$P(n)$ מתקיים עבור כל $n\geq 1$ עקרון האינדוקציה

פתרון שאלה __1__ סעיף __2__

טענה: לכל $n \ge 1$ מתקיים $5 \mid [8^n - 3^n]$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על $\mathbb{N}$ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

__בסיס האינדוקציה__

$n=1$

ואכן $P(1)$ מתקיים הבדיקה: $5 \mid [8^1 - 3^1] = 1$ מתקיים.

__צעד האינדוקציה__

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \ge 1$ מסוים מתקיים: $P(n)$

$5 \mid [8^n - 3^n]$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$

$5 \mid [8^{n+1} - 3^{n+1}]$

הוכחה:

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = 8^n \cdot 8 - 3^n \cdot 3 =$$

$$8^n \cdot (3+5) - 3^n \cdot 3 = 8^n \cdot 3 + 8^n \cdot 5 - 3^n \cdot 3 =$$

$$\underbrace{3(8^n - 3^n)}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה מתחלק ב-5}} + \underbrace{8^n \cdot 5}_{\text{מתחלק ב-5}}$$

$5 \mid 3[8^n - 3^n]$ ✓

$5 \mid 8^n \cdot 5$ ✓

ולכן

$$5 \mid [8^{n+1} - 3^{n+1}] \Leftarrow 5 \mid 3[8^n - 3^n] + 8^n \cdot 5$$

מסקנה:

$P(1)$ מתקיים $P(n) \rightarrow P(n+1)$ עבור כל n ולכן $P(n)$ מתקיים

עבור $\forall$ $n \ge 1$

פתרון שאלה 1 סעיף ה

טענה: לכל $n \ge 5$ מתקיים $4n < 2^n$

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על ______ (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

בסיס האינדוקציה

$n=5$

ואכן $P(5)$ מתקיים הצבה $20<32$ $4 \cdot 5 < 2^5 =$ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \ge 5$ מסויים מתקיים: $P(n)$

$4n < 2^n$

צריך להוכיח:

$P(n+1)$ $4(n+1) < 2^{n+1}$

הוכחה:

$4n < 2^n \quad /\cdot 2$

$8n < 2^{n+1}$

$8n < 2^n \cdot 2$

עכשיו נוכיח ש- $4(n+1) \le 8n$ נקבל $a<b$ ו- $b<c$ ולכן $a<c$

נבדוק לאיזה ערכים מתקיים $4(n+1) \le 8n$

$4n+4 \le 8n$

$4 \le 4n$

$n \ge 1$ וזה גם הוא מתקיים ל- $n \ge 5$

וקיבלנו $4(n+1) \le 8n < 2^{n+1}$ $4(n+1) < 2^{n+1}$

מסקנה

הוכחנו ש- $P(5)$ מתקיים $P(n) \rightarrow P(n+1)$ עבור $n \ge 5$ לכן $P(n)$ מתקיים

עבור כל $n \ge 5$

פתרון שאלה 1 **סעיף** 1

טענה: לכל $n \geq 30$ מתקיים $n = 6x+7y$ כאשר x, y טבעיים

הוכחה: באינדוקציה רגילה / שלמה על N (מיחקו את המיותר, השלימו את החסר)

$P(35)$ $P(34)$ $P(33)$ $P(32)$ $P(31)$ $P(30)$

בסיס האינדוקציה

$n=30$

$P(30) = 6\cdot 5 + 7\cdot 0$ $y=0$ $x=5$ | $P(31) = 6\cdot 4 + 7\cdot 1$ $x=4$ $y=1$ | $P(32) = 6\cdot 3 + 7\cdot 2$ $x=3$ $y=2$

$P(33) = 6\cdot 2 + 7\cdot 3$ $x=2$ $y=3$ | $P(34) = 6\cdot 1 + 7\cdot 4$ $x=1$ $y=4$

$P(35) = 6\cdot 0 + 7\cdot 5$ $x=0$ $y=5$

ואכן $P(30)$ $P(31)$ $P(32)$ $P(33)$ $P(34)$ $P(35)$ מתקיים.

צעד האינדוקציה

נתון (או הנחת האינדוקציה):

עבור $n \geq 35$ מסויים מתקיים: לכל $30 \leq t < n$ קיימים $x, y \in N$

כך ש- $t = 6x+7y$

צריך להוכיח:

קיימים $x, y \in N$ כך ש- $n = 6x+7y$

הוכחה:

להיות n נתון, $t = n-6$ אז $30 \leq t$ אז קיימים (לפי הנחת האינדוקציה)

$x, y \in N$ כך ש: $t = 6x+7y$ וכן ($t = n-6$ כי)

$\downarrow$

$n-6 = 6x(n-6) + 7x(n-6)$

נסמן $(n-6)$ x, y כיוון שאלו x ו-y שונים שהגיעו אותם למצבה הקודם של t וכו':

$n-6 = 6x_{n-6} + 7x_{n-6} \quad / +6$

$n = 6x_{n-6} + 7x_{n-6} + 6 \rightarrow n = 6\underbrace{(x_{n-6} + 1)}_{x_n} + \underbrace{7x_{n-6}}_{y_n}$

מצאנו ש- $x_n = x_{n-6} + 1 \in N$ ו- $y_n = y_{n-6} \in N$

ראינו שקיימים 2 מס' טבעיים $x_n, y_n \in N$ כך ש- $n = 6x+7y$

הוכחנו את 6 המספרים הראשונים ישר והוכחנו $n \geq 30$ כי לכל $P(n)$ ($\forall n$ ו-t)

לכן עפ"י עיקרון האינדוקציה $P(n)$ נכונה לכל $n \geq 30$ $\leftarrow$ **הסימון:** אנחנו

נכון כן ו- $30 \leq n-6$

$36 \leq n$

לכן הוכחנו בהתחלה את כל $n = 30, 31, 32, 33, 34, 35$ הבסיס 2 נכונה.

Scanned by CamScanner

בס"ד

$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots+\frac{1}{10^n}$ (3)

$a_1=\frac{1}{10}$

$q=\frac{1}{10}$

$S=\dfrac{\frac{1}{10}((\frac{1}{10})^n-1)}{\frac{1}{10}-1}=$

$\dfrac{\frac{1}{10}((\frac{1}{10})^n-1)}{-\frac{9}{10}}=-\frac{1}{9}((\frac{1}{10})^n-1)=S$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}$ (א) (2)

$a_1=\frac{1}{2}$

$q=\frac{1}{2}$

$S=\dfrac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-1)}{\frac{1}{2}-1}=$

$\dfrac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-1)}{-\frac{1}{2}}=-((\frac{1}{2})^n-1)=$

$S=-(\frac{1}{2})^n+1$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots+\frac{1}{3^n}$ (2)

$a_1=\frac{1}{3}$

$q=\frac{1}{3}$

$S=\dfrac{\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^n-1)}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^n-1)}{-\frac{2}{3}}=$

$S=-\frac{1}{2}((\frac{1}{3})^n-1)$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{4^n}$ (2)

$a_1=\frac{1}{4}$

$q=\frac{1}{4}$

$S=\dfrac{\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^n-1)}{\frac{1}{4}-1}=\dfrac{\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^n-1)}{-\frac{3}{4}}=$

$S=-\frac{1}{3}((\frac{1}{4})^n-1)$

קסם

③ (א) $f(x) = x^2 + 5$

הבדיקה: $x = 2$

$f(2) = 2^2 + 5 = 9$

$x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

הפונ' אינה חח"ע כיוון ש- $9 = f(-2) = f(2)$ (קורדינטות שונות)

הפונ' אינה על כיוון שאין x ש- $f(x) = -1$

$x^2 + 5 = -1$

$x^2 = -6$ = סתירה R^2 מאוד
ריבוע מס' חיובי, אין פתרון

ב) $f(x) = 3x + 12$

הבדיקה: $x = 1$

$f(1) = 3 \cdot 1 + 12 = 15$

$x = 2$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 12 = 18$

$3a + 12 = 3b + 12$
$3a = 3b$
$a = b$

הפונ' היא חח"ע אבל היא אינה על כיוון שאין x ש- $f(x) = 16$

$16 = 3x + 12 \quad 4 = 3x \quad x = \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \notin Z$

② $f(x) = x^3 - 3$

הבדיקה: $x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 = -4$

$x = 0$

$f(0) = 0^3 - 3 = -3$

$x = 1$

$f(1) = 1^3 - 3 = -2$

$x = 2$

$f(2) = 2^3 - 3 = 5$

$a^3 - 3 = b^3 - 3$
$a^3 = b^3$
$a = b$

הפונ' היא חח"ע אבל קיים אינה על כיוון שאין x

$f(x) = 3$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 - 3 = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3 = -\infty$

פונ' רציפה פולינום

③ $f(x) = x^4 - 2$

הבדיקה: $x = 1$

$f(1) = 1^4 - 2 = -1$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^4 - 2 = -1$

$x = 2$

$f(2) = 2^4 - 2 = 14$

$a^4 - 2 = b^4 - 2$
$a^4 = b^4$
$a = b$

הפונ' היא אינה חח"ע אבל הפונ' אינה על כיוון שאין x $f(x) = 5$

כי $f(1) = f(-1) = -1$

$x^4 - 2 = 5$ (?3)

$x^4 = 7$

אין פתרון $R - ?$

ולכן לא קיים פתרון ל- $f(x) = 5$

3 ה

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & 2|n \\ n-1 & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח שהיא חח"ע אם $f(a)=f(b)$

אז יש 4 אפשרויות: ★ $2|a$ וגם $2|b$

$f(a)=f(b)$

$a+1=b+1 \quad /-1$

$a=b$

★ $2\nmid a$ וגם $2\nmid b$ אז $f(a)=f(b)$

$a-1=b-1 \quad /+1$

$a=b$ הפונ' חח"ע

★ או $2|a$ אבל $2\nmid b$ אז $f(a) \; f(b)$

$a+1 \quad b-1$

וכיוון ש-b הוא אי זוגי אזי $b=2k+1$ כך ש- $k\in\mathbb{Z}$ ולכן:

$b-1=2k+1 /-1 \Leftarrow b=2k+2=$ מס' זוגי ואז מס' זוגי $=f(b)$

כיוון ש-a זוגי אזי $a=2l$ כך ש- $l\in\mathbb{Z}$

מכאן $a-1=2l \Leftarrow \underbrace{a=2l+1}_{\text{מס' אי זוגי}} = F(a)$ ואז מס' אי זוגי $=f(a)$

קיבלנו $f(a)=f(b)$ ולכן יש סתירה.

זוגי אי זוגי

האפשרות הרביעית היא $2\nmid a$ וגם $2|b$ וזה אותו הוכחה כנ"ל

נוכיח שהפונ' היא על אם $a\in\mathbb{N}$ קיים $a'\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(a')=a$

אם $2|a$ אז $f(a')=a \Leftarrow a'+1=a \Leftarrow a'=a-1$

אם $2\nmid a$ אז $f(a')=a \Leftarrow a'-1=a \Leftarrow a'=a+1 \quad a'\in\mathbb{N}$

4) א) לכל $a\in A$, אז $(a,a)\in R$ כי R רפלקסיבי

$(a,a)\in R$ כי T רפלקסיבי

לכן $(a,a)\in R\cap T$ לכן היחס הזה רפלקסיבי

<u>לדוגמא:</u> נבחר קבוצה $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3)\}$ רפלקסיבי

$T=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(2,1)\}$ רפלקסיבי

$R\cap T=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ לכן $R\cap T$ רפלקסיבי

ב) לכל $a\in A$, אז $(a,a)\in R$ כי R רפלקסיבי

$(a,a)\in R$ כי T רפלקסיבי

לכן $(a,a)\in R\cup T$ לכן היחס הזה רפלקסיבי

<u>לדוגמא:</u> נבחר קבוצה $A=\{1,2,3\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,2)\}$ רפלקסיבי

$T=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,4),(2,1)\}$ רפלקסיבי

$R\cup T=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,2),(3,4),(2,1)\}$

לכן $R\cup T$ רפלקסיבי

ג) אם $(a,b)\in R\cap T$ אז $(a,b)\in R$ וגם $(a,b)\in T$

• R יחס סימטרי, לכן $(b,a)\in R$

• T יחס סימטרי, לכן $(b,a)\in T$

לכן $(b,a)\in R\cap T$, כלומר $R\cap T$ הוא יחס סימטרי

<u>לדוגמא:</u> נבחר קבוצה $A=\{1,2,3\}$

$R=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ סימטרי

$T=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(2,2)\}$ סימטרי

$R\cap T=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

לכן $R\cap T$ סימטרי

ה) ד) נבחר קבוצה $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,2),(2,1),(3,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ סימטרי

$T=\{(3,4),(4,3),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ סימטרי

$R\cap T=\{(3,4),(4,3)\}$

לכן $R\cap T$ טרנזיטיבי