תרגול 8 ליניארית ב'

① **לכסון מטריצות:**

לכסון מטריצה מוגדר ע"י: $P^{-1}AP=D$

כך ש:

$$\underset{\substack{\text{נחשב את } P^{-1} \\ \text{אחרי שנמצא את } P}}{P^{-1}} \underset{\text{מטריצה נתונה}}{A} \underset{\text{עמודות ו"ע של } A}{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}} = \underset{\text{ב-}D\text{ יש את הע"ע של } A}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

א)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא את הע"ע של A

נמצא את $|A-\lambda I|=0$

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

פיתוח לפי שורה שניה

נקבל:

$$(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-3\right]=0$$

$$\boxed{\lambda_1=2}$$

$$3-4\lambda+\lambda^2-3=0$$
$$-4\lambda+\lambda^2=0$$
$$\lambda(\lambda-4)=0$$

$$\boxed{\lambda_2=0} \quad \boxed{\lambda_3=4}$$

אם כן, כפי שמצאנו הע"ע של A הם: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=4$

כעת נמצא ~~ש~~ את הו"ע של כל ע"ע

נמצא את הוקטורים העצמיים: וקטור v שונה מאפס ע"י הצבת הע"ע העצמי במשוואה: $(A-\lambda I)v=0$

← עבור $\lambda_1=2$ נקבל (במשוואה): $(A-2I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2+3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל:

שורה שניה: $x_2+4x_3=0 \Rightarrow x_2+4t=0 \Rightarrow x_2=-4t$

שורה ראשונה: $-x_1+x_3=0 \Rightarrow x_3=x_1$

נסמן: $x_1=x_3=t$

סה"כ קיבלנו: $x_1=t,\ x_2=-4t,\ x_3=t$

קיבלנו את הו"ע: $V_{\lambda_1=2}=t\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2=0$ נציב במשוואה: $(A-0I)v=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&0&0\\3&1&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\3&1&3&0\\0&2&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

נקבל:

שורה שניה: $x_2=0$

שורה השלישית: $x_1+x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_3 \Rightarrow$ נסמן: $x_1=t \Rightarrow \boxed{x_1=t}\ \boxed{x_3=-t}$

סה"כ קיבלנו: $x_1=t\ \ x_2=0\ \ x_3=-t$

קיבלנו את הו"ע:

$V_{\lambda_2=0}=t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda_3=4$ נציב במשוואה: $(A-4I)v=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1-4&0&1&0\\0&2-4&0&0\\3&1&3-4&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&1&0\\0&-2&0&0\\3&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&1&0\\0&-2&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-2&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

נקבל: שורה שניה: $x_2=0$

שורה השלישית: $-3x_1+x_3=0 \Rightarrow x_3=3x_1 \Rightarrow$ נסמן: $x_1=t$

$\Downarrow$

$\boxed{x_1=t}\ \boxed{x_3=3t}$

סה"כ קיבלנו: $x_1=t,\ x_2=0,\ x_3=3t$

קיבלנו את הו"ע:

$V_{\lambda=4}=t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

נחשב את P^{-1}:

$$\begin{array}{c}P\\ \Downarrow\\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-4&0&0&0&1&0\\1&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2+4R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&4&4&4&1&0\\0&-2&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=\frac{1}{4}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&\frac{1}{4}&0\\0&-2&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&\frac{1}{4}&0\\0&0&4&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-\frac{1}{4}&0\\0&1&1&1&\frac{1}{4}&0\\0&0&4&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=\frac{1}{4}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-\frac{1}{4}&0\\0&1&1&1&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=P^{-1}}$$

נראה כי A לכסינה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

ד) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ (מעל $\mathbb{C}$) ראשית נמצא את הע"ע של A:

נמצא את $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3i \\ i & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

נקבל:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-(-3i)i=0$$

$$-1\cancel{-\lambda}\cancel{+\lambda}+\lambda^2-(-3i^2)=0$$

$$-1+\lambda^2-3=0$$

$$\lambda^2-4=0$$

$$\boxed{\lambda_1=2} \quad \boxed{\lambda_2=-2}$$

אז כן, קיבלנו שני ע"ע שונים של A והם: $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$,
כעת נמשיך ו"ע לכל אחד מהם!

נמצא את הוקטור העצמי המתאים לכל ערך עצמי ע"י הצבת הערך העצמי במשוואה: $(A-\lambda I)v=0$

$\Leftarrow$ עבור $\lambda_1=2$ נציב במשוואה $(A-2I)v=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & -3i & 0 \\ i & -1-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3i & 0 \\ i & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2+iR_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל! שורה ראשונה: $-x_1-3ix_2=0 \Rightarrow -3ix_2=x_1 \Rightarrow$ נסמן $t=x_2$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=-3it} \quad \boxed{x_2=t}$$

קיבלנו את הו"ע!

$$V_{\lambda_1=2}=t\begin{pmatrix} -3i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ עבור $\lambda_2=-2$ נציב במשוואה $(A+2I)v=0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+2 & -3i & 0 \\ i & -1+2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3i & 0 \\ i & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-\frac{1}{3}iR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל! שורה ראשונה: $3x_1-3ix_2=0 \Rightarrow 3x_1=3ix_2 \Rightarrow x_1=ix_2$

$\Rightarrow$ נסמן $x_2=t \Longrightarrow \boxed{x_2=t} \quad \boxed{x_1=it}$

$$V_{\lambda_2=-2}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

נבדוק את ההפוך

נמצא את P^{-1}

$$\underset{P}{\begin{pmatrix}-3 & 1 & | & 1 & 0\\ 1 & 1 & | & 0 & 1\end{pmatrix}} \xrightarrow{R_1=-\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 1 & | & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\frac{1}{3} & | & -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2=\frac{3}{4}R_2} \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$= P^{-1}$$

נראה כי A לכסינה:

$$\underset{D}{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}} \overset{?}{=} \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\frac{1}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \checkmark$$

$$T(P(x))=P(x+1)$$ א ב

נבחר בסיס: $E=\{1,x,x^2\}$

נבדוק האם $[T]_E$ מטריצה אלכסונית

ולשם נמצא את $[T]_E$

נסמן $A=[T]_E$:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}[T(1)]_E & [T(x)]_E & [T(x^2)]_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A$$

$T(1)=1$
$P(x)=1 \quad P(x+1)=1 \rightsquigarrow [T(1)]_E=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2 \Longrightarrow$ עמודה ראשונה של $[T]_E$

$T(x)=x+1$
$P(x)=x \quad P(x+1)=x+1 \rightsquigarrow [T(x)]_E=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2 \Longrightarrow [T]_E$ עמודה שניה של

$T(x^2)=(x+1)^2=x^2+2x+1 \longrightarrow [T(x^2)]_E=1\cdot 1+2\cdot x+1\cdot x^2=$ עמודה שלישית של $[T]_E$
$P(x)=x^2 \quad P(x+1)=(x+1)^2$

נבדוק אם A לכסינה, נמצא את הע"ע של A:

נמצא את $|A-\lambda I|=0$

המשך

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&2\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}\right|$$

הדטרמיננטה שווה למכפלת איברי האלכסון ולכן נקבל:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)=0$$

$$\boxed{\lambda_1=1}\ \boxed{\lambda_2=1}\ \boxed{\lambda_3=1}$$

יש רק ערך עצמי אחד, $\lambda=1$, עם ריבוי אלגברי 3.

נבדוק ריבוי גאומטרי:

נמצא את הו"ע, נציב $\lambda_1=\lambda_2=1$ במשוואה $(A-1I)\cdot v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

נקבל: שורה שנייה: $2x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_3=0}$

שורה ראשונה: $x_2+x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_2=0}$

נסמן: $\boxed{x_1=t}$

קיבלנו את הו"ע:

$$V_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1}=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

במקרה זה

$M(\lambda)$ (הריבוי האלגברי) $=3$

$\dim V_\lambda$ (הריבוי הגאומטרי) $=1$

ידוע שכאשר: A לכסינה אם"ם לכל ע"ע A מתקיים $\dim V_\lambda = M(\lambda)$

$1\neq 3$

במקרה לא מתקיים, ולכן A אינה לכסינה

ולכן לא קיים בסיס B' כך ש: $[T]_{B'}$ אלכסונית

2

$$T(p(x))=p(0)+p(1)x+p(-2)x^2$$

נבחר בסיס: $E=\{1,x,x^2\}$

ונבדוק האם $[T]_E$ מטריצה אלכסונית

ראשית נמצא את $[T]_E$

נסמן: $[T]_E=A$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}[T(1)]_E & [T(x)]_E & [T(x^2)]_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&-2&4\end{pmatrix}=A$$

דף 2

$T(1) = 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 = 1 + x + x^2 \rightsquigarrow [T(1)]_E = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 \Rightarrow$ עמודה ראשונה ב $[T]_E$

$p(x)=1 \quad p(0)=1 \quad p(1)=1 \quad p(-2)=1$

$T(x) = 0 + 1\cdot x - 2\cdot x^2 = x - 2x^2 \rightsquigarrow [T(x)]_E = 0\cdot 1 + 1\cdot x - 2\cdot x^2 \Rightarrow$ עמודה שניה ב $[T]_E$

$p(x)=x \quad p(0)=0 \quad p(1)=1 \quad p(-2)=-2$

$T(x^2) = 0 + 1\cdot x + 4\cdot x^2 = x + 4x^2 \longrightarrow [T(x^2)]_E = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 4\cdot x^2 \Rightarrow$ עמודה שלישית ב $[T]_E$

$p(x)=x^2 \quad p(0)=0^2 \quad p(1)=1^2 \quad p(-2)=(-2)^2$

נבדוק אם A לכסינה:

נמצא את הע"ע של A:

נפתח את $|A-\lambda I|=0$

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

פיתוח לפי שורה ראשונה

נקבל:

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right]=0$$

$\boxed{\lambda_1=1}$

$$4-5\lambda+\lambda^2+2=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$\boxed{\lambda_2=2} \quad \boxed{\lambda_3=3}$

אז יש 3 ערכים עצמיים שונים של A והם: $\lambda_3=3 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_1=1$

כעת נמצא את ו"ע לכל אחד מהע"ע

נמצא את הווקטורים העצמיים עבור כל ערך עצמי ע"י הצבה בנוסח הכללי למשוואה:

$(A-\lambda I)V=0$;

עבור $\lambda_1=1$ נציב במשוואה $(A-1I)V=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1}$$

נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שורה שניה: $2x_2-2x_3=0 \Leftarrow x_2=x_3 \Leftarrow$ נסמן $\boxed{x_2=x_3=t}$

שורה ראשונה: $x_1-2x_2+3x_3=0 \Rightarrow x_1-2t+3t=0 \Rightarrow x_1+t=0 \Rightarrow \boxed{x_1=-t}$

נקבל את הו"ע:

$$V_{\lambda=1} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2=2$ נציב במטריצה $(A-2I)V=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{R_2=R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל:

שורה שניה: $-x_2+x_3=0 \Leftarrow x_3=x_2 \Leftarrow$ נסמן: $x_2=x_3=t$

$\boxed{x_2=t}$ $\boxed{x_3=t}$

שורה ראשונה: $-x_1=0 \Leftarrow \boxed{x_1=0}$

נקבל את הו"ע: $V_{\lambda=2}=t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda_3=3$ נציב במטריצה $(A-3I)V=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל:

שורה שניה: $-2x_2+x_3=0 \Leftarrow x_3=2x_2$

$\boxed{x_2=t}$ $\boxed{x_3=2t} \Leftarrow x_2=t$ נסמן

שורה ראשונה: $-2x_1=0 \Leftarrow \boxed{x_1=0}$

נקבל את הו"ע: $V_{\lambda=3}=t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\underset{P}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \xrightarrow{R_1=-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$= P^{-1}$

נבדוק כי אכן A לכסינה כאשר הבסיס מתקיים $P^{-1}AP=D$

$$\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A=[T]_E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \overset{?}{=} \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

ק.ב

אז כן, קיים בסיס B' של $\mathbb{R}[x]_2$ כך ש $[T]_{B'}$ מטריצה אלכסונית

איברי הבסיס B' הם עמודות המטריצה P

כאמור

$$B' = \{(-1,1,1), (0,1,1), (0,1,2)\}$$

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>בדיקה!</u> נבדוק כי אכן מתקיים:

$$T(V_1) = \lambda_1 V_1 \,,\; T(V_2) = \lambda_2 V_2 \,,\; T(V_3) = \lambda_3 V_3$$

$$\in T(V_1) = \lambda_1 V_1 \qquad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(-1,1,1) = T(-1+x+x^2) = \underbrace{-1+0+0^2}_{P(0)} + \underbrace{(-1+1+1^2)}_{P(1)}x + \underbrace{(-1-2+(-2)^2)}_{P(-2)}x^2$$

$$= -1+x+x^2 \Rightarrow (-1,1,1)$$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\in T(V_2) \overset{?}{=} \lambda_2 V_2 \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1,1) = T(0+x+x^2) = T(x+x^2) = \underbrace{0+0^2}_{P(0)} + \underbrace{(1+1^2)}_{P(1)}x + \underbrace{(-2+(-2)^2)}_{P(-2)}x^2$$

$$= 0+2x+2x^2 \Rightarrow (0,2,2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\in T(V_3) \overset{?}{=} \lambda_3 V_3 \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1,2) = T(0+x+2x^2) = T(x+2x^2) = \underbrace{0+2\cdot 0^2}_{P(0)} + \underbrace{(1+2\cdot 1^2)}_{P(1)}x + \underbrace{(-2+2\cdot(-2)^2)}_{P(-2)}x^2$$

$$= 0+3x+6x^2 \Rightarrow (0,3,6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \checkmark$$

דף 9

(4) (א) הפולינום האופייני של A הוא: $|\lambda I - A|$: $|A-\lambda I|$

$$C_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

נחליף את המטריצה A ונקבל: $|A^t-\lambda I|$

$$C_{A^t}(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

נשתמש במשפט: $|A|=|A^t|$ ונקבל:

$$|A-\lambda I| = |A^t-\lambda I|$$

פ״א של A^t פ״א של A

הוכחנו כי הפולינום האופייני של A הוא גם הפולינום האופייני של A^t

(ב) נניח כי A לכסינה, כלומר קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(F)$ כך ש:
$D=P^{-1}AP$

צריך להוכיח כי גם A^t לכסינה, כלומר, צריך להראות קיימת מטריצה $P\in M_n(F)$ כך ש: $D=P^{-1}A^tP$

נתחיל באמת: $D=P^{-1}AP \;|\cdot(\;)^t$ (נתון)

$$D^t=(P^{-1}\cdot A\cdot P)^t$$

נשים לב כי: $D=D^t$:

כי D - אלכסונית ושמים באיברי האלכסון את הע״ע של A, והמטריצה אלכסונית, כשנשחלף את D נקבל שוויון:

$$\overset{D}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} = \overset{D^t}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\; \lambda_n \end{pmatrix}}$$

ולכן:
$D=(P^{-1}AP)^t$

$(AB)^t=B^tA^t$ / $D=(P^tA^t(P^{-1})^t$

$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ / $D=P^tA^t(P^t)^{-1}$

רבצ

לכן קבלנו כי P^t מלכסנת את A^t והראנו כי A^t לכסינה
($(P^t)^{-1}$ היא ההופכית של P^t)

(2) אם A הפיכה: $P\in M_n(F)$ מלכסנת את A אז P מלכסנת גם את A^{-1}

נניח כי A הפיכה ו- $P\in M_n(F)$ מלכסנת את A, כלומר $D=P^{-1}AP$

צריך להראות ש- P מלכסנת גם את A^{-1}, כלומר $P^{-1}A^{-1}P = D$ (D אלכסונית)

נראה זאת: $D=P^{-1}AP \ \backslash ()^{-1}$ (נתון)

$$D^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \quad / \quad D^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}$$

$$D^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$$

קבלנו עוד אחד, אין מה אחרי
אלא לוודא כי גם P מלכסנת
את A^{-1}

הראנו כי P מלכסנת את A^{-1}.

(3)(א) A לכסינה ולכן קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש:

$$D=P^{-1}AP \ \backslash \ P \text{ משמאל}$$

$$PD=AP \ \backslash \ P^{-1} \text{ מימין}$$

$$PDP^{-1}=A$$

נניח כי $B=P\sqrt{D}P^{-1}$

נבדוק האם מתקיים $B^2=A$

$$\overbrace{\underbrace{P\sqrt{D}\,\cancel{P^{-1}}}_{B}\cdot\underbrace{P\sqrt{D}P^{-1}}_{B}}^{B^2} \overset{?}{=} PDP^{-1}=A$$

$$P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1}\overset{?}{=}PDP^{-1}=A \qquad \left(\sqrt{D}\cdot\sqrt{D} \Rightarrow \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}}^{D}\right)$$

$$PDP^{-1}\overset{?}{=}PDP^{-1}=A \ \checkmark$$

הראנו כי $B^2=A$

כלומר, קיימת המטריצה $B=P\sqrt{D}P^{-1}$ כך שמתקיים $B^2=A$

(ב) נמצא את B לראשונה: $B=P\sqrt{D}P^{-1}$

לשם כך עלינו למצוא את: $P, P^{-1}, \sqrt{D}$

$2x_1=x_2 \Leftarrow 2x_1, x_2 \Leftarrow -2x_1+x_2=0 \Leftarrow -2x_1+x_2-x_3=0$

המשך

ראשית- נחשב את הע"ע של A:

נחשב את $|A-\lambda I|=0$

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה שווה למכפלת איברי האלכסון ולכן נקבל:

$$(1-\lambda)(4-\lambda)(9-\lambda)=0$$

$\boxed{\lambda_1=1}$ $\boxed{\lambda_2=4}$ $\boxed{\lambda_3=9}$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כעת נחשב. ו"ע לכל אחד מהע"ע!

נמצא את הוקטור העצמי עבור ערך עצמי: ע"י הגדרת הערך העצמי במשוואה: $(A-\lambda I)v=0$:

עבור $\lambda_1=1$ נציב במשוואה $(A-1I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל:

שורה שניה: $-2x_3=0 \Leftarrow \boxed{x_3=0}$

שורה ראשונה: $x_2+x_3=0 \Leftarrow \boxed{x_2=0}$

נסמן: $\boxed{x_1=t}$

קיבלנו את הו"ע:

$$V_{\lambda_1=1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2=4$ נציב במשוואה $(A-\lambda I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל!

שורה שניה: $\boxed{x_3=0}$

שורה ראשונה: $-3x_1+x_2+x_3=0 \Leftarrow -3x_1+x_2=0 \Leftarrow -3x_1=-x_2 \Leftarrow 3x_1=x_2$

בסוף

$\boxed{x_1=t}$, $\boxed{x_2=3t}$ $\Leftarrow$ $x_1=t$: נסמן $\Leftarrow$

נקבל את הו"ע:

$$V_{\lambda_3=4}=t\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ עבור $\lambda_3=9$ נציב במשוואה $(A-3I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1-9 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4-9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 9-9 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-8 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

נקבל שורה מקינה: $-5x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3=5x_2 \Rightarrow$ נסמן: $\boxed{x_2=t} \Rightarrow \boxed{x_3=5t}$

נציב בשורה הראשונה: $-8x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow -8x_1+t+5t=0 \Rightarrow -8x_1=-6t$

$\Rightarrow \boxed{x_1=\frac{3}{4}t}$

נקבל את הו"ע:

$$V_{\lambda_3=9}=t\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\5\end{pmatrix}$$

נחשב את P^{-1}:

$$\overset{P}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)} \xrightarrow{R_2=\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1=R_1-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{5}{12} & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3=\frac{1}{5}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{5}{12} & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{array}\right) \xrightarrow[R_2=R_2-\frac{1}{3}R_3]{R_1=R_1-\frac{5}{12}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{array}\right)$$

P^{-1}

נראה כי $B^2=A$ מתקיים, כלומר נראה כי מתקיים

$$(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1})=A$$

$$\underset{P}{\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}}\underset{\sqrt{D}}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}}\underset{P}{\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}}\underset{\sqrt{D}}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{9}{4}\\ 0 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{30}\\ 0 & 2 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{iv)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{37}{4} \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$