דיסקרטית - תרגול 3

(1)

$\star = (P \cap Q) \oplus (Q \leftrightarrow \bar{P})$

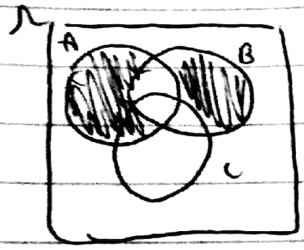
P	Q	$P \cap Q$	$\bar{P}$	$Q \leftrightarrow \bar{P}$	$\star$
F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T
T	T	T	F	F	T

ונוסחה השקולה לוגית הוא

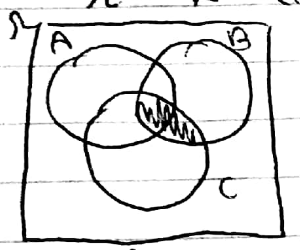
$(\bar{P} \cap Q) \cup (P \cap \bar{Q}) \cup (P \cap Q)$

(ד) (א)

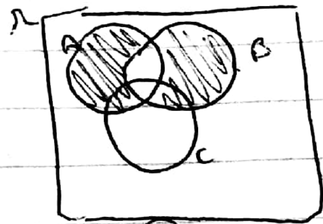
$\star = (A \oplus B) \setminus (C \cap B)$



★



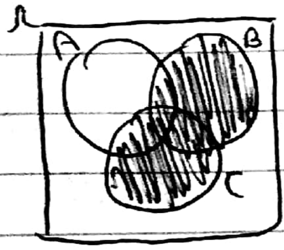
$C \cap B$



$A \oplus B$

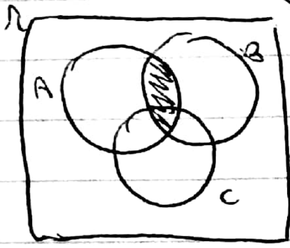
(ב)

$\star = [(A \cap B) \oplus C] \setminus [A \oplus (B \cup C)]$

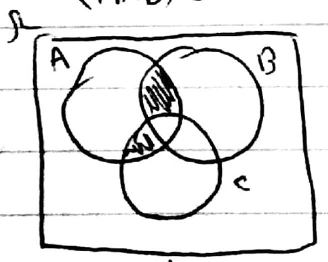


$B \cup C$

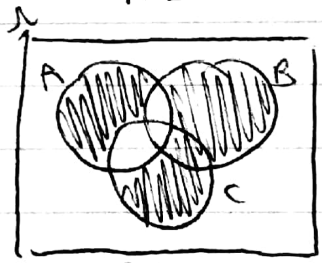
$(A \cap B) \oplus C$



$A \cap B$



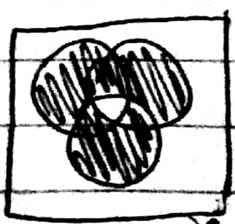
★



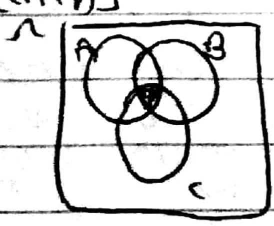
$A \oplus (B \cup C)$

(2)

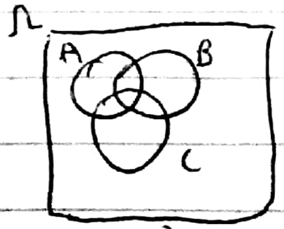
$\star = [(A \cap C) \setminus C] \cup [B \cap (C \cap A)]^c$ ~~★ = A∩(B∖C) - (A∩B)∖(C∩A)~~



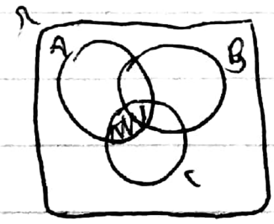
$[B \cap (C \cap A)]^c$



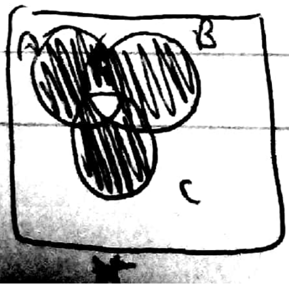
$B \cap (C \cap A)$



$(A \cap C) \setminus C$



$A \cap C$



★

Scanned by CamScanner

ד-2

(א) ② $x|y$ $k\in\mathbb{Z}$ $m\in\mathbb{Z}$

אם $x|y$ אז $y=x\cdot k$

$y|z$ אז $z=y\cdot m$

נציב $y=$ $z=(x\cdot k)\cdot m$

ולכן $x|z$

(ד) $6|x \iff (2|x)\wedge(3|x)$

נוכיח כי אם $6|x$ אז $2|x$ וגם $3|x$

$6|x \Rightarrow x=6\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$

$x=3k\cdot 2$

$\Rightarrow x=3(2k)=3c_1$, $c_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow 3|x$

$\Rightarrow x=2(3k)=2c_2$, $c_2\in\mathbb{Z} \Rightarrow 2|x$

נוכיח אם $3|x$ וגם $2|x$ אז $6|x$

$3|x \Rightarrow x=3k$, $k\in\mathbb{Z}$

$2|x \Rightarrow x=2m$, $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2m=3k$

אחת לפני: 2 אינו מתחלק ב-3 ולכן m מתחלק ב-3 $\Rightarrow m \Rightarrow 3c$, $c\in\mathbb{Z}$

נציב: $2\cdot 3c=3k$

$6c=3k=x$

$\Downarrow$

$6|x$

נשאר רק להוכיח: $2m=3k$, m חייב להתחלק ב-3

נניח ש-m אינו מתחלק ב-3

$m=3n+1$ או $m=3k'+2$

$x=2(3n+1)=3k$	$2(3k'+2)=3k$
$6n+2=3k$	$6k'+4=3k$
$3(2k)+2=3k$	$3(2k')+4=3k$
אינו מתחלק ב-3 / מתחלק ב-3	אינו מתחלק ב-3 / מתחלק ב-3

בשני המקרים קבלנו אגף אחד מתחלק ב-3, ואגף שני אינו מתחלק ב-3, ולכן קבלנו סתירה.

Scanned by CamScanner

(2)

$A = \{x \in N : 9/x\}$ 9, 18, 27, 36

$B = \{x \in N : 6/x\}$

$C = \{x \in N : 3/x\}$

$D = \{x \in N : 2/x\}$

קבוצות A ו-B

$A \neq B$ כי $9 \in A$ ו- $9 \notin B$

$A \not\subseteq B$ כי $9 \in A$ אבל $9 \notin B$

$B \not\subseteq A$ כי $6 \in B$ אבל $6 \notin A$

קבוצות A ו-C

$A \neq C$ כי $9 \in A$ ו- $9 \notin C$

$A \subseteq C$ כי אם $x \in A$ $9/x$ ו- $3/9$ לפי מעבר $3/x$ אז $x \in C$

$C \not\subseteq A$ כי $3 \in C$ אבל $3 \notin A$

קבוצות A ו-D

$A \neq D$ כי $9 \in A$ ו- $9 \notin D$

$A \not\subseteq D$ כי $9 \in A$ ו- $9 \notin D$

$D \not\subseteq A$ כי $2 \in D$ ו- $2 \notin A$

קבוצות B ו-C

$B \neq C$ כי $6 \notin C$ ו- $6 \in B$

$C \not\subseteq B$ כי $3 \in C$ ו- $3 \notin B$

$B \subseteq C$ כי אם $x \in B$, $6/x$ ו- $3/6$ אז לפי מעבר אז $x \in C$

קבוצות B ו-D

$B \neq D$ כי $2 \in D$ ו- $2 \notin B$

$B \subseteq D$ כי אם $x \in B$ $6/x$ ו- $2/6$ לפי מעבר $2/x$, אז $x \in D$

$D \not\subseteq B$ כי $4 \in D$ ו- $4 \notin B$

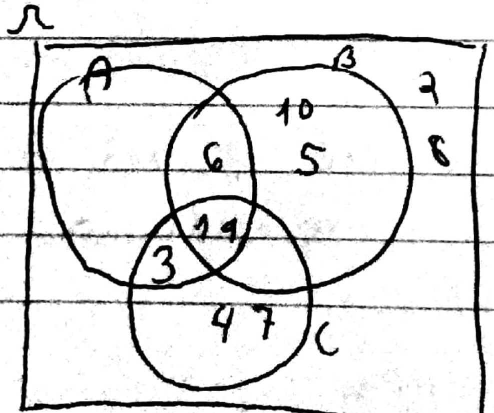
קבוצות C ו-D

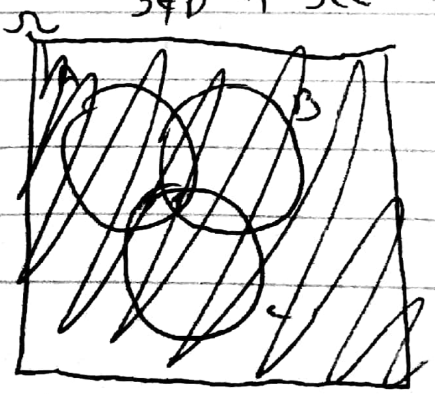
$C \neq D$ כי $3 \in C$ ו- $3 \notin D$

$C \not\subseteq D$ כי $3 \in C$ ו- $3 \notin D$

$D \not\subseteq C$ כי $3 \in C$ ו- $3 \notin D$

(4) (3)





ב

$B^c = \{2,3,4,7,8\}$

$A^c = \{2,4,5,7,8,10\}$

~~$A \oplus C = \{1,5,6,7,9\}$~~

$A \oplus C = \{4,6,7\}$

$B \oplus C = \{3,4,5,6,7,10\}$

$A \oplus B = \{3,5,10\}$

$B / B = \phi$

$A / B = \{3\}$

$A \cup B = \{1,3,5,6,9,10\}$

$A \cap C = \{1,3,7\}$

$A \cap B = \{1,6,9\}$

ג) $B \cap (C \oplus A) = (B \cap C) \oplus (B \cap A)$

נוכיח קודם כיוון אחד בשוויון

נניח $x \in B \cap (C \oplus A)$ ונוכיח $B \cap (C \oplus A) \subseteq (B \cap C) \oplus (B \cap A)$,

$x \in (B \cap C) \oplus (B \cap A)$

$x \in B \cap (C \oplus A)$ $x \in A$ וגם $x \in C \Leftarrow C \oplus A$

$x \in A$ -ו $x \in B$ לכן $x \in C$ וגם $x \notin C$ או $x \in B$ לכן $x \in A$ מכאן

$(B \cap C) \oplus (B \cap A)$

נניח $(B \cap C) \oplus (B \cap A) \subseteq B \cap (C \oplus A)$, נניח $x \in (B \cap C) \oplus (B \cap A)$ ונוכיח $x \in (C \oplus A)$

$x \notin C$ $x \in A$ לכן $x \in B$ $x \in B \cap A$ או $x \in A$ $x \in C$ לכן $x \in B \leftarrow x \in B \cap C$

$x \in B \cap (C \oplus A)$

ד) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

נוכיח קודם כיוון אחד בשוויון

נניח $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$, נניח $x \in A \cap (B \cup C)$ ונוכיח $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A$ -ו $x \in B \cup C$ מכאן $x \in A$ לכן $x \in B$ או $x \in A$

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$ ונוכיח $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ -נניח ש $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ נניח

$x \in C$ לכן $x \in A$ וגם $x \in B$ או $x \in A \cap (B \cup C)$ מתקיים

$x \in A \cap (B \cup C)$ מ.ש.ל

Scanned by CamScanner

המשך

② $A\cap(B/C)=(A\cap B)/(A\cap C)$

נוכיח שיוויון הקבוצות ע"י הכלה דו כיוונית

נניח ש- $x\in A\cap(B/C)$ ונוכיח ש- $x\in(A\cap B)/(A\cap C)$

אם $x\in B$ אז $x\notin C$ אז $x\in A$, לכן $x\in A\cap B$ אך $x\notin A\cap C$

נוכיח הכלה מהכיוון השני כלומר, נניח $x\in(A\cap B)/(A\cap C)$ ונוכיח ש-

$x\in A\cap(B/C)$, כלומר $x\in A$ אך $x\in B$ אך $x\notin C$

לכן $x\in(A\cap B)$ אך $x\notin A\cap C$

Scanned by CamScanner