OLS の比較分析への応用

労働経済学 2

川田恵介

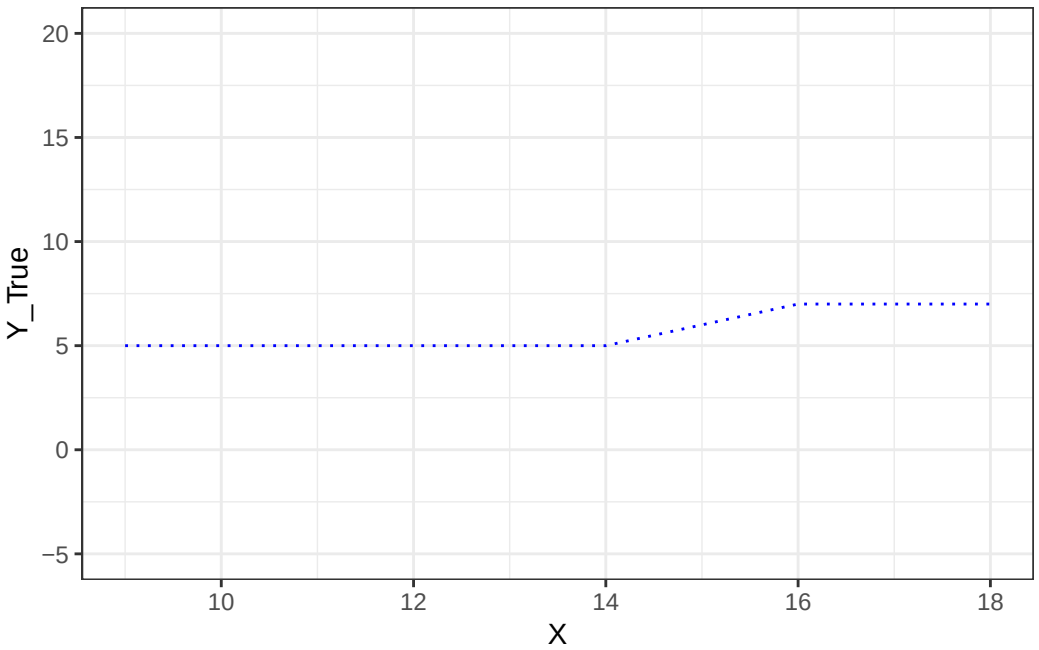
Table of contents

1 過剰適合

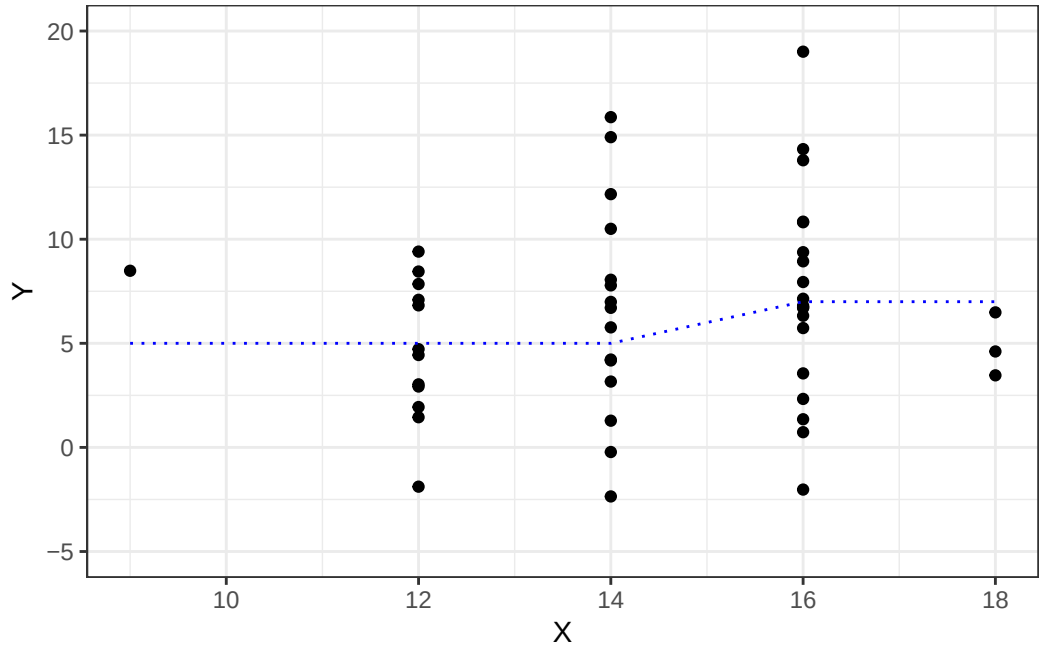
1.1 OLS の問題点

- 事例数に比べて、単純なモデルを推定するのであれば、OLS は有効な選択肢
  - 実用的な推定精度
  - 信頼区間の計算
- 複雑なモデルを推定しようとすると、**データ上の平均値に近づくが、母平均との乖離が大きくなる**
  - 過剰適合/過学習
    - データではなく、母集団を関心とするのであれば、大問題

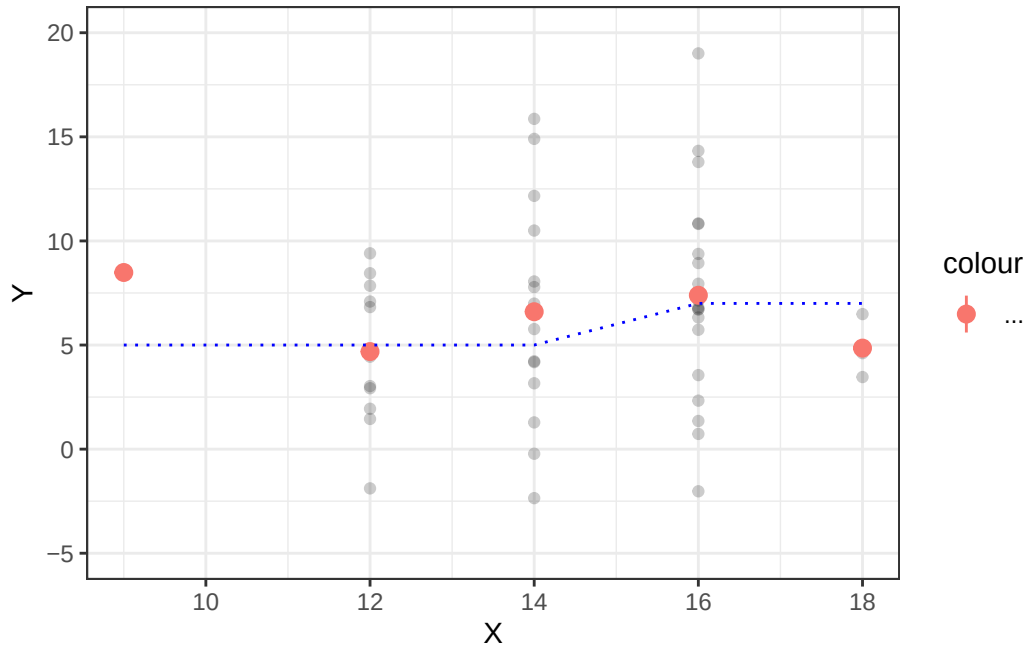
1.2 数値例: 母平均



1.3 数値例: データ



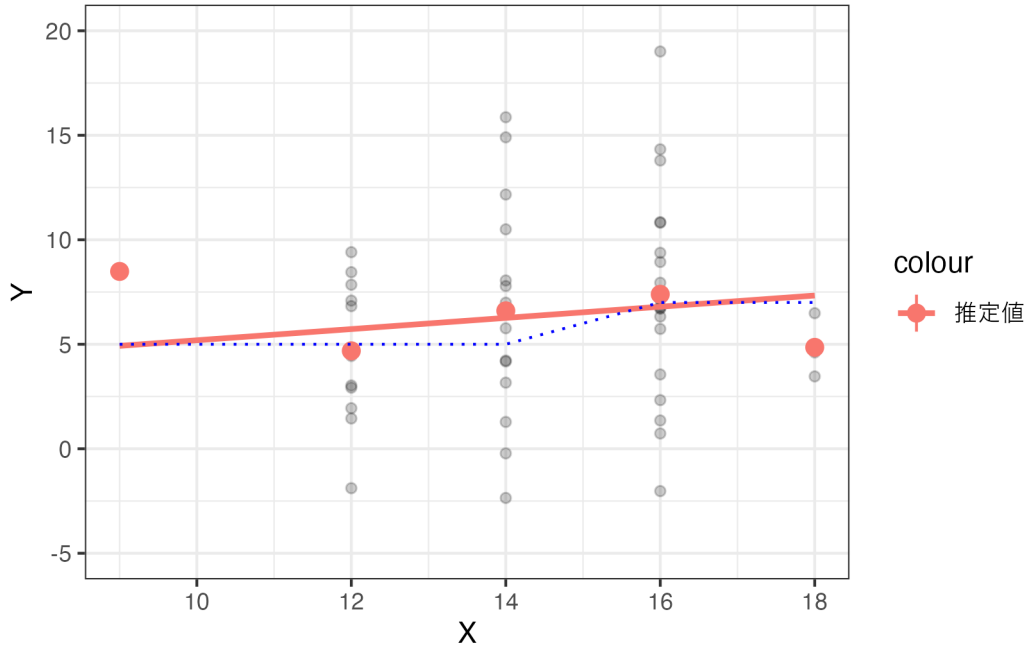
1.4 数値例: 平均値による推定



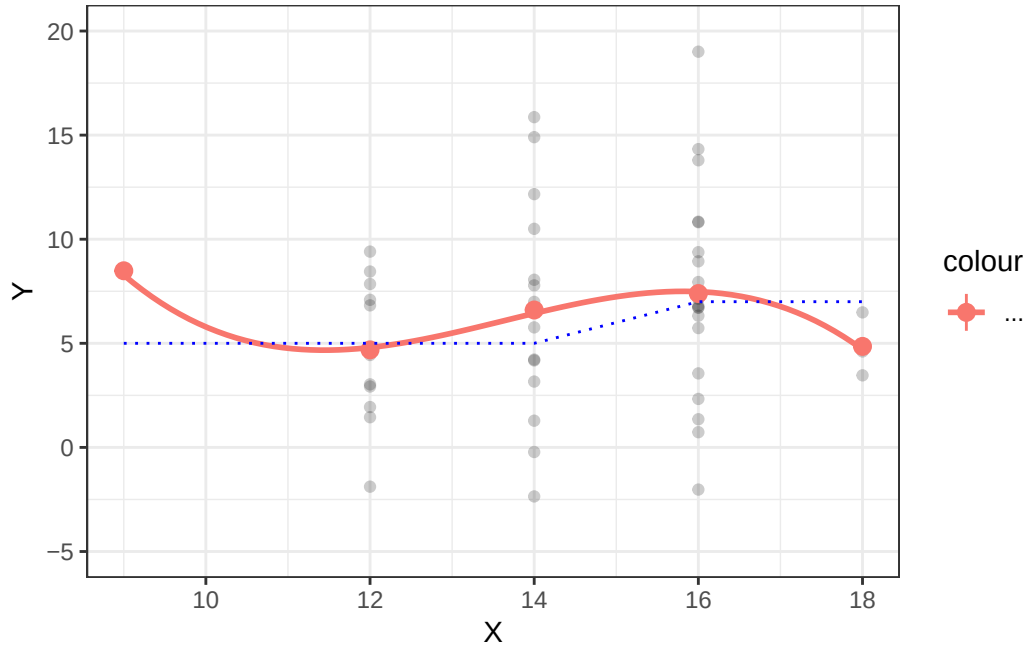
1.5 含意

- データ上の平均値は、母平均から基本的に乖離する
  - 事例数が少ないグループ $(X = 9, 16)$ において特に乖離する

1.6 数値例: 平均値 VS シンプルなモデル



1.7 数値例: 平均値 VS 複雑なモデル



1.8 含意

- シンプルなモデルは、データ上の平均値よりも、母平均に近い
  - 線型モデルへの仮定 (Y は X に応じて、“緩やかに変化する” (smoothness)) が事例の少なさを補う
- 複雑なモデルは、データ上の平均値と一致する
  - シンプルなモデルよりも、母平均から乖離している

1.9 Takeaway

- OLS は、**研究者が設定したモデルを**、データに極力適合するように推定する
  - 複雑なモデルを用いると、データ上の平均値を” なぞった” モデルが推定される
    - データにより適合する
- データ上の平均値と母平均は、基本的に乖離する
  - 事例数が限られており、上振れ/下振れする

    - 特に少数しかないカテゴリ ($X = 9,18$)

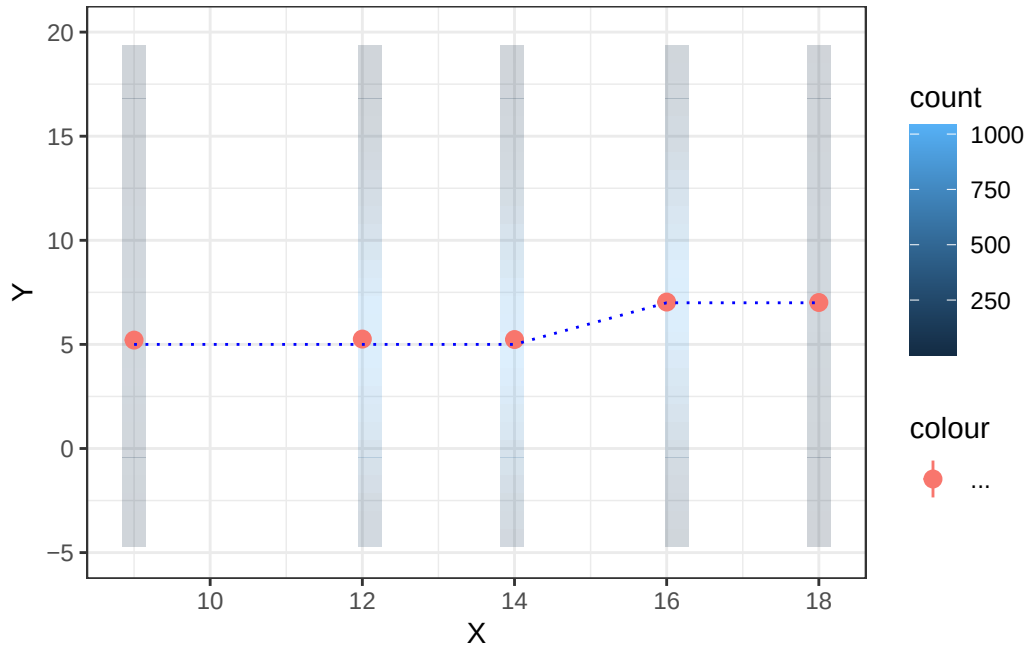
1.10 Takeaway: 過剰適合

- **適度に複雑なモデル**を OLS で推定: **データ上の平均と母平均を**、ほどほど近似する
- **複雑すぎるモデル**: **データ上の平均**をよく近似するが、**母平均**から乖離する
    - 過剰適合
- **単純すぎるモデル**: **データ上の平均と母平均から**、乖離する
    - 過小適合

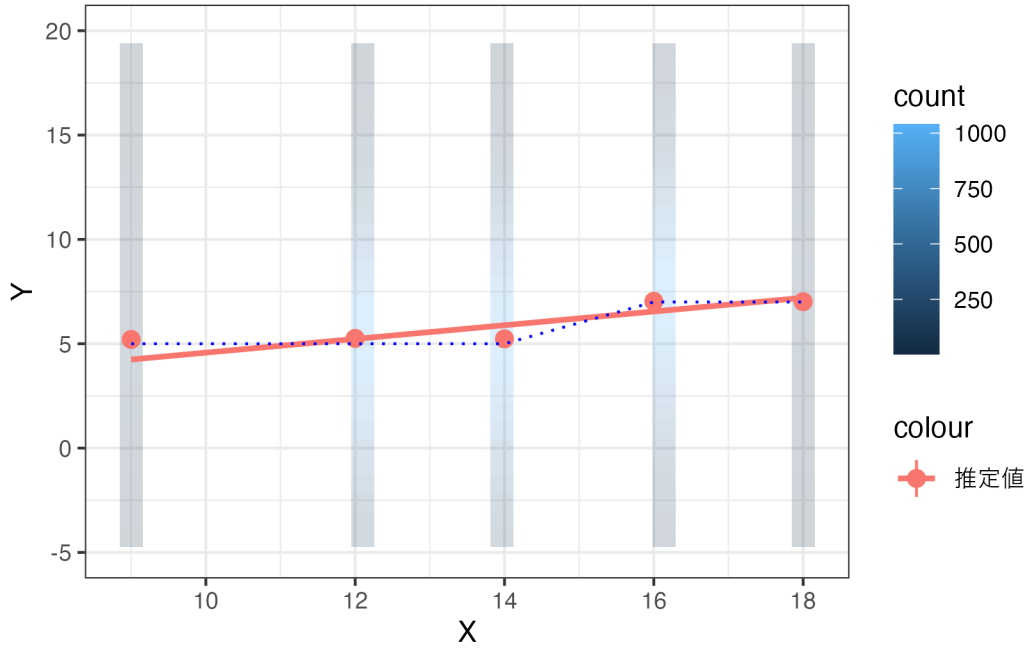
1.11 課題

- 実践において、適度に複雑なモデルを定式化することが非常に難しい
    - 特に X の数が多い場合は、ほぼ不可能
    - "(T)here are parts of the (statistical) model where economic theory is silent" (Imbens and Athey 2021) の代表例
        - () は川田が補った部分

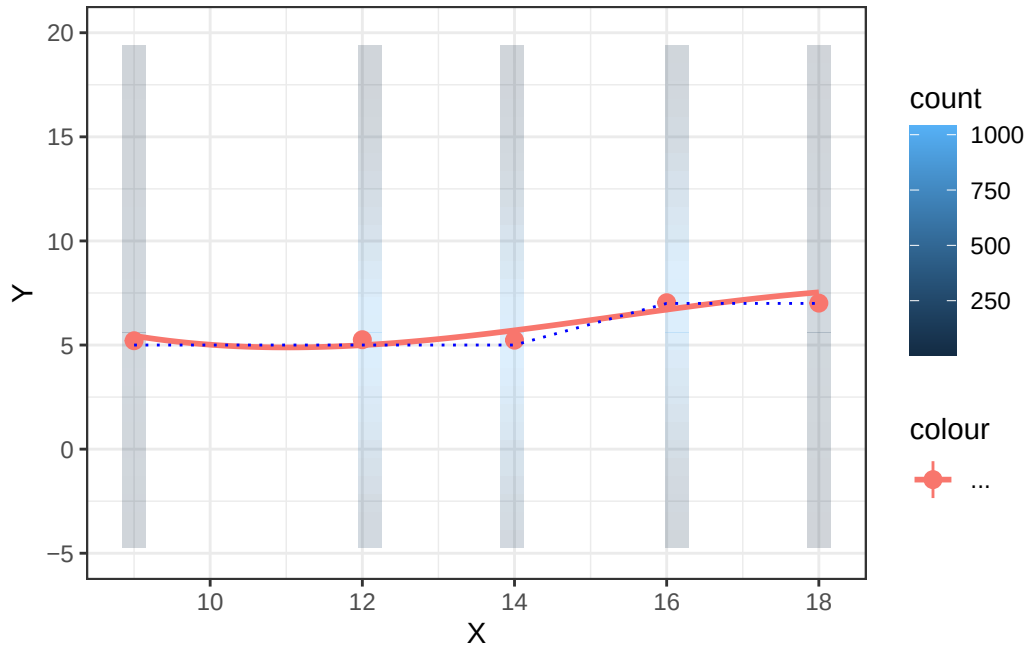
1.12 数値例: 50000 事例



1.13 数値例: 平均値 VS シンプルなモデル



1.14 数値例: 平均値 VS 複雑なモデル



2 LASSO

2.1 実装

```
library(tidyverse)

data("CPS1985", package = "AER")

data <- mutate(
  CPS1985,
  Y = log(wage), # log of wage
  D = if_else(
    occupation == "technical",
    1,
    0
  ) # occupation dummy
  )
```

2.2 実装: OLS

```
lm(Y ~ D +
     (education + ethnicity + region + gender)^2 +
     I(education^2) + I(age^2),
   data
   )
```

```
Call:
lm(formula = Y ~ D + (education + ethnicity + region + gender)^2 +
    I(education^2) + I(age^2), data = data)

Coefficients:
                   (Intercept)                               D
                     1.2342971                       0.1432014
                     education                ethnicityhispanic
                     0.0746214                      -0.1399608
                ethnicityother                     regionother
                     0.1422315                      -0.4574510
```

```
                  genderfemale                   I(education^2)
                    -0.8052570                      -0.0015238
                     I(age^2)     education:ethnicityhispanic
                     0.0001293                      -0.0117403
       education:ethnicityother           education:regionother
                    -0.0259754                       0.0388527
         education:genderfemale   ethnicityhispanic:regionother
                     0.0336461                       0.3266717
     ethnicityother:regionother  ethnicityhispanic:genderfemale
                     0.0948690                      -0.0006260
    ethnicityother:genderfemale        regionother:genderfemale
                     0.1618201                       0.1242733
```

2.3 実装: LASSO

```
hdm::rlasso(Y ~ D +
     (education + ethnicity + region + gender)^2 +
     I(education^2) + I(age^2),
   data,
   post = FALSE
   )
```

```
Call:
rlasso.formula(formula = Y ~ D + (education + ethnicity + region +
    gender)^2 + I(education^2) + I(age^2), data = data, post = FALSE)

Coefficients:
                  (Intercept)                             D
                    1.318e+00                     1.187e-01
                     education               ethnicityhispanic
                     3.779e-02                     0.000e+00
                ethnicityother                    regionother
                     0.000e+00                     0.000e+00
                  genderfemale                 I(education^2)
                    -1.823e-01                     6.254e-04
                     I(age^2)     education:ethnicityhispanic
                     8.555e-05                     0.000e+00
       education:ethnicityother           education:regionother
```

0.000e+00	7.712e-03
education:genderfemale	ethnicityhispanic:regionother
0.000e+00	0.000e+00
ethnicityother:regionother	ethnicityhispanic:genderfemale
0.000e+00	-4.452e-02
ethnicityother:genderfemale	regionother:genderfemale
0.000e+00	0.000e+00

2.4 罰則付き回帰

- OLS の問題点: 定式化のもとで、データへの適合のみを目指して推定する
  - 過剰適合を避けるには、定式化を単純するしかない
- 罰則付き回帰のアイディア: 複雑性への罰則を与えることで、複雑に定式化されたモデルを、過剰適合を減らしながら推定できる
  - LASSO,Ridge,elastic net など

2.5 罰則付き回帰の基本手順

- Step 1. **研究者** が線型モデル $\beta_0 + \beta_1 X_1 + ..$ を設定
- Step 2. 以下を最小化するように、線型モデルの β を算出

$$\text{データへの不適合度} + \text{複雑性への罰則}$$

- 「モデルを複雑にしない」ことも” 目的関数” に加える

2.6 入門経済学による例え話

- 生産方法を企業の自主的な意思決定に任せると
  - 同じ生産量を達成する方法の中で、最も費用が少ない方法が選ばれる
    - 希少な資源の利用を減らせ、それなりに望ましい
  - 一般に” 負の外部性” が生じる
    - 温室効果ガスの過剰排出等
  - 社会的に望ましい水準に誘導するための政策が必要
    - 総量規制、環境税、補助金等

2.7 罰則の定式化

- $$\text{複雑性への罰則} = \underbrace{\lambda}_{\text{税率}} \times \text{複雑性の測定値}$$
  - LASSO においては、
    $$\text{複雑性の測定値} = |\beta_1| + |\beta_2| + ..$$
  - Ridge においては、
    $$\text{複雑性の測定値} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + ..$$

2.8 λ の設定

- λ は、推定されたモデルが母平均に近づく (予測性能が高まる) ように設定する
  - いろいろな方法が提案されている
  - 本講義では、hdm package で実装されている理論的指標を用いる

2.9 伝統的な推定方法との関係性

- $\lambda = 0$: OLS
- $\lambda = \infty$: $\beta_1 = \beta_2 = .. = 0$
  - 推定されたモデル $= \beta_0 = Y$ の平均値
- OLS と単純平均の中間的なモデルが推定される

2.10 罰則付き回帰の問題点

- LASSO を含む罰則付き回帰 (および Random Forest, Boosting, Deep Learning 等の機械学習の手法) において、推定結果とデータの間に複雑な関係性が生じる
  - 基本的に、中心極限定理が適用できず、信頼区間の計算が難しい
  - 分析結果として、職種間賃金格差は概ね “この範囲” という主張ができない

2.11 Takeaway

- OLS は、「限られたデータで、複雑なモデルを推定する」に適した推定手法ではない
  - 事例数に比べて、単純なモデルを推定するのであれば、優れた手法

- LASSO は、「限られたデータで、複雑なモデルを推定する」ための手法の一つ
  - データと推定結果の関係性が複雑であり、妥当な推論が難しい
- 次回 LASSO の性質である変数選択を適切に利用することで、上記の問題を克服できることを紹介

2.12 よくある誤解: 完璧なモデル

- 「LASSO で推定したモデルが、母平均と一致している」ことが確認できるのであれば、信頼区間の計算は不要
  - “Y を完璧に予測できるモデル” であれば、上記の条件を満たす
    - ただし人間行動や社会的な現象について、“完璧に予測できるモデル” は非現実的 (Narayanan and Kapoor 2024)

Reference

Imbens, Guido, and Susan Athey. 2021. “Breiman’s Two Cultures: A Perspective from Econometrics.” *Observational Studies* 7 (1): 127–33.

Narayanan, Arvind, and Sayash Kapoor. 2024. *AI Snake Oil: What Artificial Intelligence Can Do, What It Can’t, and How to Tell the Difference*. Princeton University Press.