『多変量解析入門』　演習問題　解答

Taro Masuda @ml_taro

2022 年 2 月 6 日

1　はじめに

このPDFでは，小西貞則著『多変量解析入門　線形から非線形へ』(岩波書店，2010)の解答を記していきます．公式なものではなくあくまで個人として公開しているため，誤りがある可能性があります．正確性についての保証はできない旨，予めご了承ください．

なお，著作権へ配慮し，問題文については割愛させていただきます．

2　第2章

2.1　問2.1

証明.

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-1). \tag{1}$$

これを0とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2}$$

同様にβ_1 でも微分して0とおくと

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-x_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{3}$$

□

2.2　問2.2

誤差の2乗和を最小化したいので，

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\mathsf{T}\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}) \tag{4}$$

を$\boldsymbol{\beta}$について微分して

$$-2X^\mathsf{T}\boldsymbol{y} + 2X^\mathsf{T}X\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}. \tag{5}$$

これを解いて，　$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LMS}} = (X^\mathsf{T}X)^{-1}X^\mathsf{T}\boldsymbol{y}$　を得る.

2.3　問2.3

尤度関数は

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})\right] \tag{6}$$

となり，これの対数をとると

$$\log L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}). \tag{7}$$

これを$\boldsymbol{\beta}$について微分すると

$$-2X^\mathsf{T}\boldsymbol{y} + 2X^\mathsf{T}X\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0} \iff \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}} = (X^\mathsf{T}X)^{-1}X^\mathsf{T}\boldsymbol{y}. \tag{8}$$

同様に，σ^2について微分すると

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}2\pi + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}) \iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}). \tag{9}$$

2.4　問2.4

問2.2, 問2.3より $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LMS}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}}$.