計算数理基礎（二部マッチング）

担当: **相馬 輔**

July 31, 2025

目次

1. 二部マッチングの最大最小定理

- LP の整数性（復習）
- Kőnig–Egerváry の定理

2. 重みなし二部マッチング

- 増加道アルゴリズム
- Kőnig–Egerváry の定理再訪

3. 重み付き二部マッチング

- 相補性条件
- ハンガリー法

目次

1. 二部マッチングの最大最小定理
   - LP の整数性（復習）
   - Kőnig–Egerváry の定理
2. 重みなし二部マッチング
   - 増加道アルゴリズム
   - Kőnig–Egerváry の定理再訪
3. 重み付き二部マッチング
   - 相補性条件
   - ハンガリー法

二部マッチング

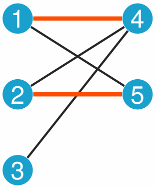
重み付き二部マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング M

二部マッチング

重み付き二部マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング M



IP 定式化

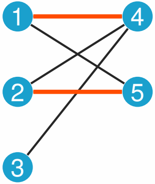
$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 \quad (i \in V) \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad (e \in E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & w^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x_{14} + x_{15} && \le 1 \\ & x_{24} + x_{25} && \le 1 \\ & x_{34} && \le 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} && \le 1 \\ & x_{15} + x_{25} && \le 1 \\ & x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} && \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

二部マッチング

重み付き二部マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング M



LP 定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 & (i \in V) \\
& x_e \ge 0 & (e \in E)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & w^\top x & \\
\text{s.t.} & x_{14} + x_{15} & \le 1 \\
& x_{24} + x_{25} & \le 1 \\
& x_{34} & \le 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} & \le 1 \\
& x_{15} + x_{25} & \le 1 \\
& x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} & \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

係数行列の完全単模性により**常に** 0–1 の LP 最適解をもつ！

二部マッチングの双対問題

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 1 \quad (i \in V) \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in V} y_i \\
\text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e = ij \in E) \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

双対問題 (D) の係数行列も完全単模．よって，枝重み w_e $(e \in E)$ が整数なら，(D) は整数最適解をもつ．

Kőnig–Egerváry の定理

$G = (V^+, V^-; E)$ を V^+, V^- を頂点集合とする二部グラフとする．

定義

$S \subseteq V^+, T \subseteq V^-$ が**頂点被覆**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の枝 $e = ij \in E$ に対し，$i \in S$ または $j \in T$.

Kőnig–Egerváry の定理

$G = (V^+, V^-; E)$ を V^+, V^- を頂点集合とする二部グラフとする．

定義

$S \subseteq V^+, T \subseteq V^-$ が**頂点被覆**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の枝 $e = ij \in E$ に対し，$i \in S$ または $j \in T$.

先の LP において，$w \equiv 1$ の場合を考えると，整数性と強双対定理から以下の定理が得られる．

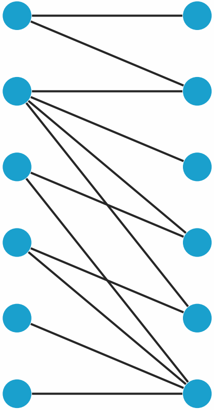
定理 (Kőnig–Egerváry)

二部グラフ G において，次の最大最小定理が成り立つ．

$$\max_{M:\text{ マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\text{ 頂点被覆}} |S| + |T|$$

例

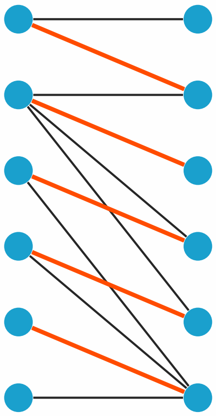
右の二部グラフにおいて，



例

右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$



例

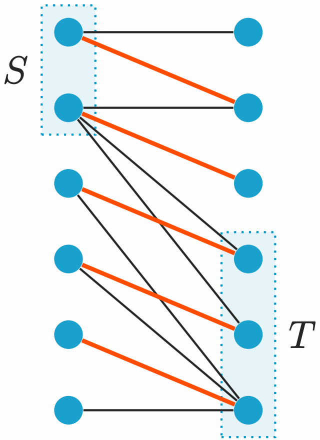
右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$
- 最小の頂点被覆は $|S| + |T| = 5$

一般に，二部グラフにおいてマッチング M が最大であることを示すには，

$$|M| = |S| + |T|$$

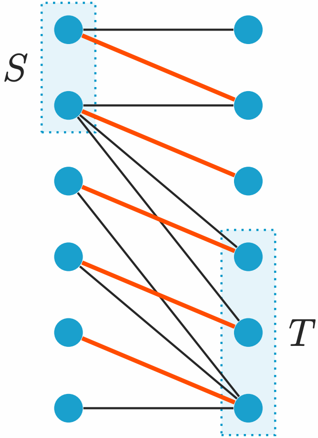
を満たす頂点被覆 (S, T) を提示すれば良い．



例

右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$
- 最小の頂点被覆は $|S| + |T| = 5$



一般に，二部グラフにおいてマッチング M が最大であることを示すには，

$$|M| = |S| + |T|$$

を満たす頂点被覆 (S, T) を提示すれば良い．

そのような頂点被覆は，M の最適性の証拠といえる**（良い特徴づけ; good characterization）**

目次

1. 二部マッチングの最大最小定理

- LP の整数性（復習）
- Kőnig–Egerváry の定理

2. 重みなし二部マッチング

- 増加道アルゴリズム
- Kőnig–Egerváry の定理再訪

3. 重み付き二部マッチング

- 相補性条件
- ハンガリー法

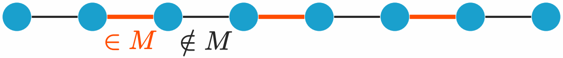
増加道

M: G のマッチング

定義

パス P が（M に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. P において $E \setminus M$ と M の枝が交互に現れる．
2. P の始点と終点は M に接続していない頂点．



$|M| = 3$

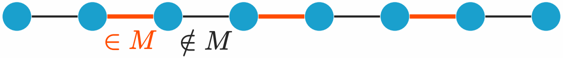
増加道

M: G のマッチング

定義

パス P が（M に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. P において $E \setminus M$ と M の枝が交互に現れる．
2. P の始点と終点は M に接続していない頂点．



$|M| = 3$

$\downarrow$ 反転

$|M| = 4$

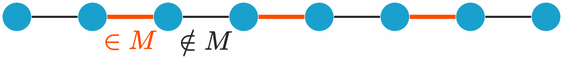
増加道

M: G のマッチング

定義

パス P が（M に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. P において $E \setminus M$ と M の枝が交互に現れる．
2. P の始点と終点は M に接続していない頂点．



$|M| = 3$

$\downarrow$ 反転

$|M| = 4$

$\therefore$ M が最大マッチング $\Longrightarrow$ 増加道は存在しない

増加道

補題

M が最大でない $\Longrightarrow$ 増加道が存在．

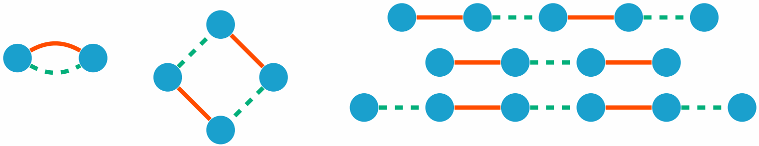
増加道

補題

M が最大でない $\Longrightarrow$ 増加道が存在．

証明

2つのマッチング M, M' ($|M| < |M'|$) を取る．すると，$M + M'$ の連結成分は交互道と長さ偶数のサイクルからなる．



いま，$|M| < |M'|$ より，$M + M'$ の連結成分の中に，交互道で始点と終点が M の端点でないものが存在する．これは M に対する増加道．

$\square$

増加道アルゴリズム

補題より，以下のようなアルゴリズムが考えられる．

増加道アルゴリズム

$M \leftarrow \emptyset$ とする．
while M に対する増加道が存在する：
　　増加道の 1 つを求めて P とする．
　　P に沿って枝を反転して，より大きなマッチング M を得る．
return M

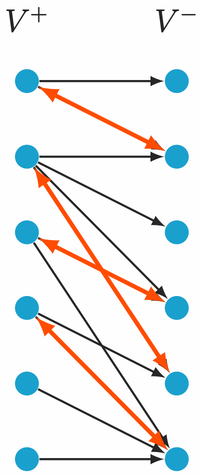
増加道 P を A 時間で求められれば，全体は $O(nA)$ 時間アルゴリズム．

有向グラフを用いた増加道探索

マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする．



D_M

有向グラフを用いた増加道探索

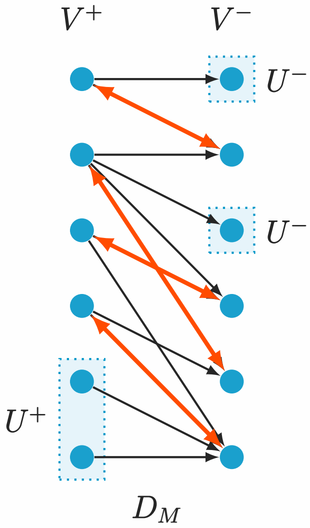
マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする． また，

- $U^+ := M$ に接続していない V^+ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない V^- の頂点集合

とする．



有向グラフを用いた増加道探索

マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする． また，

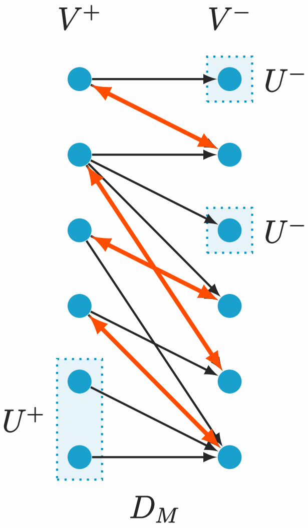
- $U^+ := M$ に接続していない V^+ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない V^- の頂点集合

とする．

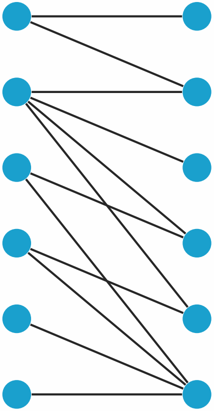
増加道 $\longleftrightarrow$ D_M における U^+ から U^- への有向パス

$\therefore$ 幅優先探索により $O(m)$ 時間で増加道が求められる

$(m = |E|)$

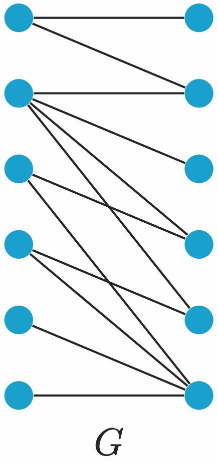


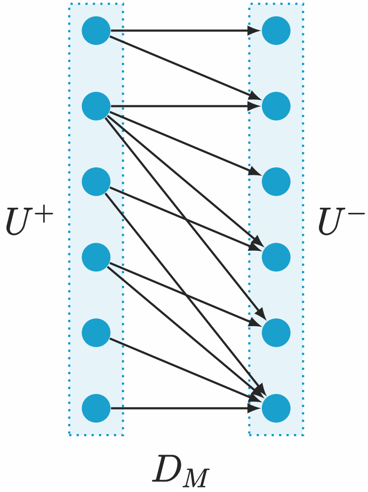
例



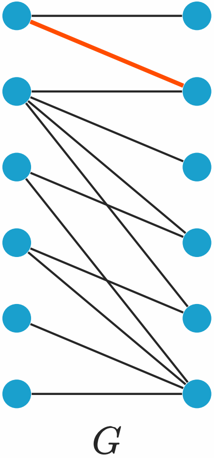
G

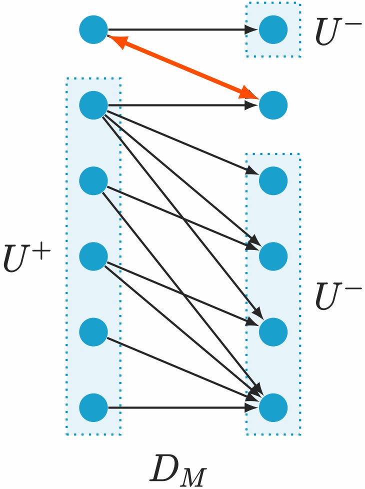
例



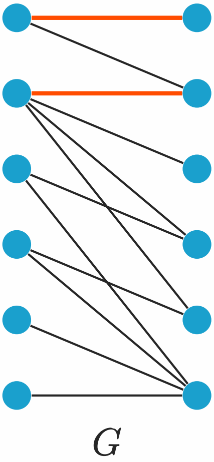


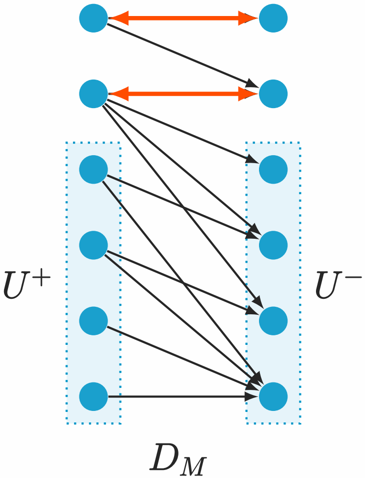
例



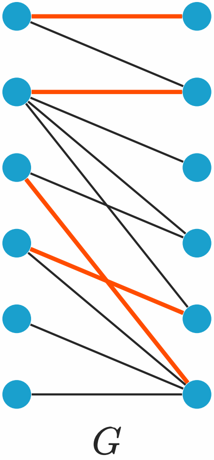


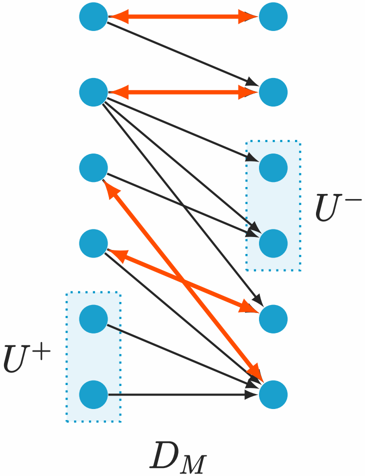
例



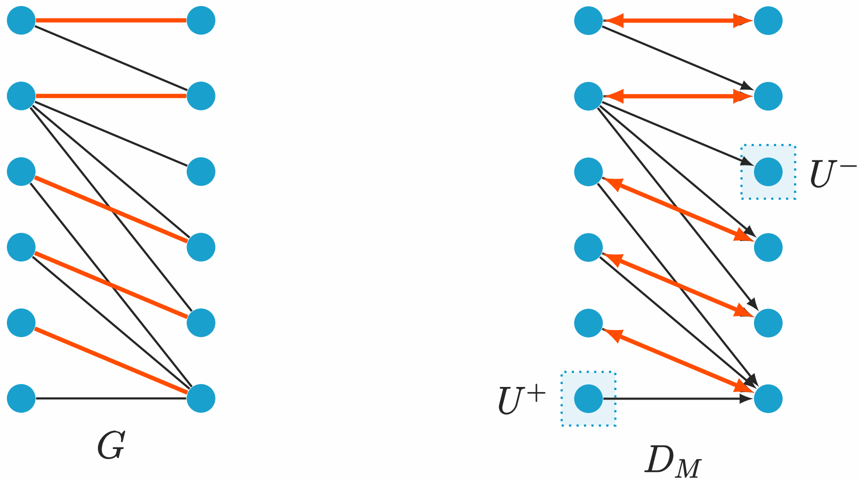


例





例



【終了】

Kőnig–Egerváry の定理再訪

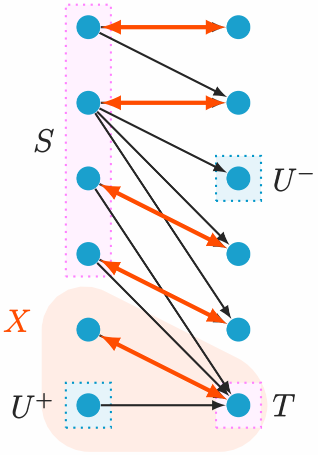
$$\max_{M:\ \text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\ \text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

定理

アルゴリズムが停止したときの D_M において，U^+ から到達可能な頂点全体を X とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，(S,T) は最小頂点被覆．



Kőnig–Egerváry の定理再訪

$$\max_{M:\ \text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\ \text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

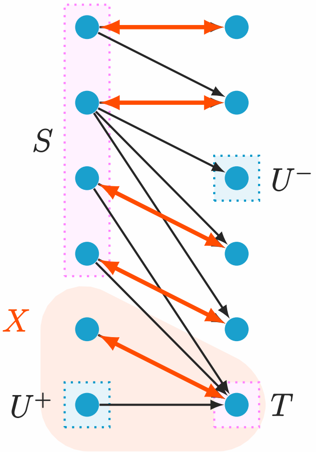
定理

アルゴリズムが停止したときの D_M において，U^+ から到達可能な頂点全体を X とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，(S,T) は最小頂点被覆．

（証明） 全ての枝は右向きに進めるので，(S,T) は定義から頂点被覆．また，増加道が存在しないので，$X \cap U^- = \emptyset$. ゆえに (S,T) の全ての頂点は M の枝を 1 本だけ被覆しているので，$|S| + |T| = |M|$. □



Kőnig–Egerváryの定理再訪

$$\max_{M:\text{ マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\text{ 頂点被覆}} |S| + |T|$$

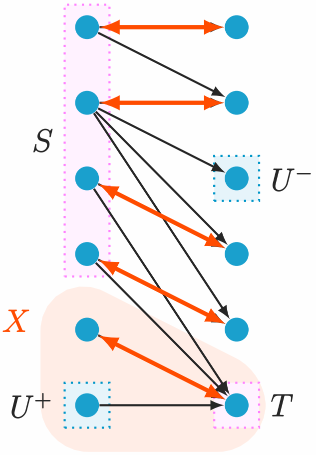
定理

アルゴリズムが停止したときの D_M において，U^+ から到達可能な頂点全体を X とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，(S,T) は最小頂点被覆．

（証明） 全ての枝は右向きに進めるので，(S,T) は定義から頂点被覆．また，増加道が存在しないので，$X \cap U^- = \emptyset$. ゆえに (S,T) の全ての頂点は M の枝を 1 本だけ被覆しているので，$|S| + |T| = |M|$. □



Kőnig–Egerváryの定理の，LP を使わないアルゴリズム的証明が得られた．

重みなし二部マッチング（まとめ）

定理

二部グラフにおいて，

- 増加道アルゴリズムは最大マッチング M を $O(mn)$ 時間で求める．
  $(m = |E|, n = |V|)$
- 同時に，$|M| = |S| + |T|$ を満たす頂点被覆 (S, T) も求められる．

目次

1. 二部マッチングの最大最小定理
   - LP の整数性（復習）
   - Kőnig–Egerváry の定理
2. 重みなし二部マッチング
   - 増加道アルゴリズム
   - Kőnig–Egerváry の定理再訪
3. 重み付き二部マッチング
   - 相補性条件
   - ハンガリー法

重み付き二部（完全）マッチング

マッチング M が**完全** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての頂点が M に接続 $\Longleftrightarrow$ $2|M| = |V|$

重み付き二部完全マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ ($|V^+| = |V^-| = n/2$)，枝重み w_e ($e \in E$)
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大の完全マッチング M

※ 以下，G は少なくとも 1 つの完全マッチングを持つとする．

重み付き二部（完全）マッチング

マッチング M が**完全** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての頂点が M に接続 $\iff$ $2|M| = |V|$

重み付き二部完全マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ ($|V^+| = |V^-| = n/2$)，枝重み w_e ($e \in E$)
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大の完全マッチング M

※ 以下，G は少なくとも 1 つの完全マッチングを持つとする．

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e = ij \in E) \end{aligned}$$

相補性条件

補題 (相補性条件)

$M \subseteq E, y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. y は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e \in E) \end{aligned}$$

相補性条件

補題 (相補性条件)

$M \subseteq E$, $y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. y は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

以下，

- (D) の実行可能解を w **被覆**
- ③を満たす枝を**タイトな枝**

という．

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e \in E) \end{aligned}$$

ハンガリー法

②③を満たすマッチング M と w 被覆 y を保持し，①を満たすまで更新するアルゴリズム．

定義

w 被覆 y に対し，G の部分グラフ $G_y = (V^+, V^-, E_y)$ を

$$E_y = \{e = ij \in E : y_i + y_j = w_e\}$$

と定める．つまり，G_y は y に関しタイトな枝のみ残したグラフ．

補題

G_y に完全マッチングが存在すれば，それは最大重みマッチング．

証明 相補性条件！ □

ハンガリー法

G_y に完全マッチングが存在しなかったら？
$\longrightarrow y$ を更新し，(D) の目的関数値を改善できる．

ハンガリー法

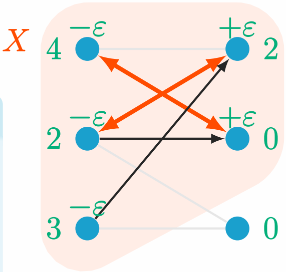
G_y に完全マッチングが存在しなかったら？
$\longrightarrow y$ を更新し，(D) の目的関数値を改善できる．

補題

$D_M(y)$ を G_y に対する重みなしマッチングで使う有向グラフとし，$D_M(y)$ における U^+ から到達可能な頂点全体を X とする．
$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$ とする．y' を

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすると，y' は w 被覆で，$y'(V) < y(V)$ を満たす．



補題の証明

$$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

y' が w 被覆であること

- 制約 $y_i + y_j \geq w_e$ $(e = ij \in E)$ が更新後に破られる可能性があるのは，$i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ の場合のみ．
- ε の定義より実行可能性は保たれる．

補題の証明

$$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

y' が w 被覆であること

- 制約 $y_i + y_j \geq w_e$ $(e = ij \in E)$ が更新後に破られる可能性があるのは，$i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ の場合のみ．
- ε の定義より実行可能性は保たれる．

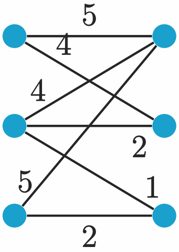
$y'(V) < y(V)$ であること

- $y'(V) = y(V) - \varepsilon(|V^+ \cap X| - |V^- \cap X|)$.
- いま，G_y に完全マッチングが存在しないので，$|V^+ \setminus X| + |V^- \cap X| < n/2$.
  $\longrightarrow |V^+ \cap X| - |V^- \cap X| > 0$.
- よって，$\varepsilon > 0$ を示せば良い．X は G_y の到達可能集合なので，任意の枝 $e = ij \in E$ s.t. $i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ はタイトでない．ゆえに $y_i + y_j - w_e > 0$ が成り立つ． $\square$

ハンガリー法

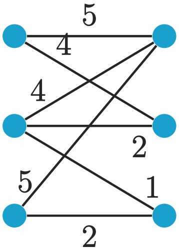
$y_i := \max_{e\in\delta(i)} w_e\ (i \in V^+),\ y_j := 0\ (j \in V^-)$ とする． // y は自明な w 被覆
while True :
　G_y の（重みなし）最大マッチング M を求める． // $O(mn)$ 時間
　if M が完全マッチング :
　　return M // 相補性条件より，M は最大重みマッチング
　else // w 被覆 y を更新
　　X を $D_M(y)$ における U^+ から到達可能な頂点全体とする．
　　$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_{ij} : i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$
　　$y_i \leftarrow y_i - \varepsilon\ (i \in V^+ \cap X),\ y_j \leftarrow y_j + \varepsilon\ (j \in V^- \cap X)$

例

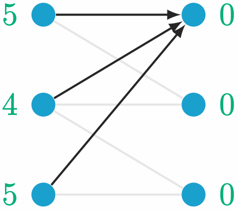


G

例

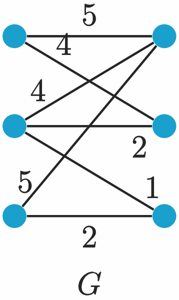


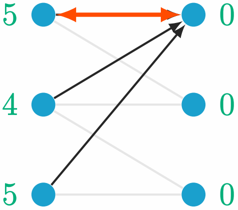
G



$y(V) = 14,$

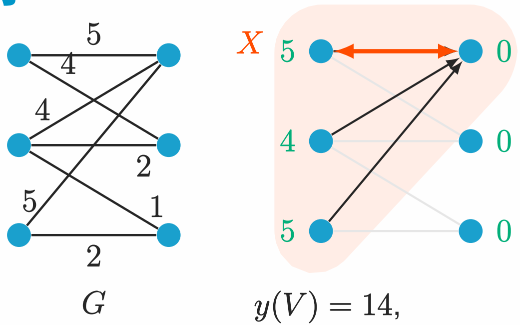
例





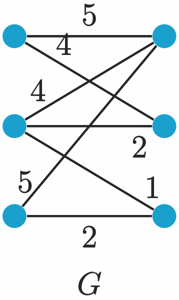
$y(V) = 14,$

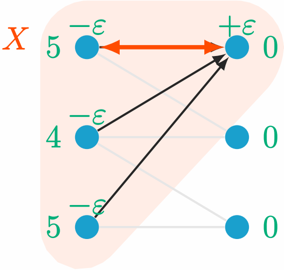
例



$y(V) = 14,$

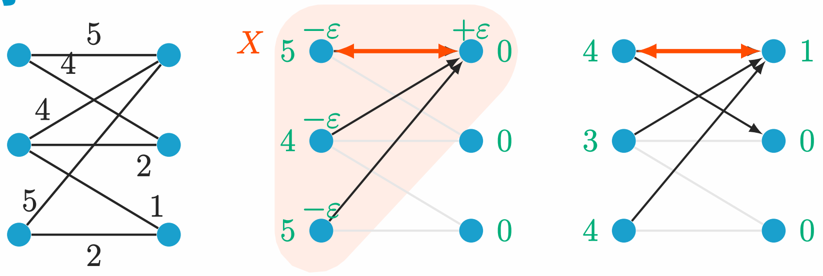
例





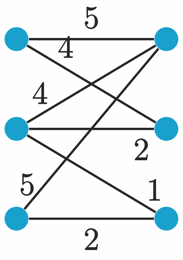
$y(V) = 14,\, \varepsilon = 1$

例

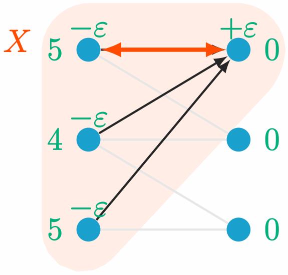


G $\qquad$ $y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$ $\qquad$ $y(V) = 12,$

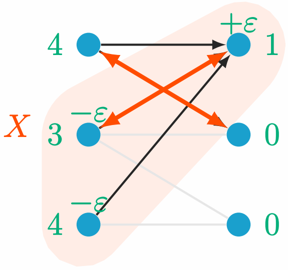
例



G

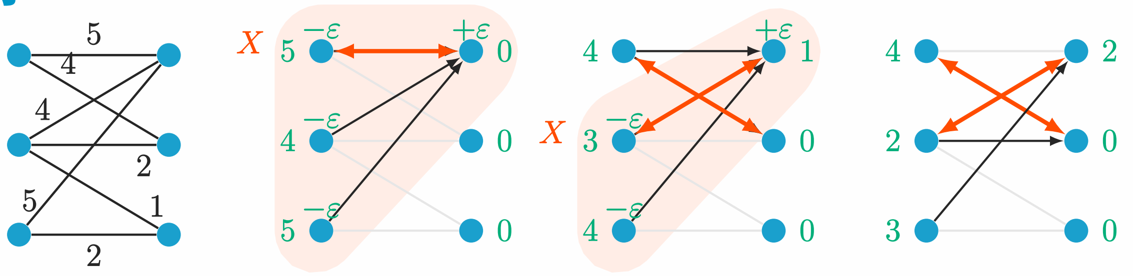


$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$



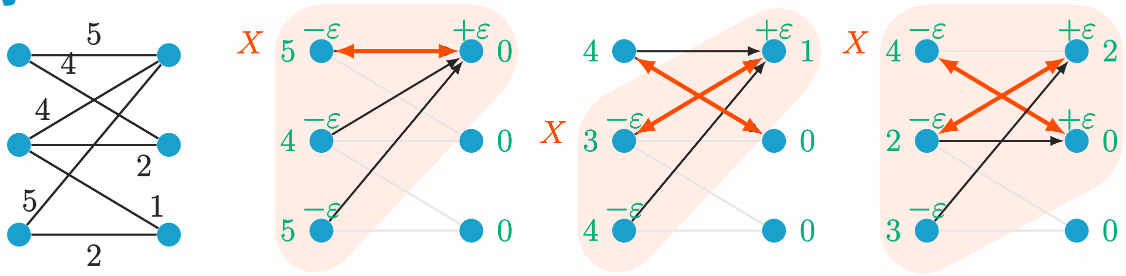
$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$

例



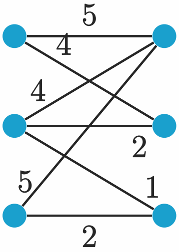
G $\quad y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$ $\quad y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$ $\quad y(V) = 11,$

例

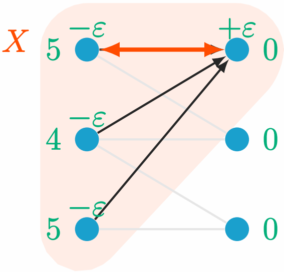


G $\qquad$ $y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$ $\qquad$ $y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$ $\qquad$ $y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$

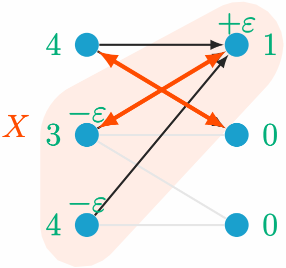
例



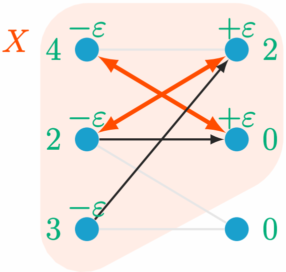
G



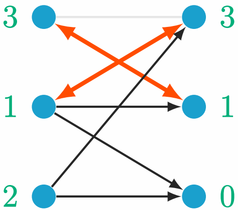
$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$



$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$

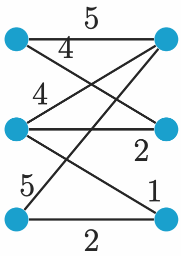


$y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$

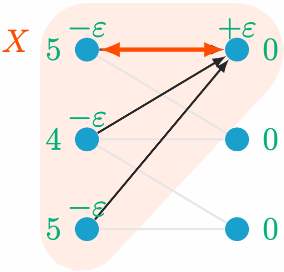


$y(V) = 10$

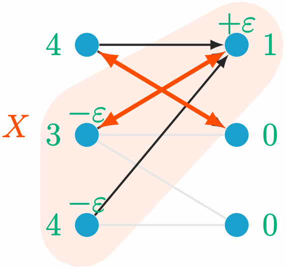
例



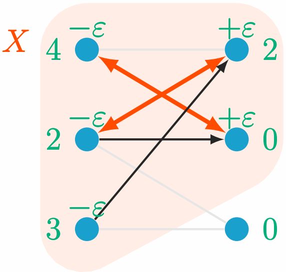
G



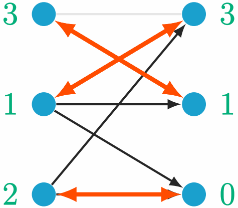
$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$



$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$



$y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$



$y(V) = 10 = w(M)$ 【終了】

ハンガリー法の解析

定理

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 w 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

ハンガリー法の解析

定理

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 w 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．

$\longrightarrow$ M は高々 $n/2$ 回更新される．

ハンガリー法の解析

定理

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 w 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ y が更新されて y' になったとき，G_y の最大マッチング M は $G_{y'}$ でもマッチング．

$\longrightarrow$ M は高々 $n/2$ 回更新される．

ハンガリー法の解析

定理

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 w 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ y が更新されて y' になったとき，G_y の最大マッチング M は $G_{y'}$ でもマッチング．

  $\longrightarrow$ M は高々 $n/2$ 回更新される．
- また，$|M|$ が増えず y だけが更新されるとき，ε の定義の min を達成する枝により，到達可能集合 X が真に拡大する．
  $\longrightarrow$ 高々 n 回の y の更新後に，$|M|$ は増える．

ハンガリー法の解析

定理

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 w 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ y が更新されて y' になったとき，G_y の最大マッチング M は $G_{y'}$ でもマッチング．

$\longrightarrow$ M は高々 $n/2$ 回更新される．

- また，$|M|$ が増えず y だけが更新されるとき，ε の定義の min を達成する枝により，到達可能集合 X が真に拡大する．
  $\longrightarrow$ 高々 n 回の y の更新後に，$|M|$ は増える．
- $\therefore$ 全体では $O(n^2)$ 回の反復．

まとめ

- LP を用いた組合せ最適化の基本的な考え方（整数多面体，完全単模行列）
- LP の整数性を用いて，二部マッチングの最大最小定理（Kőnig–Egerváry の定理）を証明した
- LP を用いない組合せ的アルゴリズム
  - 重みなし二部マッチングの増加道アルゴリズム
  - 重み付き二部完全マッチングのハンガリー法