Formelblatt Numa

Gleitpunktoperationen
①: Assoziativ/Distributivgesetz nicht gültig
② Auslöschung! bei $\nabla \in \{+,-\}$

$fl(x \nabla y) = (x \nabla y)(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \le eps$

$\frac{fl(\tilde{x}) - fl(x)}{f(x)} = \mathcal{K}_f(x) \cdot eps$

Bsp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$: $r_f \le \mathcal{K}_{rel} \cdot \le \ldots$

unvermeidlicher Fehler:

1. $\mathcal{K}(A)\, eps$ (Maschinengenauigkeit)

Rundungsfehler $\hat{=}$ Störung d. Eingangsdaten

Menge der Zahlen (Maschinenzahlen)

Bsp: 2 48 1024, 1024 2 · 47 (2049) m−1

$$\#M(b, m, r, R) = \underbrace{2}_{VZ} \cdot \underbrace{(b-1)}_{d_1} \cdot \underbrace{b}_{d_2 \ldots d_m}^{m-1} \cdot \underbrace{(R - r + 1)}_{\text{Exponent}} + \underbrace{1}_{\text{NULL}}$$

b: Basis, m: Mantisse, r, R

underflow: $\mathbb{R} < x_{min}$
overflow: $\mathbb{R} > x_{max}$

$r \le e \le R$

Betragskleinste Zahl: $x_{min} = b^{r-1}$ Betragsgr. Zahl: $x_{max} = (1 - b^{-m}) \cdot b^{R}$

eps = Maschinengenauigkeit: $\frac{b^{1-m}}{2}$. Sind Eingangsdaten x, y Maschinenzahlen, dann: $\varepsilon \to$ rel. Rundungsfehler: $\frac{fl(x) - x}{x} \le eps$ $fl(x) = x(1+\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon \le eps$

IEEE-Standard

M 18		23
VZ	e	m
1	11	52

single precision: 32 bit
$eps = \frac{2^{(1-m)}}{2}$ x_{min}, x_{max}

Kondition:

$$\underbrace{\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right|}_{\text{rel. Fehler der Ausgabe}} \le \mathcal{K}_{rel}(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|}_{\text{rel. Fehler des Eingabe}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K}_{rel}(x) = \max_{1 \le j \le n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}\right|$$

Verhältnis v. rel. Ausgabef. zu rel. Eingabefehler; stetig differenzierbar

Rückwärts stabil:
$\tilde{f}(x) = f(\hat{x})$ mit $\frac{\|x - \hat{x}\|}{x} = O(\varepsilon)$

Berechne $\mathcal{K}_{rel}$ v. A: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $\sqrt{a^2+b^2} = 1$ $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathcal{K}_2(A)_2 = 1 \Rightarrow$ gute Kond.
$K = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

Spezialfall $n = 1$ (Fkt. hängt nur v. einer Variablen ab)

absol. Fehler: $\tilde{x} - x = \|\Delta x\|$

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \le \mathcal{K}_{rel}(x) \cdot \underbrace{\left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right|}_{\text{Bsp. } 5\%} \quad \text{mit } \mathcal{K}_{rel}(x) = \left|\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}\right|$$

erwartete Fehler
rel. Fehler d. Eingabe: $r_x = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$
d. Ausgabe: $r_f = \mathcal{K}_{rel} \cdot r_x$

tatsächlich rel. Fehler d. Ausgabe: $r_f = \left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right|$
↓ kann gr. sein, als erwarteter Fehler, weil die Abschätzung $r_f \le \mathcal{K}_{rel} \cdot r_x$ nur in 1. Näherung bzgl. r_x gilt.

gute Kondition: $\mathcal{K}_{rel} \sim 1$
schlecht $\mathcal{K}_f >> 1$

Residuum: der im Allgemeinen nicht verschwindende Vektor $b - Ax$: $r(x)$
⇝ Fehlerabweichung.
Kein Maß für die Güte der Lösungsapproximation, da entweder $\|A^{-1}\|$ zu groß, oder $\|A\|$ zu klein sein kann.

Matrizen:

$m \times n$ - Matrix (m: Zeilen, n: Spalten)

$a_{1,2}$ (1: Zeilen, 2: ~~Spalten~~ Spalten)

Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf V, falls:
N1: $\|v\| \ge 0, \forall v \in V$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
N2: $a \in \mathbb{K}, v \in V$: $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$
N3: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ ⚠ Betrag!!

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matrixnormen:

$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (Maximum über die Summe d. Spalten)

Bsp: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$: $\|A\|_1 = 10$, $\|A\|_\infty = 8$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ $\det(A^T A - \lambda E) = 0$; falls A sym.: $\|A\|_\infty = \|A\|_1$
$\lambda_{max}(A^T A) = \lambda^2(A)$; $\|A\|_2 = \lambda_{max}$
↳ $\mathcal{K}_2(A)_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1} |a_{ij}|$ (Maximum über die Summe d. Zeilen)

$\mathcal{K}(A)_{\|\cdot\|_\infty} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \ge 1$ | Kond.zahl eines gestörten Systems: $\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$

$\mathcal{K}_2(A)_{\|\cdot\|_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1 max}{\lambda_2 min}} = \sqrt{\mathcal{K}_2(A^T A)} \Rightarrow \mathcal{K}_2(A) = \mathcal{K}_2(A^T)$

$\mathcal{K}_1(A)_{\|\cdot\|_1} = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$

Warum 2-Norm bei lin. Ausgl.? $\|A\overset{*}{x} - b\|_2 = \min \|Ax - b\|_2$, diff.bar $\Rightarrow$ Abl. linear, $\|\cdot\|_2$ bleibt bei orthog. Trafo erhalten, d.h.
$\min \|Ax - b\|_2 \hat{=} \|Q \cdot (Ax - b)\|_2 = \|\underbrace{Q \cdot A}_{R} x - Q \cdot b\|$

Absoluter Fehler, wenn in $A \cdot x = b$ mit fehlerhaftem Vektor $\tilde{b}$ gerechnet wird:

Sei $x + \Delta x$ die Lösung v. $\underbrace{A(x+\Delta x)}_{\tilde{x}} = \underbrace{b + \Delta b}_{\tilde{b}}$.

Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}}_{\uparrow \text{rel. Fehler}} \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\|x - \tilde{x}\|}_{\text{absol. Fehler}} \leq \|x\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \pm \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit welchem Fehler bzgl. der Supremumsnorm in x muss man rechnen, wenn statt $A \cdot x = b$ das LGS $A \cdot x = \tilde{b}$ gelöst wird?

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathcal{K}_{rel\,\infty} \frac{\|\varepsilon\|}{\|(1,1)^T\|_\infty}$ $\qquad \Delta b = \begin{pmatrix} \pm \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \|A\|_\infty = 9 \\ \|A^{-1}\|_\infty = \frac{7}{9} \end{array}\right\} \mathcal{K} = 7$

$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x_\infty\|} \leq 7 \cdot \frac{|\varepsilon|}{\|(1,1)\|_\infty} = 7\,|\varepsilon|$

$\Rightarrow$ Zeilenskalibrierung liefert $\mathcal{K}_{rel} \min(A)$ bzgl. Max.norm
$\Rightarrow$ keine Problemminimierung

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ geringe Rundungsfehler

$\Rightarrow$ Störung der Ausgabe $\Delta b = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{3}\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

x Störung d. rechten Seite auch geringer

$\Rightarrow$ Eingabefehler in x = Der zu erwartende Fehler in x ist nun: $\|$ / $\det(A) = \frac{1}{3}$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} \right\|_\infty^{-1} \cdot \frac{\left\| \begin{matrix} \varepsilon \frac{1}{3}\varepsilon \\ 0 \end{matrix} \right\|_\infty}{\|(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\|_\infty} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{← Störung in der Lsg.}$$

Fehlerabschätzung eines gestörten Systems $\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ gültig für ~~rA~~ $r_A \cdot \mathcal{K}_{rel} < 1$ **I**

Fehlerformel: Überprüfe: **(I)**, dann erst rechnen!!!

$$r_x = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{x} \leq \frac{\mathcal{K}(A)}{1 - \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (1) \quad \|\cdot\| \text{ bel. Norm}$$

$1 - \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} > 0!$

…fehler eps)

$r_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\overset{2\times 2 \text{ Matrix}}{2} \cdot \varepsilon_0}{\|A\|} = \frac{\overset{3\times 3\text{-M}}{3} \cdot \varepsilon_0}{\|A\|}$ $\qquad \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_\infty$
$\Rightarrow$ Ersetze $r_A = \frac{\sqrt{n} \cdot \|A\|_\infty}{\|A\|_2}$

eps)

$r_b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{\cancel{4} \cdot \varepsilon_0}{\|b\|}$ (Störung d. Daten)

Mit welchem rel. Fehler muss man bei der Lsg. x des GLS rechnen? r_x

$\Rightarrow$ $r_x = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{x} = (1)$

Bsp.

$b = \begin{pmatrix} 0.1194 \\ 0.1540 \end{pmatrix}$ $\quad \|b\|_1 = |0.1194 + 0.1540|$ $\quad \|b\|_\infty = 0.1540$ $\quad \|b\|_2 = \sqrt{0.1194^2 + 0.1540^2}$

$A = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0.1429 \\ 0.1429 & 0.1847 \end{pmatrix}$ $\quad \|A\|_1 = 0.1429 + 0.1847 = 0.3276$ $\qquad r_b = \frac{\|\Delta b\|_1}{\|0.1194 + 0.1540\|_1}$

Nachiteration mit geg. Startwert $x_0 (x_1, x_2)^T$

$r_0 = b - A \cdot x_0$

1. Vorwärtseinsetzen $L \cdot y = r$ $\Rightarrow (y) = (y_1, y_2)^T$ $\qquad$ 2. Rückwärtseinsetzen: $R \cdot \Delta x = y$

3. Korrektur: $x_1 = x_0 + \Delta x$

I) Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Normalgleichungen) (LR, Chalesky)

gegeben Wertetabelle und Kurvengleichung $y(x) \ldots$ (abh. v. α, β)

1.) Werte in Kurve einsetzen

2.) In Matrix form $\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{b}$

3.) Gesucht: Normalenlösung : $\frac{1}{2} m \cdot n^2$, instabil, wenn $\kappa_2(A) \gg 1$ & $\Theta = 0$
stabil, $\kappa_2(A) \approx 1$ & $\Theta = \frac{\pi}{4}$ ($\tan\Theta \approx 1$)

↳ Lösung des GL $A^T \cdot A \cdot z = A^T \cdot b$, Ziel: $r \perp$ zu Bild(A).

- Berechne $A^T A$ und $A^T \cdot b$
- Löse $A^T \cdot A \cdot z = A^T \cdot b \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha, \beta$ bestimmt

Voraussetzung für eindeutige Lsg.: **A** hat vollen Rang:

II) QR-Zerlegung : $\sim m \cdot n^2$, stabil

1.) siehe oben

2.) Givens-Rotation: $\tilde{R} \cdot \hat{z} = \tilde{b}$ (Nichtbetrachtung der „Null" Zeilen aus QR-Zerlegung)

genauer: Löse lineares Ausgleichsproblem: $\|A \cdot z - b\|_2 \to \min$

dazu: $\|A \cdot z - b\|_2^2 = \|R \cdot z - Q^T\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot z - \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \right\|_2^2 = \|\tilde{R} \cdot z - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$)

↳ Residuum: $\|A \cdot x^* - b\|_2 = \|b_2\|_2$

Bsp: $\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1$ $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\beta^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: Nun: lin Ausgl.pr.

nichtlinear →

Iterative Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gl.-Systemen

Banachscher Fixpunktsatz:

a) Fixpunktproblem:

i) Zeige: D abgeschlossen ("D ist abgeschlossen und konvex")

ii) " : Selbstabbildung z.B. $D = [2,3]$

dann zeige $f(2) \geq 2$; $f(3) \leq 3$ $\left.\right\}$ $f([2,3]) \subset [2,3]$

f monoton wachsend/fallend

iii) Zeige f ist kontrahierend auf $[2,3]$:

$$\max_{x \in D} \| F'(x) \| \leq L < 1$$

1. Ableitung!

Dazu: bilde $F'(x)$ (bzw $f'(x)$) & zeige z.B. $f'(x)$ ist positiv und monoton wachsend, da $f''(x) > 0$

=> falls dem so ist, befindet sich das Maximum an der rechten Seite von D => $\max | f(3)' | = \dots \overset{!}{<} 1$

Bei Gleichungssystemen: Benutze Jakobi-Matrix:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

b) Iteration: (die auf den Fixpunkt führt)

Trick (Übergang zur Umkehrfunktion): z.B. $f(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} = x \iff x = \ln^2(2x)$

$\Rightarrow x_{n+1} = \ln^2(2x)$ $\quad x_0 \in [2,3]$

c) Abschätzung über die Anzahl der Iterationsschritte bis zur Genauigkeit ε

- a-priori $$\|x_n - x\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|} \right)}{\ln(L)}$$

x_0 Startwert

$X_1 = f(x_0)$

- a-posteriori: $\|x_n - x\| \leq \frac{L \|x_n - x_{n-1}\|}{1-L}$

zu b):

$x_{n+1} = F(x_n) \longrightarrow x^* = F(x^*)$ (eindeutiger Fixpunkt)

Newtonverfahren für eine Skalarfunktion (Skalares NS-Problem)

$\hat{=}$ Fixpunktfunktion $F(x) = x - (f')^{-1} \cdot f$ ← Newton-Verfahren zum NS-Problem

$$f(x) = 0 \xrightarrow{n=0,1,2\ldots} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^*$$

x_0 wird vorgegeben

Newtonverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme:

1.) Stelle das GS nach 0 um $\begin{pmatrix} \cdots = 0 \\ \cdots = 0 \\ \cdots = 0 \end{pmatrix}$

2.) Schreibe es in Matrixform $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

3.) Das Newton-Verfahren lautet dann: $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \left(F'[(x_n, y_n, z_n)]\right)^{-1} \cdot F[(x_n, y_n, z_n)]$$

$$F'[(x_n, y_n, z_n)] \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \\ \Delta z_n \end{pmatrix} = -F\cdot[(x_n, y_n, z_n)]$$

4.) Löse das GS nach $\begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \\ \Delta z_n \end{pmatrix}$ und berechne

$$\begin{matrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \\ \Delta z_n \end{pmatrix}$$

(Startwert ist vorgegeben)

$$F'[(x_1, x_2, x_3)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ & & \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$ (Ableitungsmatrix)

Nichtlineare Ausgleichsrechnung (Gauß-Newton)

Ausgleichsfkt $f(t_i, x) = f(t_i; x_1 \ldots x_n)$ zur Wertetabelle (t_i, y_i), $i = 1, \ldots m$)

1. Das n.l. Ausgleichsproblem lautet: $\sum_{i=1}^{m} (f(t_i, x_1 \ldots x_n) - y_i)^2 \to \text{Min}$

   $[F_i := f(t_i) - f_i = r_i]$

2. Algorithmus

   a) $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} - f(t_i, x_0)$, $\quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$

   $\|F(x)\|_2 \to \min$

   b) $A = f'(t_i, x_0) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(t_i, x_0)\right)\right)$ $\quad (i = 1, \ldots, m)$

   $\|A \cdot \Delta x - (-r)\|_2$

   c) Löse das lin. Ausgleichsproblem: $\|A \cdot \Delta x_0 - b\|_2 \to$ ~~min~~ Δx_0

   $x_1 = x_0 + \Delta x_0$ mittels Givens-bzw. Normalgl. d) Ersetze ... x_0

Suche ein Polynom, welches durch vorgegebene Pkt (z.B. aus einer Messreihe) verläuft

Polynominterpolation nach Lagrange

Vorgegeben: Wertetabelle $(x_j ; f(x_j))$ $(j = 0, \dots, n)$

Interpolationsbedingungen: $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot L_{jn}(x)$ Stützwerte $f(x_j)$

mit: $L_{jn}(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$ Basis-Fkt: Lagrange-Polynom

Fehlerabschätzung:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right|$$

$a = \min(x_0, \dots x_n)$ $b = \max(x_0, \dots, x_n)$ n: Grad d. Polynoms, $n+1$-te Ableitung

Anwendungen: Polynome lassen sich sehr leicht integrieren & ableiten

=> Dient der num. Integration bzw. num. Lsg. gewöhnlicher DGLs

Newtonscher Algo — Polynominterpolation mit Newton-Schema

=> (dividierte Differenzen)

Polynom P wird in Newton-Basis dargestellt (geschlossene Darstellung)

↳ Bestimme Koeffizienten mit dem Schema der dividierten Differenzen

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}] \cdot f$	
$\boxed{0}$	$\boxed{-3}$		
		$\frac{1-(-3)}{1-0} = \boxed{4}$	
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$		$\frac{1-4}{2-0} = \boxed{\frac{-3}{2}}$
		$\frac{2-1}{2-1} = 1$	
$\boxed{2}$	$\boxed{2}$		
		$\frac{7-2}{4-2} = \frac{5}{2}$	
4	7		

Darstellung:

$$P_3(x) = -3 \cdot 1 + 4(x-0) + \underbrace{\frac{-3}{2}}_{f_{02}}(x-0)(x-1) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hat{=} f_{03}}(x-0)(x-1)(x-2)$$

x_0	f_{00}		
x_1	f_{10}	$f_{01} = \frac{f_{10} - f_{00}}{x_1 - x_0}$	
$\vdots$	$\vdots$		$f_{02} = \frac{f_{11} - f_{01}}{x_1 - x_0}$
x_{n-1}	$f_{n-1,0}$		
x_n	f_{n0}	$f_{n-1,1} = \frac{f_{n0} - f_{n-1,0}}{x_n - x_{n-1}}$	f_{0n}

$$f_{ij} = \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$$

$$P_n(x) = f_{00} + (x-x_0) \cdot f_{01} + (x-x_0) \cdot f_{02} + \ldots + (x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_{n-1}) f_{0n}$$

Aitken-Neville-Schema

(Auswertung des Interpolationspolynoms an einer Stelle x)

$i \downarrow$	$k \to$	0	1	2
		$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0	x_0	$f(x_0)$		
1	x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$	
2	x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$
n	x_n			P_{nn} Lösung

"Dreieck"

⚠ Beachte, welche Stützstellen beachtet werden sollen

Formel: $P_{ik} = P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_j - x_{i-k}} \left(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1} \right)$

1) gegebenenfalls Spalte mit $f(x_i)$ bestimmen

2.) mit Formel die folgenden Spalten v. oben nach unten berechnen

		$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
x_0	0.25	1.0314		
x_1	0.75	1.2947	1.42632	
x_2	1.25	1.884	1.59155	1.55025
x_3	1.75	2.9642	1.35054	P_{32}
x_4	2.25	4.7966	P_{41}	

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$f(x)$	1.0314	1.2947	1.884

Gesucht: Näherungswert für $f(1.0)$

$P_{44} \to P_{55}$

$P_{53} \to P_{54} \to P_{55}$

Schema ist rekursiv definiert $P_{i0} = f(x_i)$, $0 \le i \le n$

$$P_{41} = P_{30} + \frac{P_{40} - P_{30}}{x_4 - x_3}(x - x_3)$$

$= 0.2156$

$$P_{i,k} = \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} \cdot P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} \cdot P_{i-1,k-1}$$

$$= P_{i,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}(x - x_i)$$

$$P_{32} = P_{21} + \frac{P_{31} - P_{21}}{x_3 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$= P_{i-1,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}(x - x_{i-k})$$

$= 1.5310$

$0 \le k \le i \le n$

$$P_{53} = P_{42} + \frac{P_{52} - P_{42}}{x_5 - x_2}(x - x_2)$$

	P_{i0}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}
$x_0 = 1$	2				
$x_1 = 2$	3	3.5			
$x_2 = 3$	1	2	2.375		
$x_3 = 4$	0	1.5	1.875	2.125	
$x_4 = 5$	-1	P_{41}	P_{42}	1.8125	P_{44}

Kapitel 3

In der linearen Ausgleichsrechnung entsteh ein LGS
=> Normalgleichungen

$A \cdot x = b$ Annahme: rechte Seite b gestört

3.7: Sei $x + \Delta x$ die Lösung von $A \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$.
Dann gilt: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

[rel. Konditionszahl: $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}_{\|\cdot\|}(A) := \|A^{-1}\| \, \|A\|$] | beschreibt Störungen in den Eingabedaten x

unvermeidlicher Fehler: $\mathcal{K}(A)$ eps (Maschinengenauigkeit)

- Konditionszahl einer Fkt gibt an, mit welcher Verstärkung der Eingabefehler man rechnen muss

- Äquilibriert: Betragssummen aller Zahlen = 1
  Zeilenskalierung liefert $\mathcal{K}rel_{min}(A)$ bzgl. Maxnorm.

- Normalgleichung
  Gesucht: Min. des Residuums $\nabla F(x) = 0$
  Der Gradient verschwindet genau dann, wenn:
  $A^T A x = A^T b$ gilt

Kapitel 4

⚠ 4.7, 4.9 Kondition des linearen Ausgleichsproblems

$\|A\cdot x^* - b\|_2 = \min \|A\cdot x - b\|_2 \iff Ax - b \perp \text{Bild}(A)$

Normalgleichung: $A^T A \cdot x^* = A^T b$ $\quad$ $\text{Rang}(A) = n$ $\quad$ s.p.d.

Lösung der Normalgl.:
- Berechne $A^T A$, $A^T b$ $\quad$, A pos. def., falls alle Diagonalelemente von D positiv
- Berechne Cholesky-Zerlegung $\quad LDL^T = A^T A$
- Löse $Ly = A^T b$, $L^T x = D^{-1} y$ $\quad$ durch Vorwärts-, Rückwärtseinsetzen
- keine Pivotisierung nötig

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d., falls $\text{Rang}(A) = n$

Mit Spaltenpivotisierung:
- LR-Zerlegung - Ohne Pivotisierung: instabil
- P-Matrix $\quad PA = L\cdot R$
- Löse LGS: Vorwärtseinsetzen: $Ly = Pb$

  Rückwärtseinsetzen: $R\cdot x = y$
- $\det(A) = \det(P^{-1}\cdot LR) = \det(P)^{-1}\cdot \underbrace{\det(L)}_{1}\cdot \det(R)$

  $= (-1)^{\#\text{Anzahl Vertauschungen}}\cdot \det(R)$

Cholesky-Verfahren - stabil

- Matrix s.p.d.
- Diagonalelemente > 0
- $A = L \cdot D \cdot L^T$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ l_{21}d_{11} & d_{22} & 0 \\ l_{31}d_{11} & l_{32}d_{22} & d_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$a_{33} = l_{31}^2 \cdot d_{11} + l_{32}^2 \cdot d_{22} + d_{33}$ $\quad a_{32} = l_{31} \cdot l_{21} \cdot d_{11} + l_{32} \cdot d_{22}$

$a_{31} = l_{31} \cdot d_{11}$ $\quad d_{11} = a_{11}$

Vorgehen

- Spaltenweise: $j=1$ $d_{11} = a_{11}$ $\quad l_{21} \cdot d_{11} = a_{21}$

  analog: $j=2$, $j=3$ $\quad d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 \cdot d_{11}$

- LGS lösen:

  L (Vorwärtseinsetzen): $Ax = b \iff L\underbrace{DL^T x}_{=z} = b$ $\quad L \cdot z = b$

  D (Diagonale): $\mid$ $\quad D \cdot \underbrace{L^T \cdot x}_{y} = z$ $\quad D \cdot y = z$ $\quad y = (\ )$

  L^T (Rückwärtseinsetzen): $L^T \cdot x = y$ $\quad x = (\ )$

$d_{kk} = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \cdot d_{jj}$ $\quad$ Bsp $d_{kk}: 4 - \frac{4d^2}{15} > 0$ $\quad |d| < \sqrt{15}$

- $\det(A) = \det(D)$

Spalte 1:

$d_{11} = a_{11}$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}}$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}}$

Spalte 2:

$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 \cdot d_{11}$

$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot d_{11} \cdot l_{21}}{d_{22}}$

Spalte 3:

$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 \cdot d_{11} - l_{32}^2 \cdot d_{22}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$

LR-Zerlegung mit Pivotisierung

- LR-Zerlegung
- Pivotelement an 1. Stelle
  - obere mal nehmen
  - untere minus obere rechnen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot\left(\frac{c}{a}\right) \ominus$$

- $P \cdot A = L \cdot R$
- Löse LGS: Vorwärts einsetzen $L \cdot y = P \cdot b$
  Rückwärts $R \cdot x = y$
- $\det(A) = \det(P^{-1} \cdot L \cdot R) = \det(P)^{-1} \cdot \det(L) \cdot \det(R)$
  $= (-1)^{\#\text{Anz. d. Vert.}} \cdot \det(R)$

QR-Zerlegung (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

1. Aufstellen der Matrix des lin. Ausgleichproblems
   Koeffizienten a,b werden als Normallösung des überbestimmten Gleichungssystems $f(t_i)$ gefunden.
   Gesucht: unbekannter Vektor $(a,b)^T$
2. evtl. Zeilenvertauschung
3. Bringe Matrix A auf obere Dreiecksform R

Givensrotation — Householder-Trafo

LR: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & 1 \end{pmatrix}$ $l_{12} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, $l_{13} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$, $l_{23} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$

Fragen

- Permutationsmatrix: Bsp. berechnen?
- Cholesky-Verfahren
- S. 71 Kapitel 3: Givens-Rotation
- S. 75 Bsp.!
- Besonderheit Symmetrisch + orthogonal S. 83
  $Q \cdot A = R \wedge Q \cdot R = A$

- Kapitel 4 - Givens-Rotation Bsp 4.15 S. 25

LR-Zerlegung

- symmetrisch positiv definit Rang$(A) = n$ Normalgl.: $A^T A \cdot x = A^T b$
- Welche Verfahren sind instabil?

Householder - Trafo

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. $\alpha = \|a_1\|_2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad a_{11} = -\alpha$
2. Spiegelungsvektor: $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (+1) \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $A_1 = A - \frac{2 \cdot v}{v^T \cdot v} \cdot (v^T A) \qquad v^T v = \|v\|_2^2 = 5^2 + 2^2 + (-1)^2 = 30$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{30} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (5, 2, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{-3} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $b_1 = b - \frac{2}{v^T \cdot v} \cdot v\,(v^T b) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (5, 2, -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-15) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. A_1 besitzt schon obere Δ-Gestalt: $\min \|Ax - b\|_2 = \min \|R \cdot x - \hat{b}\|_2$

$$A_1 = R = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}$$

6. Rückwärtseinsetzen: $\hat{R} \cdot x = \hat{b}_1 \qquad -\frac{5}{2}\beta = -2 \qquad 1\;\; -3\alpha - 2\beta = 4$
   $x^* = (\alpha, \beta)^T = \left(-\frac{28}{15}, \frac{4}{5}\right)^T$

7. Residuum: $\|A \cdot x^* - b\|_2 = \|\hat{b}_2\|_2 = 1$

$$A_0 = (A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow a_1 & \uparrow a_2 & \uparrow b \end{array}$$

1.) Berechne $v_1 = a_1 + \alpha \cdot e^1$ mit $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha = \text{sign}(a_{11}) \cdot \|a_1\|$

↑ meist "2-Norm" siehe Aufgabe

2.) " $\beta_1 = \frac{2}{v_1^T \cdot v_1}$

3.) $Q_{v_1} \cdot a_1 = a_1 - \beta_1 \cdot v_1 (v_1^T \cdot a_1) = -\alpha \cdot e^1$

$Q_{v_1} \cdot a_2 = a_2 - \beta_1 \cdot v_1 (v_1^T \cdot a_2) =$

$Q_{v_1} \cdot b = b - \beta_1 \cdot v_1 (v_1^T \cdot b)$

4.) Ergebnis: $Q_{v_1} \cdot A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & \boxed{*} \\ 0 & \boxed{*} & \boxed{*} \end{array}\right) A_1$

5.) wie 1-4) nur mit A_1 statt A_0

Ergebnis: $Q_{v_n} \cdots Q_{v_2} \cdot Q_{v_1} (A|b) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\tilde{R}}{\nabla} & \tilde{b} \\ \hline 0 & \hat{b} \end{array}\right)$

6.) Löse: $R \cdot \tilde{x} = \tilde{b} \rightarrow x$ minimaler Fehler: $r = \|\hat{b}\|_2$ Residuum

Gleitpunktarithmetik

- 3-stellig: Standardrundung
  $1.01 - 5 \cdot 10^{-3} = 1.01$

Newton-Verfahren

$f(x) = Ax - b$ Startwert: x_0

1. Iteration v. $f(x)$: $x_1 = A^{-1} b$

$x_1 = x_0 - [f'(x_0)^{-1}] f(x_0)$

Fehlerverstärkung

Kondition + Stabilität:

- Algo stabil, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems unvermeidbaren Fehlers bleiben.
- Subtraktion zweier gleichgroßer Zahlen => schlecht konditioniert

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbare Matrix

- $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 \Rightarrow \kappa_2(A) = \kappa_2(A^{-1})$

  $\kappa_2(A) = \kappa_2(A^T A)$.

  $= \sqrt{\kappa_2(A^T A)}$

$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)}$

1. Berechne $A^T A$

Charakt. Polynom: $\det(\lambda I - A^T A)$

$\kappa_2(A^T A) = \sqrt{\frac{\lambda_{1max}}{\lambda_{2min}}}$

- $\cos\Theta = \frac{\|A \cdot x^*\|_2}{\|b\|_2}$

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} = \frac{\kappa_2(A) \|b - \tilde{b}\|_2}{\cos\Theta \|b\|_2}$$

, falls $\frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \gg 1$ hohe Fehlerverstärkung trotz guter Kondition

Rundungsfehler: $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A^2)$ $\cos\Theta \approx 1 \Rightarrow$ instabil

Rechenaufwand:

Gaußelimination: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ (Mult. und Addition)

Cholesky-Verfahren: $\frac{1}{6}n^3 + O(n^2)$ $(L\text{-}D\text{-}L^T)$

QR - Zerlegung (House-Trafo): $\frac{2}{3}n^3$

LR - Zerlegung mit Pivotisierung: $\frac{1}{3}n^3$

Givens: $\frac{4}{3}n^3$

Skalierung: $O(n^2)$

Vorwärts/Rückwärtseinsetzen: $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$

Skalierung/Äquilibrierung verbessert: Kondition, Stabilität

Pivotisierung

Lösung des linearen Ausgleichproblems

$$\|A\cdot x^* - b\|_2 = \min \|A\cdot x - b\|_2 \qquad x^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T$$

Givens - Rotation

- Erzeuge Dreiecksmatrix R => $A = QR$ - Zerlegung
- Trafo beeinflusst nur den i-ten u. l-ten Eintrag ($l+1$) - unverändert
  - l-te Eintrag: 0 i-te Eintrag: r
- Gewünscht: Eliminierung des l-ten Eintrags

für $r = \pm\sqrt{x_i^2 + x_l^2}$ $c = \frac{x_i}{r}$, $s = \frac{x_l}{r}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} \frac{x_i}{r} & 0 & \frac{x_l}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_l}{r} & 0 & \frac{x_i}{r} \end{pmatrix}$$

$$G_{21} \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_{32} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

Vorgehen:

- Annulierung von: a_{21}: $r =$ $c =$ $s =$
- Matrix G_{21} auf A und b anwenden. $A^{(1)} = G_{21}\cdot A$, $b^{(1)} = G_{21}\cdot b$
- a_{31}, a_{32} $r =$ $c =$ $s =$

  G_{32} $A^{(2)} = G_{32}\cdot A^{(1)}$ $b^{(2)} = G_{32}\cdot b^{(1)}$

|

Rückwärts einsetzen: $A^{(2)}\cdot x = b$ $x = (\quad)$

Norm des Residuums: $\|A\cdot x^* - b\|_2$

- Givensrotationen

Householder - Trafo -

Das lin. Ausgleichsproblem lautet: Finde $x = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$
so daß $\|A \cdot x - b\|_2$ minimal ist

1. Bringe A mittels H.-Trafo auf Δ-Gestalt:
   Norm der 1. Spalte v. A:
   $\|a_1\|_2 = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}$ =

2. 1. Spiegelungsvektor: $v = a_1 + \text{sign}(a_{11}) \|a_1\|_2 \cdot e_1$
   mit: $v^T v = \|v\|_2^2$

3. Anwendung der H-Spiegelung auf A ergibt:
   $A_1 = A - \frac{2 \cdot v}{v^T v} \cdot (v^T A)$
   $Q_v \cdot y_1 = -\alpha \cdot e_1$ $\quad Q_v \cdot y_2 = y_2 - \frac{2 \cdot v}{v^T \cdot v} \cdot (v^T \cdot y_2)$

4. Anwendung auf b liefert:
   $b_1 = b - \frac{2}{v^T v} \cdot v (v^T b)$

5. $\min \|Ax - b\|_2 = \min \|R \cdot x - \hat{b}\|_2$

6. Rückwärts einsetzen: $\hat{R} \cdot x = \hat{b}_1$ $\quad x^* = (\alpha, \beta)^T$

7. $\|A \cdot x^* - b\|_2 = \|\hat{b}_2\|_2$