Numa Übung 19.07.2010

Aufgabe 4)

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 2 & 3 & 5 \\ y_i & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

(a) Berechne die 5 fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema

$$\begin{array}{llllll}
x_0 = 0 & 3 & & & & \\
 & & -3/2 & & & \\
x_1 = 2 & [x_1]f & & [x_0, x_1, x_2]f & & \\
 & & [x_1, x_2]f & & & [x_0, x_1, x_2, x_3]f \\
x_2 = 3 & 1 & & -\frac{5}{6} & & \\
 & & [x_2, x_3]f & & & \\
x_3 = 5 & -2 & & & &
\end{array}$$

$$[x_i, \dots, x_m]f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_m]f - [x_i, \dots, x_{m-1}]f}{x_m - x_i}$$

$$[x_k]f = f(x_k)$$

$$[x_1]f = f(x_1) = y_1 = 0$$

$$[x_1, x_2]f = \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = 1$$

$$[x_2, x_3]f = \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = -\frac{3}{2}$$

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{5}{6}$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3]f = \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = -\frac{7}{6}$$

(b) Stellen sie das Interpolationspolynom in Newton- oder Horner-artiger Form dar.

Newton:

$$p_3(x) = \underset{[x_0]f}{3} - \underbrace{\tfrac{3}{2}}_{[x_0,x_1]f}(x-0) + \underset{[x_0,x_1,x_2]f}{\tfrac{5}{6}}(x-0)(x-2) - \underset{[x_0,x_1,x_2,x_3]f}{\tfrac{2}{6}}x(x-2)(x-3)$$

Horner-wertige Form:

$$p_3(x) = 3 + x\left\{-\tfrac{3}{2} + (x-2)\left[\tfrac{5}{6} + (x-3)\left(-\tfrac{2}{6}\right)\right]\right\}$$

(c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_3(x) - f(x)|$ im Intervall $\underline{[2,5]}$ an.

Hinweis: • Für die Ableitungen von f gilt:

$$\left.\begin{array}{l} |f^{(3)}(x)| \le 2{,}5 \\ |f^{(4)}(x)| \le 5 \\ |f^{(5)}(x)| \le 9 \end{array}\right\} \forall x \in [0,5]$$

• Das Knotenpolynom hat Extremstellen bei

$$x_{E1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{und} \quad x_{E3} = \frac{5}{2}$$

Satz 8.22

Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise versch. Stützstellen, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ und $x \in \mathbb{R}$.
Sei $I := [\min\{a,x\}, \max\{b,x\}]$. Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$, so dass

$$(*) \quad f(x) - P(f(x_0, \dots, x_n))(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Insbesondere gilt:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(f(x_0,\dots,x_n)(x)| \le \max_{x\in[a,b]} \left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right| \cdot \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

$(*) \Rightarrow$ 1.) für festes $x = \bar{x}$ gilt:

$$|f(\bar{x}) - P(f|x_0, \dots, x_n)(\bar{x})| \leq \prod_{j=0}^{n} |\bar{x} - x_j| \cdot \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

wichtig: $\bar{x}$ nicht in $f^{(n+1)}(x)$ einsetzen

2) für $x \in [c,d] \subset [a,b]$

$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \leq \max_{x\in[c,d]} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \cdot \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

$$w(\cancel{x}) := \prod_{j=0}^{3} (x - x_j)$$

Bestimme Maximum von $w(x)$ auf $[2,3]$

$w(x)$ nimmt sein Maximum an:

$w'(x) = 0$

am Rand von $[2,3] \leftarrow$ wird in Klausur meistens vergessen

$w(2) = w(3) = 0$

$x_{E1,2} \notin [2,3]$, d.h. das Maximum wird an $x_{E3} = \frac{5}{2}$ angenommen

$$\max_{x\in[2,3]} |P_3(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[2,3]} |w(x)| \cdot \frac{1}{4!} \underbrace{\max_{\xi\in[0,5]} |f^{(n)}(\xi)|}_{\leq 5}$$

$$\leq 1{,}5625 \cdot \frac{1}{24} \cdot 5 \leq 0{,}33$$

$w(x) = (x-0)(x-2)(x-3)(x-5)$