# Поиск минимума функционала

Подкорытов М. Д.

28 ноября 2013 г.

## 1 Постановка задачи

Требуется найти решение следующей задачи:

$$\int_0^1 u^2(t)dt \to \inf,\ u(t) = \ddot{x} - x\cos\alpha\dot{x},$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = \operatorname{sh} 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = e$$

при значениях параметра $\alpha \in \{0, 0.01, 0.5, 1.5, 10.5\}$.

## 2 Сведение задачи к решению системы дифференциальных уравнений

### 2.1 Замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = u + x_1\cos\alpha x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + x_1\cos\alpha x_2 \end{cases}$$

### 2.2 Функция Лагранжа

$$L(t,x,p,u,\lambda,x(0),x(1)) = \int_0^1 \left(\lambda_0 u^2(t) + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u - x_1\cos\alpha x_2)\right)dt\ +$$

$$+\ \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2(x_1(1) - \operatorname{sh} 1) + \lambda_3 x_2(0) + \lambda_4(x_2(1) - e)$$

— функция Лагранжа.

$$l(\lambda, x(0), x(1)) = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2(x_1(1) - \operatorname{sh} 1) + \lambda_3 x_2(0) + \lambda_4(x_2(1) - e)$$

— терминальная часть функции Лагранжа.

### 2.3 Уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}) - L_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1(t) - p_2(t)\cos\alpha x_2(t) = 0 \\ -\dot{p}_2(t) - p_1(t) + x_1(t)p_2(t)\alpha\sin\alpha x_2(t) = 0 \end{cases}$$

### 2.4 Условия трансверсальности

$$\begin{cases} p_1(0) = l_{x_1(0)} = \lambda_1 \\ p_2(0) = l_{x_2(0)} = \lambda_3 \\ p_1(1) = -l_{x_1(1)} = -\lambda_2 \\ p_2(1) = -l_{x_2(1)} = -\lambda_4 \end{cases}$$

### 2.5 Условие стационарности по $u(t)$

$\frac{d}{du}L = 0 \Rightarrow 2\lambda_0 u(t) + p_2(t) = 0$

### 2.6 Сведение условий в одну систему дифференциальных уравнений.

Положив $\lambda_0 = 0$, получим, что $p_2(t) = 0 \to$ (из условий трансверсальности) $\lambda_i = 0$. Случай $\lambda = 0$ нас не устраивает; поэтому положим $\lambda_0 = -0.5$.

Объединив уравнения Эйлера, условия трансверсальности и условие стационарности по $u(t)$ получим необходимые условия для функции, являющейся решением задачи. Эти условия записываются в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = p_2(t) + x_1(t)\cos\alpha x_2(t) \\ \dot{p}_1(t) = -p_2(t)\cos\alpha x_2(t) \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) + x_1(t)p_2(t)\alpha\sin\alpha x_2(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \operatorname{sh} 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

## 3 Вычисления

### 3.1 Решение системы дифференциальных уравнений

#### 3.1.1 Решение системы при значении параметра $\alpha = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 + x_1 \\ \dot{p}_1 = -p_2 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \operatorname{sh} 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -p_2 + x_1 \\ p_1(t) = A\operatorname{sh} t + B\operatorname{ch} t \\ p_2(t) = -B\operatorname{sh} t - A\operatorname{ch} t \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = \operatorname{sh} 1 \\ x_2(1) = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t\operatorname{sh} t \\ x_2(t) = \operatorname{sh} t + t\operatorname{ch} t \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 + x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t\operatorname{sh} t \\ x_2(t) = \operatorname{sh} t + t\operatorname{ch} t \\ p_1(t) = 2\operatorname{sh} t \\ p_2(t) = 2\operatorname{ch} t \end{cases}$$

### 3.1.2 Решение системы при значениях параметра $\alpha \neq 0$

Для численного решения системы нам не хватает информации о значениях функций $p_1(t)$, $p_2(t)$ при $t = 0$. Для нахождения $p_1(0) = a_1$, $p_2(0) = a_2$ воспользуемся модифицированным методом Ньютона. При этом мы используем следующие параметры:

1. $\tau$ — фиксированный шаг метода Рунге-Кутты. Задаем при запуске программы.
2. $\varepsilon$ — точность решения системы дифференциальных уравнений в точке $t = 1$. Считаем $\varepsilon = 10\tau^4$.
3. $\delta$ — приращение аргумента при подсчете производных. Считаем $\delta = 100\varepsilon$.

**Первая итерация.** В качестве начальных значений $a_1$, $a_2$ берем $p_1(0)$, $p_2(0)$ при значении параметра $\alpha = 0$

$$a_1^0 = 2\operatorname{sh} 0 = 0,$$
$$a_2^0 = 2\operatorname{ch} 0 = 2.$$

Продолжаем траекторию при помощи методы Рунге-Кутты, получаем

$$c_1^0 := p_1(1),$$
$$c_2^0 := p_2(1)$$

Строим вектор невязки

$$r^0 = c^0 - x(1) = \left(c_1^0 - \operatorname{sh} 1, c_2^0 - e\right)$$

Считаем невязку

$$s^0 = \|r^0\|_2$$

Если $\left|s^0\right| < \varepsilon$, положим $a_1 := a_1^0$, $a_2 := a_2^0$ и заканчиваем работу алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу

**Все последующие итерации.** Пусть посчитаны $a_1^k$, $a_2^k$.

1. Продолжаем траекторию при помощи метода Рунге-Кутты, получаем

   $$c_1^k := p_1(1),$$
   $$c_2^k := p_2(1)$$

   Строим вектор невязки

   $$r^k = c^k - x(1) = \left(c_1^k - \operatorname{sh} 1, c_2^k - e\right)$$

2. Положим $\gamma_k = 1$

   Находим следующее приближение краевых условий $a^{k+1} = \left(a^k\right)^T - \gamma_k \left(\dot{r}^k\right)^{-1} \left(r^k\right)^T$, где $\dot{r}^k$ — матрица Якоби $J = (j_{ps})$, которая считается следующим образом:

   $$j_{ps} = \frac{r_p^k\left(a_1^k, \ldots, a_s^k + \delta, \ldots\right) - r_p^k\left(a_1^k, \ldots, a_s^k, \ldots\right)}{\delta}$$

   Считаем невязку с использованием нормировки Федоренко:

   $$s^{k+1} = \|r^{k+1}\|_\Phi = \sqrt{\frac{r_1^2}{j_{11}^2 + j_{12}^2} + \frac{r_2^2}{j_{21}^2 + j_{22}^2}}$$

   (a) Если $\left|s^{k+1}\right| < \varepsilon$, положим $a_1 := a_1^{k+1}$, $a_2 := a_2^{k+1}$, и завершаем поиск начальных условий.
   (b) Если $\left|s^{k+1}\right| > \left|s^k\right|$, уменьшим $\gamma_k$ в 2 раза и повторим итерацию, начиная с момента поиска следующего приближения краевых условий.
   (c) Иначе идём на следующую итерацию алгоритма.

Таким образом, мы построили начальные условия для функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и теперь можем проинтегрировать систему с помощью метода Рунге-Кутты.
Также из условий стационарности по $u(t)$ имеем $u(t) = p_2(t)$. Таким образом, мы можем считать значения экстремали $u(t)$ в различных точках отрезка $[0, 1]$.

### 3.2 Вычисление значения функционала

Значение функционала ищется следующим способом:

1. Интеграл по отрезку $[0, 1]$ разбивается на сумму интегралов по отрезкам разбиения:

$$\int_0^1 u^2(t)dt = \sum_k \int_{x_k}^{x_k+1} u^2(t)dt,$$

   причем точки разбиения берем так, чтобы $x_{k+1} - x_k = \tau$, где $\tau$ — заданный вначале шаг метода Рунге-Кутты.

2. На каждом отрезке разбиения приближенное значение интеграла считается по формуле Симпсона:

$$\int_{x_k}^{x_k+1} u^2(t)dt = \frac{h}{6}\left(u^2(x_k) + 4u^2\left(\frac{x_k + x_{x+1}}{2}\right) + u^2(x_{k+1})\right)$$

   где $h = x_{k+1} - x_k$.

# 4 Численные результаты

| $\alpha$ | шаг метода Рунге-Кутты | значение функционала |
|---|---|---|
| 0 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 5.62686041048101 |
| 0 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 5.62686040784706 |
| 0 | $1 \cdot 10^{-4}$ | 5.62686040784705 |
| 0,01 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 5.62725804145774 |
| 0,01 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 5.62725803880580 |
| 0,01 | $1 \cdot 10^{-4}$ | 5.62725803883695 |
| 0,5 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 6.59428806061754 |
| 0,5 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 6.59428804854848 |
| 0,5 | $1 \cdot 10^{-4}$ | 6.59428804857171 |
| 1,5 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 9.62141521735934 |
| 1,5 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 9.62141510309089 |
| 1,5 | $1 \cdot 10^{-4}$ | 9.62141510307951 |
| 10,5 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 7.99492025679060 |
| 10,5 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 7.99472578144433 |
| 10,5 | $1 \cdot 10^{-4}$ | 7.99472576634778 |