

## 集合関数

モノの集まりに数値を対応させる関数

$$V = \left\{ \text{🍔} \text{🍟} \text{🍰} \text{🍰} \text{🍜} \text{🥤} \right\}$$

$$f(\text{🍔} \text{🥤}) = \begin{matrix} \text{価格} \\ \text{総カロリー} \\ \text{おいしさ(?)} \end{matrix}$$

16/55

## 劣モジュラ関数

限界効用逓減性 ... 手持ちの財が多くなると効用の増分が減る性質

$$\begin{aligned} f(\text{🍔} \text{🍟}) - f(\text{🍔}) \\ \geq \\ f(\text{🍔} \text{🍰} \text{🍰} \text{🍟}) - f(\text{🍔} \text{🍰} \text{🍰}) \end{aligned}$$

17/55

## 劣モジュラ関数

 $f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  が劣モジュラ関数

$$\iff \forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y,$$

$$f(X \cup a) - f(X) \geq f(Y \cup a) - f(Y)$$

小さい集合の増分

大きい集合の増分

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$



18/55

 $V$ : 有限集合Def  $f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  が劣モジュラ

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

Prop  $f$  が劣モジュラ

$$\iff f(i|X) \geq f(i|Y) \quad (\forall X \subseteq Y, i \notin Y)$$

$$f(i|X) := f(X \cup i) - f(X)$$

増分

[限界効用逓減性 (diminishing return)]

$$\iff f(X+i) + f(X+j) - f(X) - f(X+i+j) \geq 0$$

( $\forall X, \forall i, j \notin X$ )

Prop  $f_1, f_2$  : 劣モ,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Prop  $f_1, f_2$  : 劣モ,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$   
 $\Rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  も劣モ

例1  $f(X) = |X|$

•  $w \in \mathbb{R}^V$  に対して  $f(X) = w(X) := \sum_{i \in X} w_i$

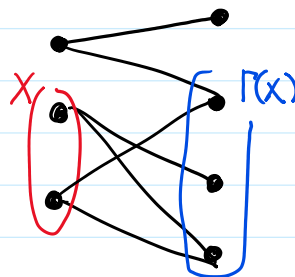
これはモジュー関数:  $f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

例2  $G = (U, V; E) \dots$  2部グラフ

$X \subseteq U$  に対して  $\Gamma(X) = \{v \in V : \exists u \in X, uv \in E\}$

$f(X) = |\Gamma(X)|$

(被覆関数, coverage func)



例3  $G = (V, E) \dots$  グラフ,  $w \in \mathbb{R}_+^E$

$f(X) := \sum_{e \in X} w_e$

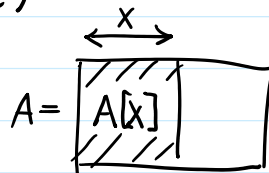
$e = \{i, j\} \in E : |\{i, j\} \cap X| = 1$

(カット関数; cut func)

例4  $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \dots$  行列,  $V = [n]$

$f(X) = \text{rank } A[X]$

(線形マトロイドのランク関数)



例5  $V = [n]$ ,  $S_1, \dots, S_n$  : 確率変数

•  $f(X) = H(S_i : i \in X)$

$H$ : Shannon / 微分エントロピー

•  $f(X) = I(X; \bar{X})$

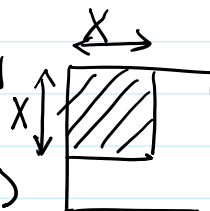
$I$ : 相互情報量

$= H(X) + H(\bar{X}) - H(X \cup \bar{X})$

例6  $V = [n]$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : 半正定値対称行列

$f(X) = \log \det A[X, X]$

(実は上の entropy の特殊ケース)



例7  $G = (V, E)$ ,  $p_e \in [0, 1]$  ( $e \in E$ )

以下のプロセスを考える.  $X \subseteq V$  を固定.

時刻 0 :  $X$  の頂点が活性化する.

時刻  $t$  : 時刻  $t-1$  で活性化した頂点  $v$  に対し  
 $v$  から出る各枝  $e$  でつながっている 活性頂点  $u$   
 を確率  $p_e$  で活性化する

$f(X) := \mathbb{E}[\#(t = |V| + 1 \text{ で} \text{活性化している頂点})]$

$\dots$  □カミのモデル  
 (influence func)