Computerpraktikum zur Quantenphysik
Sommersemester 2019

Dr. Wolfgang Niedenzu
Prof. Dr. Helmut Ritsch

Aufgabe 5: **Potentialstufe, Potentialbarriere und Tunneleffekt**

1. Gegeben sei für $V_0 > 0$ das Stufenpotential
$$V(x) = V_0\Theta(x), \tag{1}$$
wobei $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion bezeichnet.

   Berechnen Sie die Zeitentwicklung eines Gauß'schen Wellenpakets mit initialer Ortsverteilung
$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right), \tag{2}$$
das auf die Potentialstufe zuläuft. Unterscheiden Sie die Fälle $E > V_0$ und $E < V_0$, wobei E die Energie des einfallenden Wellenpakets bezeichnet.

2. Gegeben sei die Potentialbarriere
$$V(x) = V_0\Theta\left(\frac{L}{2} - |x|\right) \tag{3}$$
mit $V_0 > 0$ und $L > 0$.

   Für eine einfallende ebene Welle mit Wellenzahl $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ($E > 0$) ergeben sich folgende Reflexions- und Transmissionskoeffizienten:

   - Für $E > V_0$:
$$R = \frac{(q^2-k^2)\sin^2(qL)}{(2kq)^2 + (q^2-k^2)^2\sin^2(qL)} \tag{4a}$$
$$T = \frac{(2kq)^2}{(2kq)^2 + (q^2-k^2)^2\sin^2(qL)}, \tag{4b}$$
   wobei $q := \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$ die Wellenzahl in der Barriere ist.

- Für $E < V_0$ ist die Potentialbarriere klassisch undurchdringlich. Quantenmechanisch ergibt sich aus Glgn. (4) mit $q = i\kappa$ (»Tunneleffekt«)

$$R = \frac{(k^2+\kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa L)}{(2k\kappa)^2 + (k^2+\kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa L)} \tag{5a}$$

$$T = \frac{(2k\kappa)^2}{(2k\kappa)^2 + (k^2+\kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa L)}, \tag{5b}$$

wobei $\kappa := \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.

a) Simulieren Sie die Schrödingergleichung für eine Gauß'sche Anfangsbedingung. Vergleichen Sie die numerische Lösung mit den Transmissionskoeffizienten (4b) und (5b). Wie muss die Anfangsbedingung gewählt werden, damit das Gauß'sche Wellenpaket näherungsweise einer rechtslaufenden ebenen Welle entspricht?

   Hinweise: Beachten Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation für Ort und Impuls.

b) Für welche Werte von q wird die Potentialbarriere transparent (»Resonanzen«)? Interpretieren Sie das Ergebnis und reproduzieren Sie die Resonanzstreuung numerisch.