polycal パッケージのデモ

tattsan

1 動機

ZR 氏の「冬休み課題②：円周率を使わない話」を読んだ。

`http://d.hatena.ne.jp/zrbabbler/20131231/1388478052` (`http://t.co/NjEtKJwLyO`)

`\expandafter` がよくわからない人のための課題とあり、自分にはちょうどよいと思った。ただ

「もはや全く以て TeX ネタじゃない…」

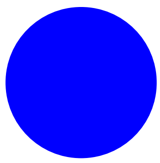
という ZR 氏の一人ボケツッコミが気になった。これは是非とも **TEX で解かねばなるまい**。そこで既存の polynom パッケージに微分や積分のルーチンを追加する polycal パッケージを作成した。

`https://github.com/tattsan/polycal`

その結果、大して理解していない `\expandafter` をあちこちに書く羽目になった。以下 polycal パッケージを利用してニセ円の面積を計算する。

2 問題の説明

```
%(with pict2e and color package)
\setlength{\unitlength}{1cm}
\begin{picture}(2,2)
\color{blue}\put(1,1){\circle*{2}}
\end{picture}
```



課題は「上の図形の面積を円周率を用いずに求めてください」というもの。「円周率を用いずに」の部分も ZR 氏のサイトに解説されている。pict2e が描く円は 3 次ベジェ曲線による近似であり、上の例の第 1 象限部分は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (1-t)^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} + 3(1-t)t^2\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \left(a=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1),\ 0\le t\le 1\right)$$

で表される。このため囲まれた部分の面積はせいぜい 2 次の無理数で π は現れない。

3 面積の計算

まず変数の宣言。本当の変数 t と文字定数 a, b を変数扱いする。

```
\polyset{vars=tab}
```

次に 3 次ベジェによる円もどき曲線の定義。

```
\polydefine\x{(1-t)^3*1+3(1-t)^2t*1+3(1-t)t^2*a+t^3*0}
\polydefine\y{(1-t)^3*0+3(1-t)^2t*a+3(1-t)t^2*1+t^3*1}
```

ここで a は

$$a = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

であるが、この値の代入は最後に行なう。この `\x,\y` を表示させるには `\polyprint` を用いる。

```
\begin{align*}
  x &= \polyprint\x, & y &= \polyprint\y.
\end{align*}
```

$$x = 2t^3 - 3t^2 - 3at^3 + 3at^2 + 1, \qquad y = -2t^3 + 3t^2 + 3at^3 - 6at^2 + 3at.$$

表示されるのは簡約後の数式である。次にこれを微分する。

```
\polydiff\dx{t}\x  \polydiff\dy{t}\y
\begin{align*}
  dx &= (\polyprint\dx)\,dt, & dy &= (\polyprint\dy)\,dt.
\end{align*}
```

$$dx = (6t^2 - 6t - 9at^2 + 6at)\,dt, \qquad dy = (-6t^2 + 6t + 9at^2 - 12at + 3a)\,dt.$$

次に面積要素を定義する。円の面積を計算するため、$\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ の 4 倍を dS と定めよう。

```
\polymul\dSA\x\dy  \polymul\dSB\y\dx
\polysub\dS\dSA\dSB \polymul\dS{2}\dS
\begin{align*}
 dS &=2(xdy-ydx)\\
    &=(\polyprint\dS)\,dt.
\end{align*}
```

$$\begin{aligned}
dS &= 2(xdy - ydx)\\
&= (-12t^2 + 12t - 18a^2t^4 + 36a^2t^3 - 18a^2t^2 + 12at^4 - 24at^3 + 36at^2 - 24at + 6a)\,dt.
\end{aligned}$$

次は積分だ。

```
\polyint\St{t}\dS
\polysubstnum\S{t}{1}\St
\[ S = \int_0^1dS = \polyprint\S. \]
```

$$S = \int_0^1 dS = -\frac{3}{5}a^2 + \frac{12}{5}a + 2.$$

最後に a の値を代入しよう。まずは $b=\sqrt{2}$ として、$a=\frac{4}{3}(b-1)$ を代入する。

```
\polysubst\S{a}{(4/3)(b-1)}\S
\[ S=\polyprint\S. \]
```

$$S=-\frac{16}{15}b^2+\frac{16}{3}b-\frac{34}{15}.$$

最後に b に $\sqrt{2}$ を代入する。これが答だ!

```
\polysubstsqrt\S{b}{2}\S \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S=\polyprint\S. \]
```

$$S=\frac{-22}{5}+\frac{16}{3}\sqrt{2}\,.$$

4　パラメータ a のチューニング

ところで $a=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$ という値は、曲線が $t=\frac{1}{2}$ で円上の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通過するように決めたものらしい。これだとベジェ曲線が完全に円の外側に位置することになるが、もう少し内側にひっこめた方が円からの最大偏差を減らせる。そこで例えば

$$\int_0^1(x^2+y^2)dt=1$$

となるように a を定めてみればどうだろう。これも TeX で計算してみよう。

```
\polymul\xx\x\x \polymul\yy\y\y \polyadd\rr\xx\yy
\polyint\It{t}\rr \polysubstnum\I{t}{1}\It
\[ I = \int_0^1(x^2+y^2)dt= \polyprint\I \]
```

$$I=\int_0^1(x^2+y^2)dt=\frac{6}{35}a^2+\frac{13}{35}a+\frac{26}{35}$$

```
\polysub\J\I{1}
\begin{align*}
 I-1 &= \polyprint\J \\ &= \polyfactorize\J
\end{align*}
```

$$\begin{aligned} I-1&=\frac{6}{35}a^2+\frac{13}{35}a-\frac{9}{35}\\ &=\frac{6}{35}\left(a+\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{385}}{12}\right)\left(a+\frac{13}{12}-\frac{\sqrt{385}}{12}\right)\end{aligned}$$

これより $a=\frac{1}{12}\left(\sqrt{385}-13\right)$ が得られる。再度面積を計算すると

```
\polysubstnum\SS{t}{1}\St
\polysubst\SS{a}{(1/12)(b-13)}\SS
\polysubstsqrt\SS{b}{385}\SS \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S_2=\polyprint\SS. \]
```

$$S_2 = \frac{-349}{120} + \frac{37}{120}\sqrt{385}\,.$$