תרגיל 12 (ז) לינארית

1) B בסיס ולכן קיימים B כך שלא 0 כך ש-

$$B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + \dots + B_n\alpha_n = 0 \Leftarrow$$

א) ~~[illegible]~~ $B_i = 0$ לכל $n \ge i \ge 1$

ב) B-ש בסיס, נוכיח שהוא בת"ל כלומר קיימים c כך

$$c_1\alpha_1 + c_2(\alpha_1+\alpha_2) + \dots + c_n(\alpha_1+\dots+\alpha_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1(c_1+c_2+\dots+c_n) + \alpha_2(c_2+\dots+c_n) + \dots + \alpha_n c_n = 0$$

B בסיס ולכן הוא בת"ל ולכן:

$$c_n = 0$$
$$c_n + c_{n-1} = 0 \qquad c_{n-1} = 0$$
$$c_n + c_{n-1} + c_{n-2} = 0 \qquad c_{n-2} = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0 \qquad c_1 = 0$$

מהמשוואה האחרונה נקבל ש- $c_n=0$

נציב את זה במשוואה שלפניה נקבל $c_{n-1}=0$, נציב את c_n ו- c_{n-1} במשוואה $c_n+c_{n-1}+c_{n-2}=0$ ונקבל $c_n=0$, וכך נמשיך הלאה ונקבל ש- $c_1=c_2=\dots=0$

B' בת"ל והוא מאותו מימד כמו B שהוא בסיס ולכן B' בסיס B

2) - נבדוק בהמשך לקבל G המקיים שהוא בת"ל

א) יהי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ לפי הנתון $c+d=b=2a$ מתוך G

ולכן נראה כך $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \\ 2a-c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \\ 2a-c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בס"ד

1

המימד הוא 2

ב) G מטריצה משולשת עליונה שאיברי האלכסון מקיימים את התנאי
$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$

(כלומר כך
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

המימד הוא 5.

ג) מטריצה סימטרית (כלומר כך)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(K_m)

לכל $m \leq n$, $1 \leq k = n$ נסמן c את המטריצה ב $M_n(F)$ שבה איברים במקומות km ו- mk הם 1 ושאר [illegible] כל המטריצות השונות האלו הן יהיו בסיס

$$B=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & \\ & \cdots & & \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{c_2}, \cdots\right\}$$

(נחשב את המימד: יש לנו n מטריצות בגודל איברי האלכסון ובגודל האיברים מעל האלכסון (יש n^2-n איברים שאינם באלכסון) יהיה בגודל כל שני אינדקסים מטריצה אחת ולכן נקבל

ולכן $n + \frac{n^2-n}{2} \Leftarrow \frac{n^2+n}{2}$, המימד הוא $\frac{n^2-n}{2}$

ד. נעבור למטריצות האנטי סימטריות: (נשים $C \in M_n(F)$ שע"י)
המטריצה C G האינדקסים יהיו אלכסון הוא 0! (נשים שני אינדקסים)
$1 \leq n,m$, $k-m=-1$ וגם $n \geq m > k \geq 1$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \cdots & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \\ -1 & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & & & \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

נחשב את המימד! בסדר האינדקסים שבאלכסון אין מטריצות לייצג אותן, כי המטריצה אנטי סימטרית אינדקסי האלכסון שווים 0. חוץ מאינדקסי האלכסון יש n^2-n אינדקסים, שאלו שבאלכסון בסדר G באינדקסים יש מטריצה אחת לייצג אותם ולכן נקבל $\frac{n^2-n}{2}$. המימד $\frac{n^2-n}{2}$

יהי $P(x) \in W \iff P(2)=P(-2)=0 \iff P(x)=(x-2)(x+2)(ax+b)$

$a,b \in \mathbb{R}$ נפתח את הביטוי:
$P(x) = (x^2-4)(ax+b)$:

$$ax^2+bx^2-4ax-4b = a(x^2-4x)+b(x^2-4)$$

לכן הבסיס הוא $\{x^2-4x, x^2-4\}$

נבדוק בת"ל
$$\alpha_1(x^2-4x)+\alpha_2(x^2-4)=0$$

מקדמי x^2 $\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_2=0$

מקדמי x $\alpha_1=0$ $-4\alpha_1=0$

המימד הוא 2

(1) יהי $\alpha_1,\alpha_2 \in V$ נבדוק בת"ל הקודמים אם הם בת"ל,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$\alpha_1=0$
$2\alpha_1=0$
$\alpha_2=0$ ולא הם בת"ל
$\alpha_1=\alpha_2=0$

(2) ~~[illegible]~~ ברור שאין ל-B של מטריצות שמופיעה בהם 0
לא הקבוצה מקיים מכאן שאם צירוף לינארי ב-B שווה 0 אז
המקדמים צריכים להיות 0 ולכן B בת"ל.

קס׳

③ אותו עקרון כמו ב

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\alpha_5\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 0\cdot\alpha_2 + 0\alpha_3 \dots = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\alpha_n = 0 - 1\cdot\alpha_2 + 0\alpha_3 \dots = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

וכן הלאה המקדמים התחתונים של אחד מהם אפס וכולם שווים 0 ולכן B בת"ל

③ נשתמש במשפט: מרחב וקטורי אינו נוצר סופית ⇔ קיימת בו קבוצה אינסופית של וקטורים בת"ל.

נניח בשלילה ש-W אינו נוצר סופית, אז קיימת ב-W קבוצה אינסופית של וקטורים בת"ל. לפי הנתון ש-W תת מרחב ב-V אז קבוצת הוקטורים שנמצאים ב-W שהם בת"ל הן קבוצה אינסופית של וקטורים בת"ל ב-V ולכן V אינו נוצר סופית בסתירה להנחה ש-V נוצר סופית. סתירה! ולכן W נוצר סופית.

ⓓ כל $\dim W \leq \dim V$ V ו-W הם נוצרים סופית ולכן נסמן $\dim W = k$

$\dim V = L$ נוכיח $k \leq L$

כיוון ש- $\dim V = L$ אין אף קבוצה בת"ל ב-V שמכילה יותר מ- n וקטורים

לפי המשפט: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, נניח ל-V קבוצה יוצרת המכילה n וקטורים אזי כל קבוצה של יותר מ-n וקטורים ת"ל.

נגדיר B בסיס ל-W כיוון ש-B צריכה להיות בת"ל אז לא יכולים להיות בה יותר מ-n וקטורים ולכן $\dim W \leq \dim V$

② נוכיח $\dim V = \dim W \Leftrightarrow W = V$

⇐ אם $W = V$ אז $\dim W = \dim V$

⇒ נניח שאם $\dim V = \dim W$ אז $W = V$. נגדיר $n = \dim V = \dim W$

יהי B בסיס ל-W $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ B היא קבוצה בת"ל וכיוון

ש- $\dim W = n$ אז לפי המשפט אם הבסיס מכיל n אז כל n

וקטורים בת"ל הם בסיס אז B בסיס ל-V, ולכן לכל $v \in V$

$v \in \operatorname{Span} B$ אז כל איברי B הם ב-W ולכן לפי ... $W = V$

4) כדי להוכיח ש-B בסיס ל- $U+W$ צריך להראות ש-B פורש
את $U+W$ וש-0 בת"ל נראה ש-0 בת"ל אז 0 בת"ל [illegible]

$$\alpha_1 \cdot c_{11} + \alpha_2 \cdot c_{12} + \dots + \alpha_m c_{1m} + \beta_1 c_{21} + \beta_2 c_{22} + \dots + \beta_k c_{2k} = 0$$

נראה ש: $c_{11} = c_{12} = c_{1m} \dots = c_{2k} = 0$

B בסיס ל- U ולכן:

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_m d_m = 0$$

$\alpha_1 = \dots d_m = 0$ — C בסיס ל- W ולכן

$$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \dots \beta_k = 0$$

נחזור מהמשוואה הראשונה

$$\alpha_1 \cdot c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots \alpha_m c_{1m} + \beta_1 c_{21} + \dots + \beta_k c_{2k} = 0$$

נעביר אגף ונקבל

$$\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots \alpha_m c_{1m} = -\beta_1 c_{21} - \beta_2 c_{22} - \dots - \beta_k c_{2k}$$

$\alpha_1 c_{11} + \dots + \alpha_m c_{1m}$ הוא וקטור ב-W שהרי הוא וקטור שנבנה
בצירוף ליניארי של אברי הבסיס ב-C.
$-\beta_1 c_{21} - \dots - \beta_k c_{2k}$ הוא וקטור ב-U שהרי הוא וקטור הנבנה מצירוף ליניארי
של אברי הבסיס β, אך שני הוקטורים האלו שווים כלומר נסמן
$$x = \alpha_1 c_{11} + \dots \alpha_m c_{1m} = -\beta_1 c_{21} - \beta_2 c_{22} \dots - \beta_k c_{2k}$$
קיבלנו ש- $x \in W$, $x \in V$ ולכן $x \in V \cap W$
אך $V \cap W = \{0\}$ כלומר x הוא וקטור האפס, ואז נקבל:
$\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots + \alpha_m c_{1m} = 0$ נתון ש-B בסיס ולכן הוא בת"ל
ולכן $c_{11} = c_{12} = \dots c_{1m} = 0$

$$0 = -\beta_1 c_{21} - \dots \beta_k c_{2k}$$

$\beta_1 c_{21} + \dots \beta_k c_{2k} = 0$ נכפיל במינוס ונקבל
אבל C בסיס ולכן הוא בת"ל ולכן
$c_{21} = \dots c_{2k} = 0$ ולכן נקבל:

$$\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots + \alpha_m c_{1m} + \beta_1 c_{21} + \dots + \beta_k c_{2k}$$

$$c_{11} = c_{12} = \dots = c_{21} = \dots c_{2k} = 0$$

ולכן 0 בת"ל.

נראה ש- $\mathrm{Span}\, U = V = W$
יהי $x = V + W$ כלומר $x = U + W$ כאשר $u \in V$ ו- $w \in W$ $u \in V$
שהם ... צירוף של אברי הבסיס B.

$$u = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1m}\alpha_m$$

$W \in W$ ולכן נכתוב אותו ע"י הבסיס S

$$W = c_{21}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + \dots c_{2k}\beta_k$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל

$$x = W+V = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1m}\alpha_m + c_{21}\beta_1 + \dots + c_{2k}\beta_k$$

הצגנו את x ע"י איחוד הבסיסים D ולכן S יוצרת את $W+V$.

הראנו כי S בת"ל וגם היא פורשת את המרחב $W+V$ ולכן היא בסיס של $W+U$

8) ג)

$$\beta_1(\alpha_1-\alpha) + \beta_2(\alpha_2-\alpha) + \dots + \beta_n(\alpha_n-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

נפתח את הסוגריים

$$\beta_1\alpha_1 - \alpha\beta_1 + \beta_2\alpha_2 - \beta_2\alpha + \dots + \beta_n\alpha_n - \alpha\beta_n = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \dots \beta_n\alpha_n = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 + \dots \alpha\beta_n$$

נניח בשלילה שהוקטורים $\alpha_1-\alpha, \ldots, \alpha_n-\alpha$ הם ת"ל ולכן קיים β_i לפחות אחד ששונה מ0

$$\beta_1\alpha_1 + \dots \beta_n\alpha_n = \alpha(\beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_n)$$

נחלק ב-$\beta_1+\beta_2 \dots \beta_n$ (במקרה שבו לא שווה ל0 אם לא הפתרון)

שלכך הוא שווה ל-0 (נטפל בהמשך)

נחלק ונקבל

$$\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \dots \beta_n\alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 \dots \beta_n} = \alpha$$

קיבלנו את α כצירוף לינארי של G אך שייך ל- $\alpha \notin sp K$ סתירה.

אם נניח שהקבוצה $\alpha_1-\alpha, \ldots, \alpha_n-\alpha$ הם ת"ל וגם $\beta_1+\beta_2+\dots\beta_n=0$

אז נקבל

$$\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \dots \beta_n\alpha_n = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \dots \beta_n\alpha_n = 0$$

נתון ש- K בת"ל ולכן $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_n = 0$

ולכן $\alpha_1-\alpha, \alpha_2-\alpha$ הם בת"ל וזו סתירה.

קיבלנו סתירה ולכן הקבוצה $\alpha_1-\alpha, \alpha_2-\alpha$ הם בת"ל

כיוון

⑥ ⇐ אם תלוי נניח כי קיים i כך ש $\alpha_i \neq 0$ ט קבוצה עם וקטור האפס היא תלויה, כלומר $\alpha_1 \neq 0$, ואם $\alpha_k \in Sp\{\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\}$ אז לפי הגדרה תלויה

$\alpha_k = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_{k-1}\beta_{k-1}$ $\quad 0 = -1\cdot\alpha_k + \alpha_1\beta_1 + \dots$

לפי הגדרה תלויה.

⇒ אם $\alpha_i \neq 0$ כך $1 \le k \le n$ $\alpha_k \notin Sp\{\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\}$ ולכן K בת"ל

הנחה: נניח בשלילה כי K תלוי ולכן קיימים $\beta_1\dots\beta_n$ ש לא כולם אפסים כך ש:

$$\beta_1\alpha_1 + \dots \beta_n\alpha_n = 0$$

יהי K האינדקס הגדול ביותר מבין האינדקסים $n \dots 1$

כך ש- $\beta_k \neq 0$, אם $k=1$ אז

$$\beta_1\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \dots 0\cdot\alpha_n = 0 \Rightarrow \beta_1\cdot\alpha_1 = 0$$

$\beta_1 \neq 0$ ולכן $\beta_1\cdot\alpha_1 = 0 \;/:\beta_1$ $\quad \alpha_1 = 0$ סתירה.

$\alpha_1 = 0$

אם $k \neq 1$ אז

$$\beta_1\alpha_1 + \beta_{k-1}\alpha_{k-1} + \dots \beta_k\alpha_k + 0\cdot\alpha_{k+1} + \dots 0\cdot\alpha_n = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_1\alpha_1 + \dots = -\beta_k\alpha_k \;/:-\beta_k$$

$$\frac{\beta_1\alpha_1}{-\beta_k} + \dots + \frac{\beta_{k-1}\alpha_{k-1}}{-\beta_k} = \alpha_k$$

אז

$$\alpha_K \notin Span\{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\}$$

סתירה ולכן K בת"ל.

Scanned by CamScanner