בס"ד

אלגברה לינארית 4 (5)

(1) נתונה ה"ל $T: R_2[x] \to R[x]_2$ כך ש:

$T(2x) = 2x+2$

$T(x+1) = x+2$

$T(x^2) = x^2+2x$

יהי $P(x) \in R[x]_2$

$P(x) = ax^2+bx+c$

$x^2 = \alpha \cdot 2x + \beta(x+1) + \gamma(x^2)$

$1 = \gamma$

$0 = 2\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 0$

$0 = \beta$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = \alpha \cdot 2x + \beta(x+1) + \gamma(x^2)$

$0 = \gamma$

$1 = 2\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 1/2$

$0 = \beta$

$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$1 = \alpha \cdot 2x + \beta(x+1) + \gamma(x^2)$

$0 = \gamma$

$0 = 2\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -1/2$

$1 = \beta$

$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T(ax^2+bx+c) = aT(x^2) + bT(x) + cT(1)$$

$$= a[T\,0(2x) + 0(x+1) + 1(x^2)] + b[T\,1/2(2x) + 0(x+1) + 0(x^2)] + c[T\,-1/2(2x) + 1(x+1) + 0(x^2)] =$$

$$a[T(x^2)] + b[T\,1/2(2x)] + c[T\,-1/2(2x) + (x+1)]$$

$$= a[T(x^2)] + 1/2\,b[T(2x)] - 1/2\,c[T(2x)] + T(x+1)]$$

$$= a(x^2+2x) + 1/2\,b(2x+2) - 1/2\,c(2x+2) + (x+2)$$

$$= a(x^2+2x) + b(x+1) + c(1)$$

$$T[ax^2+bx+c] = a(x^2+2x) + b(x+1) + c(1)$$

(2) $T: R^{(4)} \to R^{(4)}$

$T(e_1) = T(e_4) = e_1 + e_3 + 2e_4$

$T(e_2) = e_1 + e_2 + e_4$

$T(e_3) = e_2 - e_3 - e_4$

$T(a,b,c,d)$ נחשב את

$T(ae_1+be_2+ce_3+de_4)$

$aT(e_1)+bT(e_2)+cT(e_3)+dT(e_4)$

$a(e_1+e_3+2e_4)+b(e_1+e_2+e_4)+$

$c(e_2-e_3-e_4)+d(e_1+e_3+2e_4)$

נעביר את המשוואה למטריצה:

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

ולכן קיבלנו

$$T(a,b,c,d)=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right]$$

3) יהי $T:V\to W$ ה"ל ויהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ וקטורים ב-V

א) נניח כי $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ת"ל ונראה שהוקטורים $T(\alpha_1),\dots,T(\alpha_n)$ ת"ל ב-W

$v_1,\dots,v_n\in V$

$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$

לפחות α_i אחד $(1\le i\le n)$ שונה מאפס לפי הנתון שהוקטורים ת"ל

ה"ל כלומר, נפעיל את ההעתקה על שני האגפים

$T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)=T(0)=0_W$

$\alpha_1T(v_1)+\dots+\alpha_nT(v_n)=T(0)=0_W$

כיון שלפחות a_i אחד שונה מאפס - עפ"י ההנחה קיבלנו צירוף

לינארי של 0_W שלא כל המקדמים אפס

ולכן הוקטורים: $T(v_1)\dots T(v_n)$ ת"ל ב-W

מ.ש.ל.

ב) נגדיר ה"ל $T:R^3\to R^2$ $\quad T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x-y+z\end{pmatrix}$

ניקח קבוצה של וקטורים בת"ל ב-R^3 $\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

דטב

ונראה כי $T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)$ אינם בת״ל

$T(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $T(\alpha_2)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $T(\alpha_3)=\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}$

קבוצת הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הינה ת״ל

הראינו כי הטענה ההפוכה לטענה בסעיף א׳ אינה נכונה

4) תהי $A\in M_n(F)$ ותהי T_A ההעתקה הלינארית המוגדרת

ע״י A $\quad T^A: F^n\to F^n \quad T_A(x)=A\vec{x}$

לכל $\vec{x}\in F^n$

נוכיח כי T חח״ע $\Longleftrightarrow$ A היא מטריצה הפיכה

הוכחה:

$(\Leftarrow)$; נניח T חח״ע ולכן: $\quad T_A(\vec{x})=T_A(\vec{y})$

$$A\vec{x}=A\vec{y}$$
$$A\vec{x}-A\vec{y}=0$$
$$A(\vec{x}-\vec{y})=0$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{x}-\vec{y}=0$$
$$\vec{x}=\vec{y}$$

מכיוון שפתרון יחיד למערכת ההומוגנית $A(\vec{x}-\vec{y})=0$ ולכן

A היא מטריצה הפיכה

$(\Rightarrow)$: נניח A היא מטריצה הפיכה כלומר קיימת A^{-1} כך ש:

$$AA^{-1}=I \qquad A^{-1}A=I$$

יהיו $\vec{x},\vec{y}\in F^n$

$$T_A(\vec{x})=T_A(\vec{y})$$

$A\vec{x}=A\vec{y}$ כיוון ש-A מטריצה הפיכה

ניתן להכפיל ב-A^{-1} $\quad A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}A\vec{y}$

$$\vec{x}=\vec{y}$$
$$\Downarrow$$

ולכן T חח״ע

מ.ש.ל

Scanned by CamScanner