Parte I

Control de tonos y ecualizador de fase

A lo largo de esta parte, se pondra foco en el circuito mostrado en la Figura 1, que se trata de un circuito de control de tonos.

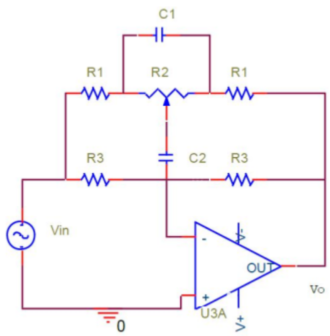

Figura 1: Circuito de Control de Tonos

1. Transferencia

Al calcular la transferencia genericamente para cualquier valor de impedancias, y llamando a $R_2 = R_{21} + R_{22}$, el calculo de la transferencia se expresa como la ecuación (1).

$$H(s) = -\frac{20C_2^2K^2R_1R_2^2s^2 - 20C_2^2KR_1R_2^2s^2 - 10C_2^2R_1^2R_2s^2 - 100C_2^2R_1R_2^2s^2 + C_2K^2R_2^2s + 9C_2KR_2^2s - C_2R_1^2s - 31C_2R_1R_2s -}{20C_2^2K^2R_1R_2^2s^2 - 20C_2^2KR_1R_2^2s^2 - 10C_2^2R_1^2R_2s^2 - 100C_2^2R_1R_2^2s^2 + C_2K^2R_2^2s - 11C_2KR_2^2s - C_2R_1^2s - 31C_2R_1}$$

Si reacomodamos de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{As^2 + Es + C} \tag{1}$$

$$A = 20C_2^2K^2R_1R_2^2 - 20C_2^2KR_1R_2^2 - 10C_2^2R_1^2R_2 - 100C_2^2R_1R_2^2 \approx -100C_2^2R_1R_2^2$$

$$B = C_2K^2R_2^2 + 9C_2KR_2^2 - C_2R_1^2 - 31C_2R_1R_2 - 10C_2R_2^2$$

$$C = -2R_1 - R_2$$

$$E = C_2K^2R_2^2 - 11C_2KR_2^2 - C_2R_1^2 - 31C_2R_1R_2$$

2. Análisis de frecuencia central

Para obtener la frecuencia central, basta con llevar a la ecuación de transferencia de la siguiente manera

$$H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{Q_z\omega_0} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{Q_p\omega_0} + 1} \tag{2}$$

Por lo tanto;

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{A}{C}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{2+\frac{R_2}{R_1}}}{10C_2R_2} \Longrightarrow f_0 = \frac{\sqrt{2+\frac{R_2}{R_1}}}{20\pi C_2R_2}$$

3. Análisis paramétrico

Si se analiza los factores de calidad correspondientes se obtiene:

$$Q_z = \frac{C}{B\omega_0}$$

$$Q_z = -\frac{10C_2\sqrt{R_1}R_2\sqrt{2R_1+R_2}}{C_2K^2R_2^2 + 9C_2KR_2^2 - C_2R_1^2 - 31C_2R_1R_2 - 10C_2R_2^2}$$

$$Q_p = \frac{C}{E\omega_0}$$

$$Q_p = -\frac{10C_2\sqrt{R_1}R_2\sqrt{2R_1+R_2}}{-C_2K^2R_2^2 + 11C_2KR_2^2 + C_2R_1^2 + 31C_2R_1R_2}$$

por lo tanto, la ganancia para la frecuencia central del filtro quedará dada por:

$$A = \frac{R_1^2 + 31R_1R_2 + 10R_2^2}{R_1\left(R_1+31R_2\right)} \approx \frac{3R_1+R_2}{3R_1}\; K=0$$

$$A = \frac{R_1\left(R_1+31R_2\right)}{R_1^2 + 31R_1R_2 + 10R_2^2} \approx \frac{3R_1}{R_2+3R_1}\; K=1$$

$$A = \frac{-K^2R_2^2 - 9KR_2^2 + R_1^2 + 31R_1R_2 + 10R_2^2}{-K^2R_2^2 + 11KR_2^2 + R_1^2 + 31R_1R_2}\quad Expresado\,Parametricamente\,en\,K$$

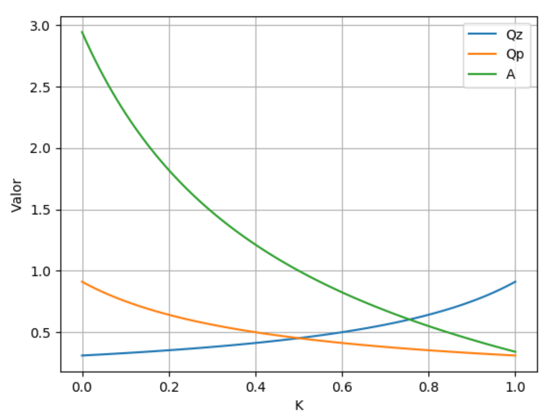

Figura 2: Diagrama paramétrico

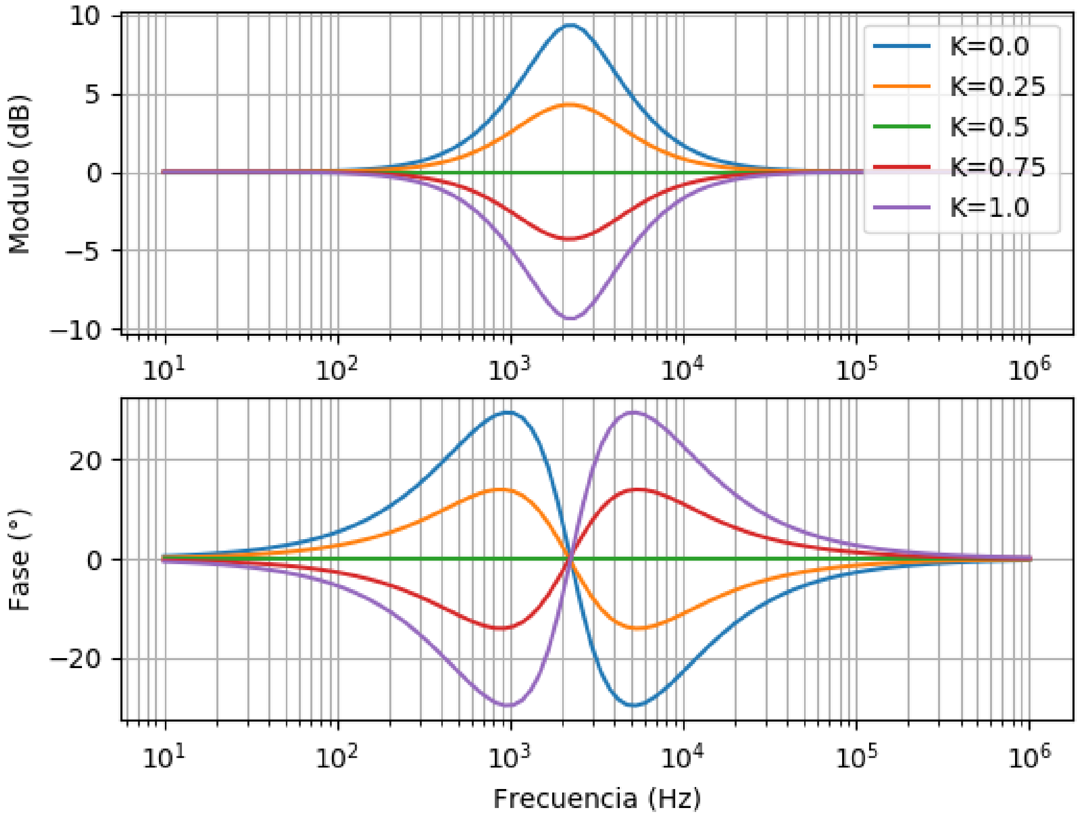

Figura 3: Respuesta en frecuencia paramétrica para una frecuencia dada

4. Análisis de singularidades

4.1. Análisis de Ceros

Si resolvemos la ecuacion cuadrática para el nominador expresado en la ecuación (2), obtenemos que la expresión para econtrar los ceros de nuestro circuito, esta dada por:

$$C_{1,2} = \frac{-\frac{1}{Q_z \omega_0} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{Q_z \omega_0}\right)^2 - 4\frac{1}{\omega_0^2}}}{2\frac{1}{\omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow C_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_z} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_z^2} - 4}$$

4.2. Análisis de polos

De la misma manera que se procedió para encontrar los ceros en la subseccion 4.1, los polos quedan determinados por:

$$\Rightarrow P_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_P} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_P^2} - 4}$$

4.3. Análisis de singularidades paramétricas

Si tenemos en cuenta, las expresiones para los pollos y los ceros obtenidas anteriormente, y una frecuencia central determinada, como por ejemplo la propuesta en la Figura 3, se podra hacer una analisis parametrico graficando como varían los polos y los ceros en un diagrama Imaginario/Real segun la variación de la resistencia R_2.

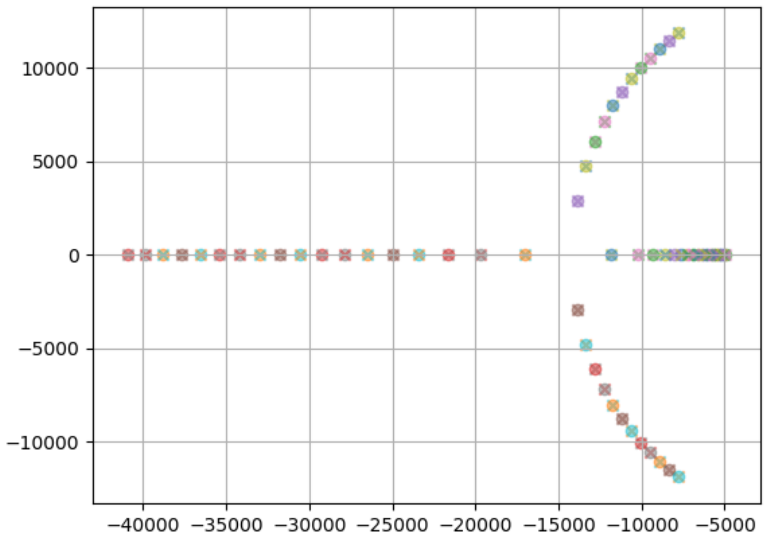

Figura 4: Diagrama paramétrico de polos y ceros

Como se puede observar en la Figura 4, los polos y los ceros se superponen a partir de cierto valor de K. Graficando los polos y los ceros con K variando entre $0 < K < 0{,}5$, se obtienen todos los ceros reales, copmo se puede observar en la Figura 5. Por otro lado, si se varía K entre $0{,}5 < K < 1$, se puede observar que todos los polos son reales, como se observa en la Figura 6.

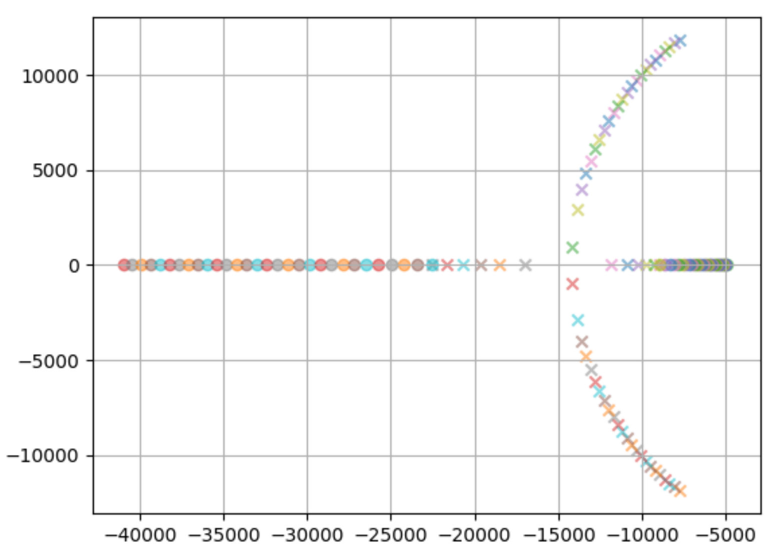

Figura 5: Diagrama paramétrico de polos y ceros con K variando de 0 a 0.5

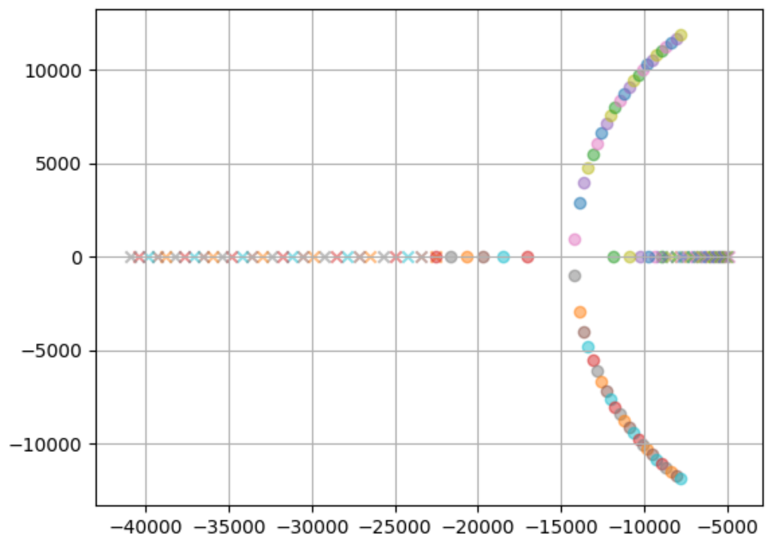

Figura 6: Diagrama paramétrico de polos y ceros con K variando de 0.5 a 1

4.4. Sistema de fase mínima

Un sistema de fase mínima se define como aquel sistema que cumple que los polos y los ceros se encuentren en el semiplano izquierdo del diagrama de polos y ceros, es decir, que su parte real sea negativa. Como se observa en la Figura 4, todos los polos y todos los ceros tienen parte real negativa, por lo tanto, el circuito de la Figura 1, es un sistema de fase mínima.

4.4.1. Ecualizador de fase

Para transformar nuestro circuito en un sistema de fase no minima, se propuso utilizar un circuito ecualizador de fase, es decir, un circuito que modifique la fase de salida de el circuito de la Figura 1, pero que no modifique la magnitud. Para lograr este objetivo se propuso un circuito como el de la Figura 7.

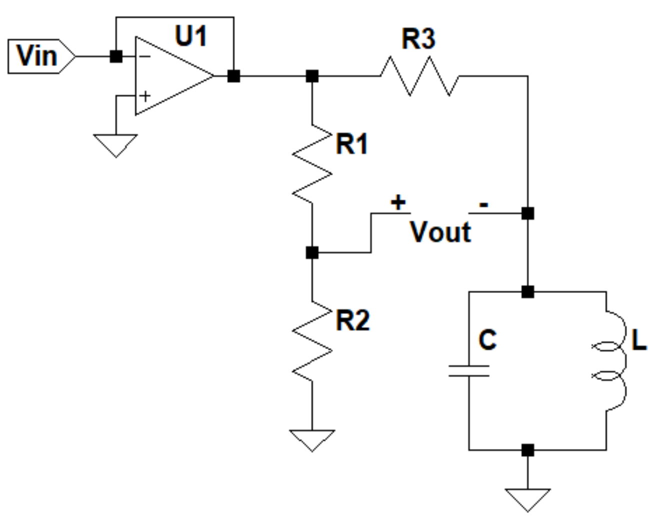

Figura 7: Circuito ecualizador de fase

Si calculamos el paralelo entre el capacitor y el inductor:

$$Z_p = \left(sC + \frac{1}{sL}\right)^{-1} = \frac{sL}{s^2CL + 1}$$

Por lo tanto, la transferencia queda determinada por

$$H(s) = \frac{\frac{sL}{s^2CL+1}}{\frac{sL}{s^2CL+1} + R} = \frac{sL}{s^2CLR + sL + R} \tag{3}$$

Como se observa de la ecuación (3), para el nominador, tenemos un cero en el origen, por lo tanto, ya deja de ser un sistema de fase mínima. Por otro lado, calculando los polos a partir del denominador se obtiene:

$$P_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4CLR^2}}{2CLR}$$

Donde se puede ver que para valores razonables de R,L y C, obtenemos que la parte real de los polos son negativas, por lo tanto el circuito permanecerá estable. Al simular el ecualizador de fase, el resultado es el que se muestra en la Figura 8.

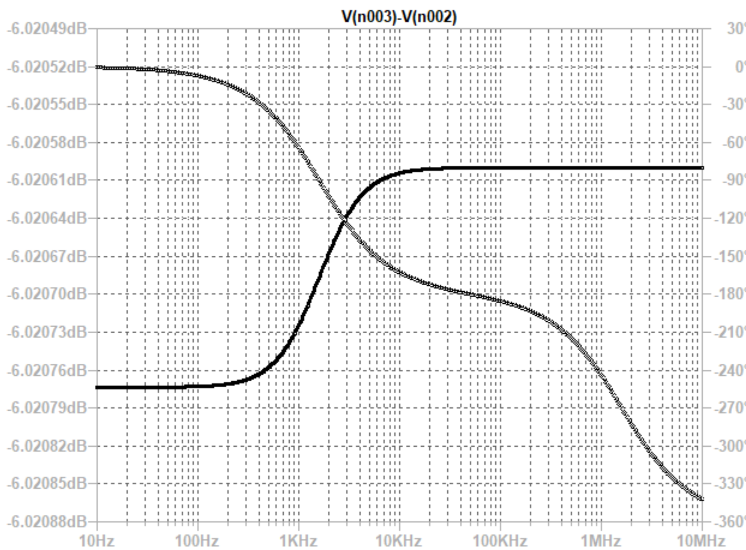

Figura 8: Simulación del circuito ecualizador de fase

Como se puede observar, la variacion en magnitud es a fines practicos nula, sin emabrgo, se puede ver que el circuito tiene una caída en magnitud de 6(dB), por lo tanto, la señal de entrada se vera atenuada. Por otro lado, la variacion en fase es de 360°, con lo que concluyentemente el circuito propuesto cumple su cometido. Si se quiere agregar el ecualizador de fase al circuito de la Figura 1, se deberá conectar en cascada el circuito de la Figura 7. De esta manera, la transeferencia total del circuito resultante será la multiplicacion entre las 2 transferencias.

5. Diseño de un ecualizador de 3 bandas

5.1. Análisis del espectro audible

Segun cada ser humano, el espectro audible varía dependiendo de la salud y la edad de la persona, una aproximación bastante fiel al esprectro audible es de 20 a 20000 (Hz), donde reside el 100 % del sonido que el ser humano escucha. El espectro audible suele dividirse en varias capas, las frecuancias graves, medias y agudas. estas frecuencias se encuentran en la tabla 1.

Graves	Medios	Agudos
<250(Hz)	Entre 250 (Hz) y 2 (kHz)	Entre2 (kHz) y 20 (kHz)

Cuadro 1: Espectro audibe del ser humano

Si bien en principio para el diseño del filtro sería correcto diseñar 3 ecualizadores de bandas con frecuencias centrales dentro de los rangos dicho anteriormente, durante la siguiente sección nos propondremos realizar un análisis mas detallado de que frecuencias son mas convenientes ecualizar para lograr que una canción pueda tener cambios significativos.

5.2. Análisis del espectro de la musica

Si bien el humano escucha en un rango de frecuancias determinado, no siempre este rango resulta utilizado para la musica en general. Es por esto que se tomo como referencia la canción *Bohemian Rhapsody* de la banda británica *Queen*. Para poder analizar una pieza como esta, primero que nada debemos tener en cuenta, que cualquier canción varía en el tiempo, y no es una señal constante, por lo cual, el espectro en frecuancias de la cancion analizada variará en el tiempo. Esto significa que para poder ver como varía el espectro para cada instante de la canción debemos disponer de un grafico en tres dimensiones, siendo estas la frecuancia, el tiempo y la amplitud de la onda. Estos graficos en 3 dimensiones se los llaman comunmente espectrogramas, uno de estos se puede observar en la Figura 9. Los espectrogramas se deben leer de la siguiente manera: El eje orizontal es el tiempo, el eje vertical son las frecuencias, y la coloracion de color es la amplitud, es decir, cuanto mas rojo se encuentre un punto en el grafico, mas amplitud tendrá la canción en esa frecuencia en ese instante de tiempo.

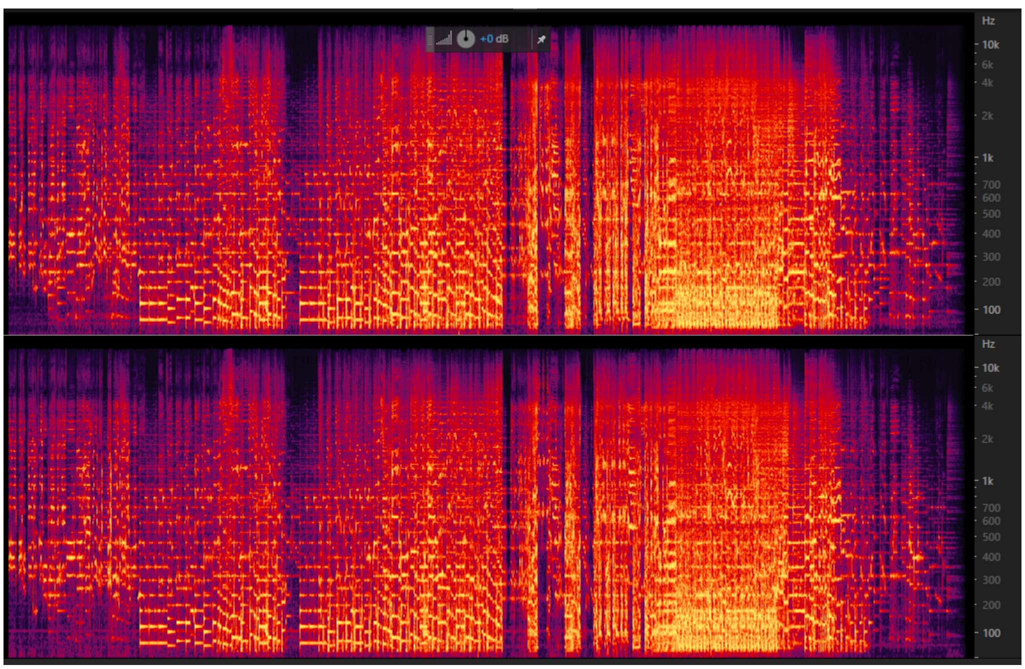

Figura 9: Espectrograma de *Bohemian Rhapsody*

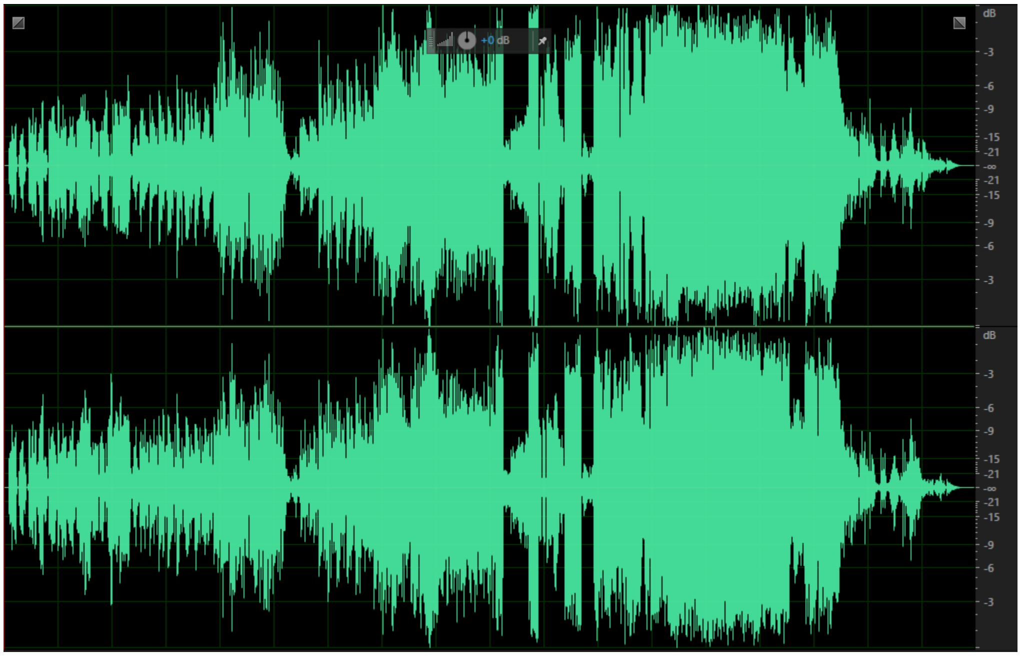

Figura 10: Vista de osciloscopio de *Bohemian Rhapsody* a lo largo de la canción entera

Como se puede ver a simple vista, la mayor parte de la canción se encuentra por debajo de 1 (kHz) y hay poca información por sobre 1(kHz). A su vez, por debajo de 200 (Hz) hay demasiada amplitud en promedio, por lo cual, podemos asumir que el intervalo entre 0 y 200 (Hz) es bastante importante. Aprovechando el ancho de banda del filtro explicado de la Figura 1, lo mas conveniente será elegir como frecuencia central a los 100(Hz). Por otro lado, será conveniente elegir para el 2do filtro una frecuencia central entre 200 (Hz) y 1 (kHz), arbitrariamente, se eligió una frecuencia central de 700 (Hz), esto se debe a que se ve algo de precencia de frecuancias medias sobre esa banda y que no se pretendía que ambos filtros se superpongan. Por ultimo, para poder controlar las frecuencias agudas, se eligió el tercer filtro con una frecuencia central de 2 (kHz), que es el ultimo intervalo donde se pueden apreciar frecuencias significativas dentro de la canción.

5.3. Elección de la ganancia de los filtros