תרגול ב-לינארי

① Ⓐ נסמן ב Z_7

(i) $\dfrac{6}{5} = 6 \cdot 5^{-1} = 6 \cdot 3 = 4$

(ii) $\dfrac{3+6}{4} = 2 \cdot 4^{-1} = 2 \cdot 5 = 4$

Ⓑ נסמן ב Z_{11}

(i) $\dfrac{7-9}{8} = 9 \cdot 8^{-1} = 9 \cdot 7 = 8$

(ii) $\dfrac{7+8}{4-10} = 4 \cdot 5^{-1} = 4 \cdot 9 = 3$

② $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= a\cdot a - b/a + b/a + b\cdot -b =$

$a\cdot a + b\cdot -b = a^2 - b^2$

③ Ⓐ נראה כי $a^2 = 1$ אם $a=1$ או $a=-1$

$a^2 = 1 \Longleftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow a^2 - 1^2 = 0 \Longleftrightarrow (a+1)(a-1) = 0$

יש אמנם פתרון נוסף אך מכיוון שאנחנו עוסקים בשדה לפי $a=1$ או $a=-1$

Ⓑ אם $a^2 = a$ אזי $a=0$ או $a=1$

$a^2 = a \Longleftrightarrow a^2 - a = 0 \Longleftrightarrow a(a-1) = 0$

יש מכאן מחובר נוסף אך מכיוון שאנחנו עוסקים בשדה לפי $a=0$ או

$a=1$

Ⓒ אם $a^3 = a$ אזי $a=0$ או $a=1$ או $a=-1$

$a^3 = a \Longleftrightarrow a^3 - a = 0 \Longleftrightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow a(a^2 - 1^2) = 0 \Longleftrightarrow a(a+1)(a-1) = 0$

יש מכאן מחובר נוסף אך מכיוון שאנחנו עוסקים בשדה לפי $a=0$

או $a=1$ או $a=-1$

④ Ⓐ $ac = bc \quad c \neq 0 \Longrightarrow a = b$

נכפיל ב $ac = bc$ את שני האגפים על הופכי של c, כיוון ש $c \neq 0$

אזי קיים כזה

$a \cdot c \cdot c^{-1} = b \cdot c \cdot c^{-1} \Longrightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1 \Longrightarrow a = b$

Ⓑ $(-a)(-b) = ab$

$-1 \cdot a(-b) \to a\cdot-1(-b) \to a-(-b) \to a\cdot b$

Ⓒ $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{-a}{b} = -1 \cdot \dfrac{a}{b} = -1 \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$

③

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} \underset{\text{פילוג}}{=} c^{-1}(a+b) = \frac{a+b}{c}$$

④

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

$$\frac{ac}{bc} = ac \cdot bc^{-1} = ab^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} = a \cdot b^{-1} \cdot 1 = ab^{-1} = \frac{a}{b}$$

①

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\frac{ad+bc}{bd} = (ab+dc)b^{-1}d^{-1} = abb^{-1}d^{-1} + dcd^{-1}b^{-1} = ad^{-1} + cb^{-1}dd^{-1} =$$

$$ab^{-1} + cd^{-1} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

⑤ יהי F שדה, $a \in F$ נוכיח, $a \neq 1$ ע"י אינדוקציה על n את הטענה G שלפיו

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = (a^{n+1} - 1)(a-1)^{-1} \quad / \cdot (a-1)$$

$$(a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) = (a^{n+1} - 1)(a-1)^{-1}(a-1)$$

$$a - 1 + a^2 - a + a^3 - a^2 + a^4 - a^3 + a^{n+1} - a^n = a^{n+1} - 1$$

$$a^{n+1} - 1 = a^{n+1} - 1 \qquad\qquad\qquad \text{נכון הטענה של } c_{(i)} \ p''יל$$

מ.ש.ל

⑥ סעיף 1 נראה כי לא נכון

נביא דוגמה נגדית, $a = 2$, $a^2 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow$ פ"ע $\neq 4$, $a \neq 1$

סעיף 2

$a^2 + b^2 = 0 \Leftarrow a = b = 0$, z_1

$0^2 + 0^2 = 0 \Leftarrow a^2 + b^2 = 0$

$0 + 0 = 0$

ולכן נכון (i) הטענה