

『多変量解析入門』 演習問題 解答

Taro Masuda

Twitter ID: @ml_taro

2022 年 2 月 6 日

1 はじめに

このPDFでは、小西貞則著『多変量解析入門 線形から非線形へ』(岩波書店, 2010)の解答を記していきます。公式なものではなくあくまで個人として公開しているため、誤りがある可能性があります。正確性についての保証はできない旨、予めご了承ください。

なお、著作権へ配慮し、問題文については割愛させていただきます。

誤りを見つけた場合は、上記twitter ID [@ml_taro](#) までご連絡いただくか、直接PRを飛ばして頂くか、メール taro.masuda.jp あつとまーく gmail.com までご連絡ください。

2 第2章

2.1 問2.1

証明.

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-1). \quad (1)$$

これを0とおくと

$$\sum_{i=1}^n y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

同様に β_1 でも微分して0とおくと

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n 2\{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}(-x_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3)$$

□

2.2 問2.2

誤差の2乗和を最小化したいので、

$$S(\beta) = \epsilon^T \epsilon = (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \quad (4)$$

を β について微分して

$$-2X^T \mathbf{y} + 2X^T X \beta = \mathbf{0}. \quad (5)$$

これを解いて, $\hat{\beta}_{\text{LMS}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$ を得る.

2.3 問2.3

尤度関数は

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \right] \quad (6)$$

となり, この対数をとると

$$\log L(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta). \quad (7)$$

これを β について微分すると

$$-2X^T \mathbf{y} + 2X^T X \beta = \mathbf{0} \iff \hat{\beta}_{\text{ML}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (8)$$

同様に, σ^2 について微分すると

$$-\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta) \iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - X\beta)^T (\mathbf{y} - X\beta). \quad (9)$$

2.4 問2.4

問2.2, 問2.3より $\hat{\beta}_{\text{LMS}} = \hat{\beta}_{\text{ML}}$.