

劣モジュラ関数の例

2019年2月1日 12:22

集合関数

モノの集まりに数値を対応させる関数

$$V = \{ \text{🍔, 🍟, 🍽️, 🍰, 🍲, 🥤} \}$$

$$f(\text{🍔, 🥤}) = \frac{\text{価格}}{\text{総カロリー}} \quad \text{おいしさ (?)}$$

16/55

劣モジュラ関数

限界効用遞減性 ... 手持ちの財が多くなると効用の増分が減る性質

$$\begin{aligned} f(\text{🍔, 🍟}) - f(\text{🍔}) & \geq \\ f(\text{🍔, 🍲, 🍰, 🥤}) - f(\text{🍔, 🍲, 🍰}) & \end{aligned}$$

劣モジュラ関数

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ関数

$$\Leftrightarrow \forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y,$$

$$f(X \cup a) - f(X) \geq f(Y \cup a) - f(Y)$$

小さい集合の増分

大きい集合の増分

$$\Leftrightarrow f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$



18/55

V : 有限集合

Def $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ
 $\Leftrightarrow f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$

Prop f が劣モジュラ
 $\Leftrightarrow f(i|X) \geq f(i|Y) \quad (\forall X \not\subseteq Y, i \notin Y) \quad f(i|X) := f(X \cup i) - f(X)$

[限界効用递減性 (diminishing return)]

$$\Leftrightarrow f(X+i) + f(X+j) - f(X) - f(X+i+j) \geq 0 \quad (\forall X, \forall i, j \notin X)$$

増分

Prop f_1, f_2 : 劣モジ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Prop f_1, f_2 : 劣モジュラ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
 $\Rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ も劣モジュラ

例1 • $f(X) = |X|$

• $w \in \mathbb{R}^V$ に対して $f(X) = w(X) := \sum_{i \in X} w_i$

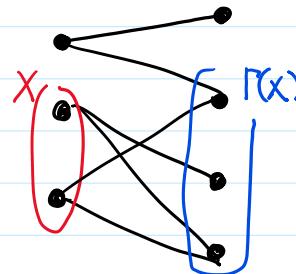
これらは モジュラ関数: $f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

例2 $G = (V, V; E)$... 2部グラフ

$X \subseteq U$ に対して $\Gamma(X) = \{v \in V : \exists u \in U, uv \in E\}$

$f(X) = |\Gamma(X)|$

(被覆関数, coverage func)



例3 $G = (V, E)$... グラフ, $w \in \mathbb{R}_+^E$

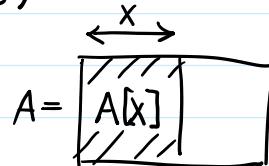
$f(X) := \sum_{e=(i,j) \in E : \{i,j\} \cap X = 1} w_e$

(カット関数; cut func)

例4 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$... 行列, $V = [n]$

$f(X) = \text{rank } A[X]$

(線形マトリオドのランク関数)



例5 $V = [n]$, S_1, \dots, S_n : 確率変数

• $f(X) = H(S_i : i \in X)$ H : Shannon / 微分エントロピー

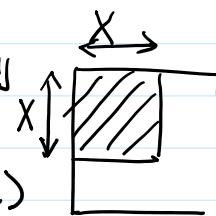
• $f(X) = I(X; \bar{X})$ I : 相互情報量

$\approx H(X) + H(\bar{X}) - H(X \cup \bar{X})$

例6 $V = [n]$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 半正定値対称行列

$f(X) = \log \det A[X, X]$

(実は上 entropy の特種ケース)



例7 $G = (V, E)$, $p_e \in [0, 1]$ ($e \in E$)

以下のプロセスを考える。 $X \subseteq V$ を固定。

時刻 0: X の頂点が活性化する。

時刻 t : 時刻 $t-1$ で活性化した頂点 v に対して
 v から出る各枝 e でつながっている活性頂点 u
を確率 p_e で活性化する

$f(X) := \mathbb{E} [\#(t=|V|+1 \text{ で活性化している頂点})]$... 口コミのモデル
(influence func)