OLS as Best Linear Projection esitmator

労働経済学 1

川田恵介

1 論点整理法と OLS をしっかり”復習”

1.1 動機

- 実証分析は難しいので、論点整理が非常に重要
- OLS = 「研究者が**事前**に設定した**線型モデル**を、データから**推定する計算方法**」
  - 推定対象について、**別解釈**が複数あり、現代的な予測/比較研究においても、現実的な選択肢 (Angrist & Pischke, 2009; Chattopadhyay & Zubizarreta, 2023)
  - 発展的手法も、OLS の特定の問題点を改善する方法である、と解釈できる場合が多い

1.2 OLS の入門書的解釈

- 賃金を年齢で OLS 回帰

```
lm(wage ~ age, CPS1985) # Price ~ beta_0 + beta_1*Size
```

- 以上の推定対象は
  - Price の(条件付き)母平均 $\mu(age) = E[wage \mid age]$ (Stock & Watson, 2020; Wooldridge, n.d.)
    - $\mu(wage) = \beta_0 + \beta_1 \times age$ を仮定する必要があり、非現実的

1.3 OLS の別解釈

- 二つの別解釈: OLS の推定対象は
  1. 母平均 $\mu(X)$ の**母集団上**での線形近似モデル
  2. $\mu(D = 1, X) - \mu(D = 0, X)$ の母集団上での近似的な Balancing comparison
- モデルが”正しくない”場合でも、明確な推定対象を定義でき、解釈が容易
- 本ノートでは、線形近似モデルの推定値であることを紹介

1.4 構成

- OLS について、

1. **データ上**で行なっている計算 —平均の線形近似—
2. **母集団上**での推定対象 —母平均の線形近似—
3. **社会上での**研究対象 —線型記述モデル—

1.5 まとめ

- OLS の推定対象は、複数存在する
  - ≃ 異なる解釈を有する
- よく紹介されてきた推定対象は、母平均
  - 比較研究/予測研究においては、他を推定対象とする手法と解釈した方が有益な場合が多い

2 個別事例分析の難しさ

2.1 実例: CPS1985

wage	education	experience	age	ethnicity	region	gender	occupation	sector	union	married
5.10	8	21	35	hispanic	other	female	worker	manufacturing	no	yes
4.95	9	42	57	cauc	other	female	worker	manufacturing	no	yes
6.67	12	1	19	cauc	other	male	worker	manufacturing	no	no
4.00	12	4	22	cauc	other	male	worker	other	no	no
7.50	12	17	35	cauc	other	male	worker	other	no	yes
13.07	13	9	28	cauc	other	male	worker	other	yes	no
4.45	10	27	43	cauc	south	male	worker	other	no	no
19.47	12	9	27	cauc	other	male	worker	other	no	no

wage	education	experience	age	ethnicity	region	gender	occupation	sector	union	married
13.28	16	11	33	cauc	other	male	worker	manufacturing	no	yes
8.75	12	9	27	cauc	other	male	worker	other	no	no

2.2 実例: ある事例

- データから、以下の事例を発見

wage	age	education	gender
1	42	12	male

- 42 歳/高校卒/男性は、時給 1 ドルで働いていた?

2.3 実例: 他の事例

wage	age	education	gender
10.75	42	12	male
1.00	42	12	male

- かなりの下振れ事例であることが確認できる
  - 有力な説明: 年齢/性別/学歴以外の賃金の決定要因

2.4 X を増やす

- X の増やせば、賃金が低い理由がわかる?
  - Y の決定要因が全て観察できれれば可能
    - 少なくともX 内でYの個人差がなくなるほど X を増やせれば、可能性がある
- 「ほとんどの応用では、複雑な個人差が存在し、絶望」が一つの相場観

3 集団の記述

3.1 集団の特徴把握

- 労働経済学の重要な研究課題は、ここの事例ではなく、集団の特徴把握
  - どのような家計/企業が、働いているか ?/高い賃金を得ているか ?/結婚しているか ?/子供を持つか?/雇用を増やしているか?/賃金を増額しているか? 等

3.2 特徴把握の課題

- 事例 (=データ)や社会の特徴を直接的に把握することは困難
  - 大量の変数 (wage,education,..) について、大量の事例が存在しており、人間の認知能力をそもそも超えている
  - “誰が見ても明らかな"特徴”は、存在しない場合が多い

3.3 関心とする特徴の明示

- どのような特徴を分析対象とするのか、分析前に決定する
  - 例: 平均、分散、中央値
    - データから社会の特徴を推論する上でも必須
- 労働経済学では、変数間の関係性把握に焦点が当たりがち
  - 良い出発点: 平均値を要約する線型モデル
    - Y と X の関係性を簡潔に要約できる

4 平均値

4.1 データ上の平均値

- (条件つき)平均値 ($\hat{\mu}(X)$) : $X_i = x$ である事例内でのYの平均値

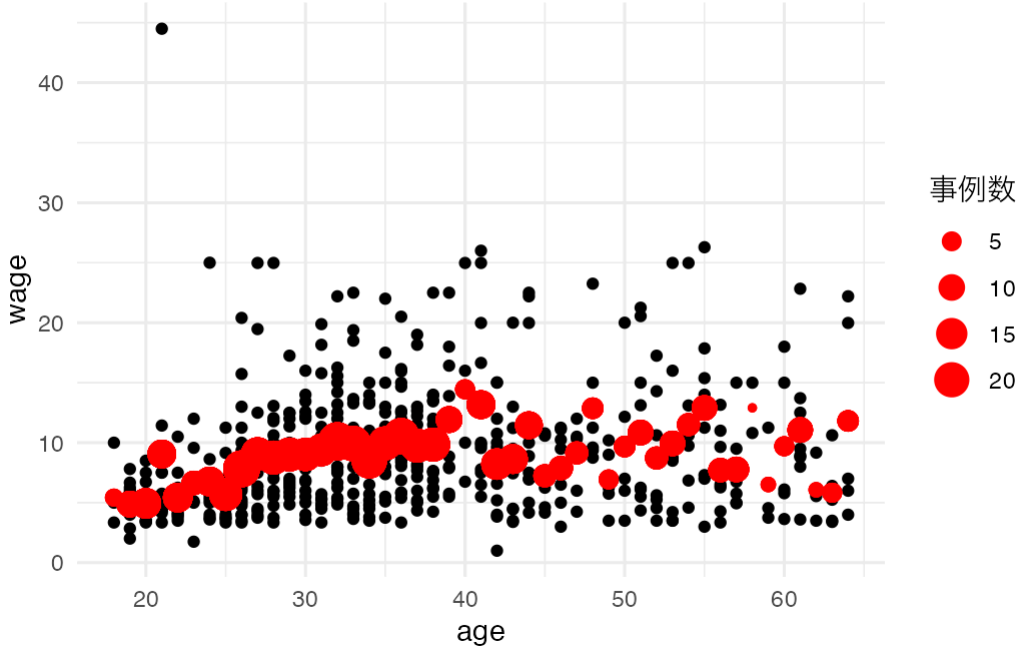
$$\hat{\mu}(X) = \frac{1}{(X_i = x)\text{である事例数}}(Y_1 + Y_2 + ..)$$

- 一般に、母平均 $\mu(X) \neq$ データ上の平均 $\hat{\mu}(X)$ であることに注意

4.2 平均値の利点

- 社会データは、X内でのYのばらつきが大きい傾向
  - Yの”重要な決定要因”が無数にあり、多くのデータで観察できない
- 平均値はYとXの関係性を捉える、現実的な”要約方法”
  - 事例数が多ければ、X 以外の要因による上振れ/下振れを抑制できる

4.3 例: 賃金と年齢



4.4 平均値の(労働研究における)問題点

- 非常に少ない事例のみから計算される平均値が発生しうる
  - X以外の要因による上振れ/下振れの影響が強く、多くの問題が発生
    - 詳細は後述
- 多くの社会分析で、Xの組み合わせが多くなる
- 例: 年齢 $\times$ 性別 $\times$ 教育年数 $= 1598$
  - 0~1 事例しかないサブグループが頻出する

5 線形近似モデル

5.1 線形近似モデル

- 平均値を、さらに要約し、少数事例の影響を緩和するモデル
- β の足し算となるモデル
  - 単回帰:

$$\mu(Age) = \beta_0 + \beta_1 \times Age$$

  - 重回帰:

$$\mu(Age, Education) = \beta_0 + \beta_1 \times Age + \beta_2 \times Education$$

5.2 線形近似モデル

- β の足し算であれば良いので、X については変形できる
  - “非"線形モデル:

    $\mu(Age) = \beta_0 + \beta_1 \times Age + \beta_2 \times Age^2$

5.3 OLS

- データに極力適合するように β を選ぶ方法
  - β_0, β_1 は、以下を最小化するように推定する

    $(\beta_0 + \beta_1 \times Age - Wage)^2$**のデータ上の平均値**
- Y を近似するモデルと解釈できる

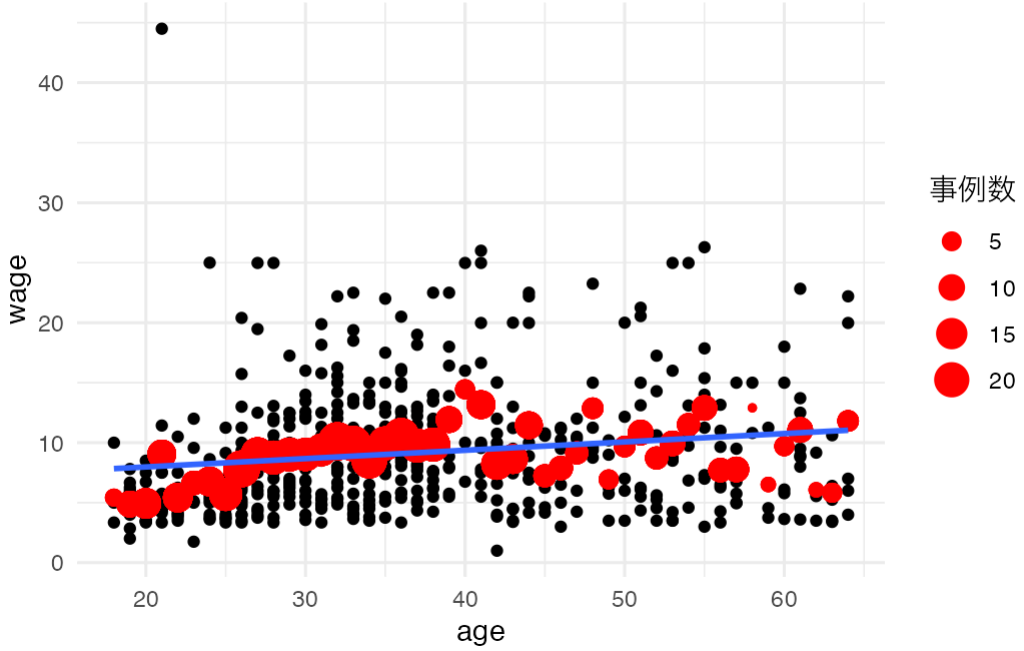
5.4 OLS の別解釈

- 以下を最小化しても、同じβ_0, β_1が計算される
- 全ての age $= 15, 16, ...$ について、

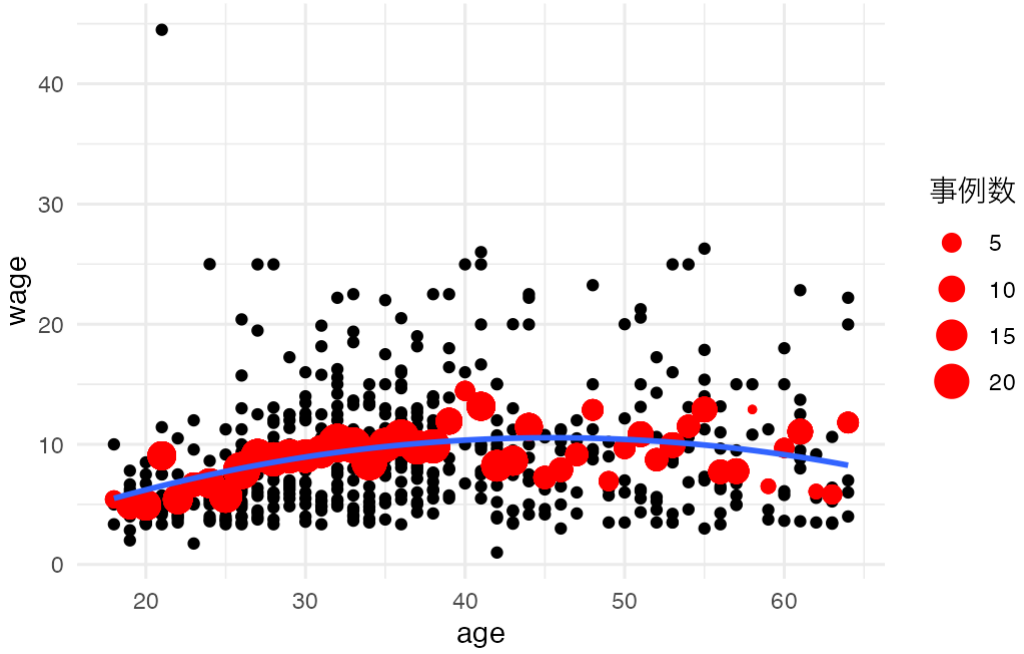
$$\Bigg[\underbrace{(\beta_0 + \beta_1 \times age - \hat{\mu}(age))^2}_{\text{平均からの乖離}} \times [Age = age\text{となる事例割合}]\Bigg] \text{の平均値}$$

- Y の**平均値**を近似するモデルと解釈できる

5.5 例 $beta_0 + \beta_1 Age$



5.6 例 $\beta_0 + \beta_1 Age + \beta_2 Age^2$



5.7 解釈の比較

・ 労働経済学における多くの応用では、「X がよく似ていても Y の値が大きく異なる」

- Y のモデルには見えない

- Y の平均値のモデルとみなしたほうが実践的

6 母集団上での推定対象

6.1 素朴な疑問

- ここまでは議論は、「同じデータ $\rightarrow$ OLS の推定値」
  - 同じデータなので、全員が必ず同じ計算結果を得る
    - **再現可能性**がある
- 実際にはデータの取集も行う必要がある
  - 誰がやっても同じ結果がでる?
    - 水の沸騰温度を測定する実験であれば OK

6.2 想定する問題

- 研究計画は確定しており、分析コードも書いており、あとはデータを実際に入手し、パソコンにデータを流し込むだけ
  - 分析計画: データの収集方法(対象地域や時期)や Coding すべき分析の内容

    -「研究目標、推定目標 (Estimand)、推定値 (Estimator)の算出方法」 は、データを収集/入手する前に議論し、決定済み
    - 例: Pre-Analysis Plan by Kasy and Lehner

6.3 事例分析の問題点

- 同じ分析計画を実効する、複数の”独立した”研究者をイメージ: 事例を独立して収集し、データ化する
- 同じデータ収集方法(同じ地域/時点/サンプリング方法)を採用したとしても、**推定値は異なる**
- データに含まれる事例が”偶然”異なるため
  - 自身の推定結果は、「"偶然"計算された信用できない値」、と考える方が合理的

6.4 推定対象と推定値

- データ分析から建設的な情報を得る方法について、議論するために
  - 全ての研究者が原理的に合意できる正答 (推定対象) と 自身のデータから得られる回答 (推定値)を個別に定義する
    - 推定対象を定義するために、母集団を導入する

6.5 母集団

- 手元にあるデータに含まれる事例を、ランダムに選んできた仮想的な集団
  - 本講義の範囲内では、手元にあるデータと同じ変数が観察できる”超巨大データ”をイメージしても OK
- 注: 時系列などの独立ではないデータは、本講義の対象外

6.6 推定対象

- 推定対象 = 母集団を用いて**仮想的に**計算される値
- 例: 母集団上で計算される平均値 (母平均)/OLS の**仮想的**な結果 (Population OLS)
  - 同じ方法でデータ収集するのであれば、母集団は全ての研究者で共通
    - **仮想的**で**誰も知ることができない**が**全員共通**の値

6.7 まとめ

- Sampling Uncertainly: 分析計画が確定し、coding も終了していたとしても、実際に取集される事例が異なるため、異なる推定値が算出される
  - データ”くじ”に伴う不確実性
  - 信頼区間や p 値、機械学習におけるさまざまな工夫は、この不確実性への対処がメイン
    - よい手法 ≃ データくじの影響を受けにくい/影響を適切に評価できる

6.8 注意点

- データ分析は入門段階から、「厳密に定義されるが、根本的に測定不可能な推定対象を、頑張って推定したいが、推定値はブレる」という複雑な問題を正面から論じる必要があり、初学者が混乱するのは当たり前
  - 随時質問しながら、ゆっくり消化してください

7 Population OLS

7.1 Population OLS

- OLS の推定対象 = 母集団上で仮想的に行われる OLS (Population OLS)の結果
  - 以下、Population OLS は定義できる、と仮定する
- OLS の推定値 = Population OLS の推定値
  - β の数に比べて、事例数が非常に大きければ、全ての研究者が Populaiton OLS とよく似た推定結果を得ることができる (一致性; Consistency)
    - Threorem 1.2.1 (Chapter 1, CausalML)
    - Sampling uncertainly は無視できる

7.2 複雑なモデルの推定対象

- モデルの複雑化 → 推定対象が変化する

```
lm(Price ~ poly(Size, 2), Data) # Price ~ beta_0 + beta_1*Size  + beta_2*Size^2
```

- 推定対象は、$\beta_0 + \beta_1 Size$ ではなく、$\beta_0 + \beta_1 Size + \beta Size^2$ の Population OLS

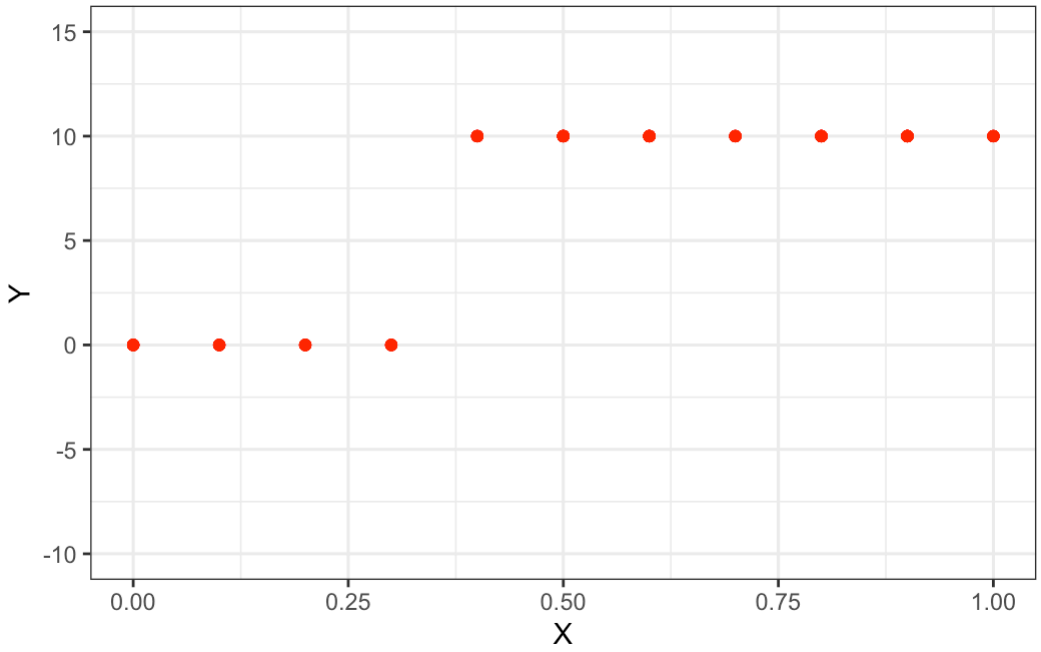
7.3 十分に複雑なモデル: 推定対象

- モデルを複雑にすれば、**Population OLS は**、母平均に近づく
- OLS の推定対象 = Population OLS
  - $\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{\text{十分に複雑であれば}} \simeq$ 母平均

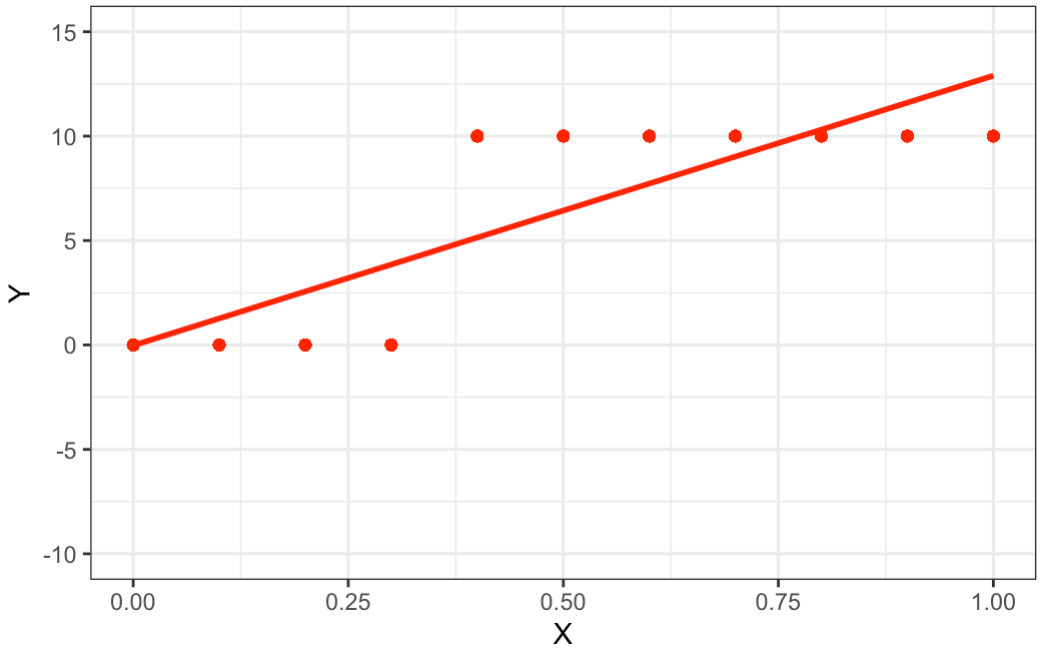
7.4 モデルの複雑化: 推定

- モデルの複雑化 → 推定値の性質が変化し、**推定誤差**が拡大する
  - Population OLS とデータ上での OLS との乖離が広がる傾向が大きくなる
- 詳細は Section 9 参照

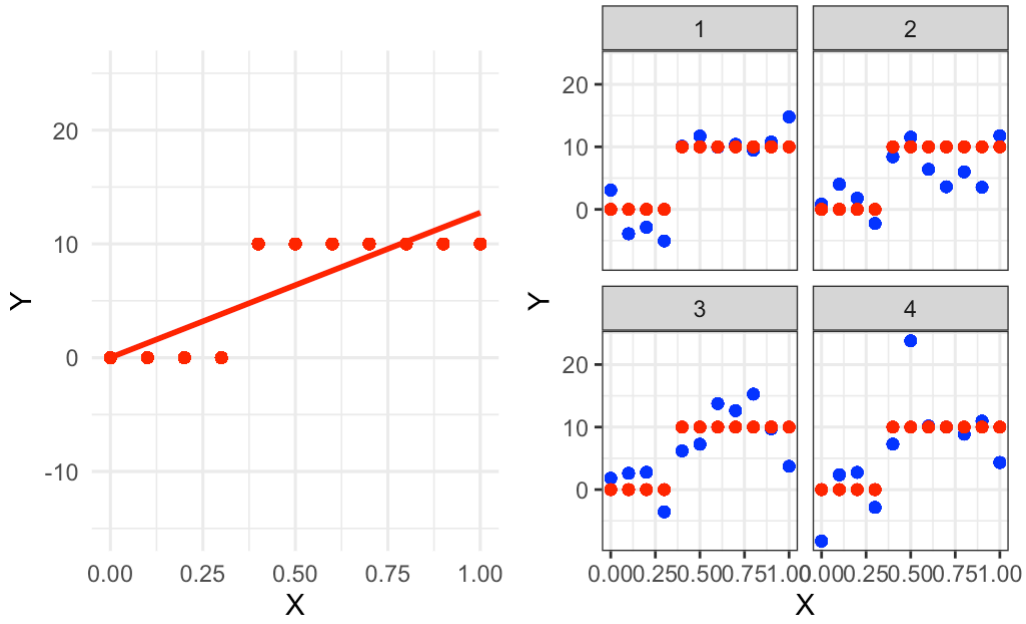
7.5 数値例: 母平均



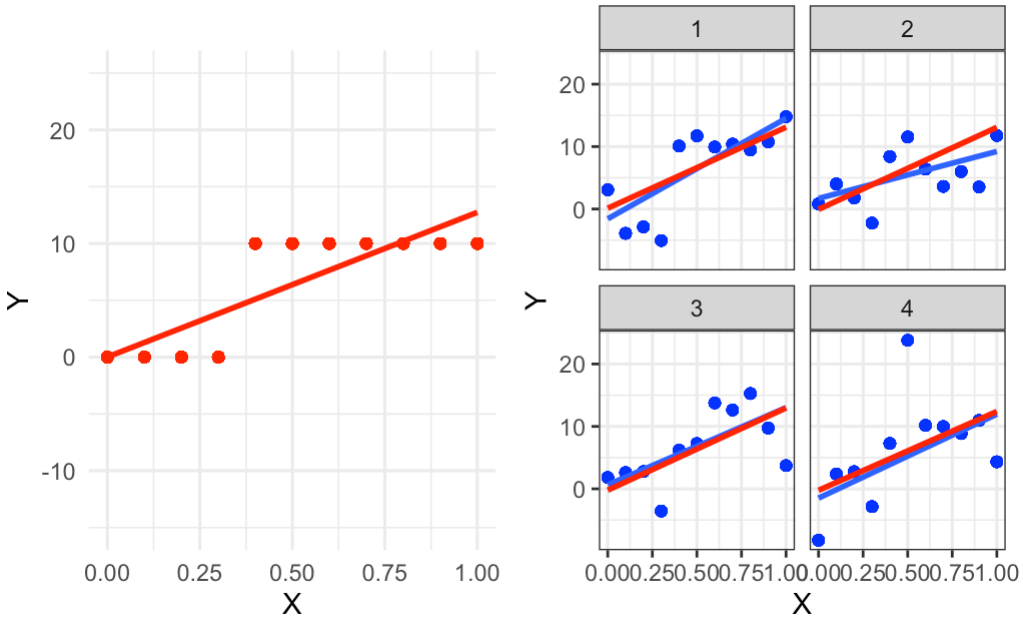
7.6 数値例: Population OLS



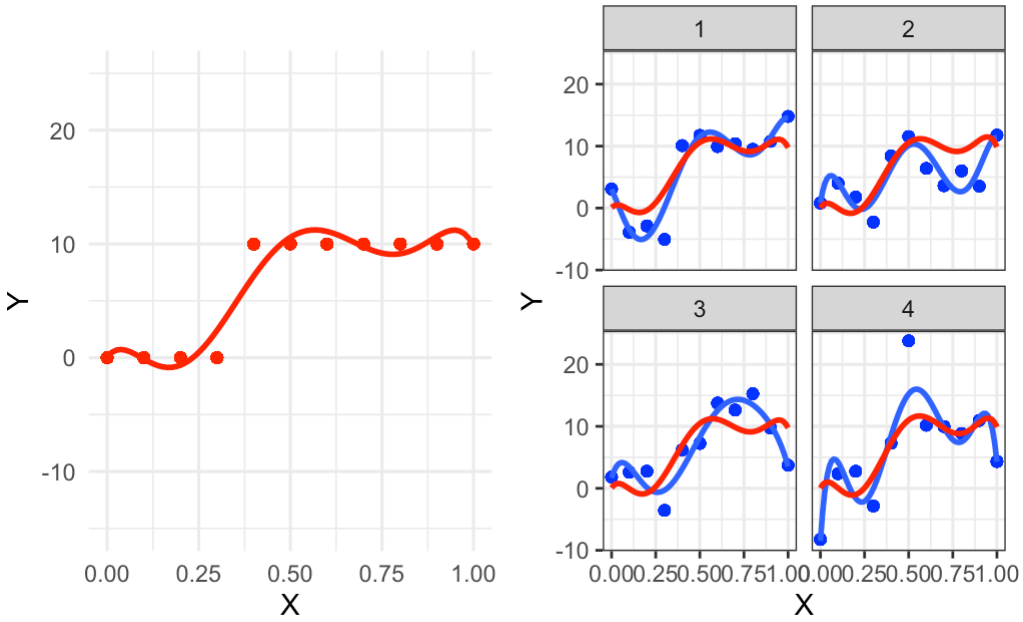
7.7 数値例: データ上の平均値



7.8 数値例: データ上の OLS



7.9 数値例: データ上の OLS



7.10 まとめ

- Population OLS は**常に**、データ上での OLS の推定対象

- 十分に複雑な Population OLS は、母平均を近似するので、母平均も推定対象
- 複雑な Population OLS を、データから推定しようとすると、推定精度が悪化する
  - 一般に母平均を推定対象とするためには、推定精度悪化を受け入れる必要がある

8 線型記述モデル

8.1 研究目標

- 推定対象とすべき Population OLS の定式化は、研究目標に決定的に依存する
- 典型的な予測研究: 極力母平均 $\mu(X)$ に近い Population OLS を推定したい
- 社会のシンプルな記述: 社会の重要な特徴を把握しつつ、人間による認知が簡単な Population OLS を推定したい

8.2 研究目標

- 社会における教育/経験年数と平均時給との関係性を、線形近似モデルとして把握したい
- ミンサー型賃金モデル (川口大司, 2011)

$$\log(wage) \sim \beta_0 + \beta_1 \times EducationYear$$

$$+\beta_2 \times Experience + \beta_3 Experience^2$$

- β_1 = “Return to education”, β_2/β_3 = “Return to experience”
  - “Retrun to human capital”

8.3 識別

- 社会(Study population)上でのミンサー型賃金モデルの計算値と、母集団(Target Population)上での計算値が一致する必要がある
  - データは、Study population からランダムサンプリングされていると仮定する必要がある
  - 研究対象となる社会に対して、直接サンプリング調査ができている
- 標準的であり本講義でも想定する仮定だが、常に疑わしい仮定
  - 近年のチャレンジ

8.4 仮定のまとめ

- 社会における平均賃金の特徴
  - $\underbrace{\simeq}_{\text{人的資本理論?}}$ Study population 上での OLS

- $\underbrace{\simeq}_{Study=SourcePopulation}$ 母集団上での OLS
- $\underbrace{\simeq}_{\text{データ数に比べて、モデルが十分単純}}$ データ上での OLS

8.5 記述モデル

- Populaiton OLS を複雑にしすぎなければ、パラメータの解釈が明確
  - β_1 = “モデル上"でX_1が”1 単位”大きかった時に、 Y の平均値がどの程度大きいか?
- 複数のXがあるケースで、特に重要
  - 人間には 4 次元以上が認識できず、可視化ができない

8.6 例: 賃金モデル (関数)

```
Fit <- CPS1985 |>
  lm(log(wage) ~ education + poly(experience, 2),
    data = _
  )

Fit$coefficients |>
  round(3)
```

```
         (Intercept)            education poly(experience, 2)1
               0.891                0.090                3.223
poly(experience, 2)2
              -2.025
```

8.7 記述モデルの問題点

- あくまでも母平均をさらに単純化したモデルであり、モデルの定式化次第では、母集団の特徴を見逃す恐れが高い
- 「重要な特徴をしっかり捉えるモデル」を事前に設定することは、難しい場合が多い
- 労働経済学においては、OLS を社会の線型記述モデルとして利用する研究は、少なくなっている
  - Balancing comparison の手法としての解釈が有力

9 推定値の分布

9.1 サンプリングに伴う分布

- 分析計画 = データを推定値に変換
  - データくじの結果によって、推定値も異なる

  - 推定値の分布
- 現実に実現し、自身が観察する値はその中の一つ

9.2 推定値の分布についての性質

- 推定手法に応じて、推定値の**分布**の性質は一般に異なる
  - 研究者は、実現する値を操作することはできないので、良い**分布**の性質を持つ手法を採用したい
- 現実生活の例: 旅行保険に入るかどうか
  - 現実に事故に遭うかどうかはわからないので、結果の分布を”良く”するように決定 (保険に入った場合の被害、事故確率など)から判断

9.3 OLS の分布

- Population OLS の計算式

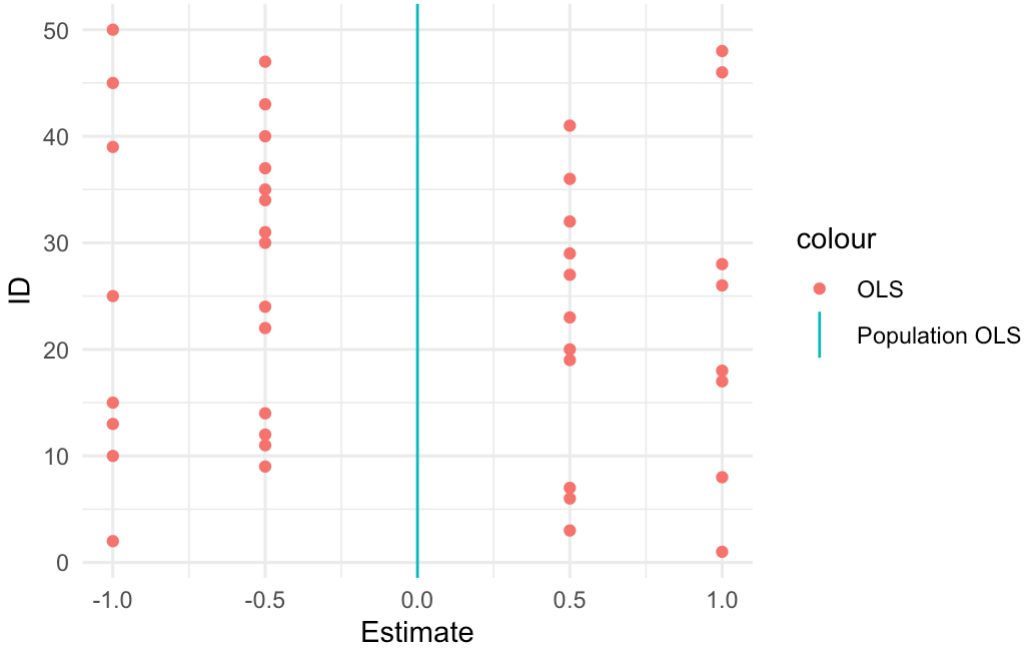
$$\hat{\mu}(X)^{Pop} = \hat{\beta}_0^{Pop} + ... + \hat{\beta}_L^{Pop} X_L$$

  - $\hat{\beta}^{Pop}$ は全員共通
- データ上の OLS

$$\hat{\mu}(X) = \hat{\beta}_0 + ... + \hat{\beta}_L X_L$$

  - データが異なるので、$\hat{\beta}$ の値も異なる
    - **推定値** の平均などを定義できる
    - 母平均やデータ上の平均値としっかり区別

9.4 イメージ: 3 事例



9.5 OLS の分布: 収束

- 事例数が大きくなれば、Population OLS に近い推定値を、ほとんどの研究者が得ることができる (収束する)
  - 「自分もそのような値を得ている可能性が高い」と考えられる

9.6 OLS の分布: 二つの収束性質

- 事例数が β の数に比べて、非常に大きければ、

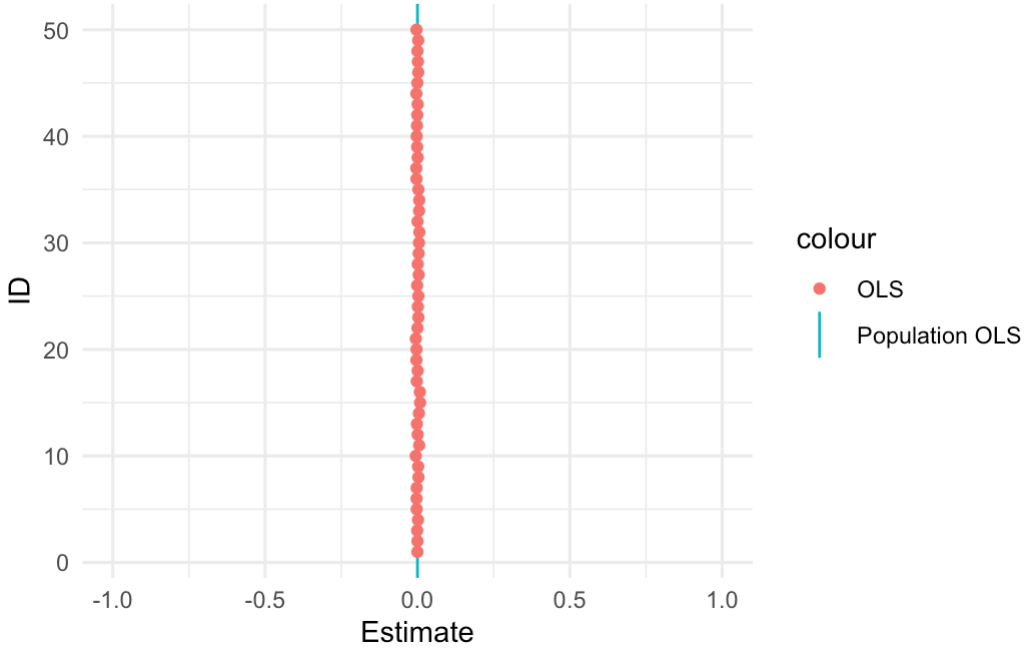
$$\left(\hat{\beta}_l^{Pop} - \hat{\beta}_l^{Pop}\right) \text{の平均値} \to 0$$

- 事例数が β の数に比べて、**ある程度**大きければ、

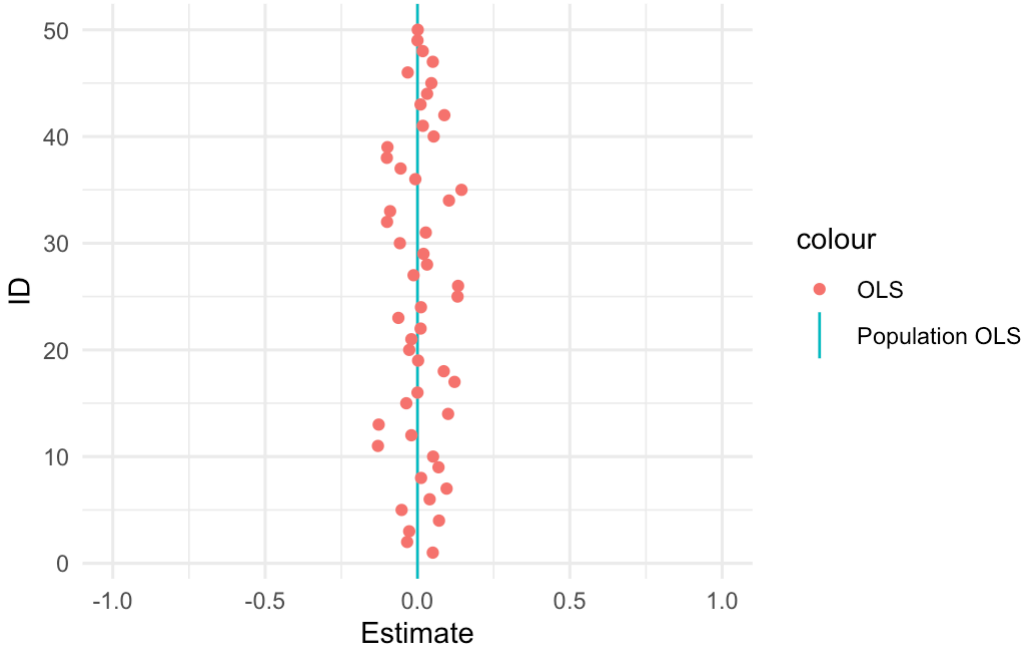
$$\left(\hat{\beta}_l^{Pop} - \hat{\beta}_l^{Pop}\right) \to \text{正規分布}$$

  - 統計的推論の基礎となる

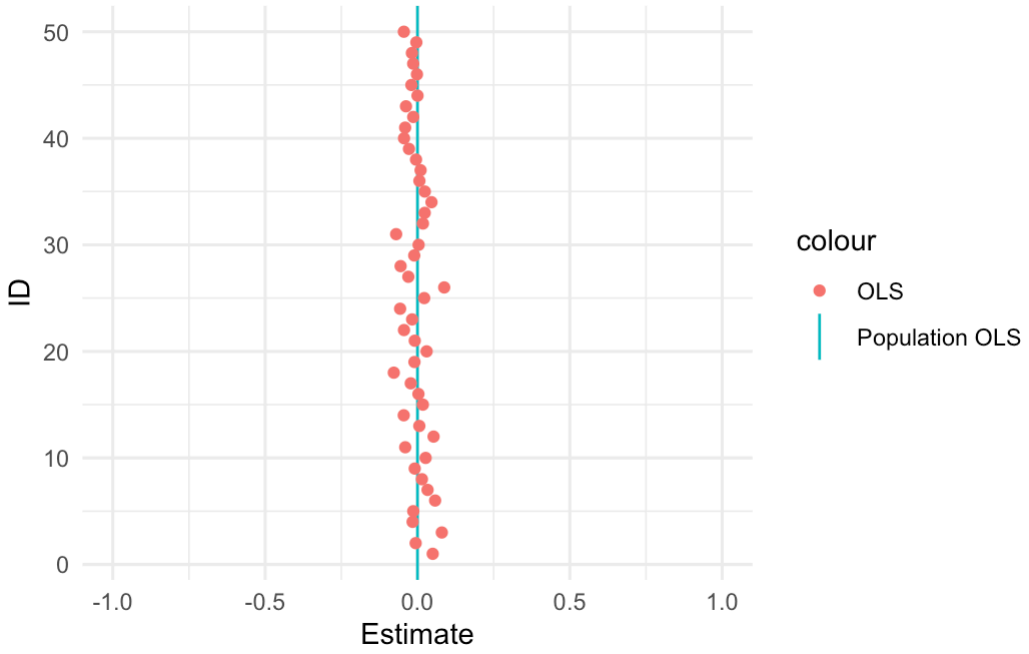
9.7 イメージ: 5 万事例



9.8 イメージ: 200 事例



9.9 イメージ: 1000 事例



9.10 まとめ

- 復習したい人は、以下も参照ください
  - 線形近似モデル
- よりしっかり復習したい人には、以下がおすすめです。
  - StatLect
    - 特に Plug-in Principle

9.11 Reference

Bibliography

Angrist, J. D., & Pischke, J.-S. (2009). Mostly harmless econometrics: An empiricist's companion. Princeton university press.

Chattopadhyay, A., & Zubizarreta, J. R. (2023). On the implied weights of linear regression for causal inference. Biometrika, 110(3), 615–629.

Stock, J. H., & Watson, M. W. (2020). Introduction to econometrics. Pearson.

Wooldridge, J. M. Introductory Econometrics: A Modern Approach. Cengage learning.

川口大司. (2011). ミンサー型賃金関数の日本の労働市場への適用. 現代経済学の潮流, 67–98.