04. NOV. 2009

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 04 vom 02. November 2009

Teil A

Aufgabe A11 Gegeben sei das ebene Gebiet

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < y < 2, \quad y < x < 4 - y\right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_G xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

Aufgabe A12 Berechnen Sie mittels des Prinzips von Cavalieri in Abhängigkeit von $a, b > 0$ den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

Aufgabe A13 Die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) := \int_x^1 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y .$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 F(x) \, \mathrm{d}x .$$

Aufgabe A14 Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z = 1 + x$, $z = -1 - x$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird und den Ursprung enthält.

Teil B

Aufgabe B14 Gegeben sei das ebene Gebiet, das von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$ begrenzt wird und den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enthält. Skizzieren Sie G in der Ebene, und berechnen Sie das Integral

$$\int_G \sqrt{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe B15 Die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) := \int_{\sqrt{x}}^{1} x \sin(y^2 - x) + \cos(y^2 - x)\, dy\,.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 F(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe B16 Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$K := \{(x, y, z)\, | y^2 < x^2 < z < 2x + 3 < 3\}\ .$$

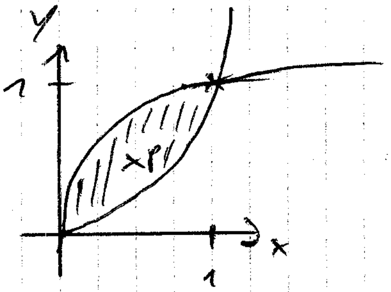
Aufgabe B17 Berechnen Sie mittels des Cavalieri-Prinzips das Volumen der Kugel

$$K := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}\ .$$

12. NOV. 2009

AM3 kGÜ 4

B 14.) $y = x^2 \quad x = y^2 \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



$$\iint_G \sqrt{x}\,dx\,dy$$

$0 < y < 1$

$y^2 < x < \sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow \iint_G \sqrt{x}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} \sqrt{x}\,dx\,dy$$

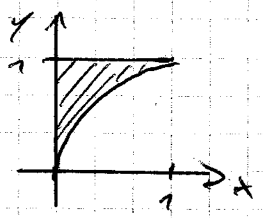
$$= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_{y=0}^{1} y^{\frac{3}{4}}\,dy - \int_{y=0}^{1} y^3\,dy \right)$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{4}{7} \cdot y^{\frac{7}{4}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4} y^4\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{14}$$

B 15.)



$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=\sqrt{x}}^{1} x\cdot\sin(y^2-x)+\cos(y^2-x)\,dy\,dx$$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} x\cdot\sin(y^2-x)+\cos(y^2-x)\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\left[x\cdot\cos(y^2-x)\right]_0^{y^2}dy$$

$$=\int_{y=0}^{1} y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

B 16.)

$$K=\{(x,y,z)\mid y^2<x^2<z<2x+3<3\}$$

$$x^2<2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x+3 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0$$

$\cancel{x^2<2x+3}$

$$2x+3<3 \Leftrightarrow x<0 \qquad -1<3<3$$

$$\cap$$

$$-1<x<0$$

$$I=\iiint_K 1\,dz\,dy\,dx=\int_{x=-1}^{0}\int_{y=-|x|}^{|x|}\int_{z=x^2}^{2x+3} 1\,dz\,dy\,dx$$

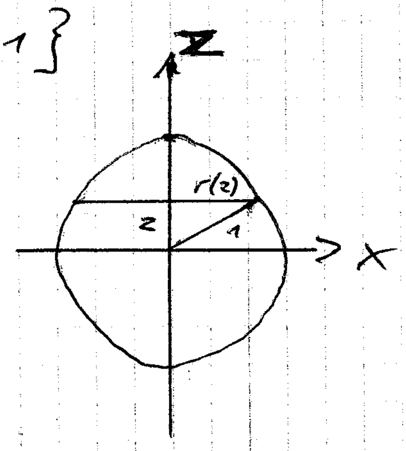
$$=\int_{x=-1}^{0}(2x+3-x^2)\underbrace{(-x-x)}_{=-2x}dx=\int_{x=-1}^{0}-4x^2-6x+2x^3\,dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+\frac{2}{4}x^4\right]_{-1}^{0}=\underline{\underline{\frac{7}{6}}}$$

AM3 KGÜ4 12. NOV. 2009

B17.)

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$



$z^2 + (r^2(z)) = 1$

$\Rightarrow \quad r(z) = \sqrt{1 - z^2}$

$V_k = 2 \cdot V_k^* = 2 \cdot \int_0^1 F_S(z)\, dz$

$= 2\pi \int_0^1 1 - z^2 \, dz$

$= 2\pi \left[z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1$

$\underline{\underline{= \frac{4}{3}\pi}}$

[illegible]