דף ①

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 9 & 2 & -12 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

אז נקבל את A^{-1} אבל דירוג נחשב את det(A)

$$\left[\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{matrix} = -24+9=-15$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{(A)}$$

נשלח את adj(A) ~~...~~ ונחלק ב- -15 ונקבל

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{0}{15} & \frac{9}{-15} & -\frac{6}{15} \\ \frac{5}{15} & \frac{2}{-15} & \frac{-3}{-15} \\ \frac{0}{15} & \frac{-12}{-15} & \frac{3}{-15} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

רסק

ב. נפתור את המערכת הלינארית של שדה Z_7

באמצעות נוסחת קרמר

מטריצת המקדמים היא!

$$\begin{cases} 2x+3y+6z=1 \\ x+5y+4z=3 \\ 3x+2y+5z=2 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \vec{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

נחשב את $det(A)$:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$det(A)=(2\cdot5\cdot5)+(3\cdot4\cdot3)+(6\cdot1\cdot2)-(6\cdot5\cdot3)-(2\cdot4\cdot2)-(3\cdot1\cdot5)=$$

$$\underbrace{50+36+12}_{98}\underbrace{-90-16-15}_{121}=$$

$$98-121=-23$$

$det(A)=5 \neq 0$

לכן יש פתרון יחיד

$$x=\frac{\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{matrix}}{5}$$

הסבר:

$$x=(1\cdot5\cdot5+3\cdot4\cdot2+6\cdot3\cdot2-2\cdot5\cdot6-2\cdot4\cdot1-5\cdot3\cdot3):5=\frac{0}{5}=\boxed{0}$$

$$y=\frac{\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}}{5}$$

$$y=(2\cdot3\cdot5+1\cdot4\cdot3+6\cdot1\cdot2-3\cdot3\cdot6-2\cdot4\cdot2-5\cdot1\cdot1):5=\frac{0}{5}=\boxed{0}$$

$$z=\frac{\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}}{5}$$

$$z=(2\cdot5\cdot2+3\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot2-3\cdot5\cdot1-2\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot3):5=\frac{2}{5}=2\cdot5^{-1}=2\cdot3=\boxed{6}$$

$x=0 \quad y=0 \quad z=6$ פתרון!

3 (16) נתון $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ פתרון:

$$\det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

i: (i) $\det(a_1, a_2) = a_2 - a_1$

$$\underset{(2\times 2)}{\det(a_1, a_2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 = a_2 - a_1$$

(ii)

$$\underset{(3\times 3)}{\det(a_1, a_2, a_3)} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3\ (II)]{-R_1+R_2 \to R_2\ (I)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{2 \to (a_2-a_1) \\ 3 \to (a_3-a_1)}]{\text{הוצאנו גורם, מכפלה שורות}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 \\ 0 & 1 & a_3+a_1 \end{vmatrix} (a_2-a_1)(a_3-a_1)$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3 \to R_3} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 \\ 0 & 0 & a_3-a_2 \end{vmatrix} \xrightarrow[3 \to (a_3-a_2)]{\text{הוצאנו גורם, מכפלה שורה}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$

זוהי מטריצה משולשית עליונה.
לכן ה-det שלה היא מכפלת איברי האלכסון = 1, ובנוסף נכפיל
בקבועי ~~הכפלה~~ המכפלה שהוצאנו ונקבל

$$\det(a_1, a_2, a_3) = 1\cdot(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$

מש"ל

$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot \Delta(a_2, a_3, \dots, a_n)$ ג ב

טענה

$$\det(a_1,a_2,\dots a_n) : \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \vdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \vdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad -R_1+R_i \Rightarrow R_i \quad (i=2,3,\dots n)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1}-a_1^{n-1} \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & \cdots & a_3^{n-1}-a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n-a_1 & a_n^2-a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1}-a_1^{n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i=2,3,\dots n) \\ -a_1\cdot C_{i-1}+C_i \to C_i \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & a_2^2(a_2-a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ 0 & a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \cdots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & a_n^2(a_n-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

נוציא גורם

משותף

$(a_i - a_1)$

משורה i

$(i=2,3,\dots n)$

לפי פיתוח עמודה

1

$$(a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{\Delta(a_2, a_3, \dots, a_n)}$$

$$\Rightarrow \Delta(a_1, a_2, \dots a_n) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot \Delta(a_2, a_3, \dots a_n)$$

② ③ שאלה: הוכחה באינדוקציה כי:

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

לכל $n \geq 2$

הוכחה: בדיקת נכונות הטענה עבור $n=2$:

$$\Delta(a_1, a_2) = (a_2 - a_1)$$

הנחה לצעד k:

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, $(k \in \mathbb{N})$

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_k) = \prod_{1 \le j < i \le k} (a_i - a_j)$$

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = \prod_{1 \le j < i \le k+1} (a_i - a_j)$$

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \Delta(a_2, a_3, \dots, a_k)$$ הוכח בסעיף ב',

כלומר, מסקנה כי נובע שאם נראה ש נכונה עבור דטרמיננטה
ונדרמונדה מסדר $n-1^{(k)}$, אז היא נכונה גם עבור דטרמיננטה
ונדרמונדה מסדר $n^{(k+1)}$:

כי מניחים הנוסחה עבור דטרמיננטה מסדר $n-1^{(k)}$

~~נקבל~~ נקבל ש:

$$\Delta(a_2, a_3, \dots, a_n) = \prod_{2 \le j < i \le n}$$

ואז לפי זה אפשר לקבל כי

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \Delta(a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$= \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \cdot \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

$$= \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

מסקנה: הטענה מתקיימת לכל n טבעי!

Scanned by CamScanner

5

<u>הגדרה:</u> $(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$

$$A\cdot(adj(A)) = (adj(A))\cdot A = det(A)\cdot I_n = \begin{bmatrix} det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & det(A) \end{bmatrix}$$

אם $det(A)\neq 0$ אז A הפיכה

וההופכית שלה היא

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\cdot adj(A)$$

P

תזכורת: A הפיכה אמ"מ $det(A)\neq 0$

B הפיכה אמ"מ $det(B)\neq 0$

$$(adj(A))\cdot A = det(A)\cdot I_n$$

$$det((adj(A))\cdot A) = det(det(A)\cdot I_n)$$

$$\boxed{det(adj(A))\cdot det(A) = (det(A))^n}$$

אם $det(A)\neq 0$ אז אפשר לחלק ב- $det(A)$ ונקבל

$$det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$$

$(det(A))^{n-1}\neq 0$ ולכן $det(adj(A))\neq 0$

הוכחנו: אם $det(A)\neq 0$ אז גם $det(adj(A))\neq 0$

אם $det(A)=0$ ~~אז~~ אז נניח

$adj(A)\cdot A = 0$

נניח בשלילה כי $det(adj(A))\neq 0$

כלומר ש- $adj(A)$ הפיכה

אז נכפיל ב- $(adj(A))^{-1}$ משמאל ונקבל!

$$A = (adj(A))^{-1}\cdot 0 = 0$$

ואז גם $adj(A)=0$ (בהגדרה של המינורים)

ולכן $det(adj(A))=0$

סתירה

הוכחנו: אם $det(A)=0$ אז גם $det(adj(A))=0$

ג:
$B^{-1} = adj(A^{-1})$

$adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$

$B \cdot A = \det(A) \cdot I_n$

נכפול את שני האגפים ב-B^{-1} משמאל

$A = B^{-1} \cdot \det(A) \cdot I_n = \det(A) \cdot B^{-1}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A$$

$$adj(A^{-1}) \cdot A^{-1} = \det(A^{-1}) \cdot I_n = \frac{1}{\det(A)} \cdot I_n$$

$A^{-1} \cdot A = I_n$

$\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

נכפול מצד ימין ב-A

$$adj(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \cdot I_n \cdot A = \frac{1}{\det(A)} \cdot A$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A = adj(A^{-1})$$

② ג:
$\det(B) = (\det(A))^{n-1}$

* אם $0 = \det(A)$, אז מסעיף ג' גם $\det(B)=0$, ולכן יש
האגפים הם 0.

* אם $\det(A) \neq 0$ אז נוכיח ~~כך~~ כך:

$\det(B) = (\det(A))^{n-1}$

$$\left[\underbrace{\det(adj(A))}_{B} \cdot \det(A) = (\det(A))^n \right]$$