『多変量解析入門』　演習問題　解答　第4章

Taro Masuda
Twitter ID: @ml_taro

2022 年 2 月 12 日

はじめに

このPDFでは，小西貞則著『多変量解析入門　線形から非線形へ』(岩波書店，2010)の解答を記していきます．公式なものではなくあくまで個人として公開しているため，誤りがある可能性があります．正確性についての保証はできない旨，予めご了承ください．

なお，著作権へ配慮し，問題文については割愛させていただきます．

誤りを見つけた場合は，上記twitter ID @ml_taro までご連絡いただくか，直接PRを飛ばして頂くか，メール taro.masuda.jp あっとまーく gmail.com までご連絡ください．

第4章

問4.1

(1)

$$\begin{aligned} \log \pi_i &= \log\{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} - \log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} & (1) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_i - \log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}. & (2) \end{aligned}$$

また，

$$\log(1 - \pi_i) = \log \frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} = -\log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}. \quad (3)$$

$$\therefore \log \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = \log \pi_i - \log(1 - \pi_i) = \beta_0 + \beta_x x_i. \quad (4)$$

(2)

・現象の構造を捉えるモデル＝ある事象が起こった（1）か起こらなかった（0）かの2値を出力データとして扱うモデル．

・データの変動を捉える確率分布モデル＝ある現象（リスク）の起こりやすさについて，様々な要因（＝入力特徴量）の線型結合を用いて定量的に評価するモデル．

(3)

(x_i, y_i) $(1 \le i \le n)$の組がそれぞれ独立に生起したと仮定すると，尤度関数は単に 1 組ずつのデータから算出した尤度の積で計算できる．i番目の尤度は，$y_i = 1$なら

$$\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}, \tag{5}$$

$y_i = 0$ なら

$$\frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \tag{6}$$

より，いずれの場合もまとめて

$$\frac{\exp\{y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \tag{7}$$

と記述できる．従って

$$L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\{y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i)\}}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}. \tag{8}$$

(4)

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \log L(\boldsymbol{\beta}) = -\sum_{i=1}^{n} \log\{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)\} + \sum_{i=1}^{n} y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i) \tag{9}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \log\left\{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)\right\} + \sum_{i=1}^{n} y_i(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i). \tag{10}$$

(5)

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)} + \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \pi_i)\boldsymbol{x}_i. \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}} = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}} \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)} \tag{12}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \left\{ \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i^\mathsf{T}}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)} - \frac{\exp(2\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i^\mathsf{T}}{(1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i))^2} \right\} \tag{13}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\boldsymbol{x}_i \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i^\mathsf{T}}{(1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i))^2} \right\} = -\sum_{i=1}^{n} \pi_i(1 - \pi_i)\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\mathsf{T}. \tag{14}$$

問4.2

(1)

$$y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \beta_1 \exp(\beta_0 + \beta_1 t) \exp\{-\exp(\beta_0 + \beta_1 t)\} dt \tag{15}$$

$$= \left[-\exp\{-\exp(\beta_0 + \beta_1 t)\}\right]_{-\infty}^{x} = 1 - \exp\{-\exp(\beta_0 + \beta_1 x)\}. \tag{16}$$

(2)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1 - \exp(-0) = 1 - 1 = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 - \lim_{x \to \infty} \exp(-\exp(\beta_0 + \beta_1 x)) = 1 - 0 = 1. \tag{18}$$

また，$\beta_1 > 0$より任意のxについて$f(x) > 0$であるから$F(x)$は単調増加関数である．

(3)

$$y = 1 - \exp\left\{-\exp(g(y))\right\}. \tag{19}$$

$$\therefore \log(1-y) = -\exp(g(y)). \tag{20}$$

$$\therefore g(y) = \log\{-\log(1-y)\}. \tag{21}$$

問4.3

$$\Phi^{-1}(y) = \frac{x-\mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}x \tag{22}$$

となるので，$\beta_0 = -\frac{\mu}{\sigma}$, $\beta_1 = \frac{1}{\sigma}$とおくと，

$$\Phi^{-1}(y) = \beta_0 + \beta_1 x. \tag{23}$$