Mathmatical Logic HW #3

① ⓑ $A \to A$

A	$A \to A$
F	T
T	T

DNF:

$\bar{A}$	A	$\bar{A} \vee A$
T	F	T
F	T	T

CNF:

A	$\bar{A}$	$\overline{A \wedge \bar{A}}$	$A \wedge \bar{A}$
F	T	T	F
T	F	T	F

DNF: $\bar{A} \vee A$

CNF: $\overline{A \wedge \bar{A}}$

ⓓ $(A \leftrightarrow (\neg A \wedge B)) \to (B \wedge \neg B)$

E20, E22 $\quad \neg((\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \wedge (\neg(\neg A \wedge B) \vee A)) \vee (B \wedge \neg B)$

E17, E8, E2, E18 $\quad \neg((A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B \vee A))$

E5 $\quad \neg(\neg A \wedge (A \vee \neg B))$

E15, E2 $\quad \neg(\neg A \wedge \neg B)$

E17 $\quad A \vee B$ ← CNF and DNF

ⓕ $(x \to y) \to (z \wedge (x \downarrow y))$

NOR, E20 $\quad \neg(\neg x \vee y) \vee (z \wedge \neg(y \vee x))$

E16 $\quad (x \wedge \neg y) \vee (z \wedge (\neg y \wedge \neg x))$

E13 $\quad (x \wedge \neg y) \vee (z \wedge \neg y \wedge \neg x)$

E15 $\quad \neg y \wedge (x \vee (\neg x \wedge z))$

E14 $\quad \neg y \wedge ((x \vee \neg x) \wedge (x \vee z))$

E7, E4 $\quad (\neg y) \wedge (x \vee z)$ ← CNF

E15 $\quad (\neg y \wedge x) \vee (\neg y \wedge z)$ ← DNF

② ⓑ $(((p \downarrow q) \to r) \uparrow p)$

E20, NAND, NOR $\quad \neg((\neg(\neg(p \vee q)) \vee r) \wedge p)$

E16 $\quad \neg((\neg(\neg p \wedge \neg q)) \vee r) \wedge p)$

E17 $\quad \neg((p \vee q \vee r) \wedge p)$

E16 $\quad \neg(p \vee q \vee r) \vee \neg p$

E16 $\quad (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \neg p$

E18 $\quad \neg p$ ← not a tautology or contradiction

③ ⓑ $p \oplus q \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\neg p \wedge q) \xrightarrow{\text{de morgan}} (\neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))) \Rightarrow (\neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)))$

$\Rightarrow (p \vee q) \downarrow (p \vee \bar{q})$

4 b $f(x,y,z) = \neg x \wedge (\neg y \to \neg z)$

$\Rightarrow f(T,T,T) = \neg T \wedge (\neg T \to \neg T) \Rightarrow F \wedge F \Rightarrow \{F\}$

5 a $\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$

$\oplus$ $f(a,b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$

$\wedge$ $g(a,b) \Leftrightarrow a \wedge b$ ← and gate

$\leftrightarrow$ $h(a,b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \wedge \neg b)$

$f(a,a) \Leftrightarrow F$ $g(a,a) \Leftrightarrow a$ $h(a,a) \Leftrightarrow T$

$f(a, h(a,a)) \Leftrightarrow f(a,T) \Leftrightarrow (a \wedge \neg T) \vee (\neg a \wedge T) \Leftrightarrow F \vee \neg a = \neg a$ ← not gate

since we have $a \wedge b$ and $\neg a$, $\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$ is complete.

h $F(x,y,z) = y \to ((x \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg x))$

$g(x,y) = \neg x \vee y$

$f(x,x,x) = x \to ((x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg x))$

$x \to F$

$\neg x \to F$

$\neg x$

$g(f(x,x,x), y) = g(\neg x, y) = \neg\neg x \vee y = x \vee y$

since we have $x \vee y$ and $\neg x$, $\{f(x,y,z), g(x,y)\}$ is complete.

b $\{\to, \leftrightarrow\}$: $(A \to B) \overset{E20}{\equiv} \neg A \vee B \Rightarrow \neg(\neg C) \vee B \equiv C \vee B \Rightarrow \neg A \to B$

$(A \leftrightarrow B) \overset{E22}{\equiv} (A \to B) \wedge (B \to A) \Rightarrow$ we used proved $\Rightarrow$

by adding one we found complete.

E $\{\oplus, \leftrightarrow\}$ from d we can already see that $\oplus$ is good enough.