Ti 1 - Zusatzübung

21. MRZ. 2011

1.a.)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\overset{!}{=} P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$\Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

d.h. die Ereignisse A und B sind s.u.

b.) 3motorig:

„H" Hauptmotor (Ausfall)

$S_i$ Seitenmotor $i = 1, 2$ (Ausfall)

A Ereignis des Absturzes

$$P(A \mid 3\text{motorig}) = P(H \cup (S_1 \cap S_2))$$
$$= P(H) + P(S_1 \cap S_2) - P(H \cap (S_1 \cap S_2))$$
$$\overset{H, S_i \text{ s.u.}}{=} p + p^2 - p^3$$

4 motorig:

„$S_i$" Ausfall v. Seitenmotor $i = 1, .., 4$

$$P(A \mid 4\text{motorig}) = P((S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4))$$
$$= P(S_1 \cap S_2) + P(S_3 \cap S_4) - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$$
$$\overset{S_i \text{ s.u.}}{=} p^2 + p^2 - p^4$$
$$= 2p^2 - p^4$$

c.) $0 < p < 1$, Kurven überschneiden sich ~~nicht~~ (auf Grafik)

Wähle z.B. $p = \frac{1}{2}$

$P(A \mid 3\text{mot})\big|_{p=\frac{1}{2}} = 5/8 \qquad P(A \mid 4\text{mot})\big|_{p=\frac{1}{2}} = \frac{7}{16}$

$$P(A \mid 3\,\text{mot.})\Big|_{p=\frac{1}{2}} > P(A \mid 4\,\text{mot})\Big|_{p=\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Die obere Kurve korrespondiert zur 3 motorigen Maschine.

d.)
$$P(4\,\text{mot} \mid A) = \frac{P(A \mid 4\,\text{mot})\, P(4\,\text{mot})}{P(A)}$$

$$P(4\,\text{mot}) = 0{,}7$$

$$P(A) = P(A \mid 4\,\text{mot})\, P(4\,\text{mot}) + P(A \mid 3\,\text{mot})\, P(3\,\text{mot})$$

Satz d. totalen W'keit

$$= (p + p^2 - p^3) \cdot 0{,}3 + (2p^2 - p^4) \cdot 0{,}7$$
$$\approx 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow P(4\,\text{mot} \mid A) \approx 4{,}667 \cdot 10^{-5}$$

T 11 Zusatzübung



2.)

a.) $Y = h \cdot X \qquad h > 0 \qquad X \sim Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$$

$$x = \frac{1}{h} \cdot y$$

Transformationssatz

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|} \cdot f_X\left(x = \frac{y}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \frac{y}{h}} \cdot 1_{[0,\infty)}\left(\cancel{\tfrac{x}{h}}\right)$$

mit $\mu = \frac{\lambda}{h}$

$$= \mu \cdot e^{-\mu y} \, 1_{[0,\infty)}(y)$$

$$\Rightarrow Y \sim Exp\left(\frac{\lambda}{h}\right)$$

b.) $Z = hX + N \qquad h = \frac{1}{2}$

$X \sim Exp(\lambda) \qquad N \sim Exp(\mu) \qquad \lambda, \mu > 0$

$$Z = \frac{1}{2} X + N$$

$$= Y + N \qquad \text{mit } Y \sim Exp(2\lambda) \quad \text{siehe a.)}$$

Da $Y, N$ stochastisch unabhängig.

mit Faltung

$$f_Z(z) = \int f_Y(y) f_N(z-y)\, dy$$

$$= \int 2\lambda e^{-2\lambda y} \cdot 1_{[0,\infty)}(y) \cdot \mu \cdot e^{-\mu(z-y)} \, 1_{[0,\infty)}(z-y)\, dy$$

$$= 2\lambda\mu \, e^{-\mu z} \int_0^\infty e^{-(2\lambda-\mu)y} \, 1_{[0,\infty)}(z-y)\, dy$$

wegen

$$z - y \overset{!}{\geq} 0 \iff y \leq z$$

Folgt

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(2\lambda-\mu)y}\,dy \cdot 2\lambda\mu e^{-\mu z}$$

$$= \begin{cases} 2\lambda\mu e^{-\mu z}\, z & \text{für } 2\lambda=\mu \\ \dfrac{2\lambda\mu e^{-\mu z}}{\mu-2\lambda} \cdot e^{-(2\lambda-\mu)y}\Big|_0^z & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu^2 \cdot z \cdot e^{-\mu z} & \text{für } 2\lambda=\mu \\ \dfrac{2\lambda\mu e^{-\mu z}}{\mu-2\lambda}\left[e^{-(2\lambda-\mu)z} - 1\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $\underline{Y} = A \cdot \underline{X}$ $\qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\underline{X} = A^{-1}\underline{Y}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -1/2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\det(A)}$ $\qquad \det(A) = \frac{1}{3}$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Transformationssatz

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right| = \left|\det \overbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}^{J}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{|\det(J)|} \cdot f_{X_1,X_2}(\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{y})$$

$$= 3 \cdot f_{X_1}\left(\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right) \cdot f_{X_2}\left(-\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right)$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot e^{-2\cdot(\frac{3}{2}y_1 + y_2)} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right)$$

$$\cdot \left(-\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right) e^{-(-\frac{3}{2}y_1 + y_2)} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(-\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right)$$

Ti 1 Zusatzübung 

$$= (-9y_1 + 6y_2)\, e^{-\frac{3}{2}y_1 - 3y_2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(-\tfrac{3}{2}y_1 + y_2\right)$$

Ferner sind

1.) $y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 0$ da $x_1, x_2 > 0$

2.) $\frac{3}{2}y_1 + y_2 \geq 0 \iff y_1 \geq -\frac{2}{3}y_2$

3.) $-\frac{3}{2}y_1 + y_2 \geq 0 \iff y_1 \leq \frac{2}{3}y_2$

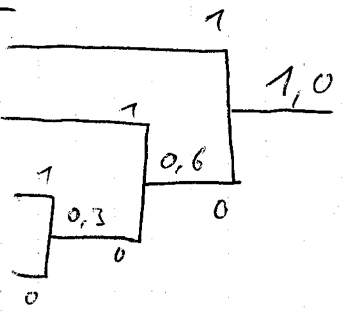
$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = (-9y_1 + 6y_2)\, e^{-\frac{3}{2}y_1 - 3y_2}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_2) \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{2}{3}y_2,\, \frac{2}{3}y_2]}(y_1)$$

## Aufgabe 3.)

a.) $H(X) = -\sum_i p_i \cdot \log(p_i) \approx 1{,}846$

b.)

| | $p_i$ |
|---|---|
| A | 0,4 |
| B | 0,3 |
| C | 0,2 |
| D | 0,1 |




| X | g(X) | i | $p_i$ | $n_i$ | $p_i \cdot n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 0,4 | 1 | 0,4 |
| B | 0 1 | 2 | 0,3 | 2 | 0,6 |
| C | 0 0 1 | 3 | 0,2 | 3 | 0,6 |
| D | 0 0 0 | 4 | 0,1 | 3 | 0,3 |

mittlere Kodelänge: $\bar{n}(g) = \sum_i n_i \cdot p_i = \underline{\underline{1{,}9}}$

c.)  Da die Quelle gedächtnislos ist, sind die Symbole s.u.

d.h. $H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2)$

$= 2 \cdot H(X) \approx 3{,}692$

$\Rightarrow$ Ein optimaler Kode hat mindestens $\frac{3{,}692}{2} = 1{,}846$ Zeichen pro Symbol

$0{,}95 \cdot 1{,}9 \leq 0{,}95 \cdot 1{,}91 = 1{,}8145 < 1{,}846$

$\Rightarrow$ dies bedeutet, dass gegenüber dem Kode von b.) keine Verbesserung um 5% möglich ist.

d.)

$CD \rightarrow 001000$

e.)

$\downarrow \varepsilon$

$000000 \rightarrow DD$

f.) $P_K = \sum_{c \in C} P(Y = c, X = c)$

$= \sum_{c \in C} P(Y = c \mid X = c) \cdot P(X = c)$

$= (1-\varepsilon)^3 \cdot \underbrace{\sum_{c \in C} P(X = c)}_{=1}$

$= (1-\varepsilon)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$

T 1 1 Zusatzübung

Alle Werte mit $4^3 \cdot p(y=b|x=c)$

21. MRZ. 2011

**g.)**

| $y=b$ \ $x=c$ | $c_0$ 000 | $c_1$ 010 | $c_2$ 101 | $c_3$ 111 | $c=h_{ML}(b)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 000 | * $\boxed{27}$ | 9 | 3 | 1 | $c_0$ |
| 001 | ** 9 | 3 | 9 | 3 | $\in \{c_0, c_2\}$ |
| 010 | 9 | $\boxed{27}$ | 1 | 3 | $c_1$ |
| 011 | 3 | 9 | 3 | 9 | $\in \{c_1, c_3\}$ |
| 100 | 9 | 3 | 9 | 3 | $\in \{c_0, c_2\}$ |
| 101 | 3 | 1 | $\boxed{27}$ | 9 | $c_2$ |
| 110 | 3 | 9 | 3 | 9 | $\in \{c_1, c_3\}$ |
| 111 | 1 | 3 | 9 | $\boxed{27}$ | $c_3$ |

Für eine ML-Dekodierung muss gelten:

$$c = h_{ML}(b) \Rightarrow p(y=b|x=c) \geq p(y=b|x=d) \; \forall d \in C$$

$$* \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$** \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

Wähle eine ML-Dekodierung aus 16 Mögl. aus.

**h.)**

$$P = \sum_{d \in D} \sum_{c \in C \setminus \{c_0\}} P(x=c, y=d)$$

$$= \sum_{d \in D} \sum_{c \in C \setminus \{c_0\}} P(y=d|x=c)\, P(x=c)$$

$c_4 = (0,0,1)$

$$= P(y=c_0|x=c_1)\overbrace{P(x=c_1)}^{P_1} + P(y=c_0|x=c_2)\overbrace{P(c_2)}^{1/5}$$

$$+ P(y=c_0|x=c_3)\underbrace{P(x=c_3)}_{P_3}$$

$$+ P(y=c_4|x=c_1)\cdot P(x=c_1) + P(y=c_4|x=c_2)P(x=c_2)$$

$$+ P(y=c_4|x=c_3)\, P(x=c_3)$$

$$= \varepsilon(1-\varepsilon)^2 \cdot p_1 + \varepsilon^2(1-\varepsilon)\frac{1}{5} + \varepsilon^3 p_3 + \varepsilon^2(1-\varepsilon) p_1$$
$$+ \varepsilon(1-\varepsilon)^2 \frac{1}{5} + \varepsilon^2(1-\varepsilon) p_3$$

$$= \varepsilon(1-\varepsilon)\left(p_1 + \frac{1}{5}\right) + \varepsilon^2 p_3$$
$$= \frac{3}{16} p_1 + \frac{1}{16} p_3 + \frac{3}{80}$$

zur Minimierung von $P$

1.) $p_1 < p_3$

$$\Rightarrow \quad p_0 = p(x=c_0) = 0{,}4 \qquad p_1 = p(x=c_1) = 0{,}1$$
$$p_2 = p(x=c_2) = 0{,}2 \qquad p_3 = p(x=c_3) = 0{,}3$$

$c_0 \Longleftrightarrow A$ $\qquad$ $c_1 \Longleftrightarrow D$

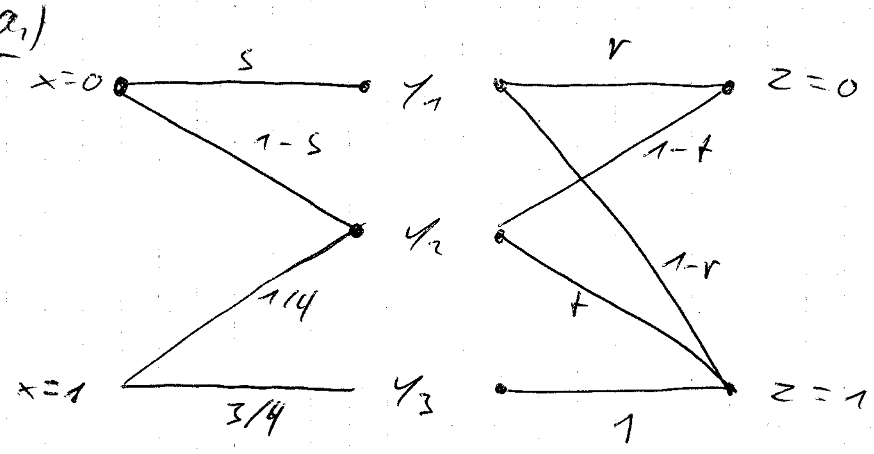
$c_2 \Longleftrightarrow C$ $\qquad$ $c_3 \Longleftrightarrow B$

$$P = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{80} = 7{,}5\,\%$$

TI 1 Zusatzübung 

4.)

a.)

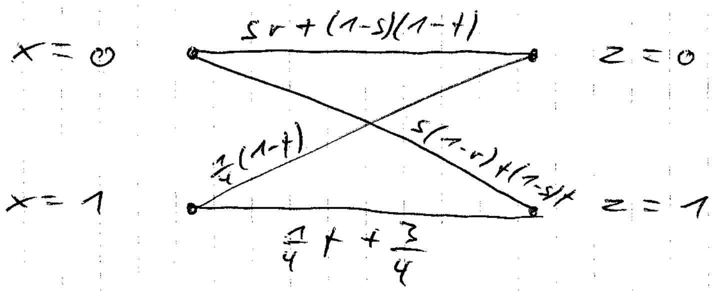



b.)

$$p(z=j \mid x=i) = \sum_{y_k} P(z=j \mid y=y_k)\, P(y=y_k \mid x=i)$$

=>

$$p(z=0 \mid x=0) = s \cdot r + (1-s)(1-t)$$
$$p(z=0 \mid x=1) = \frac{1}{4}(1-t)$$
$$p(z=1 \mid x=0) = s(1-r) + (1-s)\cdot t = 1 - p(z=0 \mid x=0)$$
$$p(z=1 \mid x=1) = \frac{1}{4}\cdot t + \frac{3}{4} = 1 - p(z=0 \mid x=1)$$




Für welche s, t gibt es eine fehlerfreie Detektion?

$$p(z=0 \mid x=1) = 0 = \frac{1}{4}(1-t) \Rightarrow \underline{t=1}$$

Ferner muss gelten

$$p(z=0 \mid x=0) = 1 = sr + (1-s)(1-t) \overset{t=1}{=} \underline{sr = 1}$$

$$r \neq 0$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{r} \leq 1 \Leftrightarrow r \geq 1$$

$$\Rightarrow r = s = 1$$

Für $r = s = t = 1$ ist eine fehlerfreie Detektion möglich.

c)  Für BSC mit $\varepsilon = \frac{1}{8}$ muss gelten:

$$p(z=0 \mid x=1) = \frac{1}{4}(1-t) = \varepsilon = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{t = \frac{1}{2}}$$

Ferner $p(z=1 \mid x=0) = s \cdot (1-r) + (1-s)\,t = \varepsilon = \frac{1}{8}$

mit $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$
und $s \neq 0$ $\quad r = \frac{3+4s}{8s} > 0 \quad \forall s \in (0,1]$

außerdem $r \leq 1 \Leftrightarrow 3+4s \leq 8s$

$\Leftrightarrow s \geq \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \left\{ (r,s,t) \mid t = \frac{1}{2},\ s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right],\ r = \frac{1}{8s}(3+4s) \right\}$$
$$= \left\{ \left(\frac{3+4s}{8s},\ s,\ \frac{1}{2}\right) \mid s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \right\}$$

d)

$$I(X,Z) = H(X) - H(X \mid Z) = H(Z) - H(Z \mid X)$$

für $H(Z)$ wird Verteilung von $Z$ benötigt

$$p(z=0) = \sum_x p(z=0 \mid X=x)\, p(X=x)$$
$$= (1-\varepsilon)\, p_0 + \varepsilon\,(1-p_0)$$
$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{16}$$

$$p(z=1) = 1 - p(z=0) = \frac{11}{16}$$

$$p(z=1, x=1) = p(z=1 \mid x=1) \cdot p(x=1) = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32}$$
$$p(z=1, x=0) = p(z=1 \mid x=0) \cdot p(x=0) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$
$$p(z=0, x=1) = p(z=0 \mid x=1) \cdot p(x=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$
$$p(z=0, x=0) = p(z=0 \mid x=0)\, p(x=0) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$$

T1 1 Zusatzübung

$$H(z) = -\sum_i p(z=i) \log(p(z=i))$$

$$= -\frac{5}{16} \cdot \log\left(\frac{5}{16}\right) - \frac{11}{16} \log\left(\frac{11}{16}\right) \approx 0{,}8960$$

$$H(z|x) = -\sum_{i,j} p(z=z_i, x=x_j) \log(p(z=z_i, x=x_j))$$

$$= -\left(\frac{7}{8} \log\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{8} \log\left(\frac{1}{8}\right)\right) = 0{,}5436$$

$$\Rightarrow \quad I(x,z) = H(z) - H(z|x) = \underline{0{,}3524}$$

e_1)

Die kapazitätserreichende Eingangsverteilung

$(p_0^*, 1-p_0^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Gleichverteilt

Kapazität des BSC

$$C = 1 + (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon) + \varepsilon \log_2(\varepsilon)$$

$$\overset{\varepsilon=\frac{1}{8}}{=} 0{,}4564 \frac{\text{bit}}{\text{Kanalnutzung}}$$