HöMa 21.7.10

Klausur-Wiederholung

sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$

„f ist holomorph in G" bedeutet:

$\boxed{\lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \text{ existiert}}$ $\forall z \in G$

oder auch f ist komplex diff'bar in G

- Fakten: - f holomorph heißt f komplx. diff'bar (s.o.)

- f holomorph in G ⇒ partiellen Ableitungen $f_x = u_x + iv_x$ $f_y = u_y + iv_y$ existieren in G und erfüllen die Cauchy-Riemann DGLs.

$\boxed{u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x}$

Umkehrung gilt im Alg. nur wenn die partiellen Ableitungen stetig sind.

Holomorphie impliziert C-R-DGLs sind erfüllt umgekehrt nur bei stetigen part. Abl.

- Beispiele nicht holomorpher Funktionen

- $f(z) = \bar{z}$; $f(z) = Re\{z\}$: $f(z) = Re z \Rightarrow f(x+iy) = x$

also $u_x = 1$; $v_y = 0$ ↯

- wichtige holomorphe Funktionen

Konv. Potenzreihe:, e-Fkt, sin, cos

Polynome ...

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$

$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

Ist f holomorph mit $f = u + iv$ und u, v sind 2x stetig diff'bar

$u_x = v_y \mid \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = (-u_y)_y = -u_{yy}$
$v_x = -u_y$

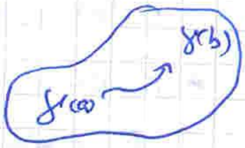
$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$ also ist u harmonisch

genauso gilt für v

$u_x = v_y \mid \frac{\partial}{\partial y}$

$\Rightarrow v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = (-v_x)_x$ also $v_{xx} + v_{yy} = 0$

Integration $\gamma: [a,b] \to G$ (stetig diff'bar) $f: G \to \mathbb{C}$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Komplexes Kurvenintegral (Konturintegrals)

- Fakten: $f(z) = F'(z)$, F holomorph in G

$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ Hauptsatz der komplexen Integralrechnung

insbesondere: falls γ geschlossen: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

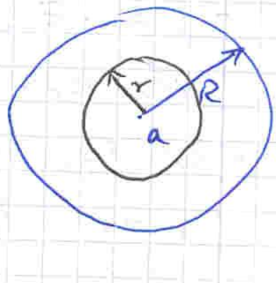
Satz v. Cauchy: f holomorph; γ stückweise stetig diff'bar
einfach, geschlossen

$\Downarrow$

$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$

KLAUSURRELEVANT

Cauchy-Integralformel:



$f: B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph

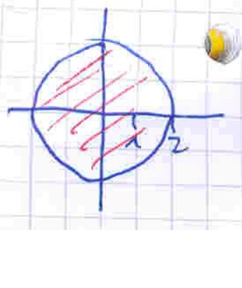
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Trick zum Merken:

$$0 = \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \Leftrightarrow \boxed{\int_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=r} \frac{f_z}{z-a}\,dz}$$

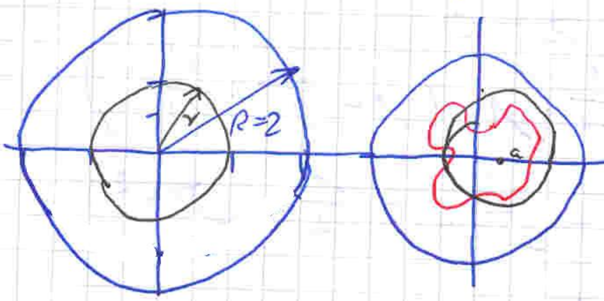
wegen Holomorphie $= f(a)\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = f(a)\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = f(a)2\pi i$

Bsp. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)}\,dz$ f(z) ist holomorph in $B_2(0)$



$$= \int_{|z|=1} \frac{\overbrace{e^z/z+2}^{f(z)}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \frac{e^0}{0+2} = \pi i$$

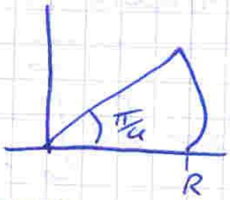
$f(z)$ ist holomorph in $B_2(0)$



$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=r=1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z}\, dz = \pi i$$

Egal wo im Kreis unsere Kurve liegt es hat das gleiche Ergebnis, solange es keine Singularität überschreitet

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$



Fresnelsches Integral

Verallgemeinerung

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz$$

Wieso das $k!$

$$\left[\frac{d}{da} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^k}\, dz = k \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \right]$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^k(z+2)}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z^k}\, dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left. \frac{e^z}{z+2} \right|_{z=0}$$

Kann auch als Spezialfalls des Residuensatzes betrachtet werden.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^k(z+2)}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^z}{z^k(z+2)}, 0 \right)$$

wichtige Formel $\boxed{\operatorname{res}\left(\frac{g(z)}{(z-a)^k}, a \right) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}}$

Singularitäten

Laurent-Reihe: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$ und f. $z \in B_R(a) \setminus \{a\}$

gültig f. Fktionen $f: B_R(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph

$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ bestimmen Sie alle Singularitäten

$z = 0$

Klassifikation: $f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}\dots\right)\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} \dots - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(z^2)$

$\Rightarrow$ hebbare Singularität

$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ g hat eine Nullstelle 2. Ordnung bei $z=0$

$g(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}(-1)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$

h hat ebenfalls eine N.st. bei $z=0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z}{1+z^2}\,dz = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$

$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right)$

$R > 1$