polycal パッケージのデモ

tattsan

1

ZR 氏の「冬休み課題②：円周率を使わない話」を読んだ。

`http://d.hatena.ne.jp/zrbabbler/20131231/1388478052` (`http://t.co/NjEtKJwLyO`)

`\expandafter` がよくわからない自分には格好の宿題だ。しかしこれは是非とも **TeX で解かねばなるまい**。そこで既存の polynom パッケージに微分や積分のルーチンを追加する polycal パッケージを作成した。その結果 `\expandafter` を書く羽目になった。以下 polycal パッケージを利用してニセ円の面積を計算する。

2

まず変数の宣言。本当の変数 T と文字定数 A, B を変数扱いする。

```
\polyset{vars=TAB}
```

次に 3 次ベジェによる円もどき曲線の定義。

```
\polydefine\X{(1-T)^3*1+3(1-T)^2T*1+3(1-T)T^2*A+T^3*0}
\polydefine\Y{(1-T)^3*0+3(1-T)^2T*A+3(1-T)T^2*1+T^3*1}
```

ここで A は

$$A = \frac{4}{3}\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr)$$

であるが、この値の代入は最後に行なう。X, Y を表示させるには `\polyprint` を用いる。

```
\begin{align*}
  X &= \polyprint\X, & Y &= \polyprint\Y.
\end{align*}
```

$$X = 2T^3 - 3T^2 - 3AT^3 + 3AT^2 + 1, \qquad Y = 3AT^3 - 6AT^2 + 3AT - 2T^3 + 3T^2.$$

表示されるのは簡約後の数式である。指定変数について整理して表示するマクロの作成が望まれる。

次にこれを微分する。

```
\polydiff\dX{T}\X  \polydiff\dY{T}\Y
\begin{align*}
  dX &= (\polyprint\dX)\,dT, & dY &= (\polyprint\dY)\;dT.
\end{align*}
```

$$dX = (6T^2 - 6T - 9AT^2 + 6AT)\,dT, \qquad dY = (9AT^2 - 12AT + 3A - 6T^2 + 6T)\;dT.$$

次に面積要素を定義する。円の面積を計算するため、$\frac{1}{2}(XdY - YdX)$ の 4 倍を dS と定めよう。

```
\polymul\dSA\X\dY  \polymul\dSB\Y\dX
\polysub\dS\dSA\dSB \polymul\dS{2}\dS
\begin{quote}
$dS=2(XdY-YdX)=\bigl(\polyprint\dS\bigr)\,dT.$
\end{quote}
```

$dS = 2(XdY - YdX) = \bigl(-36AT^5 + 72AT^4 - 36AT^3 + 24T^5 - 36T^4 + 36AT^4 - 72AT^3 + 36AT^2 - 24T^4 + 36T^3 - 18A^2T^4 + 36A^2T^3 - 18A^2T^2 - 24AT^4 + 48AT^3 - 24AT + 6A - 24T^5 + 36T^4 + 36AT^5 - 36AT^4 + 24T^4 - 36T^3 - 12T^2 - 36AT^4 + 36AT^3 + 12T\bigr)\,dT.$

polynom.sty のバグ?のため多変数多項式の同類項がまとまらず、表示が長くなり過ぎる。ディスプレイ数式だと改行されないのでインラインで書いておいた。次は積分だ。

```
\polyint\ST{T}\dS
\polysubstnum\S{T}{1}\ST
\[ S = \int_0^1dS = \polyprint\S. \]
```

$$S = \int_0^1 dS = -\frac{3}{5}A^2 + \frac{12}{5}A + 2.$$

最後に A の値を代入しよう。まずは $B = \sqrt{2}$ として、$A = \frac{4}{3}(B-1)$ を代入する。

```
\polysubst\S{A}{(4/3)(B-1)}\S
\[ S=\polyprint\S. \]
```

$$S = -\frac{16}{15}B^2 + \frac{16}{3}B - \frac{34}{15}.$$

そして B に $\sqrt{2}$ を代入する。これが答だ!

```
\polysubstsqrt\S{B}{2}\S \Huge
\[ \polyset{delims={}{}} S=\polyprint\S. \]
```

$$S = \frac{-22}{5} + \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$