דף

ש.ב 2 בלינארית

$W=\{A\in M_n(F) \mid 1\leq i\leq j\leq n \text{ לכל } A_{ij}=2A_{ji}\}$ $V=M_n(R)$ א 1

יהיו $A,B\in W$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & \cdots & 2a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{32} & \cdots & 2a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & 2a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 2b_{21} & 2b_{31} & \cdots & 2b_{n1} \\ b_{21} & b_{22} & 2b_{32} & \cdots & 2b_{n2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

תנאי ראשון חיבור:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 2(a_{21}+b_{21}) & \cdots & 2(a_{n1}+b_{n1}) \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & 2(a_{n2}+b_{n2}) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

התנאי מתקיים $A+B\in W$

תנאי שני כפל: יהי $A\in W$ וסקלר $\alpha\in R$

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & 2\alpha a_{21} & \cdots & 2\alpha a_{n1} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & 2\alpha a_{n2} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

התנאי מתקיים $\alpha A\in W$

לכן W תת מרחב של V

$W=\{P(x)\in F[x] \mid P(1)=P(2)\}$ $V=F[x]$ 2

יהיו $P(x),g(x)\in W$ כך ש
אז

$P(1)=P(2)$

$g(1)=g(2)$

דפלך

תנאי ראשון חיבור: $f(x)+g(x) \rightarrow$ מקיימות $f(1)+g(1)=f(2)+g(2)$

(התנאי מתקיים)

תנאי שני כפל - יהיה $f(x)\in W$; סקלר $\alpha\in R$

$\alpha f(x) \rightarrow \alpha f(1)=\alpha f(2)$

(התנאי מתקיים)

ולכן W ת"מ ב V.

5

$$A=\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ \lambda & 2\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & \lambda\end{bmatrix}$$

נמצא את הערך של λ כדי שמטריצות אלה יהיו בת"ל?

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}2 & 1\\ \lambda & 2\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta\lambda + 2\gamma + 3\delta = 0$$
$$\alpha\lambda + \beta + \gamma + 2\delta = 0$$
$$\gamma\lambda + 2\delta = 0$$
$$2\gamma + \delta\lambda = 0$$

(מעבר למטריצה)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & \lambda & 2 & 3 & 0\\ \lambda & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = R_2 - \lambda R_1} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & \lambda & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda & 2-3\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & \lambda & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda & 2-3\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = R_4 - \frac{1}{2}\lambda R_3} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & \lambda & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda & 2-3\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{1}{2}\lambda^2 & 0\end{array}\right]$$

$$2-\frac{1}{2}\lambda^2=0 \qquad\qquad 1-\lambda^2=0$$
$$2=\frac{1}{2}\lambda^2 \qquad\qquad 1=\lambda^2$$
$$4=\lambda^2 \qquad\qquad \lambda=\pm 1$$
$$\lambda=\pm 2$$

2 א) (i) יהיו $v_1,v_2\in V\cap W$, נראה כי $v_1+v_2\in V\cap W$

מאחר ש- $v_1,v_2\in V\cap W$, כלומר, $v_1,v_2\in V$, וגם $v_1,v_2\in W$

$v_1+v_2\in V$ כי V הוא תת מרחב של U

$v_1+v_2\in W$ כי W הוא תת מרחב של V.

$\Leftarrow$ $v_1+v_2\in V\cap W$

תנאי (ii) יהי $v\in V\cap W$ ו- $\alpha\in F$

$v\in V\cap W$ אזי $v\in W$ וגם $v\in V$

$\alpha v\in V$ כי V הוא תת מרחב

$\alpha v\in W$ כי W הוא תת מרחב.

$\Leftarrow$ ולכן $\alpha v\in V\cap W$

שני התנאים מתקיימים ולכן, $V\cap W$ הוא תת מרחב של V.

ב) יהיו $v_1+v_2, v_3+v_4\in V+W$, $v_1,v_3\in V$ $v_2,v_4\in W$

נראה כי $(v_1+v_2)+(v_3+v_4)\in V+W$, כלומר $(v_1+v_2)+(v_3+v_4)=(v_1+v_3)+(v_2+v_4)$

$v_1+v_3\in V$ כי U הוא תת מרחב של V, $v_2+v_4\in W$ כי W הוא תת מרחב של V, ולכן $(v_1+v_2)+(v_3+v_4)\in V+W$

תנאי (ii) יהי $v_1+v_2\in V\cup W$ ו- $\alpha\in F$

$\alpha(v_1)+\alpha v_2=\alpha(v_1+v_2)$

$\alpha v_1\in V$ כי V תמ"ו

$\alpha v_2\in W$ כי W תמ"ו

ולכן $\alpha v_1+\alpha v_2\in V+W$

ולכן $V+W$ הוא תמ"ו של V.

ג) הוכחה: $\Rightarrow$ אם $V\subseteq W$ אזי $V\cup W=W$ ו- W תמ"ו, ולכן $V\cup W$ תמ"ו

אם $W\subseteq V$ אזי $W\cup V=V$ ו- V תמ"ו, ולכן $W\cup V$ תמ"ו.

$\Leftarrow$ נתון ש- $V\cup W$ הוא תמ"ו של V, צ"ל ש- $V\subseteq W$ או $W\subseteq V$

נשתמש בדרך השלילה. נניח שזה לא נכון, כלומר, $V\not\subseteq W$ ו- $W\not\subseteq U$.

ולכן קיים $\alpha\in V/W$ וקיים $\beta\in W/U$ ושניהם $\alpha,\beta\in V\cup W$ (כי איחוד) או ל- V או ל- W). אבל הנתון $V\cup W$ הוא תמ"ו של V ולכן $\alpha+\beta\in V\cup W$

(לפי ההגדרה של האיחוד או ש- $\alpha+\beta\in V$ או ש- $\alpha+\beta\in W$.

אם $\alpha+\beta\in V$ אבל מה שהקדמנו $\alpha\in V$ נקבל ש- $(\alpha+\beta)-\alpha\in V$

אם $\alpha+\beta\in W$ ו- $\beta\in W$, אז נקבל $(\alpha+\beta)-\beta\in W$ ולכן $\alpha\in W$ סתירה

כי $\alpha\in V/W$ כפי שטענו.

(3) (א)

(נבדוק האם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש-

$$\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(2,1,0)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+\alpha_3=0$$

(נדרג למדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&1&0\\2&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&-4&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3=R_3+4R_2]{R_1=R_1-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3\cdot\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2=R_2-R_3]{R_1=R_1+R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

לפי המשפט שאם למערכת ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$ יש פתרון טריוויאלי אז המטריצה הפיכה נסיק שלמערכת הנ"ל יש פתרון טריוויאלי קל שהצלחנו לדרג למטריצה היחידה (כיון שקולה שורה ל I והדטרמיננטה לא שווה 0)

ולכן המערכת היא בת"ל (כיוון שאין שום שילוב מערכת ההומוגנית הנוספת לפתרון טריוויאלי את הווקטורים הם בת"ל)

(ב) (נבדוק אם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$a=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 \rightarrow \alpha_1=a-2\alpha_2-\alpha_3$$
$$b=\alpha_2+\alpha_3 \rightarrow \alpha_2=b-\alpha_3$$
$$c=2\alpha_1+\alpha_3 \qquad \alpha_3=c-2\alpha_1$$

$$\alpha_3=c-2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_3=c-2(a-2\underbrace{\alpha_2}_{b-\alpha_3}-\alpha_3)$$

$$=c-2(a-2(b-\alpha_3)-\alpha_3) \Rightarrow c-2a+4(b-\alpha_3)+2\alpha_3$$

$$\Rightarrow \alpha_3=c-2a+4b-4\cdot\alpha_3+2\alpha_3 \Rightarrow 3\alpha_3=c-2a+4b$$

- $\boxed{\alpha_3=\frac{1}{3}c-\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b}$
- $\alpha_2=b-(\frac{1}{3}c-\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b \Rightarrow \boxed{\alpha_2=-\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}a}$

המשך

$$\alpha_1 = a - 2\left(-\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}a\right) - \left(\frac{1}{3}c - \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b\right)$$

$$\alpha_1 = a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b$$

$$\boxed{\cdot\ \alpha_1 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c}$$

הם יוצרים את R_3 כיוון שלכל וקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מצאנו את ה-α המתאימים המתאימה

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}a$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b$$

4) א) נבדוק האם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש-

$$ax^2 + bx + c = \alpha_1(1-x) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(x-x^2)$$

מקדמי x^2: $a = -\alpha_2 - \alpha_3 \rightarrow -\alpha_3 = a + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 = -a - \alpha_2$

מקדמי x: $b = -\alpha_1 + \alpha_3 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 - b$

מקדמים חופשיים: $c = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_2 = c - \alpha_1$

$$\alpha_2 = c - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = c - (\alpha_3 - b) \Rightarrow \alpha_2 = c - (-a - \alpha_2 - b)$$

$$\alpha_2 = c + a + \alpha_2 + b \rightarrow 0 = a + b + c$$

ולכן הם לא יוצרים את $R[x]_2$ כיוון שחייב להיות ש-$a+b+c=0$

אך לא כל הפולינומים ב-$R[x]_2$ מקיימים גם $a+b+c=0$

ב) נבדוק אם הם בת"ל, נבדוק $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$

$$\alpha_1(1-x) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(x-x^2) = 0$$

מקדמי x^2: $0 = -\alpha_2 - \alpha_3 \rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$

מקדמי x: $0 = -\alpha_1 + \alpha_3 \quad \alpha_1 = \alpha_3 \quad -\alpha_2 = \alpha_3$

מקדמים חופשיים: $0 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_1 = -\alpha_2$

ד"ב

הן כן תלויים לינארית הוכחה:

ניקח סקלרים: $\alpha_3=-1$ $\alpha_2=1$ $\alpha_1=-1$; הם סקלרים:

ולא המשוואות הנ"ל

ונבדוק

$$-1(1-x)+1(1-x^2)-1(x-x^2)=-1+x+1-x^2-x+x=0$$

הפולינומים תלויים לינארית.

ב) א) יהי $v\in Sp(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

אזי $v=x\alpha_1+x\alpha_2+x\alpha_3$

כך $v=a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3$

$$a\cdot(\alpha_1+\alpha_2)+b(\alpha_1-\alpha_2)+c(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$
$$=\alpha_1(a+b+c)+\alpha_2(a-b+c)+\alpha_3(c)$$

ואכן זה מתקיים כי $v\in Sp(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

ו- a,b,c הם סקלרים, ולכן $v\in Sp(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

כמו כן: יהי $v\in Sp(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

אזי $v=a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3$

ולכן לפי הנתונים:

$$v=a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3=a(\alpha_1+\alpha_2)+b(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+c(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1(a+b+c)+\alpha_2(a-b+c)+\alpha_3(c)$$

ולכן $v\in Sp(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

ג) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ בת"ל ולכן אם

$$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=0$$

$$x=y=z=0$$

[illegible]

ג: אם $a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3=0 \Rightarrow a=b=c=0$

$$a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3=a(\alpha_1+\alpha_2)+b(\alpha_1-\alpha_2)+c(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$$

ולכן נקבל:

$$\alpha_1(a+b+c)+\alpha_2(a-b+c)+\alpha_3(c)=0$$

כיוון שהוכחנו את זה ונקבל $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ הם בת"ל, ולכן,

$$a+b+c=0 \rightarrow a=0 \leftarrow a+a=0$$

$$a-b+c=0,\ c=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow b=0$$

ולכן $a=b=c=0$ β_1,β_2,β_3 בת"ל.

נניח: β_1,β_2,β_3 בת"ל ולכן אם $x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3=0$

$\Rightarrow x=y=z=0$

ג: $a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3=0$ אז: $\boxed{a=b=c=0}$

(נציג ב-3 המשוואות הנתונות:

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2 \qquad \beta_2=\alpha_1-\alpha_2 \qquad \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

$$\alpha_1=\beta_1-\alpha_2 \qquad \alpha_2=\alpha_1-\beta_2$$

$$\alpha_1=\beta_1-(\alpha_1-\beta_2)$$

$$\alpha_1=\beta_1-\alpha_1+\beta_2 \quad /+\alpha_1$$

$$2\alpha_1=\beta_1+\beta_2 \quad /:2$$

$$\alpha_1=\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}$$

$$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2 \Rightarrow \beta_2=\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}-\beta_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2=\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta_2}{2}$$

$$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=\beta_3-\alpha_1-\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3=\beta_3-\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}\right)-\left(\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_3=\beta_3-\frac{\beta_1}{2}-\cancel{\frac{\beta_2}{2}}-\frac{\beta_1}{2}+\cancel{\frac{\beta_2}{2}} \Rightarrow \boxed{\alpha_3=\beta_3-\beta_1}$$

ונציב זאת על המשוואה

$$\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=0$$

$$\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}\right)a+\left(\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta_2}{2}\right)b+(\beta_3-\beta_1)c=0$$

הווקטורים בת"ל β

$$\beta_1\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-c\right)+\beta_2\left(\frac{a}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\beta_3(c)=0$$

לפי המשפט ש- β_1,β_2,β_3 קיים : אם

$c=0 \Leftarrow c=0$

$\frac{a}{2}-\frac{\beta}{2}=0 \qquad \frac{a}{2}-\frac{\beta}{2}=0$

נחבר את שני המשוואות ונקבל

$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=0 \Leftarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-c=0$

$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

$\boxed{b=0} \Leftarrow \frac{b}{2}=0 /\cdot 2 \Leftarrow \frac{0}{2}+\frac{b}{2}=0$ נציב

וכיוון ש- $a=b=0$ אזי

קיים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (זכרנו המשוואה עבור α)