Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 4
Serie 01 vom 12. April 2010

Teil A

Aufgabe A1 Zerlegen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil:

$$z_1 = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}, \qquad z_2 = \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1}.$$

Aufgabe A2 Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z_2 = -1 - i.$$

Aufgabe A3 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Aufgabe A4

- Zeigen Sie, dass $\overline{z} = z^{-1}$ äquivalent ist zu $|z| = 1$.
- Zeigen Sie die Gleichheit $|z-a|^2 = |z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2$.

Aufgabe A5 Welche Punkte der z-Ebene erfüllen $z = 1 + i + \lambda(5-2i)$ mit reellem $\lambda \geq 0$ bzw. $|(1+i)z| = 5$?

Aufgabe A6 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot z^n}{n^n}$.

Teil B

Aufgabe B1 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = 1 + i, \quad z^3 = -i, \quad z^3 = -5 - 5i\,.$$

Aufgabe B2 Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahl an:

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i\,.$$

Berechnen Sie $\sqrt{z}$.

Aufgabe B3 Zeigen Sie: $|z| = 1 \Rightarrow \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$.

Aufgabe B4 Geben Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ an, mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, wobei aber $(\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 2\pi)$ nicht konvergiert.

Aufgabe B5 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.$$

Aufgabe B6 Welche Punkte der z-Ebene erfüllen

a) $z = 2 - i + 5e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$, **b)** $|z-3| < 3|z+3|$,

c) $\mathrm{Im}(z) \geq -2$, **d)** $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$?

Aufgabe B7 Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^{2n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^{2n}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

21. APR. 2010

B 1.)

$$z^4 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$
$$= \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi i}{2}} \qquad \text{mit } k=0,1,2,3$$
$$z=\left\{\sqrt[8]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}},\ \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)},\ \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)},\ \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3}{2}\pi\right)}\right\}$$

$$z^3 = -i = e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)}$$
$$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{1}{2}\pi+2k\pi\cdot\frac{1}{3}\right)} \qquad \text{mit } k=0,1,2$$
$$z=\left\{e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)}\right\}$$

$$z^3 = -5-5i$$
$$\Rightarrow z=\left\{\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)} \quad \text{mit } k=0,1,2\right\}$$

B 2.) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

Zunächst: $\sqrt{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$

$$\Rightarrow z=\left\{\underbrace{-\sqrt{2}+1+i}_{z_1},\ \underbrace{-\sqrt{2}-1-i}_{z_2}\right\}$$

$$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2}+1)^2+1} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$
$$|z_2| = \sqrt{4+\sqrt{2}\cdot 2}$$

$$z=x+iy$$
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0,\ y\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & x<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi & x>0,\ y<0 \\ \pi/2 & x=0 \quad y>0 \\ \frac{3}{2}\pi & x=0 \quad y<0 \end{cases}$$

$\arg(z) =$ unbestimmt für $x = y = 0$

$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \pi\right)$

$\arg(z_2) = \arctan\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \pi\right)$

$\Rightarrow z = \left\{ \sqrt{4-2\sqrt{2}}\, e^{i(\arctan(\frac{1}{1-\sqrt{2}}) + \pi)},\ \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot e^{i(\arctan(\frac{1}{1+\sqrt{2}}) + \pi)} \right\}$

$\sqrt{z_1} = \sqrt{|z_1|} \cdot e^{i\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{1-\sqrt{2}}) + i\frac{\pi}{2} + ik\pi}$

$\sqrt{z_2} = \sqrt{|z_2|}\, e^{i\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{1+\sqrt{2}}) + i\frac{\pi}{2} + ik\pi}$ mit $k = 0,1$

3.)

$|z| = 1$

$|\bar{z}| = 1$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z| \cdot |\bar{z}|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z} - \bar{a}z \cdot \bar{z}|}$

$= \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \frac{|z-a|}{|z-a|} = \underline{\underline{1}}$

4.)

$z_n = \frac{1}{n} \cdot e^{i(-1)^n \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n} \cdot i \cdot (-1)^n$

$|z_n| \to 0$, aber $\arg(z_n)$ divergiert.

5.)

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$0 \stackrel{!}{=} \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\Leftrightarrow e^{ix-y} = e^{y-ix}$

$\Rightarrow |e^{ix-y}| = |e^{y-ix}|$

$\Leftrightarrow e^{-y} \cdot |e^{ix}| = e^{y}\, |e^{-ix}|$

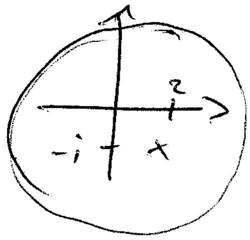
$\Leftrightarrow e^{-y} = e^{y}$

$\Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow \sin(z)$ hat nur reelle Nullstellen
(die des reellen $\sin \Rightarrow \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

6.) a.) $z = 2 - i + 5e^{i\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$

$M_a = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| = 5 \}$



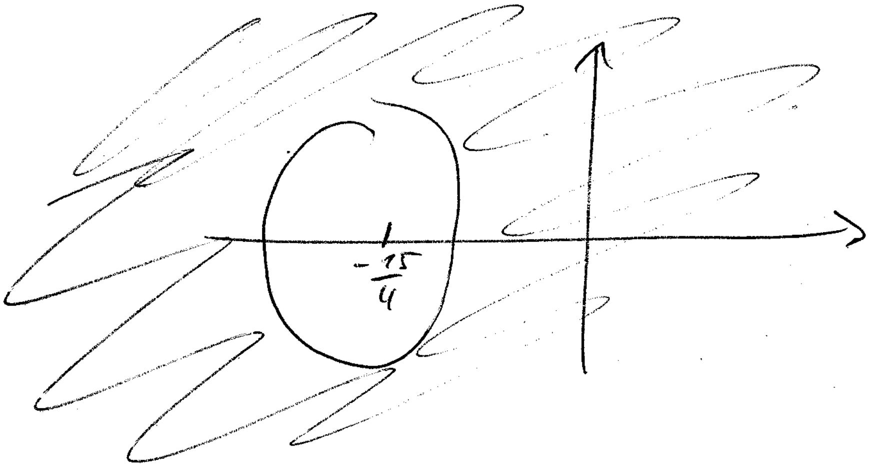
b.) $|z - 3| < 3|z + 3|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 3\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

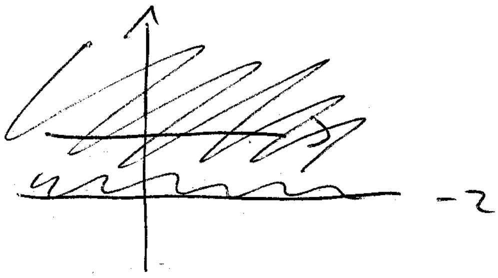
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 9(x^2 + 6x + 9 + y^2) \qquad | \cdot \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow -9 < x^2 + \frac{15}{2}x + y^2$

$\Leftrightarrow \frac{81}{16} < (x + \frac{15}{4})^2 + y^2$



c.) $\mathrm{Im}(z) \geq -2$



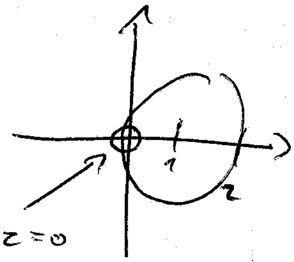
d.) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = -x^2 + 2x$$

$$y^2 + (x-1)^2 = 1$$



ohne $z=0$

B7.) a.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow$ Konvergenzradius $0 < R < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z'^n$$

Konvergenzradius in $z' = z^2$: R

„substituieren" $z' = z^2$

$\Rightarrow$ für z: $\sqrt{R}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^n \Rightarrow \lim_{n \to 0} \sqrt[n]{|a_n^2|}$

[Satz 7.3. Wurzelkriterium für Potenzreihen
S. 91 f
$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{R}$]

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}^{\,2} = \frac{1}{R^2}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R^2 > |z|$

21. APR. 2010

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n \cdot z'^n$

Konvergenz für $|z'| < R^2$

$|z| < R$

d.)

Quotientenkriterium für Potenzreihen (S. 92 f)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \to \frac{1}{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}}$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$.