$$tr(BA) = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1n}a_{n1} +$$
$$b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \dots + b_{2n}a_{n2} +$$
$$\vdots$$
$$+ b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \dots + b_{nn}a_{nn}$$

4

$$tr(A \pm B) = trA \pm trB$$

$$trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$
$$trB = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(A+B) = a_{11}+b_{11} + a_{22}+b_{22} + \dots + a_{nn}+b_{nn}$$

5

$$A^{-1}B = BA^{-1} \quad \Leftarrow \quad AB = BA$$ נתון

$\cdot A^{-1}$ מימין

$$ABA^{-1} = \underbrace{BAA^{-1}}_{I}$$

$$ABA^{-1} = B$$

$A^{-1}\cdot$ משמאל

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}BA^{-1} = A^{-1}B$$

$$BA^{-1} = A^{-1}B$$

שאלה: $C,D \in M_n(F)$, מהו $tr(C \cdot D)$?

$tr(C \cdot D) = tr(C) \cdot tr(D)$

7

נניח בשלילה שקיימות מטריצות $A,B \in M_n(\mathbb{R})$, כך ש- $AB-BA=I$

אם כך $tr(AB-BA) = tr(I)$

$tr(I) = n$

$tr(AB-BA) = tr(AB) - tr(BA) =$

$= tr(AB) - tr(AB) = 0$

קיבלנו $n=0$ וזאת סתירה.

? 6

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$(AB)_{ii} = a_{i1} b_{1i} + a_{i2} b_{2i} + \cdots + a_{in} b_{ni}$$

$$tr(AB) = (AB)_{11} + (AB)_{22} + \cdots + (AB)_{nn} =$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

$$+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2}$$

$$+ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \cdots + a_{3n}b_{n3} +$$

$$\vdots$$

$$+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$(BA)_{ii} = b_{i1} a_{1i} + b_{i2} a_{2i} + \cdots + b_{in} a_{ni}$$

ג

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow$ A הפיכה

$$\det(A(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$\det(A(t)) \neq 0$ ולכן $A(t)$ הפיכה

כדי להוכיח ש- $A(-t) = (A(t))^{-1}$ נוכיח ש- $A(t)\cdot A(-t) = I_2$

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 t + \sin^2 t & \cos t \sin t - \cos t \sin t \\ \sin t \cos t - \sin t \cos t & \sin^2 t + \cos^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ג) 3)

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&0&2\\4&0&3\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-3&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\4&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\2&-3&1&1&0&0\\4&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3=R_3-4R_1]{R_2=R_1-2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&-3&-3&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&-5&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]\xrightarrow[R_2=R_2-R_3]{R_1=R_1-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{15}&\frac{1}{5}\\0&0&1&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{15}&\frac{1}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

בדיקה:

$$\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&0&2\\4&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{8}&\frac{3}{5}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{15}&\frac{1}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&1&0\\4&3&7\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&4&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\4&3&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1=3R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&2&3&0&0\\3&1&0&0&1&0\\4&3&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{R_2=R_2+2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&2&3&0&0\\0&4&4&1&1&0\\0&2&3&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2=4R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&2&3&0&0\\0&1&1&4&4&0\\0&2&3&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{R_1=R_1-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&4&0\\0&1&0&4&4&0\\0&0&1&0&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2=R_2-R_3]{R_1=R_1+2R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&2\\0&1&0&4&2&4\\0&0&1&0&2&1\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&2\\4&2&4\\0&2&1\end{bmatrix}$$

בדיקה:

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\3&1&0\\4&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&2\\4&2&4\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

2) א) לא. $AC=BC$ אז $B=A$

נכפיל מימין ב- C^{-1}, כיוון שנתון ש-C הינו הפיכה

אז מטריצה זו קיימת

$$AC=BC \,/\, C^{-1} \Rightarrow A\underbrace{CC^{-1}}_{I}=B\underbrace{CC^{-1}}_{I} \Rightarrow A=B$$

ב) $C^2=C$ אז $C=I$

נתון $C^2=C \Rightarrow C\cdot C=C$

נכפיל מימין ב- C^{-1} כיוון ש-C הינו הפיכה אז

מטריצה זו קיימת נקבל:

$$\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{I}=C\cdot\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{I} \Rightarrow C=I$$

ג) נביא דוגמאות!

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$$

$$C^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$$

כלומר $C\cdot C=C$ ננסה לבדוק מטריצה הפיכה ל-C

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\longrightarrow$$

מטריצה זו אינה הפיכה כיוון שהתאפסה לנו שורה

(אין דרך להפוך אותה [illegible])

כלומר מצאנו מטריצה C ש- $C^2=C$ ו- $C\neq I$

לא הפיכה

כלומר משפט זה לא נכון בלי ההנחה ש-C הפיכה

4) א) ס"ו $A^2=0$, $B=I-A$ נראה כי B הפיכה $B^{-1}=I+A$

(נכפול משמאל ב- $I+A$)

$$(I+A)B=(I+A)(I-A)$$
$$(I+A)B=I^2-\cancel{AI}+\cancel{AI}-A^2$$
$$(I+A)B=I^2-A^2$$
$$(I+A)B=I-0$$
$$(I+A)B=I$$

קיבלנו $(I+A)B=I$ ולכן B הפיכה וכן $B^{-1}=I+A$

ב) נסמן

$$B=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\-2&-2&-1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{I}-\underbrace{\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}}_{A}$$

נבדוק אם $A^2=0$

$$\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

קיבלנו $B=I-A$ כך ש $A^2=0$

ולכן לפי סעיף א' $B^{-1}=I+A$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\2&2&3\end{bmatrix}$$

בדיקה

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\-2&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$