Поиск минимума функционала (решение задачи, допустим, Лагранжа)

Подкорытов М. Д.

24 ноября 2013 г.

1 Постановка задачи

Требуется найти решение следующей задачи:

$$\int\limits_0^1 u^2(t)dt \to \inf,\ u(t) = \ddot{x} - x\cos\alpha\dot{x},$$

$$x(0) = 0,\ x(1) = \sinh 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = e$$

при значениях параметра $\alpha \in \{0, 0.01, 0.5, 1.5, 10.5\}$.

2 Сведение задачи к решению системы дифференциальных уравнений

2.1 Замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = u + x_1\cos\alpha x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + x_1\cos\alpha x_2 \end{cases}$$

2.2 Функция Лагранжа

$$L(t, x, p, u, \lambda, x(0), x(1)) = \int\limits_0^1 \left(\lambda_0 u^2(t) + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u - x_1\cos\alpha x_2)\right) dt\ +$$

$$+\ \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2(x_1(1) - \sinh 1) + \lambda_3 x_2(0) + \lambda_4(x_2(1) - e)$$

— функция Лагранжа.

$$l(\lambda, x(0), x(1)) = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2(x_1(1) - \sinh 1) + \lambda_3 x_2(0) + \lambda_4(x_2(1) - e)$$

— терминальная часть функции Лагранжа.

2.3 Уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}) - L_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1(t) - p_2(t)\cos\alpha x_2(t) = 0 \\ -\dot{p}_2(t) - p_1(t) + x_1(t)\,p_2(t)\,\alpha\sin\alpha x_2(t) = 0 \end{cases}$$

2.4 Условия трансверсальности

$$\begin{cases} p_1(0) = l_{x_1(0)} = \lambda_1 \\ p_2(0) = l_{x_2(0)} = \lambda_3 \\ p_1(1) = -l_{x_1(1)} = -\lambda_2 \\ p_2(1) = -l_{x_2(1)} = -\lambda_4 \end{cases}$$

2.5 Условие стационарности по $u(t)$

$\frac{d}{du}L = 0 \Rightarrow 2\lambda_0 u(t) + p_2(t) = 0$

2.6 Появление системы дифференциальных уравнений

Положив $\lambda_0 = 0$, получим, что $p_2(t) = 0 \to$ (из условий трансверсальности) $\lambda_i = 0$. Случай $\lambda = 0$ нас не устраивает; поэтому положим $\lambda_0 = -0.5$.

Объединив уравнения Эйлера, условия трансверсальности и условие стационарности по $u(t)$ получим необходимые условия для функции, являющейся решением задачи. Эти условия записываются в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = p_2(t) + x_1(t)\cos\alpha x_2(t) \\ \dot{p}_1(t) = -p_2(t)\cos\alpha x_2(t) \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) + x_1(t)p_2(t)\alpha\sin\alpha x_2(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \sinh 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

3 Вычисления

3.1 Решение системы дифференциальных уравнений

3.1.1 Решение системы при значении параметра $\alpha = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 + x_1 \\ \dot{p}_1 = -p_2 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \sinh 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -p_2 + x_1 \\ p_1(t) = A\sinh t + B\cosh t \\ p_2(t) = -B\sinh t - A\cosh t \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \sinh 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t\sinh t \\ x_2(t) = \sinh t + t\cosh t \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 + x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t\sinh t \\ x_2(t) = \sinh t + t\cosh t \\ p_1(t) = 2\sinh t \\ p_2(t) = 2\cosh t \end{cases}$$

3.1.2 Решение системы при значениях параметра $\alpha \neq 0$

Для численного решения системы нам не хватает информации о значениях функций $p_1(t)$, $p_2(t)$ при $t = 0$. Для нахождения $p_1(0) = a_1$, $p_2(0) = a_2$ воспользуемся модифицированным методом Ньютона. При этом мы используем следующие параметры:

1. ε — желаемая точность минимального значения данного функционала. Устанавливается при запуске программы.
2. δ — приращение аргумента при подсчете производных. Считаем $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.
3. τ — фиксированный шаг метода Рунге-Кутты. Считаем $\tau = \sqrt[4]{\varepsilon}$.

Первая итерация. В качестве начальных значений a_1, a_2 берем $p_1(0)$, $p_2(0)$ при значении параметра $\alpha = 0$

$$a_1^0 = 2\sinh 0 = 0,$$
$$a_2^0 = 2\cosh 0 = 2.$$

Продолжаем траекторию при помощи методы Рунге-Кутты, получаем

$$c_1^0 := p_1(1),$$
$$c_2^0 := p_2(1)$$

Строим вектор невязки

$$r^0 = c^0 - x(1) = \left(c_1^0 - \sinh 1, c_2^0 - e\right)$$

Считаем невязку

$$s^0 = \|r^0\|_2$$

Если $\left|s^0\right| < \varepsilon$, положим $a_1 := a_1^0$, $a_2 := a_2^0$ и заканчиваем работу алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу

Все последующие итерации. Пусть посчитаны a_1^k, a_2^k.

1. Продолжаем траекторию при помощи метода Рунге-Кутты, получаем

   $$c_1^k := p_1(1),$$
   $$c_2^k := p_2(1)$$

   Строим вектор невязки

   $$r^k = c^k - x(1) = \left(c_1^k - \sinh 1, c_2^k - e\right)$$

2. Положим $\gamma_k = 1$

   Находим следующее приближение краевых условий $a^{k+1} = \left(a^k\right)^T - \gamma_k \left(\dot{r}^k\right)^{-1} \left(r^k\right)^T$, где $\dot{r}^k$ — матрица Якоби $J = (j_{ps})$, которая считается следующим образом:

   $$j_{ps} = \frac{r_p^k\left(a_1^k, \ldots, a_s^k + \delta, \ldots\right) - r_p^k\left(a_1^k, \ldots, a_s^k, \ldots\right)}{\delta}$$

   Считаем невязку с использованием нормировки Федоренко:

   $$s^{k+1} = \|r^{k+1}\|_\Phi = \sqrt{\frac{r_1^2}{j_{11}^2 + j_{12}^2} + \frac{r_2^2}{j_{21}^2 + j_{22}^2}}$$

(a) Если $\left|s^{k+1}\right| < \varepsilon$, положим $a_1 := a_1^{k+1}$, $a_2 := a_2^{k+1}$, и завершаем поиск начальных условий.

(b) Если $\left|s^{k+1}\right| > \left|s^k\right|$, уменьшим γ_k в 2 раза и повторим итерацию, начиная с момента поиска следующего приближения краевых условий.

(c) Иначе идём на следующую итерацию алгоритма.

Таким образом, мы построили начальные условия для функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и теперь можем проинтегрировать систему с помощью метода Рунге-Кутты.
Также из условий стационарности по $u(t)$ имеем $u(t) = p_2(t)$. Таким образом, мы можем считать значения экстремали $u(t)$ в различных точках отрезка $[0, 1]$.

3.2 Вычисление значения функционала

Значение функционала ищется следующим способом:

1. Интеграл по отрезку $[0, 1]$ разбивается на сумму интегралов по отрезкам разбиения:

$$\int\limits_0^1 u^2(t)dt = \sum_k \int\limits_{x_k}^{x_k+1} u^2(t)dt$$

2. На каждом отрезке разбиения приближенное значение интеграла считается по формуле Симпсона:

$$\int\limits_{x_k}^{x_k+1} u^2(t)dt = \frac{h}{6}\left(u^2\left(x_k\right) + 4u^2\left(\frac{x_k + x_{x+1}}{2}\right) + u^2\left(x_{k+1}\right)\right)$$

где $h = x_{k+1} - x_k = 2\tau$ — шаг разбиения.

4 Численные результаты

α	точность значения функционала	значение функционала
0	$1 \cdot 10^{-4}$	5,626864
0	$1 \cdot 10^{-7}$	0
0	$1 \cdot 10^{-8}$	0
0,01	$1 \cdot 10^{-4}$	5,627258
0,01	$1 \cdot 10^{-4}$	0
0,01	$1 \cdot 10^{-4}$	0
0,5	$1 \cdot 10^{-4}$	6,594288
0,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0
0,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0
1,5	$1 \cdot 10^{-4}$	9,621415
1,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0
1,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0
10,5	$1 \cdot 10^{-4}$	7,994725
10,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0
10,5	$1 \cdot 10^{-4}$	0