

Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 5

Aufgabe 28

Gegeben sind zwei in z -Richtung unendlich ausgedehnte, parallele Leiter mit Abstand $2a$, die von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen werden (Bild 1). Ausgehend von der in der Vorlesung hergeleiteten Gesamtfeldstärke $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ ist eine parametrische Darstellung der Feldlinien von \vec{H}_{ges} für $I_1 = I_2 > 0$

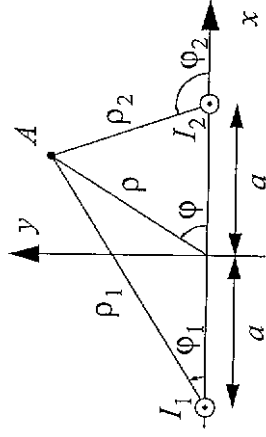


Bild 1

bzw. $I_1 = -I_2 > 0$ gesucht. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass entlang einer Feldlinie von $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ gilt:

$$H_x \cdot dy = H_y \cdot dx.$$

b) Berechnen Sie dann mithilfe einer unbestimmten Integration $\int H_x \cdot dy = \int H_y \cdot dx$ die parametrische Darstellung der Feldlinien.

HINWEIS: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$

c) Welche Dualitäten zum elektrostatischen Feld ergeben sich?

Aufgabe 29

Eine dreieckige, gleichschenklige Leiterschleife der Höhe h und Breite b ist drehbar um die z -Achse gelagert (Bild 2). Sie wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$.

a) Welches mechanische Drehmoment $\vec{L} = L_z \cdot \vec{e}_z$ wirkt auf die Schleife?

b) Für welche Winkel α_1, α_2 ist das Drehmoment Null? In welcher Lage stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein?

Im Folgenden ist das Magnetfeld ortsabhängig mit $\vec{B} = B_0 \cdot (1 + z/h) \cdot \vec{e}_x$. Gesucht wird wiederum das Drehmoment L_z um die z -Achse.

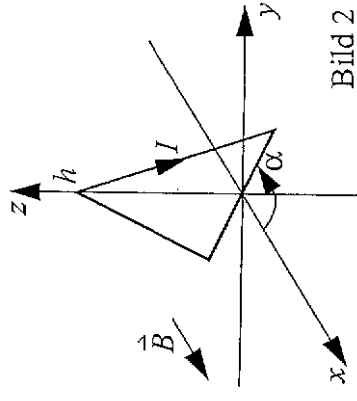


Bild 2

c) Zunächst soll der Beitrag dL_z eines infinitesimalen Leiterstücks $d\vec{s}$ berechnet werden. Welche Komponente (in Zylinderkoordinaten) der Kraft $d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$ trägt zu dL_z bei? Aus welchen Komponenten von $d\vec{s}$ und \vec{B} ergibt sich diese Komponente von $d\vec{F}$?

d) Berechnen Sie die gesuchte Komponente von $d\vec{F}$ und daraus dL_z .

e) Begründen Sie, warum das in der $x-y$ -Ebene liegende Schleifensegment nicht zu L_z beiträgt. Bestimmen Sie L_z durch Integration über z .

Aufgabe 30

Die beiden äußeren Leiter der abgerundeten Zweidrahtleitung haben den Radius R und den Achsenabstand a . Sie dienen als Hin- und Rückleiter für den Strom I_1 . In der Mitte der äußeren Zweidrahtleitung befindet sich eine weitere Zweidrahtleitung mit sehr dünnen Leitern im Abstand b und dem Strom I_2 (Bild 3).

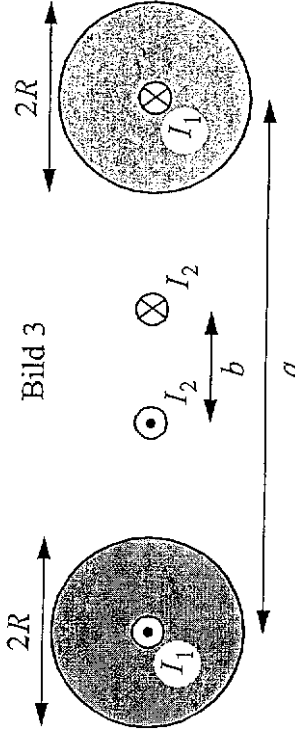


Bild 3

a) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke \vec{H}_1 , die die äußere Zweidrahtleitung zwischen den beiden inneren Leitern erzeugt.

b) Berechnen Sie die längenbezogene äußere Gegeninduktivität L'_{21} der Gesamtanordnung. Bestimmen Sie daraus L'_{12} .

Aufgabe 31

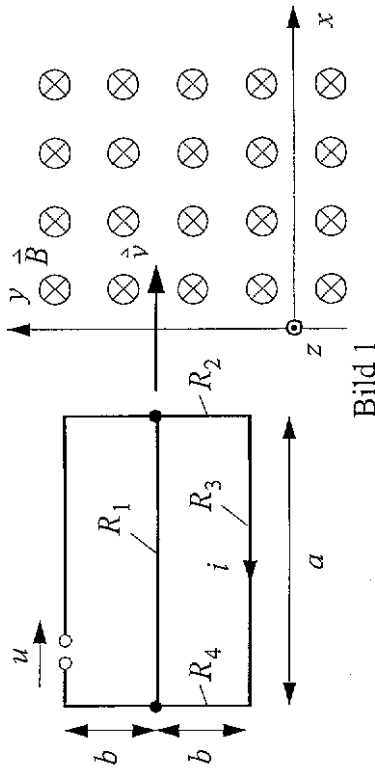


Bild 1

Eine Drahtschleife besteht aus zwei Maschen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in das Magnetfeld \vec{B} , das sich über die gesamte rechte Halbebene ($x \geq 0$) erstreckt (Bild 1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt die rechte Kante der Schleife in das Feld ein. Das vom Strom i verursachte Magnetfeld ist zu vernachlässigen.

- Wie groß ist der Strom i für $a = 30\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $v = 1\text{ms}^{-1}$, $B = 1\text{T}$ und $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$?
- Was ergibt sich damit für die Spannung u ?
- Skizzieren Sie $i(t)$ und $u(t)$ im Zeitbereich $0 \leq t \leq 0,5\text{s}$.
- Welcher Strom $i(t)$ ergibt sich, falls $B(t) = 1\text{T} \cdot e^{-t/\tau}$ mit $\tau = 0,1\text{s}$?

Aufgabe 32

Gegeben ist ein unendlich langes Koaxialkabel, dessen Innenleiter mit Radius R_1 den Strom I führt. Der Außenleiter (R_2, R_3) dient als Rückleiter (Bild 2).

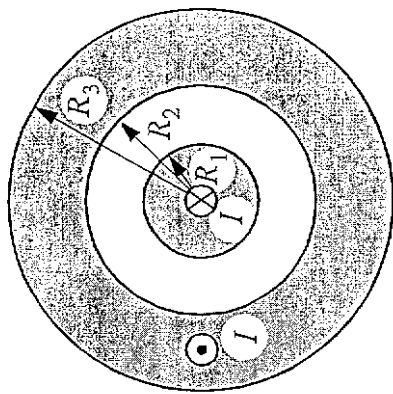


Bild 2

- Berechnen Sie die längenbezogene innere und äußere Induktivität. Verwenden Sie dabei zunächst die Definition der Induktivität über die Flussverknüpfung.

- Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Definition der Induktivität über die Energie des magnetischen Feldes.

Aufgabe 33

Eine schlanke Zylinderspule der Länge l ist in zwei Lagen mit je N Windungen gewickelt (Bild 3).

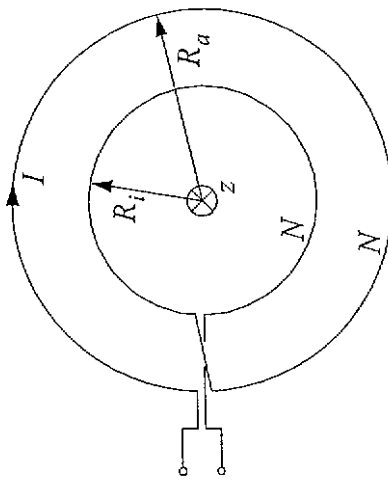


Bild 3

- Wie groß ist die magnetische Flussdichte \vec{B} für $\rho < R_i$ und für $R_i < \rho < R_a$?
- Berechnen Sie die verknüpften Flüsse Ψ_i und Ψ_a der inneren und der äußeren Lage.

- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Induktivität der Spule.

zu A34 e.)

$$\vec{A}_m = \vec{C}_\infty + \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \ln\left(\frac{S_0}{S_A}\right)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mA}' &:= \vec{A}_{mA} - \vec{C}_\infty \\ &= -\frac{\mu I}{2\pi} \vec{e}_z \cdot \ln\left(\frac{S_A}{S_0}\right) \end{aligned}$$

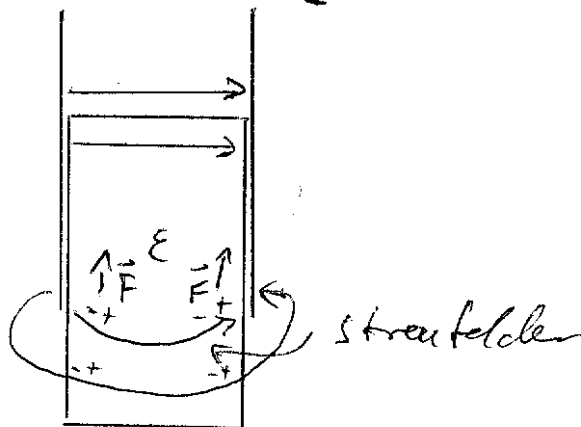
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot}(\vec{A}_{mA}') = -\frac{\partial A_z'}{\partial S_A} \cdot \vec{e}_\phi \\ &= \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \frac{S_0}{S_A} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

vgl. Potential ϕ einer unendlich langen LL q_L in der z -Achse:

$$\phi_c(\vec{r}_A) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{S_A}{S_0}\right)$$

Nach Frage A21.)

Dielektrikum im Kondensator

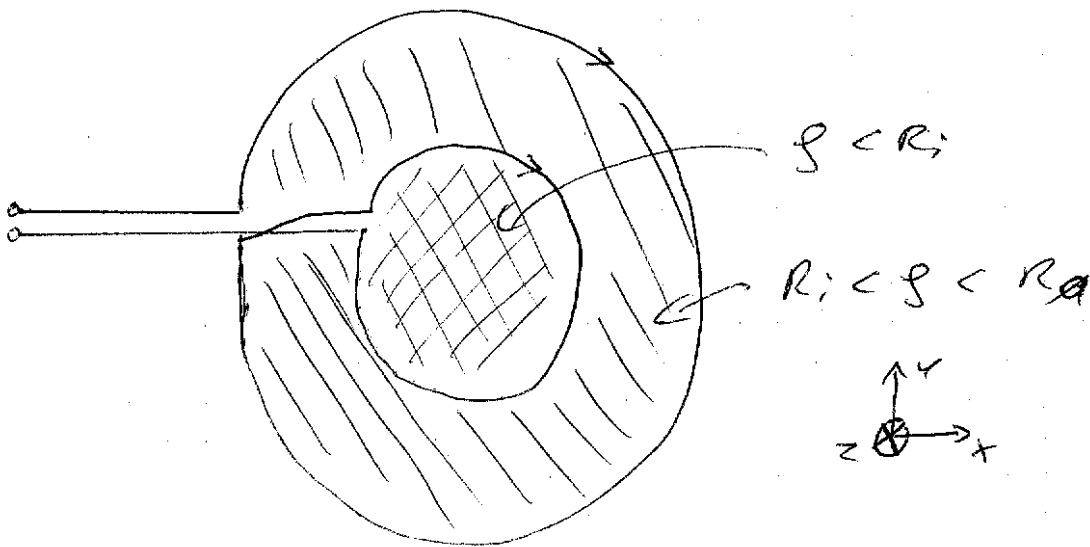
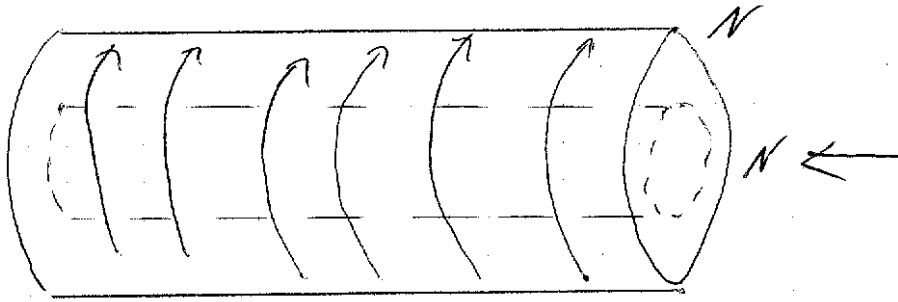


Kraft aufgrund der
Streufelder

Aufg. 33.)

a.)

Seitenansicht:



(S.3.33) allg. $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{(N_i + N_o) \cdot I}{l} \cdot \vec{e}_z & \text{für } 0 \leq s < R_i \\ \mu_0 \frac{N_o \cdot I}{l} \cdot \vec{e}_z & \text{für } R_i < s < R_o \end{cases}$$

hier: $N_i = N_o = N$

Annahme: $\vec{B} = 0$ für $s > R_o$

b.) $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_z$

Gesamter Fluss in der inneren Lage:

$$\Phi_1 = \mu_0 \frac{2NI}{l} \cdot \pi R_i^2$$

Gesamter Fluss in der äußeren Lage:

$$\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_{zw}$$

$$\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_1 + \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot \pi (R_a^2 - R_i^2)$$

$$= \mu_0 \frac{N I}{l} \pi (R_a^2 + R_i^2)$$

$\bar{\Phi}_1$ ist vollständig mit der inneren Lage (Wicklung) verknüpft:

$$\psi_i = N_i \cdot \bar{\Phi}_1$$

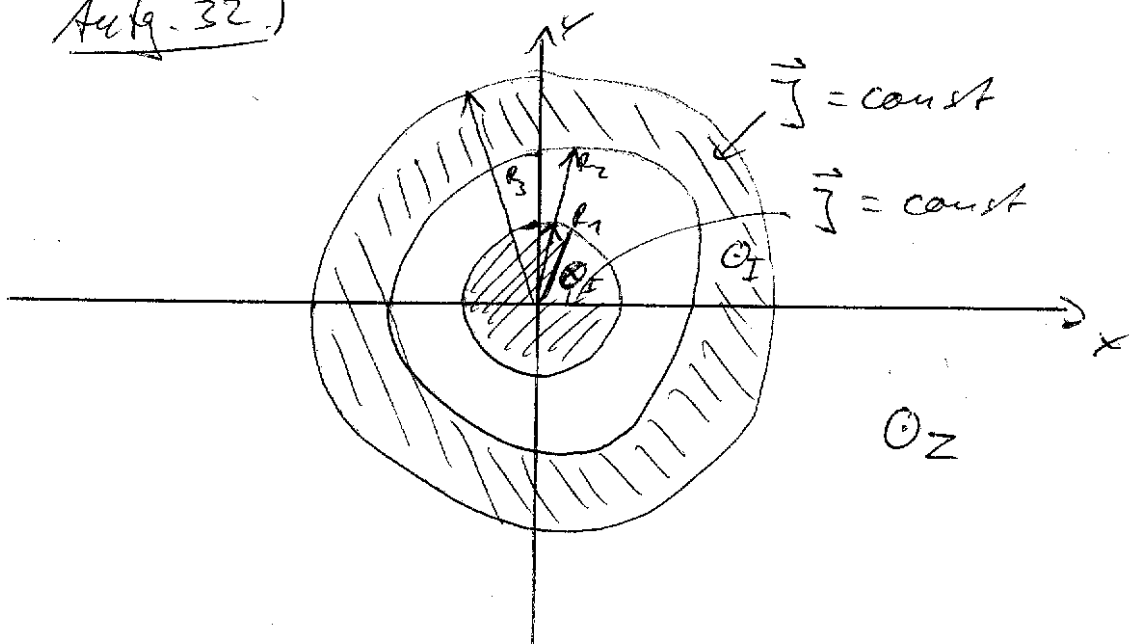
$\bar{\Phi}_2$ ist vollständig mit äußerer Lage verknüpft:

$$\psi_a = N_a \cdot \bar{\Phi}_2$$

$$\underline{c.)} \quad \psi_{ges} = \psi_i + \psi_a = \mu_0 \cdot \frac{N^2 I}{l} \pi (3 R_i^2 + R_a^2)$$

$$L_{ges} = \frac{\psi_{ges}}{I}$$

Aufg. 32.)



Aus Symmetriegründen $\vec{A} = A_\phi(s) \cdot \vec{e}_\phi$

$$\oint \vec{A} d\vec{s} = A_\phi(s) \cdot 2\pi s = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$

$$d\vec{s} = s \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi \quad d\vec{A} = s \cdot d\phi \cdot ds \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{I}_{\text{eff}} = \begin{cases} -I \cdot \frac{\pi s^2}{\pi R_1^2} & \text{für } 0 \leq s < R_1 \\ -I & \text{für } R_1 < s < R_2 \\ -I + I \cdot \frac{\pi s^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} & \text{für } R_2 < s < R_3 \\ 0 & \text{für } R_3 < s \end{cases}$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{I}_{\text{eff}}}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{A}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{A} = \begin{cases} -\mu_0 I \cdot \frac{s}{2\pi R_1^2} \cdot \vec{e}_\phi & \text{für } s < R_1 \\ -\mu_0 I \cdot \frac{1}{2\pi s} \vec{e}_\phi & \text{für } R_1 < s < R_2 \\ -\mu_0 I \cdot \frac{R_3^2 - s^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \frac{1}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi & \text{für } R_2 < s < R_3 \\ 0 & \end{cases}$$

a.) Berechne Induktivität eines Abschnitts der Länge l .

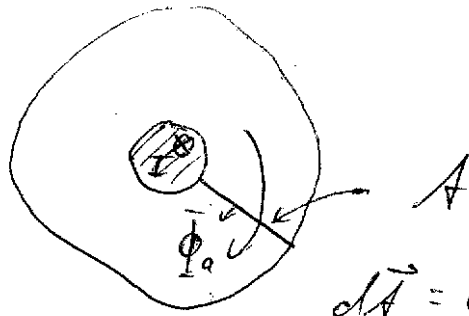
$$\text{Äußere Induktivität: } L_a = \frac{\Psi_a}{I}$$

Der Fluss Φ_a nur im Zwischenraum!

$$\text{Denn } \vec{B}(s > R_3) = 0 \quad R_1 < s < R_2$$

ist mit dem gesamten Strom verknüpft

$$\Rightarrow \Psi_a = \Phi_a$$



$$d\vec{A} = l \cdot d\varphi \cdot (-\vec{e}_\varphi)$$

so gewählt dass $\Phi_0 > 0$

$$\Phi_0 = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\mu_0 \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot l \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\varrho} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \cdot (-\vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right) \rightarrow L_0 = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

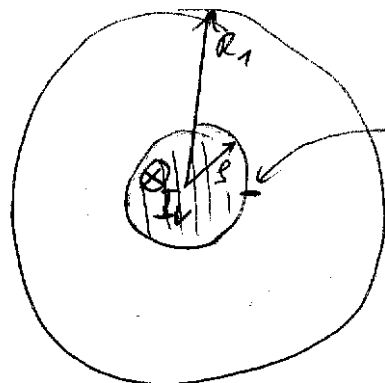
$$\rightarrow \underline{\underline{L_0' = \frac{L_0}{l}}}$$

Zur Berechnung der inneren Induktivität des Innenleiters:

- Aufteilung von I in Teilströme dI ODER
- Aufteilung von Φ in Teilflüsse $d\Phi$

Hier betrachtet: Teilflüsse $d\Phi$

$$I_v = I \cdot \frac{\pi \varrho^2}{\pi R_1^2}$$



$$d\vec{A} = l \cdot d\varphi \cdot (-\vec{e}_\varphi)$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \cdot l \cdot \varrho \cdot d\varphi$$

$$d\psi = d\phi \cdot \frac{I_v}{I}$$

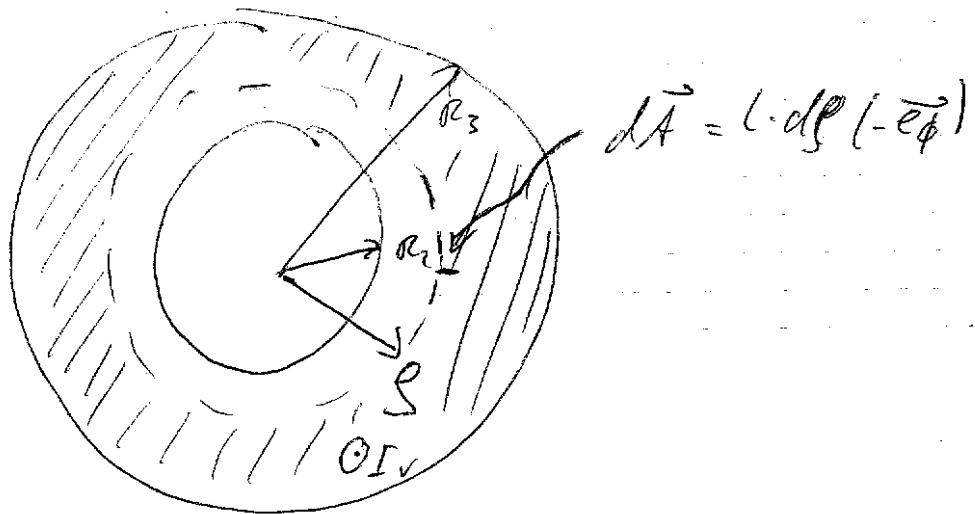
$$d\psi = d\phi \cdot \frac{s^2}{R_1^2}$$

Innenleiter: s_1

$$\psi_{i1} = \int_{s=0}^{s_1} d\psi = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \cdot l \quad (\text{Seite 5-35})$$

$$L_{i1} = \frac{\psi_{i1}}{I} \quad L'_{i1} = \frac{L_{i1}}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} \neq f(R_1)$$

Innere Induktivität des Außenleiters



Stromkreis muss den betrachteten Fluss umfassen:

$$I_v = I \cdot \frac{\pi R_3^2 - \pi s^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2}$$

$$d\psi = d\phi \cdot \frac{I_v}{I}$$

↓

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = \text{Bereich } R_2 < s < R_3$$

Außenleiter:

$$\psi_{i2} = \int_{s=R_2}^{s=R_3} d\psi = \mu_0 \frac{I l}{8\pi} \left[\frac{R_2^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{4} \frac{R_2^2 - 3R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$

$$L_{i2} = \frac{\psi_{i2}}{I} \quad L_{i2}' = \frac{L_{i2}}{L}$$

Zusammengefasst:

$$L_i' = L_{i1}' + L_{i2}'$$

$$L' = L_i' + L_a'$$

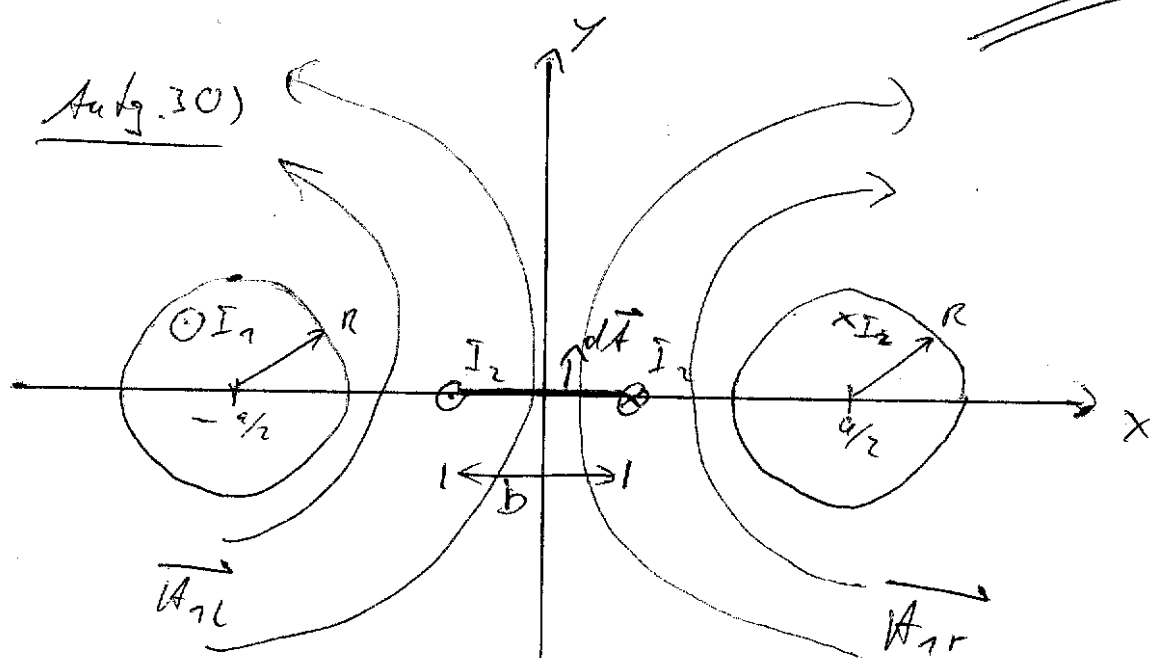
b.) $W_m = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$ $dV = \rho d\phi ds dz$
 $dV = 2\pi \rho L \cdot d\rho$

$$W_m = \pi \cdot L \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_{\rho=0}^{R_3} B^2(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$= \frac{L \cdot \mu_0 I^2}{4\pi} \cdot \left[\int_{\rho=0}^{R_1} \frac{\rho^3}{R_1^4} \cdot d\rho + \int_{\rho=R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} + \int_{\rho=R_2}^{R_3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{R_3^4 - 2R_3^2 \cdot \rho^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} + \rho^4 \right) d\rho \right]$$

Außerdem gilt: $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L' L \cdot I^2$

$$L' = \mu_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{R_2^2 - 3R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$



$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1r} + \vec{H}_{1l}$$

allgemein: Leiter in der z-Achse: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi$

$$\vec{H}_1(x) = \frac{I_1}{2\pi(x + \frac{a}{2})} \cdot \vec{e}_y + \frac{I_1}{2\pi(\frac{a}{2} - x)} \vec{e}_y$$

b.) gesucht: ← Prolänge

L_{21} erzeugt von
durchsetzt

$$d\vec{A} = dx \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme}}}{l} \cdot \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \iint_{A_2} \mu_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{A} \\ &= l \cdot \mu_0 \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{I_1}{2\pi \cdot (x + \frac{a}{2})} + \frac{I_1}{2\pi(\frac{a}{2} - x)} \right) dx \\ &= \frac{l}{2\pi} \mu_0 I_1 \cdot \left[\ln\left(x + \frac{a}{2}\right) - \ln\left(\frac{a}{2} - x\right) \right]_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{innere Ableitung} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_{21} = 2 \cdot \frac{l \mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

hier gilt: Φ_{21} ist vollständig mit
der Leiterschleife 2 verknüpft:

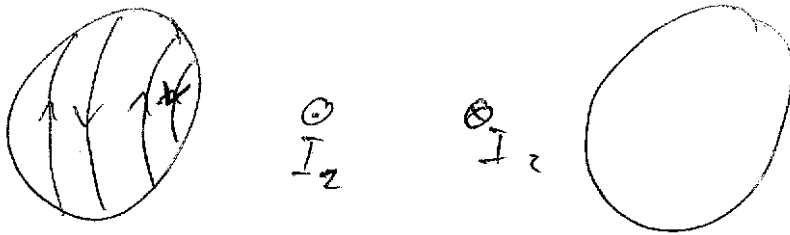
$$\Psi_{21} = \Phi_{21}$$

- nur 1 Windung, - dünne Leiter!
~~Rechnung~~

$$L_{21}' = \frac{\Psi_{21}}{I_1 \cdot l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right)$$

Es gilt immer: $L_{12}' = L_{21}'$

Aber ist aber die direkte Berechnung von L_{12}' viel schwerer



1. The first part of the paper is a review of the literature on the topic.

2. The second part of the paper is a description of the methodology used in the study.

3. The third part of the paper is a discussion of the results of the study.

4. The fourth part of the paper is a conclusion.

5. The fifth part of the paper is a list of references.

6. The sixth part of the paper is a list of figures and tables.

7. The seventh part of the paper is a list of appendices.

8. The eighth part of the paper is a list of acknowledgments.

9. The ninth part of the paper is a list of footnotes.

10. The tenth part of the paper is a list of references.

11. The eleventh part of the paper is a list of figures and tables.

12. The twelfth part of the paper is a list of appendices.

13. The thirteenth part of the paper is a list of acknowledgments.