

# 『多変量解析入門』 演習問題 解答 第2章

Taro Masuda

Twitter ID: @ml\_taro

2022 年 2 月 8 日

## 1 はじめに

このPDFでは、小西貞則著『多変量解析入門 線形から非線形へ』(岩波書店, 2010)の解答を記していきます。公式なものではなくあくまで個人として公開しているため、誤りがある可能性があります。正確性についての保証はできない旨、予めご了承ください。

なお、著作権へ配慮し、問題文については割愛させていただきます。

誤りを見つけた場合は、上記twitter ID [@ml\\_taro](#) までご連絡いただくか、直接PRを飛ばして頂くか、メール [taro.masuda.jp](mailto:taro.masuda.jp) あつとまーく [gmail.com](mailto:gmail.com) までご連絡ください。

## 2 第2章

### 2.1 問2.1

証明.

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-1). \quad (1)$$

これを0とおくと

$$\sum_{i=1}^n y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

同様に $\beta_1$ でも微分して0とおくと

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-x_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3)$$

□

### 2.2 問2.2

誤差の2乗和を最小化したいので,

$$S(\beta) = \epsilon^T \epsilon = (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \quad (4)$$

を $\beta$ について微分して

$$-2X^T \mathbf{y} + 2X^T X \beta = \mathbf{0}. \quad (5)$$

これを解いて,  $\hat{\beta}_{\text{LMS}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$  を得る.

## 2.3 問2.3

尤度関数は

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \right] \quad (6)$$

となり, この対数をとると

$$\log L(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta). \quad (7)$$

これを $\beta$ について微分すると

$$-2X^T \mathbf{y} + 2X^T X \beta = \mathbf{0} \iff \hat{\beta}_{\text{ML}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (8)$$

同様に,  $\sigma^2$ について微分すると

$$-\frac{n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta). \quad (9)$$

## 2.4 問2.4

問2.2, 問2.3より  $\hat{\beta}_{\text{LMS}} = \hat{\beta}_{\text{ML}}$ .

## 2.5 問2.5

証明.

$$\frac{\partial(\mathbf{c}^T \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sum_{i=1}^{p+1} c_i \beta_i \right). \quad (10)$$

これを $j$ 番目の成分ごとに表示すると

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^{p+1} c_i \beta_i \right) = c_j. \quad (11)$$

$$\therefore \frac{\partial(\mathbf{c}^T \beta)}{\partial \beta} = \mathbf{c}. \quad (12)$$

□

証明.

$$\beta^T A \beta = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i \sum_{k=1}^{p+1} a_{ik} \beta_k \quad (13)$$

と表せるので,

$$\frac{\partial}{\partial \beta_l} (\beta^T A \beta) = \sum_{k \neq l} a_{lk} \beta_k + \sum_{i \neq l} a_{il} \beta_i + 2a_{ll} \beta_l \quad (14)$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (a_{lk} + a_{kl}) \beta_k \quad (15)$$

これは  $(A + A^\top)\beta$  の第  $l$  成分に等しい. □

## 2.6 問2.6

証明.

$$E[\mathbf{Z}] = E[\mathbf{c} + A\mathbf{Y}] = E[\mathbf{c}] + E[A\mathbf{Y}] = \mathbf{c} + AE[\mathbf{Y}]. \quad (16)$$

□

証明.

$$E[(\mathbf{Z} - E[\mathbf{Z}])(\mathbf{Z} - E[\mathbf{Z}])^\top] = E[(\mathbf{c} + A\mathbf{Y})(\mathbf{c} + A\mathbf{Y})^\top] - (\mathbf{c} + AE[\mathbf{Y}]) (\mathbf{c} + AE[\mathbf{Y}])^\top \quad (17)$$

$$= \mathbf{c}\mathbf{c}^\top + 2\mathbf{c}E[\mathbf{Y}^\top]A^\top + AE[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top]A^\top - \mathbf{c}\mathbf{c}^\top - 2\mathbf{c}E[\mathbf{Y}^\top]A^\top - AE[\mathbf{Y}]E[\mathbf{Y}^\top]A^\top \quad (18)$$

$$= A(E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top] - E[\mathbf{Y}]E[\mathbf{Y}^\top])A^\top = A\text{cov}(\mathbf{Y})A^\top. \quad (19)$$

□

## 2.7 問2.7

証明.

$$P^2 = X(X^\top X)^{-1}X^\top X(X^\top X)^{-1}X^\top \quad (20)$$

$$= X(X^\top X)^{-1}X^\top = P. \quad (21)$$

□

証明.

$$(I_n - P)^2 = (I_n - P)(I_n - P) \quad (22)$$

$$= I_n - P - P + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P. \quad (23)$$

□