

polycal パッケージのデモ

tattsan

1 動機

ZR 氏の「冬休み課題②：円周率を使わない話」を読んだ。

<http://d.hatena.ne.jp/zrbabbler/20131231/1388478052> (<http://t.co/NjEtKJwLy0>)

`\expandafter` がよくわからない人のための課題とあり、自分にはちょうどよいと思った。ただ

「もはや全く以て TeX ネタじゃない…」

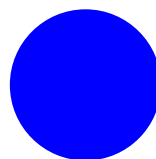
という ZR 氏の一人ボケツッコミが気になった。これは是非とも **TeX** で解かねばなるまい。そこで既存の `polynom` パッケージに微分や積分のルーチンを追加する `polycal` パッケージを作成した。

<https://github.com/tattsan/polycal>

その結果、大して理解していない `\expandafter` をあちこちに書く羽目になった。以下 `polycal` パッケージを利用してニセ円の面積を計算する。

2 問題の説明

```
%(with pict2e and color package)
\setlength{\unitlength}{1cm}
\begin{picture}(2,2)
\color{blue}\put(1,1){\circle*{2}}
\end{picture}
```



課題は「上の図形の面積を円周率を用いずに求めてください」というもの。「円周率を用いずに」の部分も ZR 氏のサイトに解説されている。`pict2e` が描く円は 3 次ベジェ曲線による近似であり、上の例の第 1 象限部分は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(a = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1), 0 \leq t \leq 1 \right)$$

で表される。このため囲まれた部分の面積はせいぜい 2 次の無理数で π は現れない。

3 面積の計算

まず変数の宣言。本当の変数 t と文字定数 a, b を変数扱いする。

```
\polyset{vars=tab}
```

次に 3 次ベジェによる円もどき曲線の定義。

```
\polydefine\x{(1-t)^3*1+3(1-t)^2*t+3(1-t)*t^2*a+t^3*0}
\polydefine\y{(1-t)^3*0+3(1-t)^2*a+3(1-t)*t^2*1+t^3*1}
```

ここで a は

$$a = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

であるが、この値の代入は最後に行なう。この $\backslash x, \backslash y$ を表示させるには $\backslash polyprint$ を用いる。

```
\begin{align*}
x &= \backslash polyprint \backslash x, \quad y = \backslash polyprint \backslash y.
\end{align*}
```

$$x = 6t^3 - 3t^2 - 3at^3 + 3at^2 + 1, \quad y = -2t^3 + 3t^2 + 3at^3 - 6at^2 + 3at.$$

表示されるのは簡約後の数式である。次にこれを微分する。

```
\polydiff\dx{t}\x \polydiff\dy{t}\y
\begin{align*}
dx &= (\backslash polyprint \backslash dx) \backslash dt, \quad dy = (\backslash polyprint \backslash dy) \backslash dt.
\end{align*}
```

$$dx = (6t^2 - 6t - 9at^2 + 6at) dt, \quad dy = (-6t^2 + 6t + 9at^2 - 12at + 3a) dt.$$

次に面積要素を定義する。円の面積を計算するため、 $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ の 4 倍を dS と定めよう。

```
\polymul\dsa\x\dy \polymul\dsb\y\dx
\polysub\ds\dsa\dsb \polymul\ds{2}\ds
\begin{align*}
dS &= 2(xdy - ydx) \backslash \backslash \\
&= (\backslash polyprint \backslash dS) \backslash dt.
\end{align*}
```

$$dS = 2(xdy - ydx) \\ = (-12t^2 + 12t - 18a^2t^4 + 36a^2t^3 - 18a^2t^2 + 12at^4 - 24at^3 + 36at^2 - 24at + 6a) dt.$$

次は積分だ。

```
\polyint\St{t}\dS
\polysubstnum\St{1}\St
\[ S = \int_0^1 dS = \backslash polyprint \backslash S. \]
```

$$S = \int_0^1 dS = -\frac{3}{5}a^2 + \frac{12}{5}a + 2.$$

最後に a の値を代入しよう。まずは $b = \sqrt{2}$ として、 $a = \frac{4}{3}(b-1)$ を代入する。

```
\polysubst\{a\}{(4/3)(b-1)}\S
\[ S=\polyprint\S. \]
```

$$S = -\frac{16}{15}b^2 + \frac{16}{3}b - \frac{34}{15}.$$

最後に b に $\sqrt{2}$ を代入する。これが答だ!

```
\polysubstsqrt\{b\}{2}\S \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S=\polyprint\S. \]
```

$$S = \frac{-22}{5} + \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

4 パラメータ a のチューニング

ところで $a = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$ という値は、曲線が $t = \frac{1}{2}$ で円上の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通過するように決めたものらしい。これだとベジェ曲線が完全に円の外側に位置することになるが、もう少し内側にひっこめた方が円からの最大偏差を減らせる。そこで例えば

$$\int_0^1 (x^2 + y^2) dt = 1$$

となるように a を定めてみればどうだろう。これも $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ で計算してみよう。

```
\polymul\{xx\}{x}\x \polymul\{yy\}{y}\y \polyadd\{rr\}{xx\}{yy}
\polyint\{t\}\{rr\} \polysubstnum\{t\}{1}\{t\} \{I\}
\[ I = \int_0^1 (x^2+y^2)dt = \polyprint\{I\} \]
```

$$I = \int_0^1 (x^2 + y^2) dt = \frac{6}{35}a^2 + \frac{13}{35}a + \frac{26}{35}$$

```
\polysub\{J\}\{I\}
\begin{align*}
I-1 &= \polyprint\{J\} \quad \&= \polyfactorize\{J\}
\end{align*}
```

$$\begin{aligned} I-1 &= \frac{6}{35}a^2 + \frac{13}{35}a - \frac{9}{35} \\ &= \frac{6}{35} \left(a + \frac{13}{12} + \frac{\sqrt{385}}{12} \right) \left(a + \frac{13}{12} - \frac{\sqrt{385}}{12} \right) \end{aligned}$$

これより $a = \frac{1}{12}(\sqrt{385}-13)$ が得られる。再度面積を計算すると

```

\polysubstnum\SS{t}{1}\St
\polysubst\SS{a}{(1/12)(b-13)}\SS
\polysubstsqrt\SS{b}{385}\SS \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S_2=\polyprint\SS. \]

```

$$S_2 = \frac{-349}{120} + \frac{37}{120}\sqrt{385}.$$