28. OKT. 2009

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 03 vom 26. Oktober 2009

Teil A

Aufgabe A7 Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 4.10 (Lagrange-Multiplikator) das achsenparallele Rechteck mit dem größten Umfang dessen Eckpunkte auf der Ellipse

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} = 1\right\}$$

liegen.

Aufgabe A8 Betrachten Sie die Funktion $F : (0, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(y) := \int_0^{\sin(y)} \arctan(\tan(y) - x)dx.$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und berechnen Sie $F'(0)$.

Aufgabe A9 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenziebare Funktion. Durch $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(y, a, b) := \int_a^b f(x, y)dx$$

wird eine differenzierbare Funktion festgelegt. Berechnen Sie im Fall $f(x, y) := y^2 \exp(x)$, $a = a(y) := \log(y)$, $b = b(y) = 2\log(y)$ für $y > 0$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y, a(y), b(y)) \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{dy} F(y, a(y), b(y)).$$

Aufgabe A10 Man bestimme die Punkte der Sattelfläche $x^2 - y^2 = 8z$, die vom Punkt $P = (0, 0, 2)$ den kleinsten Abstand besitzen und prüfe, ob dieser Abstand kleiner als 1 ist. Verwenden Sie hierfür die explizite Methode (d.h. Einsetzen der Nebenbedingung).

Teil B

Aufgabe B9 Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 4.10 (Lagrange-Multiplikator) den achsenparallelen Quader mit dem größten Volumen dessen Eckpunkte auf dem Ellipsoid

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{8} = 1\right\}$$

liegen.

Aufgabe B10 Betrachten Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x - (1,3)\| < 1\},\\
\Omega_2 &:= \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le r < 1, \quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{5}{4}\pi < \varphi < \frac{7}{4}\pi\},\\
\Omega_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}.
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die angegebenen Mengen. Handelt es sich um Gebiete? Geben Sie eine Parametrisierung der Randkurven an und zeichen Sie den Umlaufsinn in Ihre Skizze ein.

Aufgabe B11 Betrachten Sie die Funktion $F : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(y) := \int_{\arcsin(y)}^{\pi} \exp(y\sin(x))dx.$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und berechnen Sie $F'(0)$.

Aufgabe B12 Lösen Sie Aufgabe A10 mit der Methode der Langrange-Mulitplikatoren.

Aufgabe B13 Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, M offen, nicht leer, eine auf ihrem Definitionsbereich differenzierbare Funktion. Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils deren Wahrheitswert an.

(a) Dann ist f auf M auch stetig.

(b) Die Funktion f ist partiell differenzierbar.

(c) Verschwinden die partiellen Ableitungen von f überall, so ist f konstant.

(d) f ist Riemann-integrierbar.

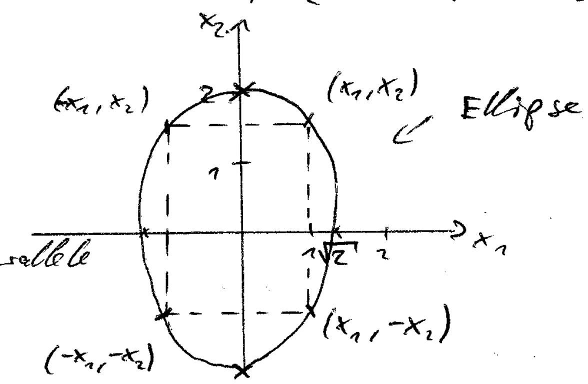
(e) Mit dem Satz von Taylor folgt:

$$\forall_{x,x_0 \in M} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$$

AM3 GÜ3 28. OKT. 2009

A1.) $\mathcal{E} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} = 1 \}$

Skizze:



gesucht: Achsenparallele Rechtecke

Umfang des Rechtecks hängt nur von der Wahl eines Eckpunktes (x_1, x_2) des Rechtecks ab.

o.B.d.A. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$U(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$

$\Rightarrow$ ~~maximiere~~ maximiere $U(x_1, x_2)$ unter NB:

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - 1 = 0$$

- Da U stetig und Def. Bereich kompakt, existiert ein Maximum. (auf dem Def. Bereich)
- $\nabla g(x_1, x_2) \neq 0$ für $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ $\left(\nabla g(x_1, x_2) = (x_1, \frac{1}{2} x_2) \right)$

sei (x_1, x_2) eine Extremstelle, dann gilt:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla U(x_1, x_2) + \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) = 0$

und $g(x_1, x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} = 0 \wedge \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \cdot x_1 = -4 \\ \lambda \cdot \frac{1}{2} x_2 = -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda x_1^2 = -4x_1 \\ \lambda \cdot \frac{1}{2} x_2^2 = -4x_2 \end{array}\right\} +$$

$$2\lambda\left(\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{4}\right) = -4(x_1+x_2)$$

$\Rightarrow \lambda = -2 \cdot (x_1 + x_2)$ [in Beide Ursprungsgl. eingesetzt]

$\Rightarrow x_2^2 + x_1 x_2 = 2 \quad \wedge \quad x_1 x_2 + x_2^2 = 4$

$\left(\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} = -1 + \frac{x_2^2}{2}\right)$

$\Rightarrow x_1^2 + 4 - x_2^2 = 2$ [nach $x_1 x_2$ aufgelöst und gleichgesetzt]

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - 1}_{0} = -2 + \frac{3}{4} x_2^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{3}{4} x_2^2 \Rightarrow \frac{8}{3} = x_2^2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{6}}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{6}}}$$

$\Rightarrow$ Extremum wird an Stelle $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}\sqrt{6}; \frac{2}{3}\sqrt{6})$ angenommen, d.h. gesuchtes Rechteck besitzt die Eckpunkte $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$, mit $U(x_1, x_2) = 4 \cdot \sqrt{6}$.

HM3 GÜ 3 28. OKT. 2009

A8.) $F: (0, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_0^{\sin(y)} \arctan(\tan(y) - x)\, dx$$

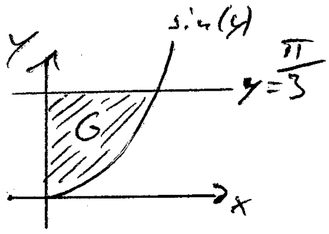
Zeigen: F ist diff'bar, $F'(0) = ?$

Wollen Leibniz-Regel anwenden.

Prüfen Voraussetzungen:

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < \frac{\pi}{3},\ 0 < x < \sin(y)\}$$

Skizze:



G ist offen, ~~da~~ viel zusammenhängend,

d.h. G ist Gebiet. ✓

$\alpha(y) = 0$, ~~sin(y)~~ $\beta(y) = \sin(y)$

sind auf $[0; \frac{\pi}{3}]$ diff'bar. ✓

$f(x,y) = \arctan(\tan(y) - x)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1 + \tan^2(y)}{1 + (\tan(y) - x)^2}$

auf $\overline{G}$ stetig. ✓

Leibniz-Regel

$\Rightarrow F(y)$ stetig, und diff'bar auf $[0; \frac{\pi}{3}]$

und $F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$

also $F'(0) = 0 + f(0,0) \cdot \cos(0) - f(0,0) \cdot 0$

$= f(0,0)$

$$= \arctan(\tan(0) - 0) = \underline{\underline{0}}$$

A9.) $$F(y, a, b) := \int_a^b f(x,y)\, dx$$

mit $f(x,y) = y^2 \cdot e^x$

$$a = a(y) = \ln(y), \quad b = b(y) = 2 \cdot \ln(y)$$

Zu bestimmen: $\frac{\partial}{\partial y} F(y, a(y), b(y))$, sowie $\frac{\partial}{\partial x} F(y, a(y), b(y))$

i.) $$\frac{\partial}{\partial y} F(y, a(y), b(y)) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} 2y e^x\, dx = \int_{\ln(y)}^{2\ln(y)} 2y e^x\, dx = 2y e^x \Big|_{\ln(y)}^{2\ln(y)}$$

$$= 2y \cdot y^2 - 2y \cdot y \underline{= 2y^3 - 2y^2}$$

ii.) $$\frac{d}{dy} F(y, a(y), b(y)) = \frac{\partial}{\partial y} F + \frac{\partial}{\partial a} F \cdot a'(y) + \frac{\partial}{\partial b} F \cdot b'(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} F = -f(a(y), y), \quad a'(y) = \frac{1}{y}$$ analog:

$$\frac{\partial}{\partial b} F = f(b(y), y), \quad b'(y) = \frac{2}{y},$$

also: $$\frac{d}{dy} F = 2y^3 \cancel{3} - 2y^2 \cancel{4} - f(\ln(y), y) \cdot \frac{1}{y} + f(2\ln(y), y) \frac{2}{y}$$

$$= 2y^3 - 2y^2 - y^2 y \cdot \frac{1}{y} + y^2 \cdot \cancel{4} \cdot y^2 \cdot \frac{2}{y}$$

$$= 2y^3 - 2y^2 - y^2 + 2 \cdot y^3 \underline{\underline{= 4y^3 - 3y^2}}$$

AM3 GÜ 3

A10.) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 8z\}$

und $P = (0,0,2)$

gesucht: $P' \in S$ mit $\|P' - P\|$ minimal.

Abstand von $P' = (x,y,z)$ von $P = (0,0,2)$:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2}$$

$\Rightarrow$ genügt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-2)^2$ zu maximieren

$\Rightarrow$ Aufgabe: maximiere $f(x,y,z)$ unter

NB $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - 8z = 0$

Explizites Verfahren: $\overset{NB}{\Leftrightarrow} z = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)$

$\Rightarrow$ einsetzen in f: $f(x,y,z(x,y))$

$= \hat{f}(x,y) = x^2 + y^2 + (\frac{1}{8}(x^2-y^2) - 2)^2$

$= x^2 + y^2 + \frac{1}{64}(x^2 - y^2 - 16)^2$

$$\nabla \hat{f}(x,y) = \Big(2x + \frac{1}{64} \cdot 2 \cdot (x^2 - y^2 - 16) \cdot 2x,\; 2y + \frac{2}{64}(x^2 - y^2 - 16) \cdot (-2)y$$

$$= \Big(2x + \frac{1}{16}(x^2 - y^2 - 16) \cdot x,\; 2y - \frac{1}{16}(x^2 - y^2 - 16)y\Big)$$

(x,y) Extremum $\Rightarrow \nabla \hat{f}(x,y) = 0$, d.h.

$x \cdot (32 + x^2 - y^2 - 16) = 0 \wedge y \cdot (32 - x^2 + y^2 + 16) = 0$

$\Rightarrow (x = 0 \vee x^2 - y^2 = -16) \wedge (y = 0 \vee x^2 - y^2 = 48)$

$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$. Also einziges Extremum bei $(0,0)$.

prüfen ob $(0,0)$ wirklich Extremum mit Hesse-Matrix

$$H_{\hat{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{f}_{xx}(x,y) & \hat{f}_{xy}(x,y) \\ \hat{f}_{yx}(x,y) & \hat{f}_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$\tilde{f}_{xx}(x,y) = 2 + \frac{1}{16}(x^2 - y^2 - 16) + \frac{x}{16} \cdot 2x$

$\tilde{f}_{yy}(x,y) = 2 - \frac{1}{16}(x^2 - y^2 - 16) - \frac{y}{16} \cdot (-2y)$

$\tilde{f}_{xy}(x,y) = \tilde{f}_{yx}(x,y) = \frac{x}{16} \cdot (-2y)$

$H_{\tilde{f}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. EW 1;3 beide > 0

$\Rightarrow H_{\tilde{f}}(0,0)$ ist positiv definit.

$\Rightarrow (0,0)$ ist ein Minimum

$z = \frac{1}{8}(x^2 - y^2) = 0$, das heißt $p' = (0,0,0)$
und $\| p' - p \| = 2 > 1$.