ח.ד בתמטיקה – תרגיל ד

(1)

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{-1}$$

$$(f^{-1})''(x)=-\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{-2}\cdot\left(f'(f^{-1})(x)\right)'=$$

$$-\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{-2}\cdot\left(f''(f^{-1})(x)\right)\cdot\left((f^{-1})'(x)\right)'=$$

$$-\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{-2}\cdot\left(f''(f^{-1})(x)\right)\cdot\frac{1}{\left(f'(f^{-1})(x)\right)}=$$

$$-\frac{\left(f''(f^{-1})(x)\right)}{\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{2}\cdot\left(f'(f^{-1})(x)\right)}=\frac{f''(f^{-1})(x)}{\left(f'(f^{-1})(x)\right)^{3}}$$

(3) (1)

$$f(x)=x^2-3x-4$$

פונ' מסוימת יכולה להיות חח"ע רק אם היא עולה/יורדת מונוטונית

נמצא את תחומי עליה וירידה של הפונ'

$f'(x)=2x-3$ $\quad (f'(x)=0)\rightarrow 2x-3=0\rightarrow 2x=3\rightarrow x=\frac{3}{2}$

$$\underset{\frac{3}{2}}{-\quad|\quad+}$$

מצאנו שהפונ' יורדת ב- $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ והפונ' עולה ב- $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$

ולכן היא חח"ע בתחום $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ כי שם היא יורדת מונוטונית

נמצא את הפונ' ההפיכה:

$y=x^2-3x-4\longrightarrow x^2-3x-4-y=0$ $\qquad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-4-y)}}{2}$

$$\frac{3\pm\sqrt{9+16+4y}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25+4y}}{2}$$

קיבלנו 2 פונ'

$x_1=\frac{3-\sqrt{25+4y}}{2}$ $\qquad x_2=\frac{3+\sqrt{25+4y}}{2}$

אני עוסק פה בתחום $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$, וכיוון שזו הפונקציה ההפיכה, אז זהו הטווח שלה, לכן נבחר את

$$\boxed{x_1=\frac{3-\sqrt{25+4y}}{2}}$$

(2)

$$x'y=\frac{1}{y'x}=x'y=\frac{1}{2x-3}\longrightarrow x'y=\frac{1}{2\left(\frac{3-\sqrt{25+4y}}{2}\right)-3}=$$

$$\frac{1}{\frac{\cancel{2}(3-\sqrt{25+4y})}{\cancel{2}}-3}=\frac{1}{3-\sqrt{25+4y}-3}=\frac{-1}{\sqrt{25+4y}}$$

בס"ד

(3)

$(f^{-1})'(-4)=$

$(f^{-1})=\frac{3-\sqrt{25+4y}}{2} \rightarrow (f^{-1})'=\left(\frac{3}{2}'-\frac{\sqrt{25+4y}'}{2}\right)=$

$\frac{-\sqrt{25+4y}'\cdot 2-2'\sqrt{25+4y}}{4}=$

$\frac{-1}{2\sqrt{25+4y}}\cdot\frac{4\cdot 2}{4}=\frac{-1}{\sqrt{25+4y}}$

$(f^{-1})'(-4)=\frac{-1}{\sqrt{25+4\cdot-4}}=\frac{-1}{\sqrt{9}}=\frac{-1}{3}$

לפי עקרון ד'!

(נבדוק אם קיים a ש- $f(a)=-4$, $f^{-1}(-4)=$:

$x^2-3x-4=-4 \Rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=3\notin[-\infty,\frac{3}{2}]$

$\Rightarrow (f^{-1}(4))=0 \rightarrow (f^{-1})'(-4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-4))}=\frac{1}{2\cdot 0-3}=-\frac{1}{3}$

לפי עקרון ה'!

$(f')'(-4)=(f^{-1})''(x)=\left(\frac{-1}{\sqrt{25+4y}}\right)'=$

$\left(-1\cdot(25+4y)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-1\cdot-\frac{1}{2}(25+4y)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4=\frac{4}{2(25+4y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(25+4y)^{\frac{3}{2}}}=$

$(f^{-1})''(-4)=\frac{2}{27}$

$\frac{2}{(25+4y)(25+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(25+4y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{27}$

לפי עקרון ד'!

$(f^{-1})''(-4)=\frac{-f''(f^{-1}(-4))}{(f'(f^{-1}(-4)))^3}=\frac{-2}{(2\cdot 0-3)^3}=\frac{-2}{-27}=\frac{2}{27}$

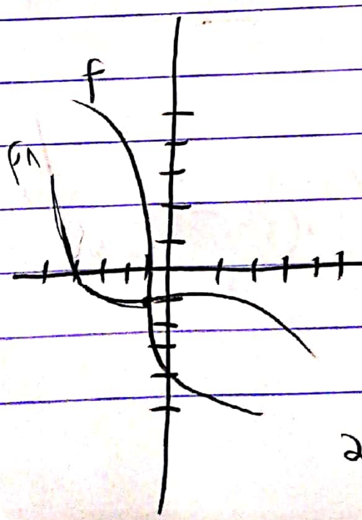
(4) נק' חיתוך עם ה-x

$x^2-3x-4=0=\frac{3\pm 5}{2}= \quad x_1=4$

$3\pm\sqrt{9-4\cdot-4} \qquad x_2=-1$

$(-1,0) \qquad 4\notin[-3,1]$

נק' חיתוך ציר ה-y $(0,-4)$



ל- f^{-1} : נק' חיתוך ציר ה-x: $(-4,0)$ ועם y: $(0,-1)$

נק' חיתוך בין הפונקציות-

$x^2-3x-4=x \rightarrow x^2-4x-4=0 \quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2}=2\pm2\sqrt{2}$

$2+2\sqrt{2}\notin[-3,1] \rightarrow (2-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$ נק' חיתוך הינן!

(2)

$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2+6x-9=0$

$3(x^2+2x-3)=0$

$3(x-1)(x+3)=0$ $\quad x=1$, $x=-3$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -3 & & 1 & \end{array}$$

f עולה ממש בקטע $[1,\infty)$

f יורדת ממש בקטע $[-3,1]$

f עולה ממש בקטע $(-\infty,-3]$

הגדרה - f עולה בקטע $[a,b]$ היינו: אם $x_1,x_2\in[a,b]$

ו- $x_1<x_2$

אז: $f(x_1)<f(x_2)$

don't know if part of H.W

בקטע $[-3,1]$ הפונקציה f יורדת ממש ולכן חח"ע

אין להרחיב את הקטע כך ולקבל הקטע שבו f חח"ע

$f:[-3,1]\longrightarrow[-4,28]$

$f(-3)=28$

$f(1)=-4$

תחום ההגדרה של f^{-1} הוא $[-4,28]$

(נוסחה)

$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

$(f^{-1})''(b)=-\dfrac{f''(f^{-1}(b))}{(f'(f^{-1}(b)))^3}$

$(f^{-1})''(b)=-\dfrac{f''(a)}{(f'(a))^3}$

חשבו את $(f^{-1})'(1)$

צריך למצוא $a\in[-3,1]$ שמקיים $f(a)=1$

מצאנו! $f(0)=1$ $\quad a=0$

$(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=-\dfrac{1}{9}$

$f'(x)=3x^2+6x-9$ $\quad f'(0)=-9$

$f''(x)=6x+6$

חשבו: $(f^{-1})''(1)$

מצאנו: $f(a)=b$

$f^{-1}(b)=a$

$f''(0)=6$

$f'(0)=9$ $\quad (f^{-1})''(1)=-\dfrac{6}{(-9)^3}$

(5)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1-1}{x^2+1}}} \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

כי $0<x$, $\sqrt{x^2} = x$

$$-\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0$$

הראנו שעבור $0<x$ מתקיים $f'(x) = 0$

לכן f קבועה ב- $(0,\infty)$

נמצא את הערך ש f מקבלת פה

$$f(1) = ?$$

$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 45^\circ \quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן לכל $0<x$ $f(x) = 0$

★ לאיזה סוג שאלה יותר שווה f קבועה $(-\infty, 0)$?

עבור $x<0$ $\sqrt{x^2} = -x$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$$

קיבלנו ש $f(x) = 2\arctan x$

שאלה 4 הוכחת ש- עבור $-1<x<1$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan(\tan(\arcsin x)) = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ולכן $\arcsin x = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} =$$

$$\arctan\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{x^2+x-x}{x^2+1}}} = \arctan\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}} =$$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \arctan\frac{1}{-x}$$

arctan היא פונקציה אי-זוגית ולכן

$$\arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan\frac{1}{x} = -2\arctan\frac{1}{x}$$

$$\left(-2\arctan\frac{1}{x}\right)' = -2\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$2\cdot\frac{1}{x^2\cdot\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{2}{x^2+1}$$

4

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

זהות

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

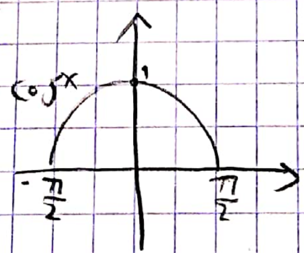
$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

ולכן $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\cos(\arcsin x)}$$

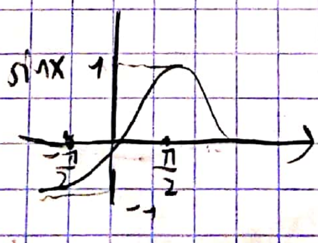
אם $-1<x<1$

אז $-\dfrac{\pi}{2} < \arcsin x < \dfrac{\pi}{2}$



כאשר $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\cos x > 0$



עמ' 7

⑥ ב) $\frac{\pi}{8} = x$

$\to \arcsin(\sin(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$

$\to \arccos(\cos(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$

$\to \arctan(\tan(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$

ג) $-\frac{3\pi}{2} = x$

$\to \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2})) =$

$-\frac{3\pi}{2} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ לכן נקח את $\frac{\pi}{2}$ כי,

$\sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2})) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}$

$\to \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{2})) =$ $\qquad -\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]$

$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\qquad$ לכן נקח את $\frac{\pi}{2}$ כי,

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}$

$\to \arctan(\tan(-\frac{3\pi}{2})) =$

$\star \tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$, $\tan(\alpha) = -\tan(2\pi k - \alpha)$

$\tan(-\frac{3}{2}\pi) = -\tan(\frac{3}{2}\pi) = -(-\tan(-2\pi + \frac{3}{2}\pi)) > \tan(-\frac{\pi}{2})$

$\arctan(\tan(-\frac{3\pi}{2})) = \arctan(\tan(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2}$

ד) $\frac{4\pi}{5} = x$

$\to \arcsin(\sin(\frac{4\pi}{5})) = \frac{4\pi}{5} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\star \sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$\sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(\pi - \frac{4\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{5})$

$\arcsin(\sin(\frac{4\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$

$\to \arccos(\cos(\frac{4\pi}{5})) = \frac{4\pi}{5}$

$\to \arctan(\tan(\frac{4\pi}{5})) = \frac{4}{5}\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\star \tan(\alpha) = \tan(\alpha \pm \pi k)$ $\qquad$ $K = -1$ נקח

דס'ג

$$\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

ה

$$\frac{11\pi}{5} = x$$

$$\rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) =$$

$$\star \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi k)$$

$k=-1$ נבחר

$$\sin\left(\frac{11\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{5} - 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\rightarrow \arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) =$$

$$\star \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi k) =$$

$k=-1$ נבחר

$$\cos\left(\frac{11\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\rightarrow \arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) =$$

$$\star \tan\alpha = -\tan(-\alpha), \quad \tan\alpha = -\tan(2\pi k - \alpha)$$

$k=-1$ נבחר

$$\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right) = -\tan\left(-\frac{11\pi}{5}\right) = -\left(-\tan\left(-2\pi + \frac{11\pi}{5}\right)\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$