דיסקרטית - תרגיל 12

① נוכיח באינדוקציה רגילה כי $|P(A)|=2^n$ כאשר $|A|=n$ לכל $n\ge 0$ טבעי

(א) נוכיח את הטענה עבור $n=0$

כאשר $|A|=0$ כלומר יש לנו קבוצה ריקה $|P(\phi)|=2^0=1$

ואכן $|P(\phi)|=\{\phi\}=1$

(ב) הנחת האינדוקציה

נניח כי עבור $n\ge 0$ הטענה מתקיימת!

$|A|=n$, $|P(A)|=2^n$

(ג) עבור $n+1$ $|P(A)|=2^{n+1}$ כאשר $|A|=n+1$

(ד) S_1 תהיה את G תתי הקבוצות של A שלא מכילות את האיבר האחרון מ-A, S_2 תהיה רק את תתי הקבוצות מ-A המכילות את האיבר האחרון מ-A

ניתן $S_1 \cup S_2$ מכיל את G תתי הקבוצות של A כלומר $P(A) = S_1 \cup S_2$

(ה) הרי $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1}\}$

$\leftarrow |S_1|$: S_1 הינו קבוצה של תתי קבוצות של A, כאשר A קבוצה שלא מכילה את a_{n+1} כלומר G תתי הקבוצות של $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

ולפי הנחת האינדוקציה אנו יודעים יש $|P(A)|$ כאשר $|A|=n$ הוא 2^n, ולכן $|S_1|=2^n$

$\leftarrow |S_2|$: S_2 הוא קבוצה של תתי קבוצות של A, כאשר כל תת קבוצה חייבת להכיל את a_{n+1}, כלומר G תתי הקבוצות של $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ של כל קבוצה הוספנו גם את a_{n+1}

ולכן מס' תתי הקבוצות זה שווה ל-2^n ולכן $|S_2|=2^n$ הוא $|P(A)|$ כאשר $|A|=n$ לפי הנחת האינדוקציה

כעת נוכיח ש $P(A)=2^{n+1}$ כאשר $|A|=n+1$

$$|P(A)| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

בס"ד

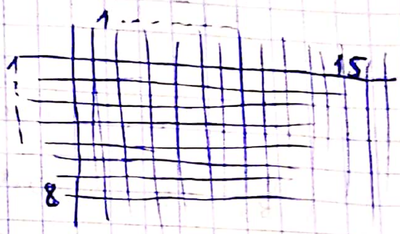
לפי הסיבוב

(2) $\frac{n!}{n}$

הרי לסובב אותו סידור כי ניתן לסובב
את השולחן ולקבל את אותו סידור בדיוק
ולכן עבור n סידור יש לנו n סידורים זהים

(3) $8\cdot15=120$

2^{120}



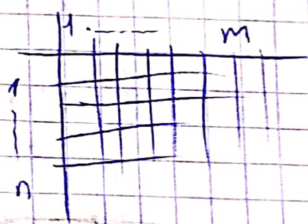
יחסים שונים מקבוצה של 8 איברים לקבוצה של 15 איברים:

2^{120}, הסבר: זה מספר תתי קבוצות יחסים

הרי יש לנו $8\cdot15$ אופציות של השמה 1/0

כלומר, 120 משבצות בהן ישנן 2 אפשרויות לבחירה
ובסה"כ 2^{120} אפשרויות

(4)



$2^{n\cdot m}$

דומה לשאלה הקודמת, מספר
בקבלת היחסים →
יש לנו $m\times n$ אופציות של השמה 1/0

כלומר, 2 אפשרויות לבחירה ל- $m\times n$ משבצות
ובסה"כ $2^{n\cdot m}$

(5)
$$\binom{8}{0}=1 \quad \binom{8}{1}=8 \quad \binom{8}{2}=28 \quad \binom{8}{3}=56 \quad \binom{8}{4}=70$$
$$\binom{8}{5}=56 \quad \binom{8}{6}=28 \quad \binom{8}{7}=8 \quad \binom{8}{8}=1$$

(6) (א) מדובר במקרה של אופציות הכפלה ויש חשיבות לסדר:
לכן במנה הראשונה יש לנו 6 אופציות, בשניה
5 אופציות, בשלישית 4 אופציות, וברביעית 3 אופציות

ובסה"כ עפ' עקרון הכפל $6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

(ב) במקרה של המנה הראשונה אין לנו בחירה יש
רק אופציה אחת, במנה השניה יהיה 5 אופציות,
בשלישית 4 אופציות, וברביעית 3 אופציות

ובסה"כ עפ' עקרון הכפל $1\cdot5\cdot4\cdot3=60$

ב.ז

(5) לאות A יש לנו 4 אופציות היכן לשים:

$$(1\cdot5\cdot4\cdot3)+(5\cdot1\cdot4\cdot3)+(5\cdot4\cdot1\cdot3)+(5\cdot4\cdot3\cdot1)$$

ובסה"כ זה עדיין כפל וזהו דור

$$4(5\cdot1\cdot4\cdot3)=240$$

(7) כה מקרה שלי: אפשרות חברות ואין חשיבות לסדר

ולכן עבור ספרי אנגלית $\binom{8}{3}=56$

ועבור ספרי עברית $\binom{10}{3}=120$

ובסה"כ לפי עקרון הכפל

$$\binom{8}{3}\binom{10}{3}=120\cdot56=6720$$

(8) (א) נבחין בטבלה

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_1									
S_2									
S_3									
$\vdots$									
S_n									

אנו יודעים שכל מספר נמצא

5 פעמים כלומר עבור כל מספר קיים

5 אחדות (1-ים) הספציפי בו

הוא (ה-1) - יש לנו 9 ולכן

קיימים בכל הטבלה ~~...~~

~~...~~ 45 אחדות.

כעת נבחין בשורות - אנו יודעים שכל שורה, כלומר כל

קבוצה יש 3 איברים ובסה"כ,

$3n=45$ $n=15$

ולכן קיימות 15 קבוצות

(ב) כעת כל איבר שייך ל-7 קבוצות, כלומר כל הטבלה קיימים

$7\times9=63$ אחדות, מצד שני אנו יודעים כי כל קבוצה יש 4

איברים ובסה"כ יש $4n$ אחדות בכל הטבלה: כעת נשווה

$4n=63$

$n=\frac{63}{4}$ = לא מספר שלם

אך שלם ולא יתכן שמספר הקבוצות יהיה לא שלם

ולכן זה לא יתכן