יח

דף 3

לינארית תרגיל 1-ב

$$\alpha \oplus \beta = \alpha \cdot \beta \quad t \cdot \alpha = \alpha^{t} \qquad t \in \mathbb{R} ,\ \alpha, \beta \in V$$

(1)

(i) סגירות לחיבור $\alpha \oplus \beta = \alpha \cdot \beta$ כי מספרים ב-$\mathbb{R}$ נותנים מספר ב-$\mathbb{R}$ (מתקיים)

(2) קומוטטיביות לחיבור $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$, $\beta \oplus \alpha = \beta\alpha$ וראינו $\alpha\beta = \beta\alpha$ כי $\mathbb{R}$ קומוטטיבי, ולכן $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$

אסוציאטיביות יהי $\gamma \in V$ $\underline{\text{צ"ל}}$: $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$

$\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$ ✓ מתקיים.

$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha\beta\gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$ מתקיים

4 איבר ניטרלי מחשיבים איבר $\vec{0} \in V$ כך ש- $\alpha \in V$

$\alpha = \alpha + \vec{0} = \vec{0} + \alpha = \alpha$

נחפש את $\vec{0}$

$\alpha \oplus \vec{0} = \alpha \Rightarrow$

$\alpha \vec{0} = \alpha \quad / \cdot \frac{1}{\alpha}$

$\vec{0} = 1$

איבר האפס הוא 1 (כי $\alpha = 0$ - ש לא מתקיים)

$0 \cdot 1 = 0$

5 קיום איבר נגדי, מחפשים איבר נגדי לכל $\alpha \in V$ נחפש $-\alpha$ כך ש- $\alpha + (-\alpha) = \vec{0}$

איבר האפס שלנו הוא 1 ולכן צריך להתקיים

$\alpha + (-\alpha) = 1 \Rightarrow \quad \alpha \cdot (-\alpha) = 1 \Rightarrow \quad -\alpha = \frac{1}{\alpha}$

מצאנו את האיבר הנגדי (בדוק שזה מתקיים)

$\alpha \oplus \frac{1}{\alpha} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$

חוקי הכפל

6 סגירות לכפל בסקלר $t \cdot \vec{\alpha} \in V$? ואכן $t\alpha = \alpha^{t}$ מספר בחזקת מספר ממשי יהיה תמיד שייך ל- $\mathbb{R}$, מתקיים.

7 (א) יהי $t, s \in \mathbb{R}$ צ"ל $(t+s) \cdot \alpha = t\alpha + s\alpha$

$(t+s)\alpha = \alpha^{t+s}$ $\qquad$ $t\alpha + s\alpha = t\alpha \oplus s\alpha =$

$\alpha^{t} \oplus \alpha^{s} = \alpha^{t} \cdot \alpha^{s} = \alpha^{t+s}$

ראינו שבשני האגפים שווים ל- α^{t+s} ולכן הם שווים.

(7) $t(\alpha+\beta)=t\alpha+t\beta$

$$t\cdot(\alpha+\beta)=t(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^t$$
$$t\alpha+t\beta=\alpha^t\cdot\beta^t=\alpha^t\beta^t$$

מתקיים

8 יהי $t,s\in R$ $\quad (t\cdot s)\alpha=t(s\cdot\alpha)$?

$$\alpha^{ts}=t(\alpha^s)=\alpha^{s^t}=\alpha^{ts}$$ ✓

9 מחפשים את האיבר הניטרלי לכפל $1\cdot\alpha=\alpha$

נקרא לו $X\in R$ ונחפש מיהו

$$\alpha=X\cdot\alpha=\alpha^X$$
$$X\alpha=\alpha^X$$
$$\alpha^X=\alpha\Rightarrow X=1$$

נשווה תכונות ואכן זה מתקיים

6 התנאים מתקיימים ולכן זה מרחב וקטורי

(2) נקבע $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in F$ ונראה את $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (a)

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$a=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$$
$$b=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$
$$c=2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3$$

נעביר למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\1&1&-1&b\\2&1&3&c\end{array}\right)\xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&-2&-2&b-a\\0&-5&-5&c-2a\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2\cdot-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&1&1&\frac{(1-a)}{2}\cdot-5\\0&-5&-5&c-2a\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&1&1&(b-a):-0.5\\0&0&0&c-2a+-5\cdot\frac{(b-a)}{2}\end{array}\right)$$

כאשר $c-2a+(5:-0.5\,(b-a))=0$

אז יש פתרון ולכן נשווה ל-0 ונקבל

$$c-2a\left(\frac{5b-a}{2}\right)=c-2a-\frac{5b}{2}+\frac{a}{2}=c-\frac{3}{2}a-\frac{5b}{2}=0\ /2$$

$$c=\frac{3a}{2}+\frac{5b}{2}$$

Scanned by CamScanner

הווקטורים שהם בצורה לינארית ב $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

הם $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \frac{3a}{2}+\frac{5b}{2} \end{pmatrix}$

כיוון ש- c תלוי ב- a ו- b

ו- a ו- b הם חופשיים

③ יהי $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F$ כך ש:

$$\alpha_1(1+x+x^2)+\alpha_2(-1+2x+x^3)+\alpha_3(2+x^2+x^3)+\alpha_4(1+x+2x^2+x^3)$$
$$=ax^3+bx^2+cx+d$$

השוואת מקדמים

מקדמי x^3: $a=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

מקדמי x^2: $b=\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4$

מקדמי x: $c=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$

איברים חופשיים: $d=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$

נעביר למטריצה

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 2 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 2 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_4=R_4-R_1]{R_3=R_3-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -1 & -1 & c-b \\ 0 & -1 & 1 & 1 & d-b \end{array}\right) \xrightarrow[R_4=R_4+R_2]{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3 & -3 & c-b-2a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & d-b+a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & d-b+a \\ 0 & 0 & -3 & -3 & c-b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{d-b+a}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -3 & c-b-2a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2=R_2-R_3 \\ R_4=R_4+3R_3}]{R_1=R_1-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & b-\left(\frac{d-b+a}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-\left(\frac{d-b+a}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{d-b+a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & c-b-2a+3\left(\frac{d-b+a}{2}\right) \end{array}\right) \xrightarrow{R_4=R_4\cdot\frac{1}{3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & b-\left(\frac{d-b+a}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-\left(\frac{d-b+a}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{d-b+a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\left(c-b-2a+3\left(\frac{d-b+a}{2}\right)\right)}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - 2R_4} \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & b-\left(\frac{d-b+a}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(c-b-2a+3\left(\frac{d-b+a}{2}\right)\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-\frac{(d-b+a)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{d-b+a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\left(c-b-2a+3\left(\frac{d-b+a}{2}\right)\right)}{3} \end{array}\right)$$

הפכנו לצד למטריצה היחידה, סיימנו

$$\alpha_1 = b-\left(\frac{d-b+a}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(c-b-2a+3\left(\frac{d-b+a}{2}\right)\right)$$

$$\alpha_1 = \cancel{b}-\cancel{\frac{d}{2}}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{2c}{3}-\frac{2b}{3}-\frac{4a}{3}+\cancel{d}-\cancel{b}+a$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{5}{6}a-\frac{1}{6}b+\frac{2}{3}c+\frac{1}{2}d$$

$$\alpha_2 = a-\frac{d}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}a+\frac{b}{2}+0\cdot c-\frac{d}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{d-b+a}{2}+0\cdot c$$

$$\alpha_4 = -\left(c-b-2a+\frac{3d}{2}-\frac{3b}{2}+\frac{3a}{2}\right)$$

$$\alpha_4 = -c+b+2a-\frac{3d}{2}+\frac{3b}{2}-\frac{3a}{2}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}a+\frac{5}{2}b-c-\frac{3d}{2}$$

מצאנו את ה-α המתאימות ~~של~~ ~~תלוי~~

[illegible]

ולכן כל פולינום הוא צ״ל של הפולינום הנתונים

(4) יהי $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in F$ עבור $a,b,c,d \in F$

נחפש $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\3\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

נסדר ~~כמערכת~~ למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & b \\ 2 & 1 & 0 & c \\ 4 & 0 & 6 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & c \\ 4 & 0 & 6 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 = R_4 + 3R_1]{R_3 = R_3 + 5R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 & c+5b \\ 0 & 2 & 1 & d+3b \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 = R_4 + 6R_2]{R_3 = R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & c+5b+6a \\ 0 & 0 & 0 & d+3b+5a \end{array}\right)$$

כאשר $c+5b+6a=0$

למערכת יש פתרון ולכן : $d+3b+5a=0$

$c=-6a-5b$

$d=-3b-5a$

נקבל ש- d ו- c תלויים ב- b ו- a ולכן לגביהם אין לנו אפשרויות בחירה נשאר לנו לבחור את b ו- a

לכן יש $a \cdot b$

$7 \cdot 7 = 49$

יש 49 אפשרויות

(3) יהי F ונגדיר $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in F$ ו- $a,b,c \in F$ ונחפש

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \gimel \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \gimel \\ \gimel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

השאלה היא מה צריך להיות הערך של ג כך שלכל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ יהיו קיימים

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in F$ שיוויון זה יתקיים!

נכתוב את השוויון שקיבלנו למערכת

השאלה היא עבור איזה ערך ג למערכת זו תהיה תמיד פתרון לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$ לפי המשפט יש פתרון יחיד אם המטריצה הפיכה, כלומר הדטרמיננטה שלה $\neq 0$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & : a \\ \beta_2 \gimel + \beta_3 \gimel & : b \\ \beta_2 2 + \beta_3 \gimel & : c \end{cases}$$

בס"ד

נחשב דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{עמודה } 1]{\text{פיתוח לפי}} 1 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1\cdot(\lambda^2-2\lambda)=0$$

$$1\cdot\lambda(\lambda-2)=0 \qquad \lambda^2-2\lambda=0$$

ולכן הדטרמיננטה תהיה שונה מ-0 כאשר $\lambda\neq 0,2$ ולכן

כאשר $\lambda\neq 0,2$

אז הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נוצר $\mathbb{R}^3$ ב $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

ג) יהי $\alpha\in V$ $\mathbb{R}^3$

$\beta_1\in\mathbb{R}$

$$\alpha=\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\beta_2\cdots+\alpha_n\beta_n$$

$$\alpha=\alpha_1^{\beta_1}\cdot\alpha_2^{\beta_2}\cdot\_\_\_\cdot\alpha_n^{\beta_n}$$

נבחר $\leftarrow$ $\beta_1=\log_{\alpha_1}\alpha \iff \alpha=\alpha_1^{\beta_1}$

וגם נבחר $\beta_i=0$ לכל $2\leq i\leq n$ (נקבל)

$$\alpha=\alpha_1^{\log_{\alpha_1}\alpha}\cdot\alpha_2^0\cdot\alpha_3^0\ \_\_\_\ 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha=\alpha\cdot 1\cdot 1\cdot 1 \Rightarrow \alpha=\alpha$$

קיבלנו ש- α צירוף לינארי ב$\{\alpha_1,\alpha_n\}$ לכל α