לינארית

(1) נניח שכן $1=0$ מתקיים לכל $a \in \mathbb{R}$

$$a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

1 הוא הנייטרלי לכפל $0=1$ מתכונות השדה קיבלנו.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ 2 & -39 \end{pmatrix}$$

הכוונה הוא ... G התנאים *

2) **שאלה**: האם חוג המטריצות מסדר 2x2 הוא חוג?*

נבדוק אם מתקיימים G התנאים:

- סגירות מתקיים, חיבור של 2 מטריצות מסדר 2x2 הינו מטריצה מסדר 2x2.
- קומוטטיביות

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} \checkmark$$

כיוון שהחיבור מספרים קומוטטיבי, חיבור המטריצות קומוטטיבי

- אסוציאטיביות

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix} \checkmark$$

- קיים איבר האפס; נגדיר את האיבר האפס להיות מטריצה מסדר 2x2 שאיבריה אפסים, ומתקיים

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ב״ה

- קיים איבר נגדי

לכל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נגדיר את המטריצה הנגדית להיות $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

ומקיימת

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעבור חוקי הכפל:

- סגירות, מכפלה של מטריצות מסדר $2x2$ היא מטריצה מסדר $2x2$ עפ״י ההגדרה.
- אסוציאטיביות

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a\cdot e+b\cdot g & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)\cdot k & (ae+bg)j+(af+bh)l \\ (ce+dg)i+(cf+dh)k & (ce+dg)j+(cf+dh)l \end{pmatrix} \overset{?}{=}$$

$$\begin{pmatrix} a(ei+fk)+b(gi+hk) & a(ej+fl)+b(gj+hl) \\ c(ei+fk)+d(gi+hk) & c(ej+fl)+d(gj+hl) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cej+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgj+dhl \end{pmatrix} \checkmark$$

- קיים איבר יחידה

ננסה לבדוק האם הוא איבר יחידה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \checkmark$$

הערה: חוק הפילוג מתקיים בחוג, כלומר

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

③ לא ב- R יש יחידה ימנית אך לא שמאלית, אך ימנית

למשל 1 ש- $c \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$ (k) (4)

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} \in S$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \in S$$

Scanned by CamScanner

... יק חיבוריין

9

תרגיל: 8

נתון חוג R קומוטטיבי, נתבונן בחוג $R[2\times2]$

בדקו האם הקבוצות הבאות סגורות קיים לכפל ~~[illegible]~~ וחיבור

(תת-חוג)

$$D=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in R\right\}$$

you need to check that no matter what you put in a and b, the two zeros will stay zero. if they don't, that mean it's not סגור

נבדוק סגירות לחיבור

יהיו $\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\in D$

$$\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&0\\0&d+b\end{pmatrix}\in D$$

$a+c,\ b+d\in R$ כיוון ש-R חוג ולכן סגור לחיבור.

קפ׳

נבדוק סגירות לכפל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in D$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4 \\ 0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$ סגור לכפל

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot c+0\cdot0 & a\cdot0+0\cdot d \\ 0\cdot c+b\cdot0 & 0\cdot0+b\cdot d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} \in D$$

$ac, bd \in R$ כיון ש- R חוג והוא סגור לכפל.

② מטריצות - תרגיל

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

נבדוק סגירות חיבור:

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in C$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in C$$

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+c & -(d+b) \\ d+b & c+a \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

סגור לחיבור

נבדוק סגירות כפל:

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ac-bd & \underbrace{-bc-da}_{-(bc+da)} \\ da+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot1+2\cdot-2 & 3\cdot-2+1\cdot-2 \\ 2\cdot1+3\cdot2 & -2\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$ סגור לכפל

$ac-bd, bc+da \in R$

כיון ש- R חוג והוא סגור לכפל וחיבור.

3 4

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a \in R \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a+b \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \in K$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{bmatrix} \in K$$

$M=$ (ג)

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \in M, \quad \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$$

$$\underset{A+B}{\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{A \cdot B}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

נבדוק סגירות לכפל M?

יהיו $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$

נתון

$a^2+b^2=1 \quad c^2+d^2=1$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$-ad-bc \rightarrow -(bc+ad)$

נבדוק תנאי

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2 = a^2c^2-2acbd+b^2d^2$$
$$+b^2c^2+2abcd+a^2d^2$$
$$= a^2\underbrace{(c^2+d^2)}_{=1}+b^2\underbrace{(c^2+d^2)}_{=1}$$

$a^2+b^2=1$

נתון