# 変数選択

労働経済学 (補論)

川田恵介

## Table of contents

# 1 変数選択

- $\tau = E[Y|D = d', X] - E[Y|D = d, X]$ を近似する $Y = \beta_D D + \beta_0 + \beta_1 Z_1 + ..\beta_L Z_L$ を明確な統計的な基準に基づいて選ぶ
  - OLS では、事前に研究者が選ぶ必要がある!!!

## 1.1 問題設定

- 労働研究では、バランスさせたい $X$ が大量に存在するケースも多い
- 関心のある比較は、$E[Y|D = d', X] - E[Y|D = d, X]$
  - 例: $Y =$ 年収、$D =$ 性別、$X =$ ついている仕事の特徴
    - 同じ働き方をしている男女内賃金格差
- $X$ に大量のデータが含まれているケースがある
  - 例: 労働時間、勤続年数、業務内容、それらの交差項...
    - 全てを Balance させることができない/推定精度が大幅に悪化する

## 1.2 アイディア

- $X$ 全てが" 重要" なわけではないかもしれない
  - $X$ の一部 $Z$ のみをバランスさせれば十分
  - $E[Y|D = d', X] - E[Y|D = d, X] \simeq E[Y|D = d', Z] - E[Y|D = d, Z]$

## 1.3 仮定: Sparsity

- $$E[Y|D, X] = \tau D + \beta_0 + \underbrace{\beta_1 X_1 + .. + \beta_L X_L}_{L>\text{事例数でもOK}}$$
- (Approximately) sparsity: 事例数に比べて、十分に少ない変数数 $S$ <<$ 事例数で、母平均をうまく近似できる
- 実戦: 十分に複雑なモデルについて LASSO を推定し、変数選択
  - もともとのモデルには、"trivial" な変数も含まれていると仮定
  - 詳細は Capther 4 in Causal ML 参照

# 2 Penalized Regression

- データ主導の変数選択については、多くの提案がなされている
  - 代表例は LASSO (機械学習の代表的な手法)

## 2.1 LASSO Algorithm

- $E[Y|X]$ を近似するモデル $g(X)$ を推定

0. 十分に複雑なモデルからスタート: 例: $X$ について二乗項と交差項を作成
1. 何らかの基準 (後述) に基づいて Hyper (Tuning) parameter $\lambda$ を設定
2. 以下の最適化問題を解いて、Linear model $g(X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ...$ を推定

$$\min \sum (y_i - g(x_i))^2 + \lambda(|\beta_1| + |\beta_2| + ..)$$

## 2.2 Constrained optimization としての書き換え

1. 何らかの基準 (後述) に基づいて Hyper parameter $\lambda$ を設定
2. 以下の最適化問題を解いて、Linear model $g(X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ...$ を推定

$$\min \sum (y_i - g(x_i))^2$$

where

$$|\beta_1| + |\beta_2| + .. \leq A$$

## 2.3 $\lambda$ の役割: OLS

- $\lambda = 0$ と設定すれば、(複雑なモデルを)OLS で推定した推定結果と一致
-

$$Y - g_Y(X) = \underbrace{Y - E[Y|X]}_{\text{不変}}$$
$$+ \underbrace{E[Y|X] - g_{Y,\infty}(X)}_{\text{小さい}} + \underbrace{g_{Y,\infty}(X) - g_Y(X)}_{\text{大きい傾向}}$$

- すべての変数が活用される

### 2.4 $\lambda$ の役割: 平均

- $\lambda = \infty$ と設定すれば、必ず $\beta_1 = \beta_2 = .. = 0$ となる
  - $\beta_0$ のみ、最小二乗法で推定: $g(X) =$ サンプル平均
- すべての変数が排除される

### 2.5 $\lambda$ の役割

- やりたい事: $E[Y|X]$ を上手く近似するように $\lambda$ を設定し、単純すぎるモデル (Approximation error が大きすぎる) と複雑すぎるモデル (Estimation error が大きすぎる) の間の” ちょうどいい” モデルを構築する
- 設定方法: 理論値 (hdm で採用)
  - サンプル分割 (交差推定, glmnet で実装)/情報基準 (gamlr で採用) なども有力

### 2.6 変数選択

- いくつかの変数について、係数値 $\beta$ が厳密にゼロになるうる
  - モデルから除外される
    - OLS では” 生じない”

### 2.7 注意点

- LASSO および他の Penlized Regression (Ridge など) によって推定された係数値について、解釈を与えることは難しい
  - $E[Y|X]$ の近似が目的であり、係数値について明確な母集団上の解釈がない
    - $Y$ の予測が目的であれば、優れた手法
  - $Y$ とそこそこの関係性がある変数であったとしても、除外される可能性がある
  - 信頼区間の計算も難しい
- さらに学びたい人は、Chap 1 in CausalML, in Chap 6 in ISL などを参照

## 3 Double Selection

- 変数選択には一般にミスが生じる

  - 重要な変数を除外してまうリスクがある
- リスクを緩和するために、“ダブルチェック” を行う必要がある
- Belloni, Chernozhukov, and Hansen (2014)
  - Gentle introduction: Angrist and Frandsen (2022)

## 3.1 Naive なアイディア

- $X$ を全てバランスさせるのではなく、$Y$ との相関が強いものだけをバランスさせる
  - $g_Y(X)$ を LASSO で推定し、選択された変数だけを OLS に加える

## 3.2 問題点

- 問題点: LASSO による変数選択は、$Y$ とそこそこ相関がある変数も除外されてしまう可能性がある
  - $E[Y|X]$ の近似のためであれば、(Tuning parmeter が正しく選ばれている限り)、許容できる (Bias-variance Tradeoff)
- $D$ との相関が強い (分布が Unbalance) な変数が除外されると $\beta_D$ の推定結果が大きな影響を受ける
  - $\tau$ の推定という目標について、モデルが過度に単純化される (Regulization bias)

## 3.3 Double Selection Algorithm

1. $g_Y(X)$ および $g_D(X)$ を LASSO で推定し、選択された変数を記録
2. **どちらかの**予測モデルで選択された変数 $(Z)$ のみを用いて、$Y \sim D + Z$ を回帰

- $Y$ の予測モデルと $D$ の予測モデルによる” ダブルチェック”

## 3.4 実装

- hdm package が有益

```
rlassoEffect(
  x = X, # Must be matrix
  d = D, # Must be vector
  y = Y # Must be vector
)
```

- 注: Tuning parameter は、交差推定ではなく、理論値を使用

### 3.5 実践

- かなり制約的なアプローチ (Variable selection を行う Algorithm しか使えない)
  - 後日、より柔軟なアプローチを紹介
- 今でも多くの応用研究が、Robustness check として活用
  - 最終的には OLS なので、Editor/Referee に理解させやすい!?
  - すぐに活用できるという意味で、十分に実践的
    - OLS でコントロールしている自身の研究があれば、使ってみてください!!!

### 3.6 Example: Bonaccolto-Töpfer and Briel (2022)

- 就業形態や教育歴、家族背景等をバランスさせたもとでの、男女間賃金格差を推定
  - 二乗項と交差項を加えて、9045 変数が元々のコントロール変数
  - Double Selection により、5,821 変数を選択

## 4 Example: CPS1988

### 4.1 Data

- Use CPS1988 from AER package
  - Sample size 28155
  - $Y$ = log wage, $D$ = partime (Parttime wage penalty)
  - $X$ = BaseLine (education, ethnicity, smsa, region) + experience
    - 7 variables

### 4.2 推定方法

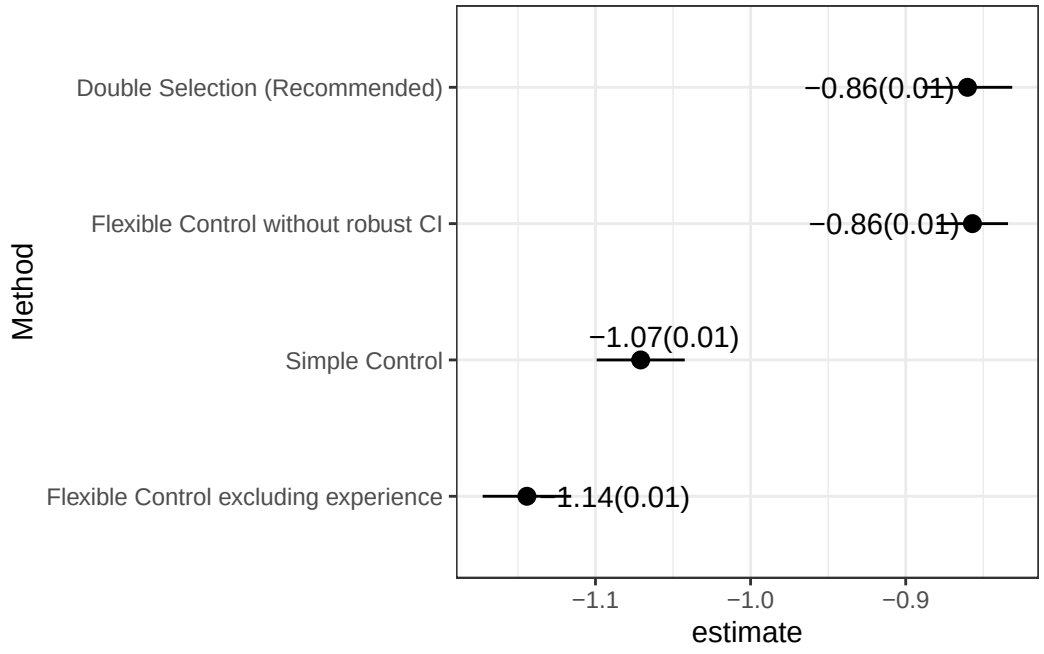
- Flexible control excluding experience: BaseLine と、その二乗項と交差項をコントロールし、OLS 推定
- Simple control: BaseLine + experience。ただし二乗項や交差項は除外
- Flexible control without robust CI: BaseLine + experience と、その二乗項と交差項をコントロールし、OLS 推定

  - Robust stadard error は計算できなかったので、classical standard error を報告

- Double selection: Double selection で変数選択

## 4.3 Comparison

- 二乗項や交差項を加えることで、経験年数を追加的にバランスされた推定結果が顕著に異なる




## 4.4 Selected Variable

- 教育年数や学歴の二乗項も残る

| | | |
|---|---|---|
| education | experience | ethnicityafam |
| TRUE | TRUE | TRUE |
| regionsouth | I(education^2) | I(experience^2) |
| TRUE | TRUE | TRUE |
| education:experience | education:smsayes | education:regionwest |
| TRUE | TRUE | TRUE |
| experience:smsayes | smsayes:regionsouth | |
| TRUE | TRUE | |

## Reference

Angrist, Joshua D, and Brigham Frandsen. 2022. "Machine Labor." *Journal of Labor Economics* 40 (S1): S97–140.

Belloni, Alexandre, Victor Chernozhukov, and Christian Hansen. 2014. "Inference on Treatment Effects After Selection Among High-Dimensional Controls." *Review of Economic Studies* 81 (2): 608–50.

Bonaccolto-Töpfer, Marina, and Stephanie Briel. 2022. "The Gender Pay Gap Revisited: Does Machine Learning Offer New Insights?" *Labour Economics* 78: 102223. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.labeco.2022.102223.