קוסף

# מבוא לתיאוריה תרגיל 5

(1) מספר $t\in\{1,2,\dots n\}$ זר ל-n $\iff$ t אינו מתחלק באף אחד מהמספרים $p_1,p_2,\dots p_k$, לכן אם נגדיר $A_i$ = קבוצת המספרים בקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ המתחלקים ב-$p_i$ אז $\varphi(n)=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\dots\cap\bar{A}_k|$

לכן נוכל להשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה לספור את $\varphi(n)$

$$|A_i|=\left\lfloor \frac{n}{p_i}\right\rfloor=\frac{n}{p_i}$$

$$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}$$

$$\vdots$$

$$|A_i\cap\dots\cap A_k|=\frac{n}{p_1\cdots p_k}$$

$$\varphi(n)=n-\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{n}{p_ip_j}-\sum_{i\le i<j\le l\le k}\frac{n}{p_ip_jp_l}+\dots+(-1)^k\frac{n}{p_1\cdots p_k}$$

$$=n\left[1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{n}{p_ip_j}+\dots+(-1)^k\frac{1}{p_1\cdots p_k}\right]=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

(2) א) נניח שהטענה מתקיימת עבור גרף קשיר (נניח "מתקיים" עבור G גרף אם הגרף קשיר סימני)

אם G אינו קשיר ורכיבי הקשירות שלו הוא דו-צדדי, אז ניתן להסיק ש-G כולו דו-צדדי:

נניח ש- $V=\cup V_i$ כאשר לכל $i$, $V_i$ הוא רכיב קשירות

ו- $V_i=R_i\cup L_i$ - כאשר G הצלעות הם ב-$V_i$ בין $R_i$ ו- $L_i$, נגדיר: $R=\cup R_i$, $L=\cup L_i$

ולכן G. הצלעות בגרף G הן בין R ו-L, ולכן נקבל ש-G הוא גרף דו צדדי

ד) נניח בשלילה. קיים $V_i=u_0,u_1,u_2,\dots,u_l=u_j$ הוא מסלול קצר יותר מהמסלול $v_i,v_{i+1},\dots v_j$

נבחן בשלט את המסלולים: (המסלול שהתחלק עד ה-i שאנו רוצים, להחליף)

$u=v_0,v_1,\dots,v_i$

$v_i=u_0,u_1,\dots,u_l=v_j$ (המסלול שהוא את הקצר לעדכון)

$v_j,v_{j+1},\dots,v_k=v$ (עד הסוף המסלול המקורי)

נקבל בסתירה להנחת המינימליות שקיים מסלול, מ-u ל-v שאורכו $\ge$ לסכום אורך 3 המסלולים הללו ביחד $<k$

בס"ד

הגענו לסתירה לנתון שאמרנו ש-A הוא המסלול הקצר ביותר.

(5) בהינתן G קשיר נבחר קודקוד u כלשהו ונחלק את V לשתי קבוצות

$$L = \{v \in V \mid \text{זוגי } N(u,v)\}$$

$$R = \{v \in V \mid \text{אי זוגי } N(u,v)\}$$

כיוון שהגרף קשיר מתקיים $V = R \cup L$

ולכן לא קיימת צלע שבין קודקודים ב-R, וגם לא קיימת צלע

שבין קודקודים ב-L, ולכן הגרף הינו דו צדדי:

נניח בשלילה שקיימת צלע שבין קודקודים ב-R, נסמנה $\{x,y\}$

נסמן ב-A את הקודקוד האחרון במסלול מ-u ל-x שנמצא

גם על המסלול מ-u ל-y, כלומר זה קודקוד משותף לשני המסלולים

שהוא u

נתבונן ב-3 המסלולים הבאים:

(א) מ-A ל-x

(ב) מ-x ל-y

(ג) מ-y ל-A

נקבל כי קיים מעגל מהקודקוד A ל-(א) ו-(ג) הקצר ביותר,

כי אין אף צלע משותפת, מלבד הצלע $\{x,y\}$ אינה נמצאת

ב-(א) ו-(ג), ולכן $\{y,x\}$ יוצרת סגירת מעגל.

אורך המעגל שקיבלנו הוא האורך המסלול מ-u ל-x ועוד

אורך המסלול מ-y ל-A ועוד 1 – הצלע $\{x,y\}$ פחות אורך

המסלול מ-y ל-u פעמיים אורך את המסלול שבין A ל-u

נשים כי שני אלו המסלולים הן מסלולים הקצרים ביותר מ-u

ל-A, ולכן הן שווה אורך, ולכן כאשר מחסירים אותם מתקבל

המספר זוגי, וגם אורך 2 המסלולים המקוריים שווה למספר

זוגי, ולכן הסכום נקבל אי זוגי = 1 + זוגי − זוגי

⟸ מצאנו מעגל אי זוגי, בסתירה לקיום צלע $\{x,y\}$

מש"ל

(9) משפט גרף דו-צדדי ⟺ G המעגלים הם באורך זוגי ;

נתבונן במעגל כלשהו ב-G ונניח שהוא באורך זוגי, יהי v

קודקוד במעגל שנמצא במעגל, v הוא סדרה בינארית באורך 5,

כאשר מתקדמים ב-v לאורך הצלעות במעגל, יש צורך לשנות

בדיוק קואורדינטה אחת (ולכן הצבעה של הקודקוד)

רמז

נתבונן בסדרה זיגזגית ב-V מינוס G קודקודים שהשמטנו בסדרה המקורית של V. נשלים G שיחות במעגל תוספת והשתנות החזרה לזה שהיתה ב-V כי שעט לחזור ל-V בסוף המעגל.
ולכן מס' הצלעות הכולל עוקף מספר שנוכל לחלק את הצלעות לצורה כ"כ ע"פ הקודקודים שיטתית דבר. מ.ש.ל

(4) (א) הוכחה: נסמן ב-$t_f$ את מס' הצלעות המקיפות את הפאה f בהצגה מישורית G הגרף.

$4f \le \sum_F t_f \le 2m$ ← מס' הצלעות המקיפות לפחות 4 (לפי שאין לנו ק"ג משולשים)

כל צלע נספרת לכל היותר פעמיים

ולכן $m \ge 2f$

ולפי נוסחת אוילר לגרף קשיר $n-m+f=2$

$\frac{m}{2} \ge f = 2+m-n \Rightarrow (n-2) \ge \frac{m}{2}$

⇐ ולכן $m \le 2n-4$

נבדקה שבגרף אינו קשיר אז m קטן יותר מ.ש.ל

(ב) הוכחה: $K_{3,3}$ הינו גרף דו-צדדי ולכן אין בו משולשים

נניח בשלילה ש-$K_{3,3}$ מישורי $n=6, m=9$

$9 \not\le 2\cdot6-4=8$ אך

וקיבלנו סתירה ולכן $K_{3,3}$ אינו מישורי מ.ש.ל

(ג) הוכחה: נחשב את הדרגה הממוצעת ב-G קודקודים.

$$\sum_{v\in V}\frac{deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \le \frac{2\cdot2(n-2)}{n} < 4$$

אם הדרגה הממוצעת $< 4$ וקיים לפחות קודקוד אחד אשר דרגתו $< 4$ כלומר $\le 3$

מ.ש.ל

(5) (א) הוכחה: נראה כי מתקיים קודם כל ש $|L|=|R|$

נספור את הצלעות בגרף:

מס' צלעות בצד ימין $E=4\cdot|R|$ (דרגת G קודקוד $=4$)

מס' צלעות בצד שמאל $E=4\cdot|L|$

כלומר, $4\cdot|R|=4\cdot|L| \Rightarrow |R|=|L|$

נותר להראות שמתקיים תנאי Hall, כלומר $A\subseteq L$ מתקיים

$|A|\le|N(A)|$ וכן עבור כל $A\subseteq L$

סה״כ {הצלעות החלות ב-N(A)} ⊇ {הצלעות החלות ב-A}

ולכן הגודל של הקבוצה השמאלית ≤ לגודל של הקבוצה הימנית

כלומר: $4|A| \le 4|N(A)| \Rightarrow |A| \le |N(A)|$

מש״ל

(ד) דוגמא: $K_{9,9} = K_{4,5} \cup K_{5,4}$

נתבונן בדוגמא

נשים לב שבגרף כזה

קיבלנו קיים קודקוד שאין לו

שידוך מושלם