

Balanced Comparison

労働経済学 2

川田恵介

Table of contents

1	単純な例: データ上でのバランス	2
1.1	論点整理	2
1.2	例: “人種” 間格差	2
1.3	例: 平均格差	3
1.4	目標	3
1.5	準備: 繰り返し期待値の法則	3
1.6	正式な定義: 平均値の分解	4
1.7	例: $X = immigrant$	4
1.8	含意	4
1.9	Balanced mean	4
1.10	Target Weight	5
1.11	実践上の含意	5
1.12	例: $X = immigrant$	5
1.13	例: Balanced Mean	6
1.14	定義: Balancing weights	6
1.15	定義: Balancing weights	6
1.16	仮定: Overlap	7
1.17	まとめ	7
1.18	付論: 別解釈	7
2	母集団上での推定対象	7
2.1	Estimand	7
2.2	実践上の含意	8
3	推定方法	8
3.1	例: 移民、調査年	8
3.2	例: Balanced Comparison	9

3.3	例: “Unbalanced” Comparison	9
3.4	例: Balanced Comparison	9
3.5	例. 異なる Target Weight	10
3.6	例: 移民、調査年、年齢	11
3.7	例: 移民、調査年、年齢、その他	11
3.8	事例数問題	12
3.9	まとめ	12
	Reference	12

1 単純な例: データ上でのバランス

- X をバランスさせた比較を、データ上でどのように行うのか?
 - 因果推論/格差、両面で有効
 - * 理想的な因果推論に比べて、 X の分断が大きく、注意深い議論が格差推定では、注意深い議論が必要

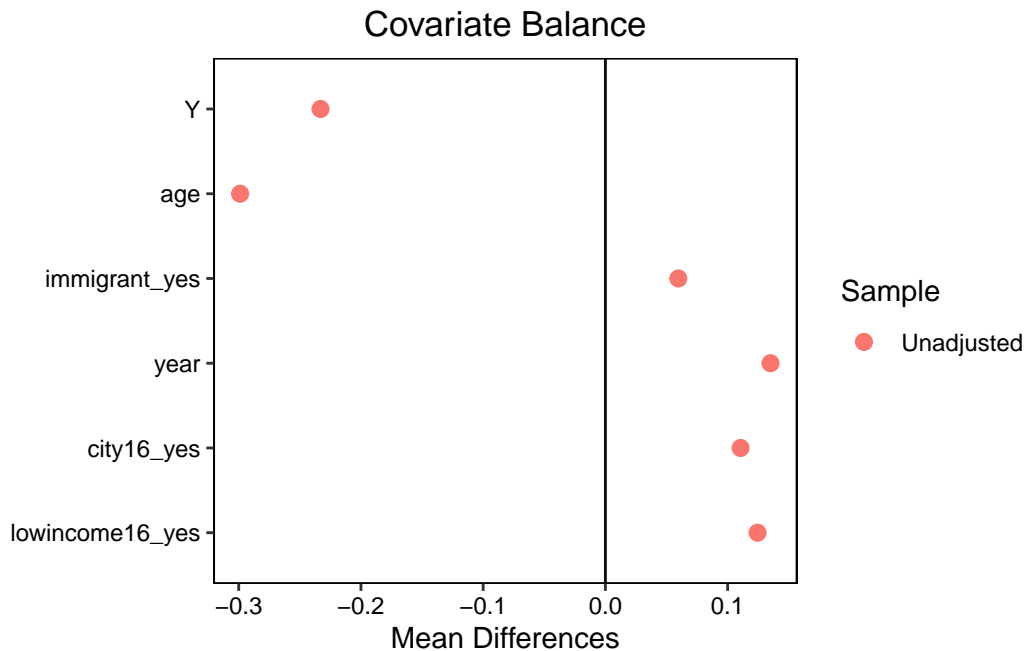
1.1 論点整理

- Balancing Comparison/ weights を用いて議論を整理
 - 因果効果や格差を推定するために、データから推定する必要がある
 - 傾向スコア、マッチング、IPW、Double Machine Learning、OLSなどを、Balancing weights を推定する手法として整理できる
 - * Chattopadhyay, Hase, and Zubizarreta (2020), Bruns-Smith et al. (2023), Ben-Michael et al. (2021)
- 多くの手法を整理できる!!!

1.2 例: “人種” 間格差

- “Race” 間での教育格差を推定
 - データ: US General Social Survey 1974-2002
 - Y = 教育年数
 - $D = 1$ “白人以外”/ 0 “白人”
 - X = 年齢/移民かどうか/何年の調査か
 - * 同じ社会/コホート/出身国内で差があれば、格差

1.3 例: 平均格差



- “白人以外”の方が、移民が多く、年齢が若く、直近の調査に多い

1.4 目標

- 人種 (= D) 間で、年齢、調査年、移民状態 (= X) を Balance させた後の、教育年数 (= Y) の平均差
– 教育格差についての、Balanced Comparison
- Point: Balance とは何か?

1.5 準備: 繰り返し期待値の法則

- 繰り返し期待値の法則

$$\begin{aligned} \text{大阪大学の平均身長} &= \text{経済学部生の平均身長} \\ &\quad \times \text{経済学部生の割合} \\ &+ \text{社会学部生の平均身長} \\ &\quad \times \text{社会学部生の割合} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

1.6 正式な定義: 平均値の分解

- 一般にデータ上の Y の平均値は以下のように書き換えられる

$$d \text{ における } Y \text{ の平均値} = \left\{ (x \ \& \ d) \text{ における } Y \text{ の平均値} \right. \\ \left. \times d \text{ における } x \text{ の割合} \right\} \text{ の } x \text{ についての総和}$$

1.7 例: $X = immigrant$

$E[Y D,X]$	D	immigrant	$f(x d)$
11.9	1	no	0.843
13.0	1	yes	0.157
12.8	0	no	0.902
12.3	0	yes	0.098

- $D = 1$ の平均教育年数

$$\underbrace{12.0727}_{E[Y|1]} = \underbrace{0.843}_{f(no|1)} \times \underbrace{11.9}_{E[Y|1,no]} + \underbrace{0.157}_{f(yes|1)} \times \underbrace{13.0}_{E[Y|1,yes]}$$

1.8 含意

- D 間での格差を生み出す要因は 2 種類に分解できる
 - $(x \ \& \ d)$ における Y の平均値 の違い (X 内での格差)
 - d における x の割合 の違い (X の格差)
- Balanced Comparison: 後者を排除

1.9 Balanced mean

- “ X の格差” を排除した平均値

$$Balanced \ Mean = \left\{ (x \ \& \ d) \text{ における } Y \text{ の平均値} \right. \\ \left. \times \underbrace{x \text{ の仮想的な割合}}_{Target \ Weight} \right\} \text{ の } x \text{ についての総和}$$

1.10 Target Weight

- Target Weight は D 間で共通
 - 研究者が設定する必要がある
- 代表例として
 - データ全体での x の割合 $f(X)$
 - $D = 1$ または $D = 0$ における x の割合 $f(X|D = 1), f(X|D = 0)$

1.11 実践上の含意

- 一般に Target Weight が異なれば、推定結果も異なり、含意も異なる
 - 例外は、理想的な因果推論
 - * RCT に近いデータを用いることができれば、 X の分布は $D = 1/0$ で差がない
 - ・ どの Weight を用いても、同じような値になる
- 一般に格差推定においては、値が大きく異なることが予想される

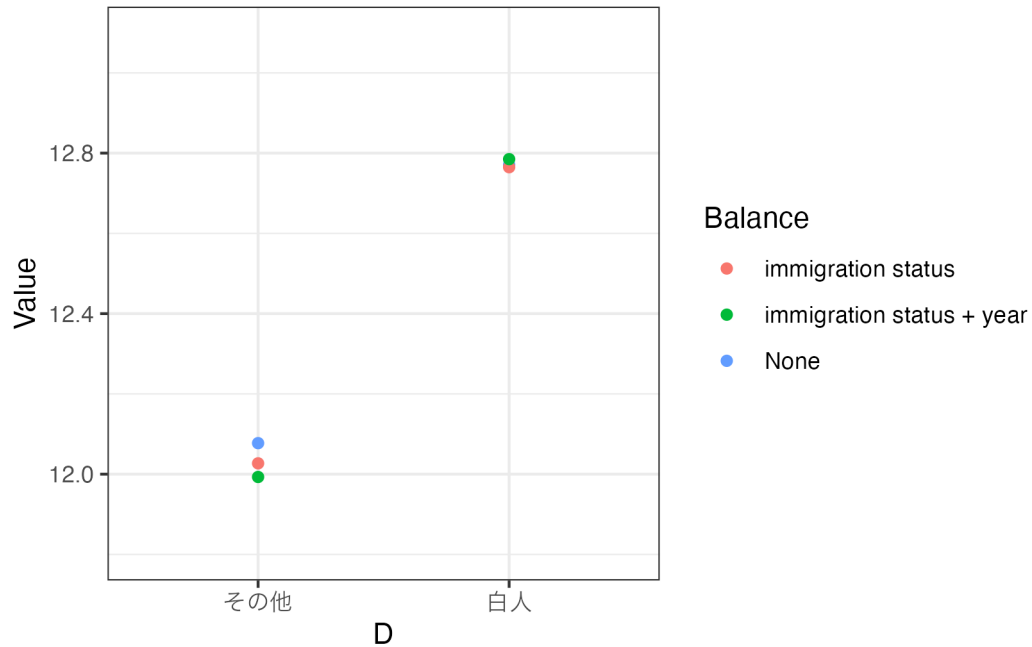
1.12 例: $X = immigrant$

$E[Y D,X]$	D	$immigrant$	$f(x d)$	Target= $f(x)$	Target= $f(x 1)$	Target= $f(x 0)$
11.9	1	no	0.843	0.891	0.843	0.902
13.0	1	yes	0.157	0.109	0.157	0.098
12.8	0	no	0.902	0.891	0.843	0.902
12.3	0	yes	0.098	0.109	0.157	0.098

- $f(x)$ を使用した $D = 1$ の Balanced Mean

$$12.01 = \underbrace{0.89}_{f(no)} \times \underbrace{11.9}_{E[Y|1,no]} + \underbrace{0.11}_{f(yes)} \times \underbrace{13.0}_{E[Y|1,yes]}$$

1.13 例: Balanced Mean



1.14 定義: Balancing weights

- Balanced Mean の実際の算出には、Balancing Weight の活用が便利
- $d = 1$ または $= 0$ について、以下を達成する $\omega(X, d)$

$$\text{Balanced Mean} = \frac{\omega(X_1, d)Y_i + \dots + \omega(X_{N_d}, d)}{N_d}$$

- N_d は d の事例数
– Y の加重平均

1.15 定義: Balancing weights

- Balanced Weight は、以下の定義式から算出できる

•

$$\text{Target Weight} = \omega(X, d) \times d \text{ における } X \text{ の割合}$$

•

$$\omega(X, d) = \frac{\text{Target Weight}}{d \text{ における } X \text{ の割合}}$$

- データ上での割合が、Target よりも低い集団に対して、重い Weight
- X の割合を、Target Weight に揃える (Balance する) ように調整する

1.16 仮定: Overlap

- Balancing weight が”存在する”前提
- “すべての X の組み合わせについて、 $D = d$ もそれ以外も存在する”
 - $f(X)$ を Target Weight とするのであれば、

$$1 > f(D = d|X = x) > 0$$

- $f(X|D = d)$ を Target Weight とするのであれば、

$$1 > f(D = d|X = x) \geq 0$$

1.17 まとめ

- Overlap の仮定が成り立てば、Balanced comparison を実行できる
 - Balancing weight で荷重することで、 X の分布を揃えた上で、 Y の平均値を計算できる
- 母集団に対する含意は?
 - 母集団を活用した丁寧な議論が必要

1.18 付論: 別解釈

- Stratified estimation としても解釈できる
1. すべての X の組み合わせについて、 D 間での Y の平均差 $\tau(X)$ を計算
 2. $\tau(X)$ の”平均値”を計算

2 母集団上での推定対象

- 母集団上で定義した Estimand を、データから推定する

2.1 Estimand

- 母集団上で算出した Balanced Mean

- 研究者が、 X, D, Y と Target Weight を決定することで、定義される
- 母集団上で Overlap が成り立つことが前提
 - データ上で成り立たなくとも、追加の仮定のもとで母集団上での Balanced Mean は計算できる

2.2 実践上の含意

- 理想的な因果推論では、Overlap は常に成り立つと考えられる
 - RCT に近いデータを用いることができれば、 X の分布は $D = 1/0$ で差がない
- 一般に格差推定においては、 X の分断が大きく、Overlap が成り立たない可能性が出てくる
 - 今後の議論も踏まえた注意深い議論が必要

3 推定方法

- データ上で Overlap が成り立つのであれば、シンプルな方法で推定できる
 - データ上で、Balancing Weight を直接計算 (MatchIt package など)
- X の組み合わせが増えると、事例数の問題から推定できないので、他の手法を使う必要がある

3.1 例: 移民、調査年

```
Weight = MatchIt::matchit(
  D ~ immigrant + factor(year),
  data = Data,
  method = "Exact", # Balancing Weight
  estimand = "ATE"
)

Weight
```

A matchit object

- method: Exact matching
- number of obs.: 9120 (original), 9120 (matched)
- target estimand: ATE
- covariates: immigrant, factor(year)
- number of obs. = 事例数
 - original: 元の事例数

– matched: weights を計算できた事例数

3.2 例: Balanced Comparison

```
lm(  
  Y ~ D,  
  Data,  
  weights = Weight$weights  
)
```

Call:

```
lm(formula = Y ~ D, data = Data, weights = Weight$weights)
```

Coefficients:

(Intercept)	D
12.785	-0.792

3.3 例: “Unbalanced” Comparison

```
lm(  
  Y ~ D,  
  Data  
)
```

Call:

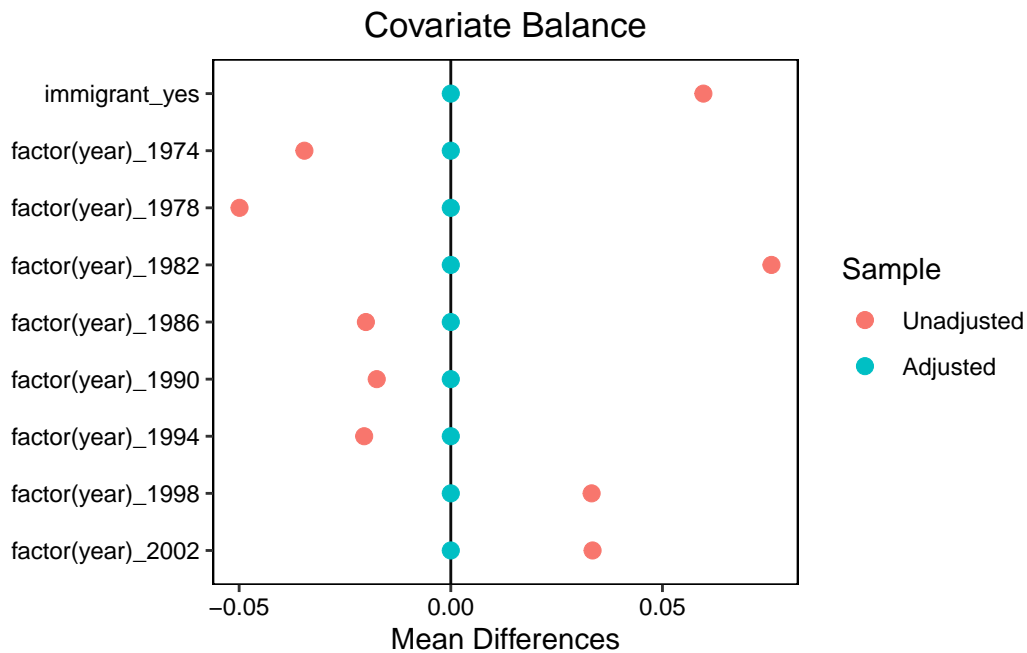
```
lm(formula = Y ~ D, data = Data)
```

Coefficients:

(Intercept)	D
12.7708	-0.6935

3.4 例: Balanced Comparison

```
Weight |>  
  cobalt::bal.tab() |>  
  cobalt::love.plot()
```



3.5 例. 異なる Target Weight

- D=1 における X の割合をターゲットとすることもできる

```
Weight = MatchIt::matchit(
  D ~ immigrant + factor(year),
  data = Data,
  method = "Exact", # Balancing Weight
  estimand = "ATT"
)

lm(
  Y ~ D,
  Data,
  weights = Weight$weights
)
```

Call:

```
lm(formula = Y ~ D, data = Data, weights = Weight$weights)
```

Coefficients:

```
(Intercept)          D
```

12.8432 -0.7659

- 格差分析において、特に重要

3.6 例: 移民、調査年、年齢

```
MatchIt::matchit(  
  D ~ immigrant + year + age,  
  data = Data,  
  method = "Exact",  
  estimand = "ATE"  
)
```

A matchit object

- method: Exact matching
- number of obs.: 9120 (original), 7788 (matched)
- target estimand: ATE
- covariates: immigrant, year, age

- 年齢も加えると Weight が計算できない事例が増える

3.7 例: 移民、調査年、年齢、その他

```
MatchIt::matchit(  
  D ~ age + lowincome16 + city16 + immigrant + siblings + year,  
  data = Data,  
  method = "Exact",  
  estimand = "ATT"  
)
```

A matchit object

- method: Exact matching
- number of obs.: 9120 (original), 1261 (matched)
- target estimand: ATT
- covariates: age, lowincome16, city16, immigrant, siblings, year

- 居住地なども加えると Weight が計算できない事例がさらに増える

3.8 事例数問題

- 母集団において Overlap が成立していたとしても、事例数が限られるデータにおいては、 $D = 1/0$ のどちらかしか存在しない X が発生する

D	immigrant	year	age
0	no	2002	57
0	no	2002	81
0	no	2002	69
0	yes	2002	75
0	no	2002	64
0	yes	2002	58
0	yes	2002	56
0	yes	2002	76
0	no	2002	79
0	yes	2002	70

3.9 まとめ

- X をバランスさせたもとの比較 (Balanced comparison) は、Balancing weights の算出が要求する
 - X の組み合わせに対して、事例数が十分あれば、Overlap の仮定のもとで、 X を "Exact" にバランスさせる Weight を計算できる
 - 多くの実践で不十分
 - * OLS (Imbens 2015; Chattopadhyay and Zubizarreta 2022) や傾向スコア、明示的な最適化 (Hainmueller 2012; Zubizarreta 2015) を使用する必要がある

Reference

- Ben-Michael, Eli, Avi Feller, David A Hirshberg, and José R Zubizarreta. 2021. "The Balancing Act in Causal Inference." *arXiv Preprint arXiv:2110.14831*.
- Bruns-Smith, David, Oliver Dukes, Avi Feller, and Elizabeth L Ogburn. 2023. "Augmented Balancing Weights as Linear Regression." *arXiv Preprint arXiv:2304.14545*.
- Chattopadhyay, Ambarish, Christopher H Hase, and José R Zubizarreta. 2020. "Balancing Vs Modeling Approaches to Weighting in Practice." *Statistics in Medicine* 39 (24): 3227–54.
- Chattopadhyay, Ambarish, and José R Zubizarreta. 2022. "On the Implied Weights of Linear Regression for Causal Inference." *Biometrika*, asac058.

- Hainmueller, Jens. 2012. "Entropy Balancing for Causal Effects: A Multivariate Reweighting Method to Produce Balanced Samples in Observational Studies." *Political Analysis* 20 (1): 25–46.
- Imbens, Guido W. 2015. "Matching Methods in Practice: Three Examples." *Journal of Human Resources* 50 (2): 373–419.
- Zubizarreta, José R. 2015. "Stable Weights That Balance Covariates for Estimation with Incomplete Outcome Data." *Journal of the American Statistical Association* 110 (511): 910–22.