

# Instrumental Variables

川田恵介

2025-06-15

## 1 Get started

### 1.1 Instrumental variable

- 操作変数法
- RD と並び、局所的な実験的状況を活用する代表的手法
  - ▶ ランダム化された変数(操作変数)により、介入が”誘発”する実験的状況を活用
- 不適切な状況で乱用される傾向があるので要注意

### 1.2 Example: Encouragement Design

- Research question = データ分析技能訓練 =  $D$  が、30 歳時点の所得 =  $Y$  に与える因果効果
  - ▶ 操作変数: 技能訓練参加費の割引クーポン (=  $Z$ ) をランダムに配布
    - 見たい介入を誘発する実験
- “クーポン”の効果は、容易に識別可能

$$E[y(z=1) - y(z=0)] = E[Y | Z=1] - E[Y | Z=0]$$

### 1.3 Example: Encouragement Design

- クーポン配布が以下を満たすのであれば、クーポンの効果は、技能訓練 =  $D$  の因果効果として再解釈できる
- ( $X$ 内で)ランダムに配布される
- クーポンは、技能訓練のみを通じて、賃金に影響を与える
  - ▶ 何があっても訓練に参加する/しない事例については、クーポンは賃金を変化させない
- クーポンは、技能訓練への参加を促進する

## 1.4 Example: Encouragement Design

- クーポンはランダムに配布されているので、
  - ▶  $E[Y | Z = 1] - E[Y | Z = 0] = \text{“クーポン”の“賃金(Y)”への効果}$
  - ▶  $E[D | Z = 1] - E[D | Z = 0] = \text{“クーポン”の“職業訓練(D)”への効果}$

## 1.5 Example: Encouragement Design

- クーポンに反応する割合:  $E[D | Z = 1] - E[D | Z = 0]$
- クーポンは、技能訓練のみを通じて、賃金に影響を与えるので、

$$E[Y | Z = 1] - E[Y | Z = 0]$$

$$= \text{職業訓練の効果} \times \{E[D | Z = 1] - E[D | Z = 0]\}$$

- $\text{職業訓練の因果効果} = \frac{E[Y | Z = 1] - E[Y | Z = 0]}{E[D | Z = 1] - E[D | Z = 0]}$

## 1.6 実例 Twin experiment

- Griffen et al. (2015)
- 「女性の労働供給」の議論の中で、子供が与える影響は大きな論点
  - ▶ 子育て負担が女性に集中しがち → 労働供給減少
  - ▶ 生活/教育費の増大 → 労働供給増加
- 子供数の決定には、無数の背景変数
- 操作変数: 双子が生まれたかどうか

## 2 識別: 2 by 2 Case

### 2.1 注意点

- $Z$  についての実験の再解釈 ( $D$  の効果) であるという見方が (理解の上で) 有益
- RD 同様に、局所的な平均効果を推定していることに注意
  - ▶  $Z/D$  が2値変数であれば、明示可能
  - ▶ より一般のケースについては、不透明
    - Ding (2023) 参照

### 2.2 識別の仮定

- $X$  が同じであれば、 $Z$  はランダムに決まっている (Conditional independence/exogeneity)
- すべての  $x, z$  について、 $0 < \Pr[z | X = x] < 1$  (Positivity)

- 他者の $d, z$ に影響を受けない (No interference)

## 2.3 4 類型

- $Z$  が  $D$  に与える因果的影響について、4 種類に分類できる

Type	D が 0 の場合	D が 1 の場合
Always taker(A)	1	1
Never taker(N)	0	0
Complier(C)	0	1
Defier(D)	1	0

## 2.4 追加の識別の仮定

- Complier か Defier について、
  - ▶ どちらかは存在する (Relevance)
  - ▶ どちらか一方のみ存在する (Monotonicity)
- Always taker および Never taker については、 $Z$  は因果効果を持たない (Exclusive restriction)

## 2.5 Intention-to-treat

- $Z$  の  $Y$  への因果効果:

$$\tau_Z(X) = E[Y \mid Z = 1, X] - E[Y \mid Z = 0, X]$$

## 2.6 分解

- $\tau_Z(X) = \underbrace{A \text{ の割合} \times A \text{ 内での平均因果効果}}_{=0 \text{ (Exclusive Restriction)}} + \underbrace{N \text{ の割合} \times N \text{ 内での平均因果効果}}_{=0 \text{ (Exclusive Restriction)}} + \underbrace{C \text{ の割合}}_{>0 \text{ (Relevance)}} \times C \text{ 内での平均因果効果} + \underbrace{D \text{ の割合}}_{=0 \text{ (Monotonicity)}} \times D \text{ 内での平均因果効果}$

## 2.7 分解

- $\tau_Z(X) = \underbrace{C \text{ の割合}}_{E[D \mid 1, X] - E[D \mid 0, X]} \times C \text{ 内での平均因果効果}$

- $$C \text{ 内での平均因果効果} = \frac{\tau_Z(X)}{\underbrace{E[D | 1, X] - E[D | 0, X]}_{\neq 0 \text{ (Relevance)}}}$$
- 操作変数法は、Complier (操作変数に反応するグループ) 内での平均因果効果(Local Average Treatment Effect)を識別する

## 3 推定

### 3.1 Two-stage least square

- 代表的な推定方法
- $D \sim Z$  を OLS 回帰し、 $D$  の予測モデル  $g_D(Z) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_Z Z$  を推定
  - $Y \sim g_D(Z)$  を OLS 回帰し、Local Average Treatment Effect の推定値とする

### 3.2 ivreg を用いた実装

```
library(ivreg)
library(tidyverse)

data("CPSSW04", package = "AER")

Model = ivreg(
  earnings ~ degree |
    gender,
  data = CPSSW04
)
```

### 3.3 ivreg を用いた実装

```
summary(Model)
```

```
Call:
ivreg(formula = earnings ~ degree | gender, data = CPSSW04)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-23.990 -14.069  -2.531   11.898   55.411

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    26.088      1.387   18.811 < 2e-16 ***
degreebachelor -20.441      3.018   -6.773 1.35e-11 ***
```

Diagnostic tests:

	df1	df2	statistic	p-value
Weak instruments	1	7984	110.5	<2e-16 ***
Wu-Hausman	1	7983	312.0	<2e-16 ***
Sargan	0	NA	NA	NA

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 15.69 on 7984 degrees of freedom

Multiple R-Squared: -2.21, Adjusted R-squared: -2.211

Wald test: 45.87 on 1 and 7984 DF, p-value: 1.354e-11

## 4 仮定の検討

- 慎重に活用すべき
  - ▶ 操作変数を使った方が、推定結果が改善するケースは、“限定的”
    - 「 $Z$  の因果効果を  $D$  の因果効果を解釈する」という“離れ業”をしていることを常に念頭に

### 4.1 Conditional independency

- 操作変数はランダム化されている必要がある
  - ▶ 活用できる自然実験の範囲を広げているだけであり、自然実験自体は必要

### 4.2 Exclusive restriction

- “離れ業”を可能にしている、問題の仮定
- $D$  のみを通じて影響を与えるとは？ どのようにテストする？
  - ▶ 方法論的にも未解決な課題

### 4.3 Relevance

- 慎重にデザインされた Encouragement experiment が実施されていれば、以上の仮定は満たしやすい
  - ▶ 実験の実現可能性も高まる ( $D$  を高める Nudge 的な介入など)
  - ▶ Exclusive restriction を満たすためには、十分に“弱い介入”である必要がある
    - $D = 1$  にするために多額の“補助金”を投入すれば、Always taker であったとしても、 $Y$  が変化する可能性がある
- 弱くしすぎると、Relevance が満たされにくくなる
  - ▶ 「職業訓練を推奨する」というだけでは、誰も従わないかもしれない

#### 4.4 Weak IV

- $E[D \mid Z = 1, X] - E[D \mid Z = 0, X] = 0$  であれば、識別不可能
- $E[D \mid Z = 1, X] - E[D \mid Z = 0, X]$  が非常に小さければ、識別は可能だが、推定困難
  - ▶ 推定誤差が爆発的に大きくなりうる

#### 4.5 解釈問題

- 局所的な因果効果であることに注意
  - ▶ あくまでも Complier 内の効果
- 特に Weak IV のケースでは、かなり限られた層内での効果にすぎない恐れが強くなる
  - ▶ 例: 「推奨する」という文言に反応する層内での効果

#### 4.6 拡張

- コントロール変数  $X$  導入、 $Z$  や  $D$  が連続変数であったとしても、Two-stage least square は適用可能
  - ▶ 効果が完全に同質 ( $\tau$  が一定) でなければ、解釈が難しい

#### 4.7 まとめ

- 操作変数法の慎重な活用は、因果効果解明に活用できる実験の種類を増やす
  - ▶ Encouragement experiment は、倫理的、予算的に活用可能な場面は多い
- ただし、通常の RCT と比べて、Exclusive restriction が要求され、正当化が難しい
  - ▶ Relevance との間にトレードオフが発生しがち

#### 4.8 Reference

##### Bibliography

Ding, P. (2023). A First Course in Causal Inference. Arxiv Preprint Arxiv:2305.18793.

Griffen, A. S., Nakamuro, M., & Inui, T. (2015). Fertility and maternal labor supply in Japan: Conflicting policy goals?. Journal of the Japanese and International Economies, 38, 52–72.