

『多変量解析入門』 演習問題 解答 第3章

Taro Masuda
Twitter ID: @ml_taro

2022 年 2 月 12 日

はじめに

このPDFでは、小西貞則著『多変量解析入門 線形から非線形へ』(岩波書店, 2010)の解答を記していきます。公式なものではなくあくまで個人として公開しているため、誤りがある可能性があります。正確性についての保証はできない旨、予めご了承ください。

なお、著作権へ配慮し、問題文については割愛させていただきます。

誤りを見つけた場合は、上記twitter ID [@ml_taro](#) までご連絡いただくか、直接PRを飛ばして頂くか、メール taro.masuda.jp あつとまーく gmail.com までご連絡ください。

第3章

問3.3

誤差の2乗和 $S(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}$ を最小化したいので、

$$S(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - B\mathbf{w})^\top (\mathbf{y} - B\mathbf{w}) \quad (1)$$

を $\boldsymbol{\beta}$ について微分して

$$-2B^\top \mathbf{y} + 2B^\top B\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

これを解いて、 $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LMS}} = (B^\top B)^{-1} B^\top \mathbf{y}$ を得る。

問3.4

式(3.35)の尤度関数のうち、 \mathbf{w} に依存する部分は

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - B\mathbf{w})^\top (\mathbf{y} - B\mathbf{w}) \right\} \quad (3)$$

のみであるから、 $(\mathbf{y} - B\mathbf{w})^\top (\mathbf{y} - B\mathbf{w})$ を最小にする \mathbf{w} が最尤推定量となる。つまり、最小2乗推定量(問3.3の答え) $\hat{\mathbf{w}} = (B^\top B)^{-1} B^\top \mathbf{y}$ と一致する。

問3.5

$$\frac{\partial l_{\lambda}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{w}} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2B^{\top}\boldsymbol{y} + 2B^{\top}B\boldsymbol{w}) - \lambda K\boldsymbol{w}. \quad (4)$$

これを0とおくと

$$\left(\frac{1}{\sigma^2}B^{\top}B + \lambda K\right)\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sigma^2}B^{\top}\boldsymbol{y} \iff \hat{\boldsymbol{w}} = (B^{\top}B + \lambda\sigma^2 K)^{-1} B^{\top}\boldsymbol{y}. \quad (5)$$

また,

$$\frac{\partial l_{\lambda}(\boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{y} - B\hat{\boldsymbol{w}})^{\top}(\boldsymbol{y} - B\hat{\boldsymbol{w}}). \quad (6)$$

これを0とおくと

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - B\hat{\boldsymbol{w}})^{\top}(\boldsymbol{y} - B\hat{\boldsymbol{w}}). \quad (7)$$