4 שאלה

$$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2$$
$$1x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2$$
$$2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$$
$$x_1 - 5x_2 - 1x_3 + 6x_4 + 2x_5 = -7$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \\ R_4 = R_4 - R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 = R_1 + 2R_2 \\ \longrightarrow \\ R_3 = R_3 - 4R_2 \\ R_4 = R_4 + 3R_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_3 = -R_3 \\ \longrightarrow \\ R_4 = R_4 - R_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

אינסוף פתרונות: $x_4 = s$, $x_3 = t$

$x_5 = 1$ ~~שורה שלישית~~ שורה שלישית

$x_2 = -t + s + 2$ שורה שניה:

$x_1 = 2t - s - 1 + 2 = 2t - s + 1$ שורה ראשונה:

פתרון סופי:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2t - s + 1, -t + s + 2, t, s, 1)$$

$$t(2, -1, 1, 0, 0) + s(-1, 1, 0, 1, 1) + (1, 2, 0, 0, 1)$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_1]{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 \frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 + 2R_2]{R_3 = R_3 - 9R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אין פתרון למערכת

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = -2$$
$$3x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_3 = -2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - 3R_1]{R_3 = R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = -\frac{1}{8}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1.5 & -1.5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 - 4R_3]{R_3 = R_3 - 0.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 1\frac{3}{4}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

פתרון יחיד!

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = 2\frac{1}{4}$$
$$x_3 = -2$$

③

$2x_1+4x_2+x_3=1$
$3x_1+5x_2=1$
$5x_1+13x_2+7x_3=4$

$$\begin{pmatrix}2&4&1&1\\3&5&0&1\\5&13&7&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1=\frac{1}{2}R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0.5&0.5\\3&5&0&1\\5&13&7&4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-5R_1]{R_2=R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&0.5&0.5\\0&-1&-1.5&-0.5\\0&3&4.5&1.5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1=R_1-2R_2]{R_2=-R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2.5&-0.5\\0&1&1.5&0.5\\0&3&4.5&1.5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-3R_2}\begin{pmatrix}1&0&-2.5&-0.5\\0&1&1.5&0.5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אך כיון משתנים: $X_1=t$ $X_2=5$, איפה חופשי $X_3=t$

$X_1=-\frac{1}{2}+2.5t$ $X_2=\frac{1}{2}-1.5t$

פתרון כללי: $(x_1,x_2,x_3)=(2.5t-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1.5t,t)=$
$t(2.5,-1.5,1)+(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

① ②

$x_1+4x_2-2x_3+3x_4=a$
$3x_1+5x_2+2x_4=5$
$7x_2-6x_3+7x_4=13$

$$\begin{pmatrix}1&4&-2&3&a\\3&5&0&2&5\\0&7&-6&7&13\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2-3R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-2&3&a\\0&-7&6&-7&5-3a\\0&7&-6&7&13\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&4&-2&3&a\\0&0&0&0&5-3a+13\\0&7&-6&7&13\end{pmatrix}$$

$5-3a+13=0$

$-3a=-18$

$a=6$

②

$2x_1+x_2+4x_3+3x_4=1$
$x_1+3x_2+2x_3-x_4=3a$
$x_1+x_2+2x_3+x_4=a^2$

$$\begin{pmatrix}2&1&4&3&1\\1&3&2&-1&3a\\1&1&2&1&a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&a^2\\1&3&2&-1&3a\\2&1&4&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&a^2\\0&2&0&-2&3a-a^2\\0&-1&0&1&1-2a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&a^2\\0&-1&0&1&1-2a^2\\0&2&0&-2&3a-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1=R_1-R_2]{R_2=-R_2}\begin{pmatrix}1&0&2&2&a^2-2a^2+1\\0&1&0&-1&2a^2-1\\0&2&0&-2&3a-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & a^2-2a^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2a^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-a^2-2(2a^2-1) \end{array}\right)$$

$$3a-a^2-4a^2+2=0$$

$$-5a^2+3a+2=0$$

$$a_1=-1.2 \qquad a_2=\frac{1}{5}$$

3) א) נתונה מטריצה: $A_{k\times n}$ $A_{k\times n} \mid B_{k\times 1}$

(שורות ↙ ↘ עמודות)

$k \leq n$: מקרה ראשון: $k<n$ כלומר מספר השורות במטריצה קטן ממספר העמודות – המשתנים, במקרה כזה יש אינסוף פתרונות למערכת

מקרה שני: $k=n$ כלומר מספר השורות והעמודות שווים במטריצה – המשתנים, במקרה יש בדיוק פתרון אחד למערכת

לכן רק 2 מקרה יש לפחות פתרון אחד כש: $n \geq k$

ב) נתונה מטריצה $A_{k\times n}$ $A_{k\times n} \mid B_{k\times 1}$

(עמודות ↙ ↘ שורות)

$k \geq n$: מקרה ראשון: $k>n$ כלומר מספר השורות במטריצה גדול ממספר העמודות – המשתנים, במקרה כזה, אין פתרון למערכת.

מקרה שני: $k=n$ כלומר מספר השורות ועמודות שווים במטריצה – המשתנים, במקרה כזה יש בדיוק פתרון אחד למערכת.