

『多変量解析入門』 演習問題 解答 第4章

Taro Masuda

Twitter ID: @ml_taro

2022 年 2 月 12 日

はじめに

このPDFでは、小西貞則著『多変量解析入門 線形から非線形へ』(岩波書店, 2010)の解答を記していきます。公式なものではなくあくまで個人として公開しているため、誤りがある可能性があります。正確性についての保証はできない旨、予めご了承ください。

なお、著作権へ配慮し、問題文については割愛させていただきます。

誤りを見つけた場合は、上記twitter ID [@ml_taro](#) までご連絡いただくか、直接PRを飛ばして頂くか、メール taro.masuda.jp あつとまーく gmail.com までご連絡ください。

第4章

問4.1

(1)

$$\log \pi_i = \log\{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} - \log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} \quad (1)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_i - \log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}. \quad (2)$$

また,

$$\log(1 - \pi_i) = \log \frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} = -\log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}. \quad (3)$$

$$\therefore \log \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = \log \pi_i - \log(1 - \pi_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i. \quad (4)$$

(2)

・現象の構造を捉えるモデル=ある事象が起こった(1)か起こらなかった(0)かの2値を出力データとして扱うモデル.

・データの変動を捉える確率分布モデル=ある現象(リスク)の起こりやすさについて、様々な要因(=入力特徴量)の線型結合を用いて定量的に評価するモデル.

(3)

(x_i, y_i) ($1 \leq i \leq n$)の組がそれぞれ独立に生起したと仮定すると、尤度関数は単に 1 組ずつのデータから算出した尤度の積で計算できる。 i 番目の尤度は、 $y_i = 1$ なら

$$\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}, \quad (5)$$

$y_i = 0$ なら

$$\frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \quad (6)$$

より、いずれの場合もまとめて

$$\frac{\exp\{y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \quad (7)$$

と記述できる。従って

$$L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp\{y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}. \quad (8)$$

(4)

$$l(\beta) = \log L(\beta) = - \sum_{i=1}^n \log \{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} + \sum_{i=1}^n y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i) \quad (9)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \log \{1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i)\} + \sum_{i=1}^n y_i(\beta^\top \mathbf{x}_i). \quad (10)$$

(5)

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = - \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\beta^\top \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i}{1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i)} + \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \pi_i) \mathbf{x}_i. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^\top} = - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \frac{\partial}{\partial \beta^\top} \frac{\exp(\beta^\top \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i)} \quad (12)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \left\{ \frac{\exp(\beta^\top \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i^\top}{1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i)} - \frac{\exp(2\beta^\top \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i^\top}{(1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i))^2} \right\} \quad (13)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\mathbf{x}_i \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i^\top}{(1 + \exp(\beta^\top \mathbf{x}_i))^2} \right\} = - \sum_{i=1}^n \pi_i (1 - \pi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top. \quad (14)$$