polycal パッケージのデモ

tattsan

2014/01/12 Version 0.01b

1 動機

ZR 氏の「冬休み課題②：円周率を使わない話」を読んだ。

http://d.hatena.ne.jp/zrbabbler/20131231/1388478052 (http://t.co/NjEtKJwLyO)

\expandafter がよくわからない人のための課題とあり、自分にはちょうどよいと思った。ただ

「もはや全く以て TeX ネタじゃない…」

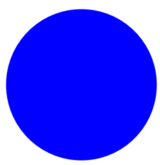
という ZR 氏の一人ボケツッコミが気になった。これは是非とも **TeX で解かねばなるまい**。そこで既存の polynom パッケージに微分や積分のルーチンを追加する polycal パッケージを作成した。

https://github.com/tattsan/polycal

その結果、大して理解していない \expandafter をあちこちに書く羽目になった。以下 polycal パッケージを利用してニセ円の面積を計算する。また polynom パッケージを**親パッケージ**と呼んで参照する。

2 問題の説明

```
%(with pict2e and color package)
\setlength{\unitlength}{1cm}
\begin{picture}(2,2)
\color{blue}\put(1,1){\circle*{2}}
\end{picture}
```



課題は「上の図形の面積を円周率を用いずに求めてください」というもの。「円周率を用いずに」の部分も ZR 氏のサイトに解説されている。pict2e が描く円は 3 次ベジェ曲線による近似であり、上の例の第 1 象限部分は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(a = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1),\ 0 \le t \le 1 \right)$$

で表される。このため囲まれた部分の面積はせいぜい 2 次の無理数であり、π は現れない。

3　面積の計算

まず親パッケージの \polyset を用いて変数を宣言する。ここでは本当の変数 t だけでなく文字定数 a,b を変数扱いしておく。

```
\polyset{vars=tab}
```

次に 3 次ベジェによる円もどき曲線の定義。多項式の定義には \polydefine を用いる。

```
\polydefine\x{(1-t)^3*1+3(1-t)^2t*1+3(1-t)t^2*a+t^3*0}
\polydefine\y{(1-t)^3*0+3(1-t)^2t*a+3(1-t)t^2*1+t^3*1}
```

これで \x や \y に多項式がセットされる。以下でも \poly*** の形のコマンドの多くは \poly***\cs{*}{*} の形式で\cs に計算結果をセットするようになっている。詳しくはマニュアル polycal.pdf を参照のこと。なお式中の a は

$$a = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

だが、値の代入は最後に行なう。\x,\y の定義内容を表示させるには親パッケージの \polyprint を用いる。

```
\begin{align*}
  x &= \polyprint\x, & y &= \polyprint\y.
\end{align*}
```

$$x = 2t^3 - 3t^2 - 3at^3 + 3at^2 + 1, \qquad y = -2t^3 + 3t^2 + 3at^3 - 6at^2 + 3at.$$

表示されるのは簡約後の数式である。次にこれを \polydiff を用いて微分する。

```
\polydiff\dx{t}\x  \polydiff\dy{t}\y
\begin{align*}
  dx &= (\polyprint\dx)\,dt, & dy &= (\polyprint\dy)\,dt.
\end{align*}
```

$$dx = (6t^2 - 6t - 9at^2 + 6at)\,dt, \qquad dy = (-6t^2 + 6t + 9at^2 - 12at + 3a)\,dt.$$

次に面積要素を定義する。円の面積を計算するため、$\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ の 4 倍を dS と定めよう。積や差の計算に用いる \polymul や \polysub は親パッケージのものである。

```
\polymul\dSA\x\dy  \polymul\dSB\y\dx
\polysub\dS\dSA\dSB \polymul\dS{2}\dS
\begin{align*}
 dS &=2(xdy-ydx)\\
    &=(\polyprint\dS)\,dt.
\end{align*}
```

$$
\begin{aligned}
dS &= 2(xdy - ydx)\\
&= \left(-12t^2 + 12t - 18a^2t^4 + 36a^2t^3 - 18a^2t^2 + 12at^4 - 24at^3 + 36at^2 - 24at + 6a\right)dt.
\end{aligned}
$$

次は積分だ。不定積分の計算には `\polyint` を用いる。変数の値が 0 からの積分になる。

```
\polyint\St{t}\dS
\[ S(t) = \int_0^tdS = \polyprint\St. \]
```

$$S(t) = \int_0^t dS = -4t^3 + 6t^2 - \frac{18}{5}a^2t^5 + 9a^2t^4 - 6a^2t^3 + \frac{12}{5}at^5 - 6at^4 + 12at^3 - 12at^2 + 6at.$$

定積分を得るには代入コマンド `\polysubstnum` または `\polysubst` を用いる。

```
\polysubstnum\S{t}{1}\St
\[ S = \int_0^1dS = S(1) = \polyprint\S. \]
```

$$S = \int_0^1 dS = S(1) = -\frac{3}{5}a^2 + \frac{12}{5}a + 2.$$

`\polysubstnum` は有理数限定での代入だが、`\polysubst` は多項式を（従って有理数も変数も）代入できる。異なるアルゴリズムを用いてはいるが、現状では `\polysubstnum` が特に速いというわけではない。

次に a に $\frac{4}{3}\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)$ を代入しよう。まずは $b=\sqrt{2}$ として、$a=\frac{4}{3}(b-1)$ を代入する。

```
\polysubst\S{a}{(4/3)(b-1)}\S
\[ S=\polyprint\S. \]
```

$$S = -\frac{16}{15}b^2 + \frac{16}{3}b - \frac{34}{15}.$$

最後に b に $\sqrt{2}$ を代入する。正の有理数の正の平方根の代入には `\polysubstsqrt` を用いる。答はこうだ！

```
\polysubstsqrt\S{b}{2}\S \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S=\polyprint\S. \]
```

$$S = \frac{-22}{5} + \frac{16}{3}\sqrt{2}\,.$$

なおこの値を xintexpr パッケージを用いて数値計算してみると次の値になる。

```
\[ S=\xinttheexpr trunc((-22/5)+(16/3)*sqrt(2,15),10)\relax\dots \]
```

$$S = 3.1424723326\dots$$

Current TeX version = 3.14159265

誤差はおよそ +0.028% である。

4　パラメータ $\boldsymbol{a}$ のチューニング

ところで $a=\frac{4}{3}\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)$ という値は、曲線が $t=\frac{1}{2}$ で円上の点 $\bigl(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\bigr)$ を通過するように決めたものらしい。これだとベジェ曲線が完全に円の外側に位置することになるが、もう少し内側にひっこめた方が円からの最大偏差を減らせる。そこで例えば

$$\int_0^1 (x^2+y^2)dt = 1$$

となるように a を定めてみればどうだろう。これも TEX で計算してみよう。

```
\polymul\xx\x\x \polymul\yy\y\y \polyadd\rr\xx\yy
\polyint\It{t}\rr \polysubstnum\I{t}{1}\It
\[ I = \int_0^1(x^2+y^2)dt= \polyprint\I. \]
```

$$I=\int_0^1 (x^2+y^2)dt = \frac{6}{35}a^2+\frac{13}{35}a+\frac{26}{35}.$$

```
\polysub\J\I{1}
\begin{align*}
 I-1 &= \polyprint\J \\ &= \polyfactorize\J.
\end{align*}
```

`\polyfactorize` は親パッケージのコマンドで、基本的には有理係数の 1 次因子しか括り出せない。ただし最後の因子が有理係数の 2 次式の場合のみ、実係数の範囲で因数分解してくれる。

$$\begin{aligned} I-1 &= \frac{6}{35}a^2+\frac{13}{35}a-\frac{9}{35} \\ &= \frac{6}{35}\left(a+\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{385}}{12}\right)\left(a+\frac{13}{12}-\frac{\sqrt{385}}{12}\right). \end{aligned}$$

これより $a=\frac{1}{12}\bigl(\sqrt{385}-13\bigr)$ が得られる。再度面積を計算すると次のようになる。

```
\polysubstnum\SS{t}{1}\St
\polysubst\SS{a}{(1/12)(b-13)}\SS
\polysubstsqrt\SS{b}{385}\SS \Huge
\[ \polyset{delims={\left.}{\right.}} S_2=\polyprint\SS. \]
```

$$S_2 = \frac{-349}{120}+\frac{37}{120}\sqrt{385}\,.$$

```
\[ S_2=\xinttheexpr trunc((-349/120)+(37/120)*sqrt(385,15),10)\relax\dots \]
```

$$S_2 = 3.1416035350\dots$$
$$\text{Future TeX version} = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$$

誤差はおよそ +0.00035% である。