בס"ד

ש.ב קיקוין לתאוריה

① לפי האינדוקציה - לכל $a,b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

בסיס האינדוקציה $n=0$

$$\sum_{0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

$$(a+b)^0 = 1$$

מתקיים $\Downarrow$

הנחת האינדוקציה

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

צריך להוכיח $P(n+1)$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

הוכחה:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}$$

עפ"י הנחת האינדוקציה

$$(a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

חוק הפילוג -

$$a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

כינוס איברים!

$$\sum_{j=0}^{n+1} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] a^j b^{n+1-j}$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}$$

מ.ש.ל

הוכחנו $P(0)$ וכי $P(n) \to P(n+1)$ ולכן
על עקרון האינדוקציה הטענה מתקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$

קובץ

2) א) $(1+x^2)^{12}$ נקבל x^{10} כאשר $(x^2)^5$ ולכן $\binom{12}{5}\cdot(x^2)^5\cdot 1^7$

והמקדם של x^{10} יהיה $\binom{12}{5}$

ב) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{24}$ נחפש מקדם חופשי

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{24}=(x-x^{-2})^{24}=$$

$$\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}x^k(-x^{-2})^{24-k}=\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}x^k(-1)^{24-k}(x^{-2})^{24-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}(-1)^{24-k}\cdot x^k\cdot x^{-2(24-k)}=$$

$$\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}(-1)^{24-k}\cdot x^k\cdot x^{2k-48}=$$

$$\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}(-1)^{24-k}x^{3k-48}$$

$3k-48=0$

$k=16$

נחזור ונציב $k=16$ נקבל: $\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{16}(-1)^8\cdot x^0$

המקדם החופשי יהיה $\binom{24}{16}$

3) ב3 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k=4^n$, נקח $(1+x)^n$

$$4^n=\underset{\text{ניוטון}}{(3+1)^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$$ מ.ש.ל

4) ב3

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$L:\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\left(\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\left(\frac{k!}{(k-m)!m!}\right)=\frac{n!}{(n-k)!(k-m)!m!}$$

$$R=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\left(\frac{n!}{\cancel{(n-m)!}m!}\right)\left(\frac{\cancel{(n-m)!}}{(n-m-k+m)!(k-m)!}\right)=\frac{n!}{(n-k)!(k-m)!m!}$$

$\downarrow$

$L=R$

מ.ש.ל

8 א

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$$

ע"פ השוואת פולינומים המקדם של x^k

בפולינום השמאלי צריך להיות $\binom{n+m}{k}$

נמצא את המקדם של x^k באגף שמאל.

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

<u>הסבר</u>: לכל אינדקס i מ-0 עד k

כך ש- $n\geq i$, $k-i\leq m$ יש מחובר

$\binom{n}{i}x^i$ בפולינום $(1+x)^n$

ויש מחובר $\binom{m}{k-i}x^{k-i}$ בפולינום $(1+x)^m$, ולכן במכפלה יש מחובר

$\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}x^k$

כאשר נחבר את כל המקדמים האלו, נקבל את המקדם של x^k במכפלה. ובמקרה ש- $i>n$, $k-i>m$ המחובר לסכום יהיה אפס
דרך דעה

ב

m גברים

n נשים

בוחרת קבוצה בת k אנשים.

$\binom{n+m}{k}$ מונה את מס' הקבוצות

נמיין את כל הקבוצות ונספור לפי גברים

A_i = אוסף הקבוצות (של k אנשים) שבהן יש i גברים,

עבור $i=0,1,\dots,k$

קומבינטורית:

ימין: $\binom{n+m}{k}$ מונה את מס' הקבוצות

שמאל: נמיין את כל הקבוצות ונספור לפי גברים

קבוצה

A_i = אוסף הקבוצות שבהן יש i כדורים אדומים $i=0,1,\dots,k$

$$\sum_{i=0}^{k}|A_i| = \binom{m+n}{k}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad |A_i| = \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

(2) בסעיף ב' ראינו ש:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

נציב n במקום m, ונקבל

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-1}=\binom{n+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{2n}{k}$$

בסעיף הקודם i רץ עד k וכאן i צריך לרוץ עד n

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{2n}{n}$$

נראה כי $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$

$$L=\binom{n}{i}=\frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

$$R=\binom{n}{n-i}=\frac{n!}{(n-(n-i))!\,(n-i)!}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$\Downarrow$$

$$L=R$$

[illegible]

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

6) נוכיח את האי שוויון

$$\binom{n}{j+k} \le \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

א) דרך אלגברית!

$$\frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!} \le \frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!}$$

$$\frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!} \le \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}$$

לכן שהאי שוויון יתקיים נצטרך להוכיח כי:

$(j+k)! \ge j!k!$, הוכחה באינדוקציה

נוכיח באינדוקציה: לכל $k,j \ge 0$ $k,j\in\mathbb{N}$ מתקיים $(j+k)! \ge j!k!$

בסיס האינדוקציה: $P(0)$: $(0+k)! \ge 0!k! \Rightarrow k! \ge 1\cdot k!$ מתקיים ✓

הנחת האינדוקציה: לכל $j,k \ge 0$ $k,j\in\mathbb{N}$ מתקיים $(j+k)! \ge j!k!$

צ"ל: $P(n+1)$: $(j+1+k)! \ge (j+1)!k!$

$$(j+1+k)(j+k)! \ge (j+1)j!k!$$

מתקיים עפ"י הנחת האינדוקציה

$$(j+1+k) \ge (j+1)$$

עבור $k \ge 0$ הטענה מתקיימת.

הוכחנו $P(0)$ וכי $P(n) \to P(n+1)$ לכן עפ"י עקרון האינדוקציה הטענה נכונה מ.ש.ל

ב) דרך קומבינטורית

אגף שמאל - ניתן לבחור ועד של $j+k$ מתוך n אנשים, כלומר $\binom{n}{j+k}$

אגף ימין - מצב שבו ניתן לבחור ועד בן j חברים, ובנוסף מנהלים בת k חברים מתוך כלל האנשים

לא כולל אלו שכבר נבחרו לועד

יהיו יותר אפשרויות בחירה באגף ימין.

ד) נוכיח שמכפלה של k מספרים עוקבים מתחלקת ב-$k!$

עבור המספרים $n+k-1, \ldots, n+2, n+1, n$ (קיימים k איברים)

נראה כי מכפלת המספרים מתחלקת ב-$k!$

נתבונן ב-$\binom{n+k-1}{k}$ זהו מספר שלם

קוד

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} =$$

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots 1}{k!\,(n-1)!} =$$

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{k!}$$

קיבלנו שמכפלת המספרים העוקבים מתחלקת
ב- $k!$, מש"ל

8) א) יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$, רק $11|a-b$ אמ"מ קיים $0\leq k\leq 10$ $k\in\mathbb{Z}$
וקיימים i,j שלמים כך ש:
$a=11i+k$
$b=11j+k$

השאריות האפשריות מסמלות את השובכים, סה"כ 11 שובכים
ו-12 המספרים השלמים מסמלים את היונים
לפי מס' שובכים לשארית בין 0 ל-10, ולכן בהכרח יש
לפחות שובך אחד יהיה בו לפחות שתי יונים
כלומר, לפחות 2 מספרים יהיו באותה שארית חלוקה שהפרשם
מתחלק ב-11 ללא שארית.

ב) הטענה אינה נכונה, נביא דוגמה נגדית:
נבחר n המספרים! $-10,-9,-8,-7,-6,0,1,2,3,4,5,13$
לא קיימים בקבוצה זוג מספרים שסכומם מתחלק ב-11 ללא
שארית.

9) א) נוכיח תוך שימוש ב- contrapositive
אם לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $m_i\leq k$
$\Downarrow$
$$\frac{m_1+m_2+\dots m_n}{n}\leq k$$

לכל $m_i\leq k$ לכן $\sum_{i=0}^{n} m_i$ תהיה קטנה או שווה ל- $n\cdot k$

$$m_1+m_2+\dots+m_n\leq n\cdot k \;/:n$$

$$\frac{m_1+m_2+\dots+m_n}{n}\leq k$$

מש"ל

(?) נסמן $m_i =$ סכום המספרים במקומות $i, i+1, i+2$

כאשר $1 \le i \le 8$

$m_9 =$ סכום המספרים במקומות $9, 10, 1$

$m_{10} =$ סכום המספרים במקומות $10, 1, 2$

נניח ש- $\frac{m_1+m_2+\dots+m_{10}}{10} < 16$, ואז, לפי סעיף א'

ודאי - $m_i \ge 16+1$

$m_i \ge 17$

כדי להניח ש- $\frac{m_1+m_2+\dots+m_{10}}{10} > 16$

נניח ש- $m_1+m_2+m_{10} > 160$

(ב) מסכם א- 10 המספרים יופיע ב-3 איברים מהסדרה

m_i , ולכן

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{10} i = m_1+m_2+\dots+m_{10}$$

$$3 \cdot \frac{11 \cdot 10}{2} = 165 > 160$$

מ.ש.ל