Dr. Wolfgang Niedenzu
Prof. Dr. Helmut Ritsch

Aufgabe 4: **Freie Zeitevolution eines Teilchens**

1. Gegeben sei der Gauß'sche Zustand $|\psi_0\rangle$ mit Ortsverteilung ($\hbar = 1$)

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(ip_0x)\,. \tag{1}$$

Der entsprechende Hilbertraumvektor $|\psi_0\rangle$ kann mit der QO-Toolbox-Funktion `gaussianstate` erstellt werden.

Überprüfen Sie:

a) Der Zustand $|\psi_0\rangle$ ist normiert. Hinweis: In der QO-Toolbox wird die Konvention $\langle x|\psi_0\rangle = \sqrt{\Delta x}\,\psi_0(x)$ verwendet. Dadurch gilt

$$\|\psi_0\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x_i|\psi_0\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\psi_0(x_i)|^2 \Delta x. \tag{2}$$

b) $\langle x\rangle = x_0$

c) $\mathrm{Var}(x) = \frac{\sigma^2}{2}$

d) $\langle p\rangle = p_0$

e) $\mathrm{Var}(p) = \frac{1}{2\sigma^2}$

f) Die Impulsverteilung des Zustands $|\psi_0\rangle$ lautet

$$\psi_0(p) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2\sigma^2}{2}\right) \exp(-ix_0p) \tag{3}$$

2. Berechnen Sie die zeitliche Evolution eines freien Teilchens, das zum Zeitpunkt $t=0$ mit der Gauß'schen Ortsverteilung (1) präpariert wurde.

Zeigen Sie:

a) Das Wellenpaket »zerfließt« gemäß der analytischen Lösung (siehe Vorlesung)

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(ipx - i\frac{p^2}{2m}t\right) \psi_0(p)\\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi^{1/4}} \frac{\exp\left(ip_0(x-x_0) - i\frac{p_0^2}{2m}t\right)}{\sqrt{\sigma^2 + it/m}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-p_0t/m)^2}{2(\sigma^2+it/m)}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

b) $\langle x \rangle (t) = x_0 + p_0 t/m$

c) $\mathrm{Var}(x)(t) = \frac{\sigma^2}{2}\left[1 + \left(\frac{t}{m\sigma^2}\right)^2\right]$

d) $\langle p \rangle (t) = p_0$

e) $\mathrm{Var}(p)(t) = \frac{1}{2\sigma^2}$

3. Veranschaulichen Sie sich die Zeitevolution im Orts- und Impulsraum.