Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 05 vom 09. November 2009

Teil A

Aufgabe A15 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $F : [-1; 1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} \, dy$$

konvergiert, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

Aufgabe A16 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $F : [-1; 1] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(xt) \, dx$$

gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe A17 Seien die Raumkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(\pi t), 2\sin(\pi t), t)$$

und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(-yze^{z^2}, xze^{z^2}, \arctan\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z\right)\right).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma.$$

Aufgabe A18 Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral

$$I := \int_\Gamma (|y - z| \, dx - |z - x| \, dy + |x - y| \, dz) \quad (\text{mit } \Gamma \text{ Kurve im } \mathbb{R}^3)$$

vom Weg unabhängig ist und bestimmen Sie seinen Wert für die Kurve

$$\Gamma : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t), 0 \le t \le \pi.$$

Teil B

Aufgabe B18 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $G : [-1; 1] \to \mathbb{R}$,

$$G(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x \sin(xt)\, \mathrm{d}x$$

gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe B19 Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \neq \quad \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) := (2 - xy)xy\, e^{-xy}$, gilt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 6.4?

Aufgabe B20 Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und die ebene Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$$

und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2}, \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2} \right).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma.$$

Aufgabe B21 Sei $G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 0 \right\}$ und

$$I(\Gamma) := \int_\gamma \frac{y}{9x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x - \frac{x}{9x^2 + 4y^2}\mathrm{d}y$$

ein Kurvenintegral in G.

(a) Sei Γ_1 die negativ orientierte Ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$. Berechnen Sie $I(\Gamma_1)$.

(b) Ist $I(\Gamma)$ in G vom Weg unabhängig?

AM3 KGÜ 5

21.) a) Parametrisierung Γ

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

γ_1 ist doppelpunktfrei,

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

$$I(T_1) = \int_{\Gamma} \frac{y\,dx}{9x^2+4y^2} - \frac{x\,dy}{9x^2+4y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3\sin(t)\cdot 2\sin(t)}{36\cos^2(t)+36\sin^2(t)} + \frac{2\cos(t)\cdot 3\cos(t)}{36\cos^2(t)+36\sin^2(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\int_0^{2\pi} 6\cdot\sin^2(t) + 6\cdot\cos^2(t)\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}}$$

b.) Nicht wegunabh., da geschlossener Weg $I(T_1) = 0$.

HM3 KGÜ 5 19. NOV. 2009

B18.) Satz 6.2. (A16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x \cdot \sin(xt)\, dx = 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt)\, dx$$

wegen Symmetrie

$$g(x) = x \cdot e^{-x^2} \geq |e^{-x^2} x \sin(xt)|$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx$$

Substitution: $x^2 = t$ $\quad \frac{dt}{dx} = 2x$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^b e^{-t} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-t}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-b^2} - e^0\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

B19.)

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^1\int_0^b \underbrace{(xy-2)y}_{v}\underbrace{(-x)e^{-xy}}_{u'}\, dy\, dx$$

$u = e^{-xy}$ $\quad u' = -x \cdot e^{-xy}$

$v = (xy-2)y$ $\quad v' = 2xy - 2$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\left[e^{-xy} \cdot y(xy-2)\right]_0^b}_{=0} - \int_0^b \underbrace{(2xy-2)}_{v}\underbrace{e^{-xy}}_{u'}\, dy\, dx$$

$u = -\frac{1}{x} e^{-xy}$ $\quad u' = e^{-xy}$ $\quad x \neq 0$

$v = (2xy-2)$ $\quad v' = 2x$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{1} \left[-\frac{1}{x} e^{-xy}(2xy-2) \right]_{y=0}^{b} + \int_{y=0}^{b} 2e^{-xy}\,dy\,dx$$

$x \neq 0$

$$= -\lim_{b\to\infty} \int_{y=0}^{1} \frac{2}{x} + \left[2\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-xy} \right]_{y=0}^{b} dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\,dx = \underline{\underline{0}} \quad \text{linkes Integral}$$

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = ye^{-y} \qquad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty ye^{-y}\,dy \underline{\underline{= 1}} \;\Big|\; \int_0^1 \int_0^\infty f(x,y)\,dy\,dx = 0 \neq 1$$

rechtes Integral

$f(x,y)$ ist nicht gleichmäßig konvergent

B20.) Γ muss doppelpunktfrei sein

$\gamma'(t) \neq 0$

In einer δ-Umgebung von Γ ist f stetig

$$\int_\Gamma f\,d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad t \in [a,b]$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\Gamma f\,d\gamma = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \alpha\cos(t) - \beta\sin(t) \\ \alpha\sin(t) - \beta\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cancel{\alpha\cos(t)\sin(t)} + \beta\sin^2(t) + \cancel{\alpha\cos(t)\sin(t)} + \beta\cos^2(t)\,dt$$

$$= \beta \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\,dt = 2\pi\beta$$