תרגיל 2 מבוא לתיאוריה

(1) נוכיח באינדוקציה שלמה על המספרים, על n טבעי, לכל n מתקיים: של קבוצות A_i

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$\dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

בסיס האינדוקציה: $n=2$ $P(2)$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

הוכחנו בכיתה זה מתקיים

הנחת האינדוקציה: עבור n טבעי מתקיים

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=0}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

צ"ל: $P(n+1)$

$$|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| =$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{n+1} |A_i \cap A_j \dots A_{n+1}|$$

הוכחה:

$$|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$$

לפי בסיס האינדוקציה

$$|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$\left(|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right|\right) =$$

חוק הפילוג

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots A_n| + |A_{n+1}| -$$

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\cdot \sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| \pm \sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap A_{n+1})| \cdots (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

$\sum_{1\le j<i\le n} |A_i \cap A_j| \to$ סופר את החיתוכים של 2 קבוצות לא כולל הקבוצה A_{n+1}

$\sum |A_i \cap A_{n+1}| \to$ סופר את החיתוכים של קבוצה עם הקבוצה A_{n+1}

ולכן!

$$\sum_{1\le j<i\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| = \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j|$$

כמו כן!

$\sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \to$ סופר את החיתוכים של שלושה קבוצות מתוך $A_1..A_n$

$$\sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| = \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}|$$

וכך עבור אחד החיתוכים, והוא סופר את החיתוכים של 2 קבוצות ביחד עם הקבוצה A_{n+1}

ולכן!

$$\sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| =$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

כיוון שחיתוך של 2 קבוצות עם הקבוצה וחיתוך של 3 קבוצות עם קבוצה חדשה, יוצר את החיתוכים של 2 קבוצות יחד עם הקבוצה A_{n+1} וכך הלאה ולכן נקבל:

$$|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{i=0}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$\cdots (-1)^{n+2} |A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n+1}|$$

מסקנה: הוכחנו את $P(2)$ והראינו כי לכל n

$P(n) \to P(n+1)$ ולכן הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$

דף 3

(2) כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $2018=x_1+x_2+\dots+x_{15}$ שבהם $x_i<600$ לכל i?

n תאים $n=15$, k כדורים $k=2018$

$$|\Omega| = \binom{k+n-1}{k} = \binom{2018+15-1}{2018} = \binom{2032}{2018}$$

מחפשים את $\left|S \setminus \bigcup_{i=1} A_i\right|$

$|A_i|$ שיש בתא i 600 כדורים ונותרו $2018-600=1418$ כדורים לחלק ב-15 תאים

$$|A_i| = \binom{1418+15-1}{1418} = \binom{1432}{1418}$$

$|A_i\cap A_j|$ שיש בתא i ו-j 599 כדורים ונותרו $1418-600=818$ כדורים לחלק ב-15 תאים

$$|A_i\cap A_j| = \binom{818+15-1}{818} = \binom{832}{818}$$

$|A_i\cap A_j\cap A_k|$ שיש בתא i, j ו-k 599 כדורים ונותרו $818-600=218$ כדורים שנחלק ב-15 תאים

$$|A_i\cap A_j\cap A_k| = \binom{218+15-1}{218} = \binom{232}{218}$$

אבל והפחתי מ-218 את 600 לא המקסימום שיכול להיות 600 ומעלה עד ב-3 איברים, שאר החיתוכים יהיו שווים ל-0.
ולכן לפי נוסחת ההכלה והדחה נקבל:

$$\left|S\setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| = \binom{2032}{2018} - \binom{15}{1}\binom{1432}{1418} + \binom{15}{2}\binom{832}{818} - \binom{15}{3}\binom{232}{218}$$

(3) נניח כי קיים גרף G (לא מכוון) עם לפחות 2 קודקודים יש (לפחות) שני קודקודים שווי דרגה, (נשתמש בעקרון שובך היונים)

הוכחה! יונים = קודקודים, שובכים = דרגות

אנחנו רוצים להוכיח שיש 2 יונים בתוך אותו שובך, כלומר, 2 קודקודים שווי דרגה.

מצד אחד יש n קודקודים ויש n דרגות $(0,1,\dots,n-1)$

אבל לא ייתכן כי קודקוד עם דרגה $n-1$ ועם קודקוד עם דרגה 0.

כיוון שקודקוד עם דרגה 0 זה קודקוד שלא מחובר לשום צלע
כלומר קודקוד מבודד.

וקודקוד עם דרגה $n-1$ זה קודקוד שיש לו צלעות לכל
שאר הקודקודים, קיבלנו סתירה כי לא יתכן שקיים גם קודקוד
מבודד וגם קודקוד שיש לו צלעות לכל שאר הקודקודים

לכן נשוב יתכן שיש $n-1$ דרגות $n-1$ קודקודים ולכן עפ"י
עקרון שובך היונים יש לפחות 2 קודקודים שווי דרגה
מ.ש.ל

4) א) $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כאשר $V=\{1,2\}$

$G=(V,E)$ גרף לא מכוון כאשר $V=\{1,2,3\}$

ב) $V=\{1,2,\dots,n\}$ נתוני n קודקודים, נסמן ב-A את
$P_2(V)$ הקבוצה של G הצלעות האפשריות

$|A|=\binom{n}{2}$ מכיוון שאין חשיבות לסדר (זוגות לא סדורים של קודקודים)

וכן אסורות חזרות (אסור לחבר את אותה צלע פעמיים)
G צלע נספרת פעם אחת, פעם דורשים 2 קודקודים
ומחברים לצלע.

מספר הגרפים הלא מכוונים שווה למספר תתי הקבוצות של A
ולכן נקבל - $2^{\binom{n}{2}}$

ג) $V=\{1,2,\dots,n\}$, במקרה זה יש חשיבות לסדר - זוגות
סדורים, וכן אסורות חזרות כי G קשת מופיע פעם אחת
בלבד, ולכן יש n אפשרויות לבחירת הקודקוד הראשון,
ו- $n-1$ אפשרויות לבחירת הקודקוד השני,
ולחבר קשת, ולכן נקבל $n(n-1)$

נסמן ב-A את $P_2(V)$ הקבוצה של G הקשתות האפשריות
$|A|=n(n-1)$

מספר הגרפים המכוונים שווה למספר תתי הקבוצות של A
ולכן נקבל - $2^{n(n-1)}$

דף 2

(6) נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$

נגדיר יחס Δ על קבוצת הקודקודים V:

$u\Delta v$ אם קיימת מסילה בגרף מ-u ל-v.

רפלקסיבי:

יהי $v\in V$ קודקוד, $v\Delta v$ כיוון שקיימת מסילה בגרף באורך 0 מ-v לעצמו. מתקיים ✓.

סימטרי:

יהיו $u,v\in V$ קודקודים. נניח כי $v\Delta u$, כלומר קיים מסלול בגרף מ-v ל-u, כיוון שהגרף G אינו מכוון בהכרח קיים מסלול מ-u ל-v ולכן $u\Delta v$ מתקיים ✓.

טרנזיטיביות

יהיו $u,v,w\in V$ קודקודים

נניח כי $u\Delta v$, כלומר קיים מסלול בגרף מ-u ל-v

$u\Delta w$ וגם קיים מסלול בגרף מ-v ל-w

נסמן P המסלול בין u ל-v $P=(u=a_0,a_1,\dots,a_k=v)$

Q המסלול בין v ל-w $Q=(v=b_0,b_1,\dots,b_j=w)$

יהי i האינדקס הראשון שמופיע במסלול Q כך ש: $a_i=b_\ell$

נקבל את המסלול $(u=a_0,\dots,a_i,b_{\ell+1},\dots,b_j=w)$

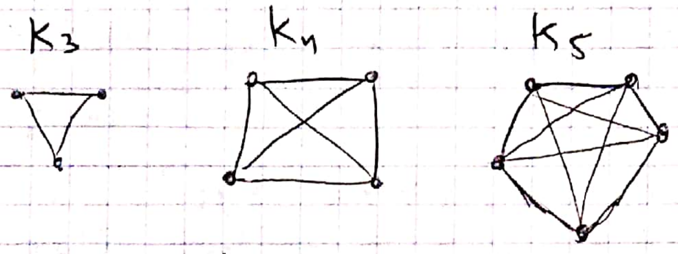
ולכן $u\Delta w$ כלומר קיים מסלול בגרף מ-u ל-w

מתקיים ✓.

הוכחנו כי זהו יחס שקילות.

מ.ש.ל.

5) א) יש רק גרף אחד כזה כי יש רק אפשרות אחת של G עם 0 צלעות
ב) בגרף השלם $\binom{n}{2}$ צלעות, הגרף אינו מכוון ולכן זה מקרה
שאין חשיבות לסדר ושלולאות אסורות כיוון שכל צלע נספרת
פעם אחת בלבד.
כל פעם נבחר 2 קודקודים ונחברם לצלע



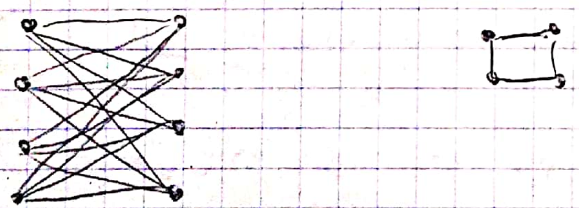
2) קוביה ה-n מימדית $Q_n=(V,E)$ יש 2^n קודקודים
ו- $n\cdot 2^{n-1}$ צלעות

<u>הסבר:</u> בסיס החזקה הוא 2 כיוון שיש 2 אפשרויות
בחירה 0 או 1 לכל סדרה באורך n ולכן מספר הקודקודים
בקוביה הוא 2^n
<u>מ.ש.ל</u>

ובקשר לצלעות - כפי שאמרנו יש 2^n קודקודים, ולכל קודקוד
יש n שכנים נקבל $2^n \cdot n$, כל צלע נספרה פעמיים, לכן נצטרך
לחלק ב-2 ונקבל שמספר הצלעות הוא:

$$|E| = \frac{n\cdot 2^n}{2} = n\cdot 2^{n-1}$$

3) גרף 2-רגולרי (לא שלם), גרף 4-רגולרי (לא שלם)



מס' הצלעות הוא $\frac{nk}{2}$

יש n קודקודים, ומכל קודקוד יוצאות n צלעות
אך כיוון שכל צלע נספרה פעמיים נצטרך לחלק ב-2, ולכן

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \longrightarrow nk = 2|E|$$
$$E = \frac{nk}{2}$$