

# 操作変数法への応用

## 機械学習

川田恵介  
東京大学  
keisukekawata@iss.u-tokyo.ac.jp

2026-01-05

## 1 操作変数法: 復習

### 1.1 因果/経済モデル推定への応用

- 機械学習は、より複雑なモデルにより定義されるパラメタ推定へ応用できる
  - ▶ (線型/非線形)方程式体系により定義される因果効果/経済モデル
  - ▶ 本スライドでは、操作変数法への応用を紹介

### 1.2 操作変数法

- 局所的な実験的状況を活用する因果効果の識別方法
  - ▶ ランダム化された変数(操作変数)により、介入のみが”誘発”される方法

### 1.3 実例 Twin experiment

- Griffen, Nakamuro and Inui (2015)
- 「女性の労働供給」の議論の中で、子供が与える影響は大きな論点
  - ▶ 子育て負担が女性に集中しがち → 労働供給減少
  - ▶ 生活/教育費の増大 → 労働供給増加
- 子供数の決定には、無数の背景変数
- 操作変数: 双子が生まれたかどうか

### 1.4 推定と識別の区別

- **識別:** 無限大の事例数があるランダムサンプリング・データから、因果効果をどのように計算すれば良いのか?
  - ▶  $\simeq$  母集団のどのような特徴と因果効果が一致するのか
- **推定:** 限られた事例から、母集団のどのような特徴を推定すれば良いのか?

## 1.5 Twin experiment の識別

- 「双子が生まれるかどうか」はランダムに決まっているならば
  - ▶ 労働供給への双子の効果 = 母集団における「双子がいる家計といない家計の労働供給の差」
  - ▶ 子供の数への効果 = 「双子がいる家計といない家計の子供の数の差」

## 1.6 Twin experiment の識別

- 双子は子供の数のみを通じて、労働供給に影響を与えるのであれば (除外制約)、
  - ▶ 子供の数が労働供給に与える効果

$$= \frac{\text{双子の労働供給への効果}}{\text{双子の子供の数への効果}}$$

## 2 構造方程式モデル

### 2.1 構造モデル

- 前期では、潜在結果モデルに基づく、因果効果の定義と識別を紹介
  - ▶ 他の枠組みとしては、構造モデル (Structural Equation Model; SEM)が有力
  - ▶ 変数の決定過程について、複雑な仮定を導入できる
    - 経済学における伝統的なアプローチであり、DAG を利用した表現も注目されている

### 2.2 潜在結果モデルとの関係性

- 潜在結果モデルと補完的な関係にあり、両方理解すると便利
  - ▶ Wang, Richardson and Robins (2025)
  - ▶ Econometrics Journal の特集号

### 2.3 Y の構造モデル

- 労働供給 (Y) は、以下のモデルに従って決まるとする
- $$Y = \underbrace{\tau_D \times D}_{\text{子供の数}} + \underbrace{f_Y(X)}_{\text{観察可能な決定要因}} + \underbrace{U_Y}_{\text{観察不可能な決定要因}}$$
  - ▶  $D, X, U_Y$  が同一の個人内では、Yは同じ
  - ▶  $U_Y$  には、データから観察されない要因も含む

### 2.4 D の構造モデル

- D は、以下のモデルに従って決まるとする

- $$\underbrace{D}_{\text{子供の数}} = f_D(X) + \underbrace{U_D}_{\text{観察不可能な決定要}}$$
  - ▶  $U_D$  には、データから観察されない要因も含む

## 2.5 因果効果の定義

- $U_Y, X$  を一定にしたままで、 $Y$  を変化させる
- 因果効果 =

$$\begin{aligned} \tau_D \times (D + 1) + U_Y - (\tau_D \times (D + 1) + U_Y) \\ = \tau_D \end{aligned}$$

## 2.6 因果効果の識別

- 計量経済学の核となるアイディア
  - ▶ 観察できない要因 ( $U_Y, U_D$ ) を確率変数として扱う (ノーベル記念経済学賞のプレスリリース)
- もし  $U_Y, U_D$  が存在しないのであれば、データが異なっても  $E[Y | D, X]$  は一定
  - ▶ サンプルング誤差 (データが異なると結果が違う) の原因は、 $U_Y, U_D$

## 2.7 因果効果の識別

- $Y$  の条件付き母平均  $E[Y | d, x]$  と構造式の間には、以下の関係がある:

$$E[Y | d, x] = \tau_D \times d + f(x) + E[U_Y | d, x]$$

- $$\begin{aligned} E[Y | d + 1, x] - E[Y | d, x] \\ = \tau_D + E[U_Y | d + 1, x] - E[U_Y | d, x] \end{aligned}$$

## 2.8 注意

- 統計モデルと構造モデルは厳密に区別する必要がある
- $Y$  を  $D, X$  で回帰する際には、以下の統計モデルを推定する

$$Y = \beta_0 + \beta_D \times D + f(X) + u$$

- ▶ 基本的には、 $u \neq U_Y$  と  $\beta_D \neq \tau_D$

## 2.9 注意

- $$\begin{aligned} \beta_D &= E[Y | d + 1, x] - E[Y | d, x] \\ &= \tau_D \\ &\quad + E[U_Y | d + 1, x] - E[U_Y | d, x] \end{aligned}$$

## 2.10 識別の条件

- もし現実の社会 (母集団) において、 $E[U_Y \mid d+1, x] = E[U_Y \mid d, x]$  ならば

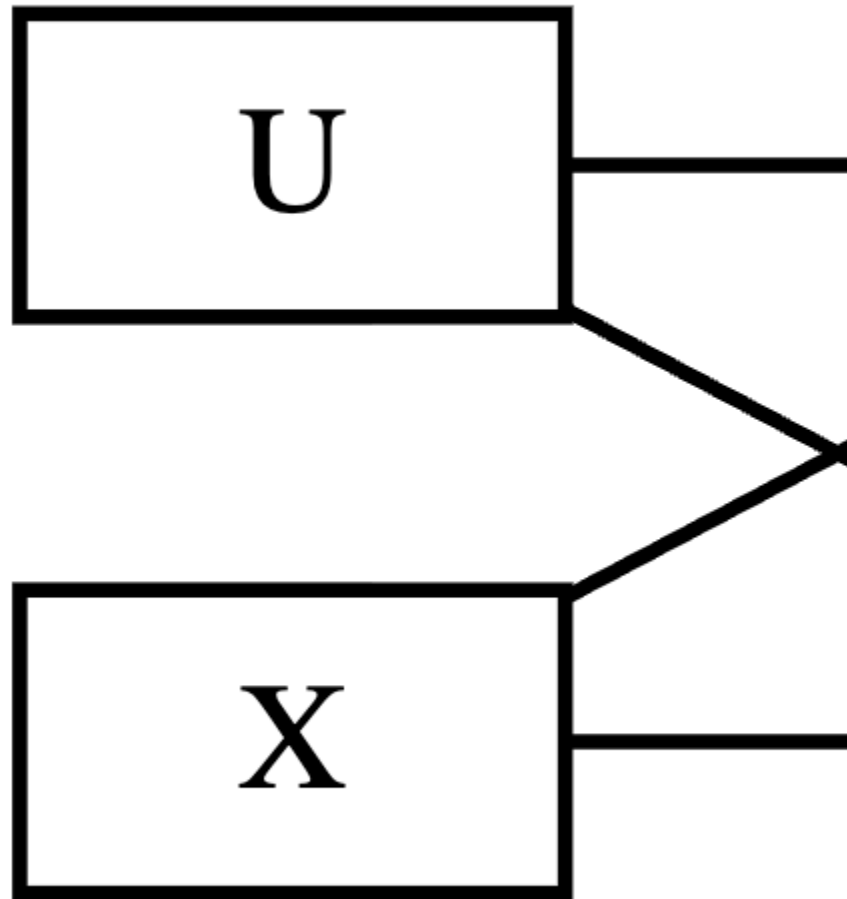
$$\tau_D = \beta_D$$

- $U_D$  と  $U_Y$  が独立であれば、保証できる
  - $D$  にも  $Y$  にも影響を与える要因  $U$  がない

## 2.11 ランダム化対象実験による識別

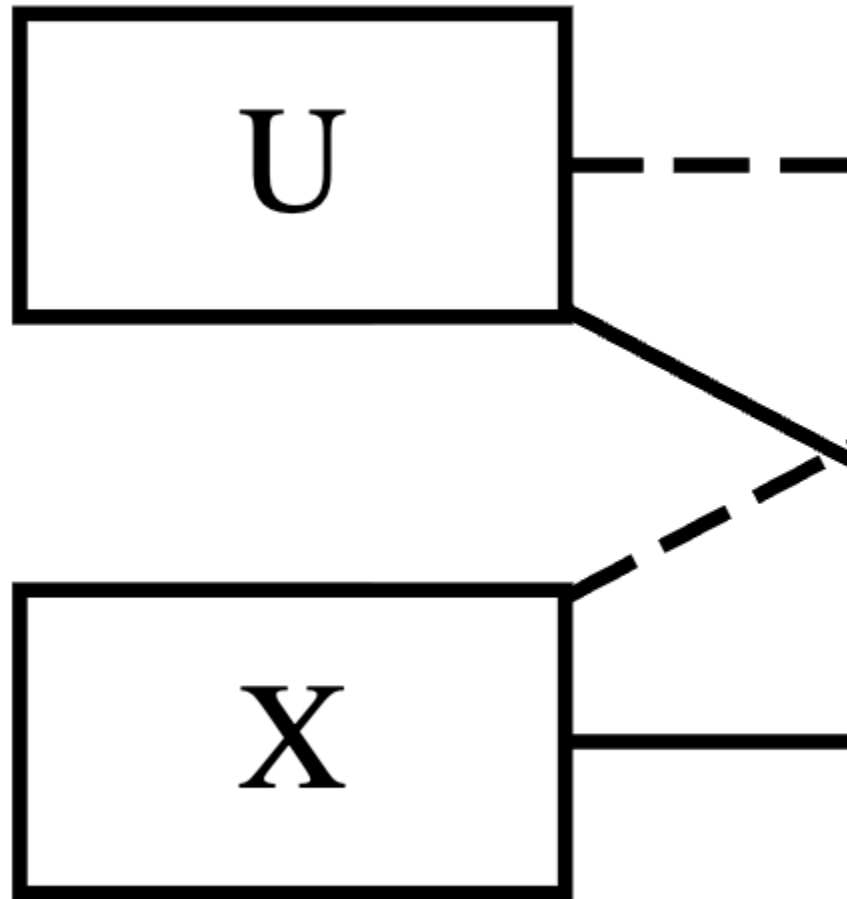
- $D$  はコイントスで決める
  - $U_D =$  コイントスの結果
- $U_D$  は完全にランダムに決まっているので、 $U$  は存在しない

## 2.12 DAG による表現



- 矢印 = 影響
- $U$  以外のその他要因は省略

## 2.13 DAG による表現: RCT

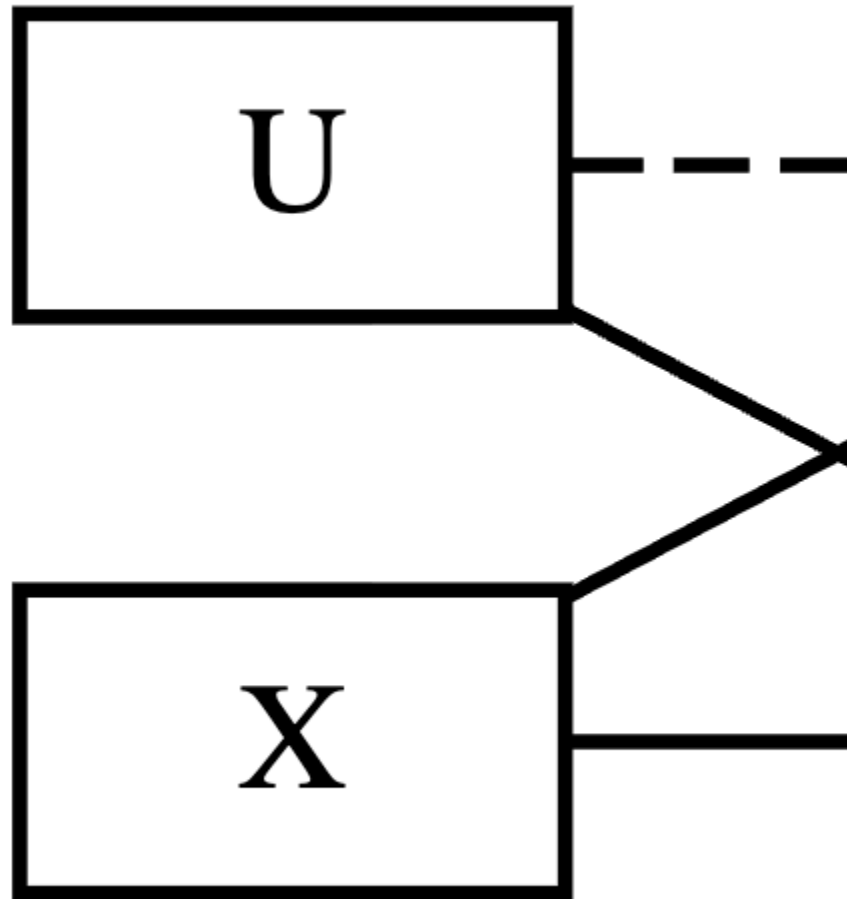


- 点線: 独立

## 2.14 条件付き独立による識別

- $X$  が共通であれば、子供の数ランダムに決まっている
  - ▶  $\beta_D = \tau_D$

## 2.15 DAG による表現: RCT



## 2.16 推定方法

- 残差回帰を活用するために、以下のように書き換える

$$Y - E[Y | X] = \beta_D \times (D - E[D | X]) + U_Y$$

- 以下の手順で推定できる
  1.  $E[Y | X], E[D | X]$  を機械学習等で推定する
  2.  $Y$  の予測誤差を  $D$  の予測誤差で回帰する

## 3 操作変数

### 3.1 構造モデル

- 構造モデルは、

$$Y = \tau_D \times D + f_Y(X) + \underbrace{U_Y}_{E[U_Y|D,X]=0}$$

$$D = \tau_Z \times Z + f_D(X) + \underbrace{U_D}_{E[U_D|Z,X]=0}$$

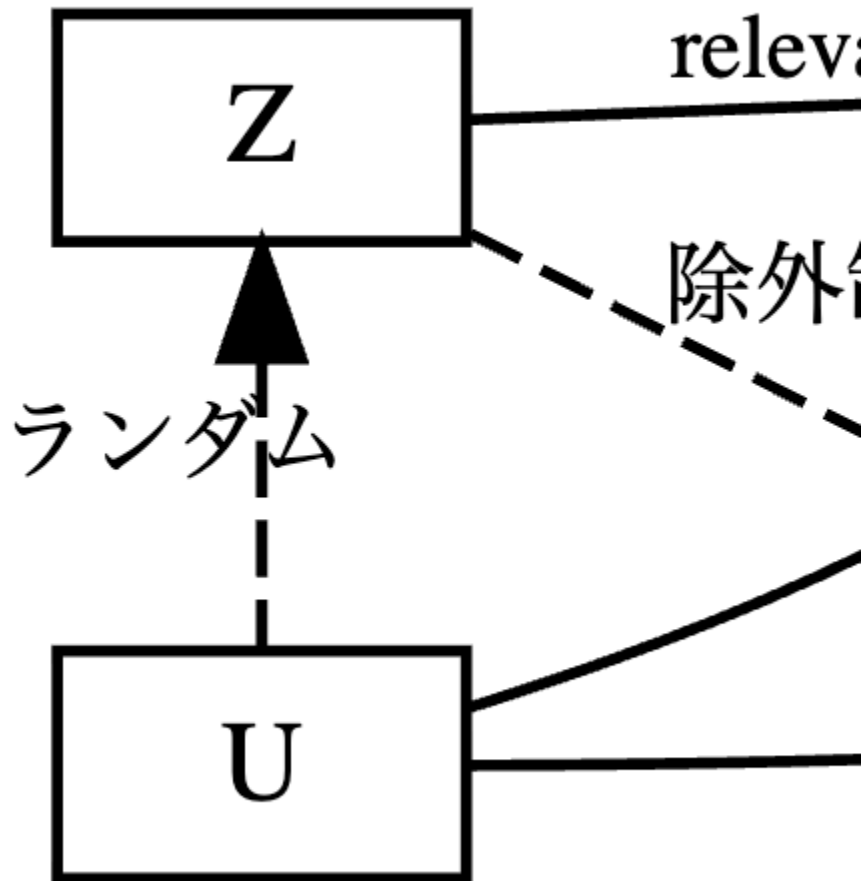
$$Z = f_Z(X) + \underbrace{U_Z}_{E[U_Z|X]=0}$$

### 3.2 識別の仮定

- $U_Z$  が、 $U_Y, U_D$  から独立
  - ▶ 除外制約 + ランダムな操作変数
- $\tau_Z \neq 0$ 
  - ▶ relevance



### 3.3 DAG による表現



### 3.4 Two-stage least square

- 以下を推定する
- $$Y = \beta_Y \times D + f_Y(X) + \underbrace{u_Y}_{E[u_Y|D,X]}$$
- $$D = \beta_D \times Z + f_D(X) + \underbrace{u_D}_{E[u_D|Z,X]}$$
- $f_Y, f_D = X$  についての複雑な関数

### 3.5 残差回帰

- 以下のように書き換えられる

- $$Y - E[Y | X]$$
$$= \beta_Y \times (D - E[D | X]) + u_Y$$
- $$D - E[D | X]$$
$$= \beta_D \times (Z - E[Z | X]) + u_D$$

### 3.6 R での実装

```
E[Y|X]: sample fold 1/10
E[Y|X]: sample fold 2/10
E[Y|X]: sample fold 3/10
E[Y|X]: sample fold 4/10
E[Y|X]: sample fold 5/10
E[Y|X]: sample fold 6/10
E[Y|X]: sample fold 7/10
E[Y|X]: sample fold 8/10
E[Y|X]: sample fold 9/10
E[Y|X]: sample fold 10/10 -- Done!

E[Z1|X]: sample fold 1/10
E[Z1|X]: sample fold 2/10
E[Z1|X]: sample fold 3/10
E[Z1|X]: sample fold 4/10
E[Z1|X]: sample fold 5/10
E[Z1|X]: sample fold 6/10
E[Z1|X]: sample fold 7/10
E[Z1|X]: sample fold 8/10
E[Z1|X]: sample fold 9/10
E[Z1|X]: sample fold 10/10 -- Done!

E[D1|X]: sample fold 1/10
E[D1|X]: sample fold 2/10
E[D1|X]: sample fold 3/10
E[D1|X]: sample fold 4/10
E[D1|X]: sample fold 5/10
E[D1|X]: sample fold 6/10
E[D1|X]: sample fold 7/10
E[D1|X]: sample fold 8/10
E[D1|X]: sample fold 9/10
E[D1|X]: sample fold 10/10 -- Done!
```

PLIV estimation results:

, , nnls

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.00247	0.1946	0.0127	9.90e-01
D_r	0.10109	0.0182	5.5624	2.66e-08

### 3.7 Reference

#### Bibliography

Griffen, A.S., Nakamuro, M. and Inui, T. (2015) “Fertility and maternal labor supply in Japan: Conflicting policy goals?,” *Journal of the Japanese and International Economies*, 38, pp. 52–72.

Wang, L., Richardson, T. and Robins, J. (2025) “Causal Inference: A Tale of Three Frameworks,” *arXiv preprint arXiv:2511.21516* [Preprint].