

# Fuzzy RD

川田恵介

## Table of contents

1	Fuzzy Regression Discontinuity	1
1.1	Example: Londoño-Vélez, Rodríguez, and Sánchez (2020)	1
1.2	Example: $D - X$	2
1.3	Example: $Y - X$	2
1.4	Example: Main Estimation	3
2	Identification	4
2.1	Identification	4
2.2	Identification	5
2.3	Intention to treat	5
2.4	Local average treatment effect on cutoff	5
3	Estimation	5
3.1	Recap: Local regression	5
3.2	Recap: Kernel weight	6
3.3	論点: Bandwidth selection	6
3.4	論点: Bandwidth selection	6
	Reference	7

## 1 Fuzzy Regression Discontinuity

- 操作変数の重要な応用
- 「Cutoff の前後で、一部の事例について、 $D$  が変化する」状況を活用可能にする

### 1.1 Example: Londoño-Vélez, Rodríguez, and Sánchez (2020)

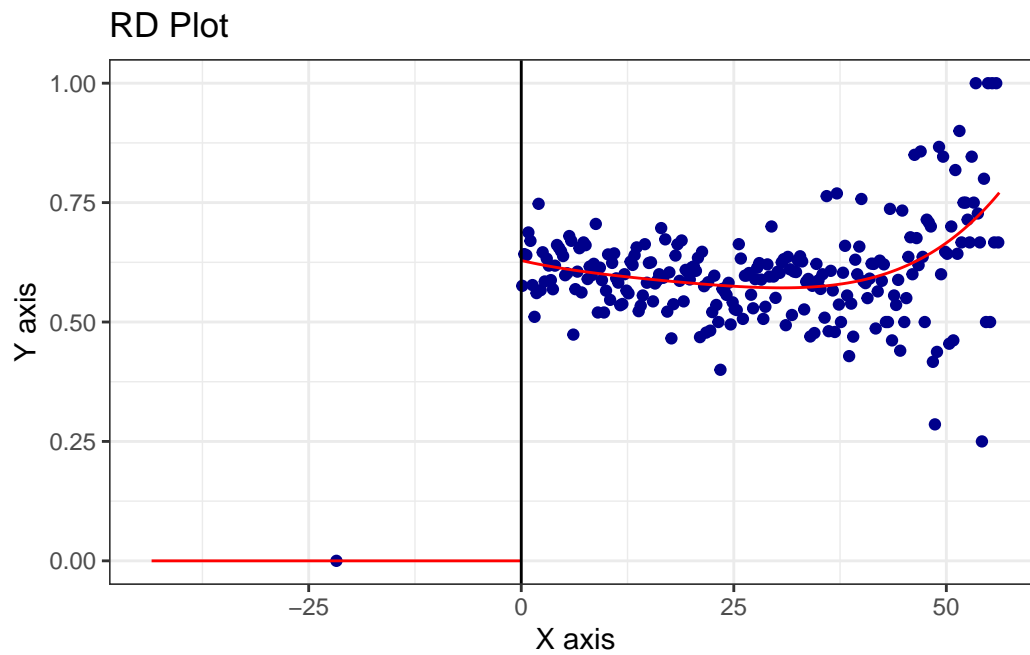
- 政府の教育への助成が
  - Running variable  $X$  : 高校卒業試験成績 (一定の成績が受領資格)

- Treatment  $D$  : 助成金の受領 (資格を満たしたとしても、全員が受領するわけではない)
- Outcome  $Y$  : 高等教育への参加

## 1.2 Example: $D - X$

```
rdplot(  
  Data$D,  
  Data$X1  
)
```

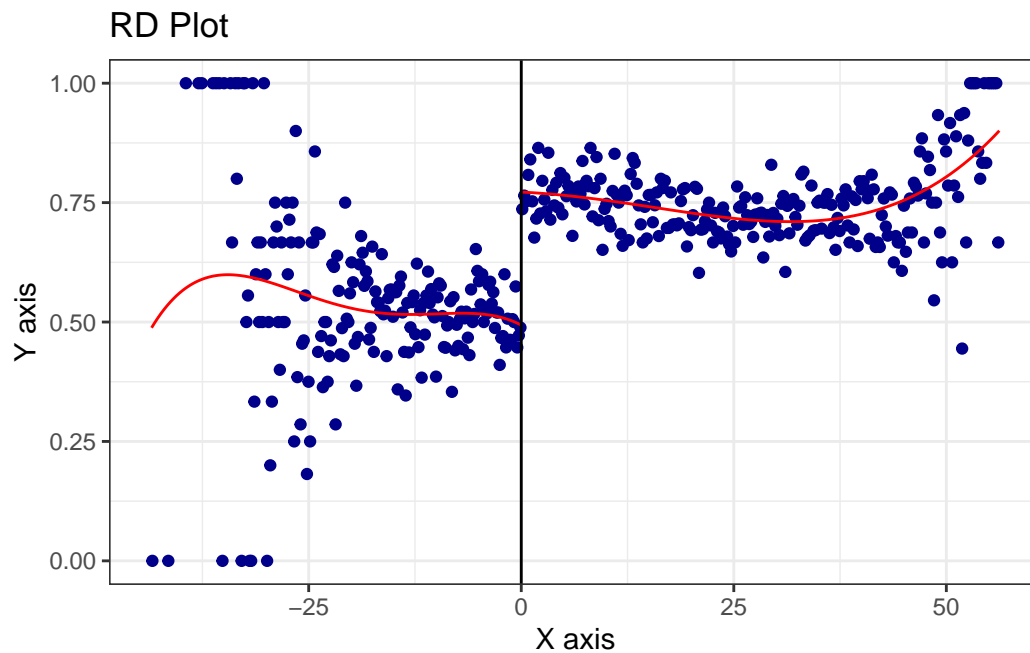
```
[1] "Mass points detected in the running variable."  
[1] "Warning: not enough variability in the outcome variable below the threshold"
```



## 1.3 Example: $Y - X$

```
rdplot(  
  Data$Y,  
  Data$X1  
)
```

```
[1] "Mass points detected in the running variable."
```



#### 1.4 Example: Main Estimation

- $\bar{X}$  上での因果効果 =  $Y$ への因果効果/ $D$ への因果効果

```
Model = rdrobust(
  Data$Y,
  Data$X1,
  fuzzy = Data$D # Treatment
)

summary(Model)
```

Fuzzy RD estimates using local polynomial regression.

Number of Obs.	23132	
BW type	mserd	
Kernel	Triangular	
VCE method	NN	
Number of Obs.	7709	15423
Eff. Number of Obs.	3877	3908
Order est. (p)	1	1
Order bias (q)	2	2

BW est. (h)	9.040	9.040
BW bias (b)	14.402	14.402
rho (h/b)	0.628	0.628
Unique Obs.	3644	9274

First-stage estimates.

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	0.619	0.017	35.893	0.000	[0.585 , 0.653]
Robust	-	-	29.917	0.000	[0.575 , 0.656]

Treatment effect estimates.

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	0.435	0.034	12.768	0.000	[0.368 , 0.501]
Robust	-	-	11.023	0.000	[0.366 , 0.524]

## 2 Identification

### 2.1 Identification

- 実数  $X$  について、
  - $D$  の分布はジャンプする

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[D = 1 | \bar{X} + \epsilon] \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[D = 1 | \bar{X} - \epsilon]$$

- 注: Sharp Regression Discontinuity では、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[D = 1 | \bar{X} + \epsilon] = 1,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[D = 1 | \bar{X} - \epsilon] = 0$$

## 2.2 Identification

- Post-treatment variables 以外の観察できる/できない変数  $Z$  の分布はジャンプしない

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(Z|\bar{X} + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(Z|\bar{X} - \epsilon)$$

- Exclusive restriction および 操作変数の Conditional randomization に対応

## 2.3 Intention to treat

- $X = \bar{X}$  を満たすグループ内の平均因果効果は、以下で識別される

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E[Y|\bar{X} + \epsilon] - E[Y|\bar{X} - \epsilon]$$

## 2.4 Local average treatment effect on cutoff

- $X = \bar{X}$  を満たす Complier 内の平均因果効果は、以下で識別される

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[Y|\bar{X} + \epsilon] - E[Y|\bar{X} - \epsilon]}{E[D|\bar{X} + \epsilon] - E[D|\bar{X} - \epsilon]}$$

- Complier:  $X$  が  $\bar{X}$  以下であれば  $D = 0$ , 以上であれば  $D = 1$  となる事例
  - Cutoff を超えるかどうかによって反応するグループ

## 3 Estimation

- Sharp Regression Discontinuity と同様に、Local regression が標準的な推定方法
  - 信頼区間も提供できる
  - Bandwidth の選択に注意が必要

### 3.1 Recap: Local regression

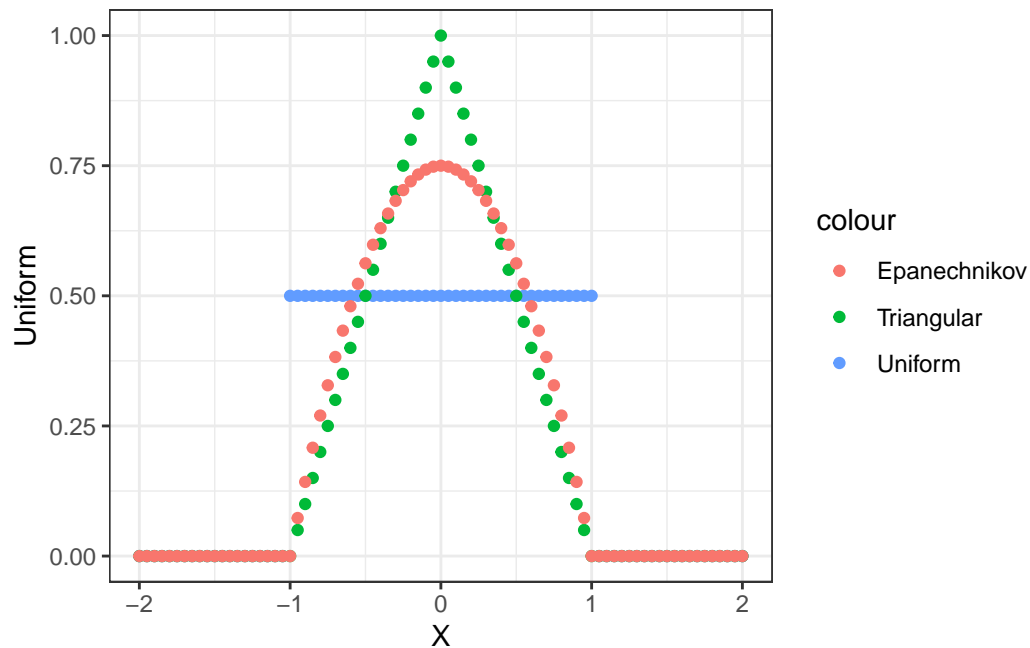
- Local regression

$$\min \sum \omega_i \times \left( Y - \beta_0 - \beta_1 X - \beta_2 X^2 - \dots \right)^2$$

- $\omega_i$  = (kernel) weight ( $\bar{X}$  付近の事例について、大きな加重をつける)

### 3.2 Recap: Kernel weight

- Bandwidth = 1



### 3.3 論点: Bandwidth selection

- Fuzzy regression discontinuity においては、 $E[Y|X = \bar{X} + \epsilon]$ ,  $E[D|X = \bar{X} + \epsilon]$  を推定する必要がある
  - 異なる Bandwidth を用いるべきか？
- Intention to treat を推定するのであれば、異なる Bandwidth を用いても問題ない

### 3.4 論点: Bandwidth selection

- Local average treatment effect を推定するのであれば、同じ Bandwidth を用いることを推奨
  - 異なる Bandwidth = 分子と分母で異なる事例を用いて推定していることになってしまう
  - rdrobust 関数では、local average treatment effect の平均二乗誤差を最小化するように共通の Bandwidth を設定

## Reference

Londoño-Vélez, Juliana, Catherine Rodríguez, and Fabio Sánchez. 2020. “Upstream and Downstream Impacts of College Merit-Based Financial Aid for Low-Income Students: Ser Pilo Paga in Colombia.” *American Economic Journal: Economic Policy* 12 (2): 193–227.