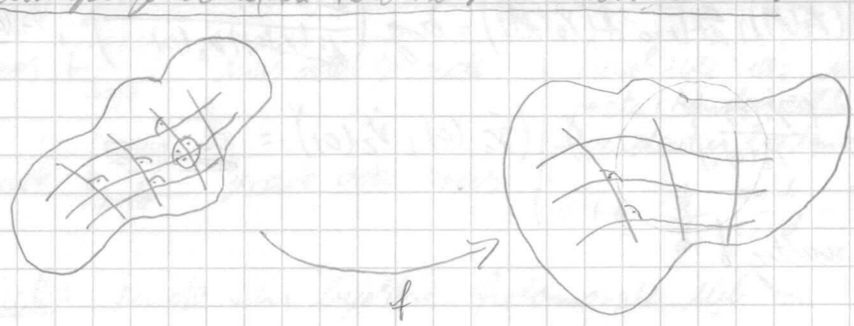
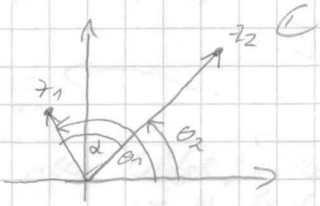
Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen.

28.04.2010

Vorlesung



Winkel in der komplexen Ebene



$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\measuredangle(z_1, z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$; $\theta_1 = \arg z_1$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$; $\theta_2 = \arg z_2$

beachte: $\underset{z = re^{i\theta}}{\arg z} = \frac{1}{i}\log\left(\frac{z}{|z|}\right)$

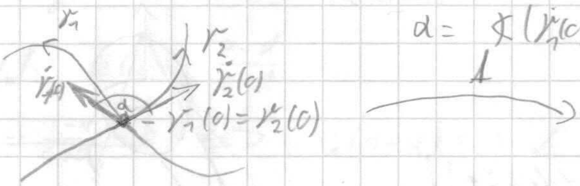
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

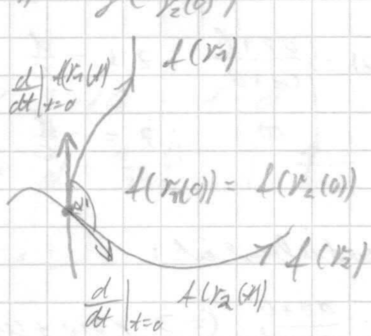
Winkeltreue? $f: G \to \mathbb{C}$; $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet

Def: f konform in G :$\Leftrightarrow$ f winkeltreu

d.h. $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to G$ stetig diff'bar mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

$$\alpha = \measuredangle\left(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\right) = \arg\left(\frac{\dot\gamma_1(0)}{\dot\gamma_2(0)}\right)$$





$$\alpha' = \measuredangle\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma_1(t)), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma_2(t))\right)$$

Winkeltreu heißt $\alpha = \alpha'$ für alle möglichen Kurven in G.

Satz: Ist $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in G$, dann ist f konform.

Beweis: betr.: f wie oben, γ beliebige Kurve:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{\gamma(t) - \gamma(0)} \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$$

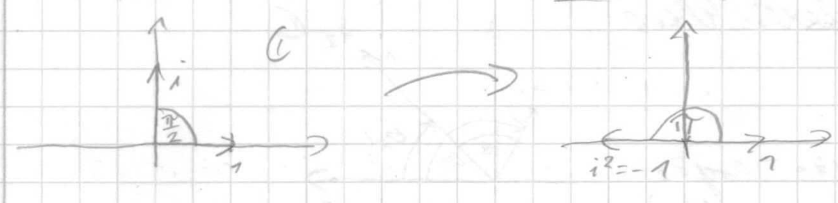
$$= f'(\gamma(0))\,\dot\gamma(0)$$

$$\underline{\underline{\alpha'}} = \sphericalangle\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma_1(t)),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma_2(t))\right) = \arg\left(\frac{\cancel{f'(\gamma_1(0))}\,\dot\gamma_1(0)}{\cancel{f'(\gamma_2(0))}\,\dot\gamma_2(0)}\right) \quad ; \ \gamma_1(0)=\gamma_2(0)$$

$$= \arg\left(\frac{\dot\gamma_1(0)}{\dot\gamma_2(0)}\right) = \sphericalangle\left(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\right) = \underline{\underline{\alpha}} \qquad \square$$

$f'(z) \neq 0$ ist wichtig!

z.B. $f(z) = z^2$ ist in der 0 nicht konform.



Möbius Transformationen

Setzen sich zusammen aus

1.) Verschiebungen: $f_1(z) = z + b$; $b \in \mathbb{C}$

2.) Skalierung: $f_2(z) = rz$; $r \in (0,\infty)$

3.) Rotation: $f_3(z) = e^{i\theta} z$; $\theta \in [0, 2\pi)$

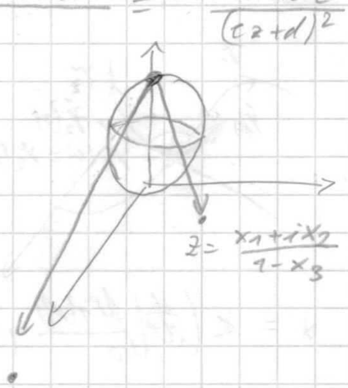
$\Big\}\ f_{2,3}(z) = az$; $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

4.) Inversion: $f_4(z) = \frac{1}{z}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ ; \ a,b,c,d \in \mathbb{C} \ ; \ ad-bc \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$f'(z) = \frac{(cz+d)\cdot a - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{(ac-ac)z + ad - bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0!$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & ; z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & ; z = -\frac{d}{c} \quad \text{(so definiert!)} \end{cases}$$



Invertierbarkeit:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff czw + wd = az + b$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\iff z(cw-a) = -dw + b$$

$$\iff z = \frac{-dw+b}{cw-a} = -\frac{dw-b}{-cw+a}, \qquad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a} & ; w \neq \frac{a}{c} \\ \infty & ; w = \frac{a}{c} \end{cases}$$

Möbius Transformationen sind auf $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ definiert und invertierbar.

$$\text{"}f(\infty)\text{"} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

Verknüpfung 2er Möbius Trafos ergibt wieder Möbius Trafo.

28.04.2010 Vorlesung

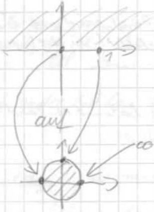
- Kreis $\xmapsto[\text{Trafo}]{\text{Möbius}}$ Kreis oder Gerade

  Gerade $\xmapsto[\text{Trafo}]{\text{Möbius}}$ Gerade oder Kreis

Durch wie viele unabhängige Parameter (komplexe Zahlen) ist eine Möbius Trafo eindeutig bestimmt?

$a \neq 0 \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$; $\tilde{b} = \frac{b}{a}$, $\tilde{c} = \frac{c}{a}$, $\tilde{d} = \frac{d}{a}$

Beispiel: Finde eine bijektive holomorphe Abb. von



$\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$

$g(z) = \frac{z+i}{z-i}$

$g(i) = \infty$ also bildet g i das Komplement von $\mathbb{D}$ ab, d.h. Inversion

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ $\qquad f(z) = \frac{z-i}{z+i}$

liefert gewünschte Abb.

Ansatz: Möbius Trafo: $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

3 Informationen: $\infty \overset{g}{\longmapsto} 1$

$0 \overset{g}{\longmapsto} -1$

$1 \overset{g}{\longmapsto} i$

- $g(\infty) = \frac{a}{c} \overset{!}{=} 1 \iff a = c = 1$ (ohne Einschränkung)

  d.h. $g(z) = \frac{z+b}{z+d}$

- $g(0) = \frac{b}{d} \overset{!}{=} -1 \iff b = -d$

  d.h. $g(z) = \frac{z-d}{z+d}$

- $g(1) = \frac{1-d}{1+d} = i \iff i(1+d) = 1-d \iff i + id = 1-d$

  $\iff d(1+i) = 1-i \iff d = \frac{1-i}{1+i} \quad \Big| \cdot \frac{1-i}{1-i}$

  $\iff d = \frac{1-2i+(i)^2}{2} = -\frac{2i}{2} = -i$

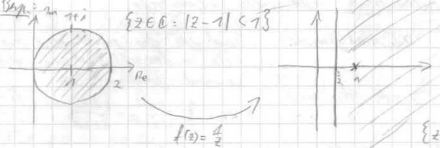
also: $g(z) = \frac{z+i}{z-i}$

05.09.2010

KLAUSUR-AUFGABE

Bsp.:

$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$



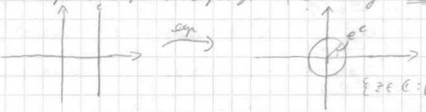
$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\}$

Ursprung wird ins Unendliche abgebildet! d.h. der Rand wird auf eine Linie abgebildet (Kreis mit Radius ∞)

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= \tfrac{1}{2} \\ f(1+i) &= \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ f(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{bestimmt den Rand!}$$

Exponentialabbildungen

$z \mapsto \exp(z) = \exp(x) + \exp(iy)$; $z = x+iy$ Polarform in $\mathbb{C}$

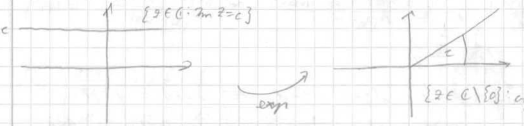


$\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^c\}$

$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = c\}$

$\exp\{ \text{— " —} \} = e^c \cdot \exp(i\mathbb{R})$

$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = c\}$



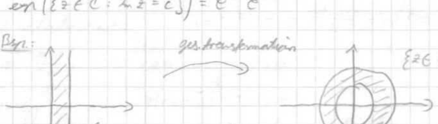
$\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \arg z = c\}$

$\exp(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = c\}) = e^{\mathbb{R}} e^{ic}$

Bsp.:

ges. Transformation

$\{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$



$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$

$g(z) = \log a + z(\log b - \log a)$

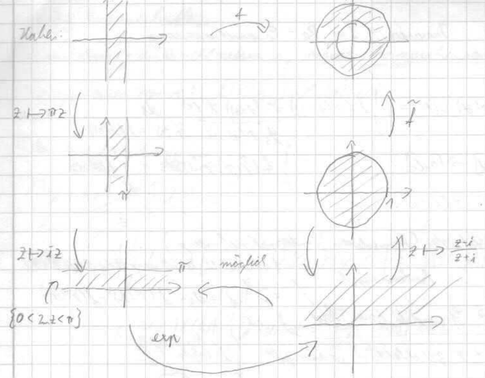
linke Linie wird auf inneren, die rechte auf den äußeren Kreis abgebildet

$\{z \in \mathbb{C} : \log a < \operatorname{Re} z < \log b\}$

$$\begin{aligned} f(z) = \exp(g(z)) &= \exp(\log a + z(\log b - \log a)) \\ &= \exp(\log a)\cdot \exp(z \log(\tfrac{b}{a})) \\ &= \underline{a\left(\frac{b}{a}\right)^z} \end{aligned}$$

05.05.2010

Vorlesung



Punkt wird ins Unendliche abgebildet: Gerade → nur 2 Punkte benötigt

Für Kreise: 3 Punkte benötigt

<u>Pfadintegrale in $\mathbb{C}$</u>

Integration $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen: $p:[a,b] \to \mathbb{C}$ stetig

$$p(t) = p_1(t) + i p_2(t)$$

$$\int_a^b p(t)\,dt = \int_a^b p_1(t)\,dt + i \int_a^b p_2(t)\,dt$$

gegeben: $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{C}$ stetig diff'bar (Pfad)

$f : G \to \mathbb{C}$ stetig (nicht unbedingt holomorph)

Def. Grimm.

<u>Def</u>: $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(z))\,\gamma'(t)}_{p(t)}\,dt \in \mathbb{C}$

vgl: $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{R}^2$ stetig diff'bar

$f : G \to \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma \underline{f}\,dx := \int_a^b \underline{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

ist etwas <u>anderes</u>!

• $\int_\gamma f(z)\,dz$ Invariant bei Re-Parametrisierung

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_c^d f(\gamma(t(s)))\,\underbrace{\gamma'(t(s))\,t'(s)}_{\frac{d}{ds}\gamma(t(s))}\,ds \qquad \tilde\gamma(s) := \gamma(t(s))$$

$t = t(s): [c,d] \to [a,b]$
$$= \int_c^d f(\tilde\gamma(s))\,\tilde\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz$$

$t(c) = a\ ;\ t(d) = b$

<u>Satz</u>: (Hauptsatz der (komplexen) Integralrechnung)

$f: G \to \mathbb{C}$, holomorph
$\gamma: [a,b] \to G$, diff'barer Pfad $\Rightarrow \int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

(gilt auch für stückweise stetig diff'bar)

Insbesondere: Ist γ geschlossen, dann gilt $\int_\gamma f'(z)\,dz = \underline{0}$

- γ geschlossen heißt: $\gamma(a) = \gamma(b)$
- γ einfach heißt: Ist $\gamma(s) = \gamma(t)$ für $s < t \Rightarrow s = a$ und $t = b$
- γ swsd (stückweise stetig diff'bar)

Beweis
$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}_{\frac{d}{dt}f(\gamma(t))}\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = f(\gamma(t))\Big|_{t=a}^{t=b} \quad \square$$

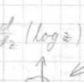
<u>Betr.</u>: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ swsd, einfach, geschlossen

$$(n \in \mathbb{Z}) \quad \int_\gamma z^n\,dz = \int_\gamma \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n+1}\,z^{n+1}\right)dz = 0 \quad (n \neq -1)$$

$$z^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n+1}\,z^{n+1}\right) \quad \forall\, n \neq -1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d}{dz}\log z$$ für jeden Zweig des log.

Was geht bei $\int_\gamma \frac{d}{dz}(\log z)\,dz$ schief?



$\gamma(t) = re^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$; $\quad \gamma'(t) = ire^{it}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{r}e^{it}}\, i\cancel{r}e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = \underline{2\pi i}$$ $\Rightarrow$ bei Kurve um den Nullpunkt!

Weitere Eigenschaften

05.05.2010 Vorlesung

- Umkehrung des Durchlaufsinns ergibt Vorzeichenwechsel

Länge einer Kurve: $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

- Standardabschätzung:

$$\cancel{\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,dz \overset{!}{\in} \mathbb{C}}$$

stattdessen: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt$

$$\le \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|\,\ell(\gamma)$$

Satz (Cauchy-Integralformel) 19.05.2010 Vorlesung

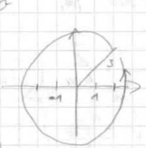
Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $B_R(a) \subset G$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad \forall\, r\in(0,R)$$

Bsp.: $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz \overset{?}{=} 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0$

$a=0$, $r=1$, $f(z)=\sin z$

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = (*)$$



(Kreis verschieben!)

$z^2-1 = (z-1)(z+1)$

$$(*) = \int_{|z|=3} \left(\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}\right)dz = \int_{|z|=3} \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\,dz - \int_{|z|=3} \frac{\frac{1}{2}}{z+1}\,dz$$

$$= \int_{|z-1|=3} \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\,dz - \int_{|z+1|=3} \frac{\frac{1}{2}}{z+1}\,dz = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\,dz - \int_{|z+1|} \frac{\frac{1}{2}}{z+1}\,dz$$

$$= (2\pi i)\tfrac{1}{2} - (2\pi i)\tfrac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$$

Satz (Taylor): Sei $f: B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann ist f entwickelbar in eine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in B_R(a)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \qquad (0 < r < R$$

Bem.: $b_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{w-a} \, dw = f(a)$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^2} \, dw = \frac{f'(a)}{1!} \quad \text{formal}$$

$\vdots$

genaueres später.

Beweis:

kleine Kreis wird aufgeblasen und auf den Mittelpunkt a gebracht.

$B_R(a)$ (ohne z zu schneiden)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \quad (*)$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)+(a-z)} = \frac{1}{w-a} \left(\frac{1}{1 + \frac{a-z}{w-a}} \right) ; \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1}$$

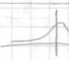
$$= \frac{1}{w-a} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \right) = \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \right\} (z-a)^n$$

↘ zulässig, da die Summe im Integranden gleichmäßig konvergiert.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \right\}}_{= b_n} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad ; \quad |x| < 1 \quad (\text{konvergent})$$



$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in B_1(0) \quad \text{d.h. } |z| < 1$$

$f: B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

// Taylorreihe wird ungültig für ± 1

19.05.2010

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n (z-a)^{n-1} \Rightarrow f'(a) = 1 \cdot b_1$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k(k-1)(k-2)\dots 1} \cdot b_n (z-a)^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(a) = k!\, b_k \quad \forall k \geq 0$$

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$\boxed{f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw}$$

Cauchy-Integralformel höherer Ordnung

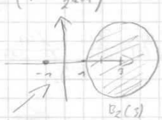
Beispiel: $\frac{1}{z^2-1}$ Taylor-Entwicklung bei $z=3$.

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1} = f(z)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right) &= \frac{k!}{2} \frac{(-1)^k}{(z-1)^{k+1}} \\ \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{\frac{1}{2}}{z+1}\right) &= \frac{k!}{2} \frac{(-1)^k}{(z+1)^{k+1}} \end{aligned}\right\} \quad \left.\frac{d^k}{dz^k} f(z)\right|_{z=3} = \frac{k!}{2}(-1)^k \left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{4^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{k!\,(-1)^k}{2^{k+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(-1)^k}{2^{k+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)(z-3)^k$$



Satz von Taylor impliziert Konvergenz $\forall z \in B_2(3)$

gehört zur Taylor Aufgabe

Wiederholung

$f: G \to \mathbb{C}$ holomorph heißt: $f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$ existiert $\forall z \in G$

G Gebiet

C.R. Gleichungen: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$; $z = x + iy$

$$u_x = v_y \; ; \; u_y = -v_y$$

f holomorph $\Rightarrow \begin{cases} u,v \text{ partiell diff'bar} \\ \text{C.R. Gleichungen gelten} \end{cases}$

f holomorph $\Leftarrow \begin{cases} u,v \; \underline{\text{stetig}} \text{ partiell diffbar (d.h. } u_x, u_y, v_x, v_y \text{ stetig)} \\ \text{C.R. Gleichungen} \end{cases}$

Konformität: f ist holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$

(Proposition 2.1)

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ $\quad f: G \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma: [a,b] \to G$ stückweise stetig diff'bar

Hauptsatz:

HS: $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$; insbes. γ geschlossen

f holomorph in G

$\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$

CIS: Cauchy's Integralsatz

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ falls $\begin{cases} f: G \to \mathbb{C} \text{ holom.} \\ (\text{— " —}) \\ \text{einfach, geschlossen, } \gamma \subset G, \ \mathrm{int}(\gamma) \subset G \end{cases}$

Kurve ganz in Gebiet $\left(\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \right)$

(interior) das Innere von γ immer in Gren[z] Kurve

CIF: (Cauchy Integralformel)

$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$ $\quad$ ~~$f: G \to \mathbb{C}$ holomorph $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a|=r\} \subset G$~~

(ausgenommen)

$f: B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph und $0 < r < R$.

$B_R(a)$

$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$

Taylor: $f: B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph

dann ex. $f(z) = \sum b_n (z-a)^n$ konvergent in $B_R(a)$

$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw$

Singularitäten

16.06.2010

Laurent Reihe:

z.B.: $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + O(z^6)$$

also: $$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} + O(z^3) = \sum_{n=-3}^{\infty} b_n z^n \quad \text{Laurent Reihe}$$

Satz (Laurent) Sei

$B_{R\setminus S}(a) = \{z \in \mathbb{C} : S < |z-a| < R\}$ wobei $0 \leq S < R \leq \infty$

Dann hat f eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in B_{R\setminus S}(a)$$

und konvergiert gleichmäßig in $B_{R'\setminus S'}(a)$ $\forall S < S' < R' < R$.

Weiterhin gilt: $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \quad r \in (S, R)$

z.B.: $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

In $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$

z.B.: $g(z) = \frac{1}{z-1}$ holomorph für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

dann ist $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-1)^n$, wobei $b_n = 0 \quad \forall n \neq -1$, $b_{-1} = 1$

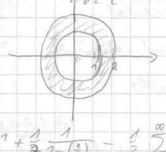
z.B.: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0,1,2\}$

$y_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$

Laurent Reihe in y_1:

$y_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

$a = 0$



$$\begin{aligned} f(z) &= 1 \cdot z^{-1} - \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} \\ &= z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\ &= z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\ &= z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

$$f(z) = z^{-1} + \frac{1}{z} \underbrace{\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$f(z) = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{2}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n + \frac{2}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

Wozu braucht man das? Zur Integration.

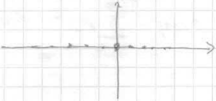
Def.: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph
$a \in G$

Dann heißt a "isolierte Singularität" von f

z.B.: $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ hat Singularitäten: $\{z \in \mathbb{C} : \sin(\frac{1}{z}) = 0\} \cup \{0\}$

$= \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\frac{1}{n\pi} ; n \in \mathbb{Z}\}$



Hier ist $z=0$ keine isolierte Singularität!

Klassifikation von isolierten Singularitäten:

Sei $f: G\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph; $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$; $z \neq a$

- a heißt hebbare Singularität :$\Longleftrightarrow$ der Hauptteil der zugehörigen Laurent-Reihe verschwindet.

- a ist ein Pol der Ordnung $k > 0$:$\Longleftrightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n < -k$
$b_k \neq 0$

Bezeichnung: $k=1$ einfacher Pol
$k=2$ doppelter Pol
u.s.w.

- a ist eine wesentliche Singularität :$\Longleftrightarrow$ $b_n \neq 0$ für ∞-viele negative Indizes.

diff. und Int.-Rechnung

Hauptsatz der $\frac{d}{dz}$ u. $\int$

angenommen f besitzt einen Pol der Ordnung k bei a.

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad \int_{|z|=s} z^n \, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz}_{= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}} = \underline{\underline{2\pi i \, b_{-1}}}. \qquad z^k = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dz} z^{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\boxed{f(z) = \frac{\sin(z)}{z}}$$

$$\frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Proposition: (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f: B_R(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt

Dann hat f bei a eine hebbare Singularität.

Beweis: Wir wissen aus Laurent:

r darf durch ein beliebig kleines ε ersetzt werden

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \ ; \quad |b_n| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \dots dz \right|$$

Kurvenlänge; supremum von $|f|$

$$\le \frac{1}{2\pi} (2\pi\varepsilon) \frac{M}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{M}{\varepsilon^n} \longrightarrow 0$$

für $\varepsilon \to 0$
falls n negativ

Residuensatz 16.06.2010

Def: Sei f holomorph in $G \setminus \{a\}$ mit Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n,$$

dann heißt der Koeffizient b_{-1} Residuum von f bei a:

$$b_{-1} = \operatorname{res}(f,a)$$

Wichtige Formeln für das Residuum:

1) Für $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, wobei f, g holomorph, $f(a) \neq 0$ und g besitzt einfache Nullstelle bei a.

dann gilt: $\operatorname{res}(h,a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$

Beachte: hat f bei a eine Nullstelle der Ordnung r und g bei a eine Nullstelle der Ordnung s

betr.: $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$: 1. Fall: Ist $r \geq s$, so hat h bei a eine Nullstelle der Ordnung $r-s$.

2. Fall: Ist $r < s$, so hat h bei a einen Pol der Ordnung $s-r$.

Im Fall oben besitzt h einen Pol der Ordnung 1; also:

$$h(z) = b_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

$$\Rightarrow b_{-1} = (z-a)h(z) - \underbrace{(z-a)\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n}_{\to 0 \text{ für } z \to a}$$

$$\Rightarrow b_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)h(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \underbrace{\frac{z-a}{g(z)-g(a)}}_{\to \frac{1}{g'(a)}} \cdot \underbrace{f(z)}_{\downarrow\, f(a)}$$

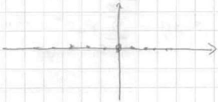
2)

Wozu braucht man das? Zur Integration.

Def: Ist $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: \mathcal{G} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph
$a \in \mathcal{G}$

Dann heißt a „isolierte Singularität" von f

z. B.: $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ hat Singularitäten: $\{z \in \mathbb{C} : \sin(\frac{1}{z}) = 0\} \cup \{0\}$



$= \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\frac{1}{n\pi} ; n \in \mathbb{Z}\}$

Hier ist $z = 0$ keine isolierte Singularität!

<u>Klassifikation von isolierbaren Singularitäten:</u>

Sei $f: \mathcal{G} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph; $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$; $z \neq a$

- a heißt <u>hebbare</u> Singularität: $\Leftrightarrow$ der Hauptteil der zugehörigen Laurent-Reihe verschwindet.
- a ist ein Pol der Ordnung $k > 0$: $\Leftrightarrow$ $b_n = 0 \quad \forall n < -k$, $b_k \neq 0$

Bezeichnung: $k = 1$ einfacher Pol
$k = 2$ doppelter Pol
u.s.w.

- a ist eine wesentliche Singularität: $\Leftrightarrow$ $b_n \neq 0$ für ∞-viele negative Indizes.

angenommen f besitzt einen Pol der Ordnung k bei a.

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{|z-a|=r} (z-a)^n\,dz}_{= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}} = \underline{\underline{2\pi i\, b_{-1}}}.$$

diff. und Int.-Rechnung

Hauptsatz der $\frac{d}{dz}$ u. $\int$

$$\int_{|z|=s} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

$$z^k = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dz} z^{n+1}$$
$n \neq -1$

$$\boxed{f(z) = \frac{\sin(z)}{z}}$$

$$\frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)$$
$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

<u>Proposition:</u> (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f: B_R(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt

Dann hat f bei a eine hebbare Singularität.

Beweis: Wir wissen aus Laurent:

r darf durch ein beliebig kleines ε ersetzt werden

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \; ; \quad |b_n| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{\dots}} \dots dz \right|$$

Kurvenlänge; Supremum von $|f|$

$$\le \frac{1}{2\pi}(2\pi\varepsilon) \frac{M}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{M}{\varepsilon^n} \longrightarrow 0$$

für $\varepsilon \to 0$
falls n negativ

23.06.2010
Vorlesung

<u>Laurent Reihen</u>

$f : B_R(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holom.

also a ist <u>isolierte</u> Singularität

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{(Laurent Reihe)}$$

konvergiert glm. auf $B_{R'}(a) \setminus \overline{B_{S'}(a)}$ $\forall 0 < S' < R' < R$

Klassifikation von Singularitäten:

(i) a hebbare Singularität: $b_n = 0 \quad \forall n < 0$

(ii) a Pol(-stelle) der Ordnung $k \in \mathbb{N}$: $b_n = 0 \; \forall n < -k$ und $b_{-k} \neq 0$

(iii) a wesentliche Singularität : $b_n \neq 0$ für ∞-viele $n < 0$.

<u>typische Situation</u> : $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $\quad g, h : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holom.

g bes. Nullstellen der Ordnung r in a
h bes. — " — " — " — s in a

$r > s$: f bes. Nullstelle der Ordnung $r-s$ in a
$s > r$: f bes. Polstellen der Ordnung $s-r$ in a

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + O(z^2)$$

$$(\sin z)^2 = (z + O(z^2))^2 = z^2 + 2z\,O(z^2) + O(z^4) = z^2 + O(z^4).$$

wichtigster Koeffizient: Residuum.

$\operatorname{res}(f, a) = b_{-1}$

$$\int_{|z-a|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz}_{= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}} = 2\pi i \, b_{-1}$$

$0 < r < R$

<u>Wichtige Formeln</u>:

1) $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; g, h holomorph bei a ; $g(a) \neq 0$; $h(a) = 0$ (a NST von 1. Ordnung!)

$\operatorname{res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

2) $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ $\quad (k > 0)$ g holomorph ; $\operatorname{res}(f, a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$

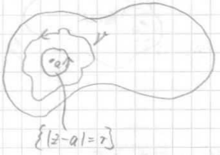
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n ; \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

mit $b_n = c_{n+k}$ insbesondere $b_{-1} = c_{k-1}$

Hier: $c_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$

Angenommen: $f: G\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph



γ stückweise stetig diff'bar einfach geschlossen, $\mathrm{int}(\gamma) \subset G$
Innere

ang.: f hat in a ein Pol der Ordnung n, d.h. $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^n}$, g holomorph

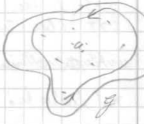
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z-a|=r} \frac{g(z)}{(z-a)^n}\,dz$$

beachte: $g^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$ Verallg. Cauchy Integralformel

$$= 2\pi i \left(\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{g(z)}{(z-a)^n}\,dz\right) = 2\pi i \underbrace{\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}}_{\mathrm{res}(f,a)}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{res}(f,a)$$

Allgemein gilt:



__Residuensatz:__ $G\subset\mathbb{C}$ Gebiet.

$f: G\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\to\mathbb{C}$ holomorph

a_i: Polstelle ($i=1,\dots,n$)

$\gamma:[a,b]\to G$ stückw. stetig diff'bar, einf. geschlossen:

$\mathrm{int}(\gamma)\subset G$ und $a_1,\dots,a_n \subset \mathrm{int}(\gamma)$

Dann gilt $$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^n \mathrm{res}(f,a_i)$$

Beweis: Subtrahiere Hauptteile h_i, $i=1,\dots,n$ der Laurent-Reihe bei a_j

$$\int_\gamma \underbrace{f(z)-h_1(z)-\dots-h_n(z)}_{\text{holomorph}}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma h_1(z)\,dz+\dots+\int_\gamma h_n(z)\,dz = \sum_{j=1}^n\int_{|z-a_j|=r_j} h_j(z)\,dz$$

$$=\sum_{j=1}^n 2\pi i\ \mathrm{res}(f,a_j) \quad \square$$

Beispiel: 23.06.2010 Vorlesung

$$\int_{|z|=2} \frac{\tan z}{z^3}\, dz = ? \qquad ; \frac{\tan z}{z^3} = \frac{\sin(z)}{z^3 \cos(z)}$$

1. Schritt: bestimme alle Singularitäten in $\{|z|=2\}$

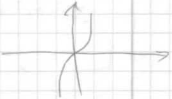
ges: z: $z^2 \cos(z) = 0$ und $|z| < 2$

z_0 0 $(z^3 = 0)$; $\quad \pi(\frac{1}{2}+k) = a_k$; $\quad k \in \mathbb{Z}$

also: $a_1 = 0$ $\qquad \left.\begin{array}{l} k=0; \ a_0 = \frac{\pi}{2} \\ k=-1; \ a_{-1} = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ alle anderen liegen außerhalb $\{|z|=2\}$

2. Schritt: bestimme Residuum:

- $\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, 0\right) = \underline{\underline{0}}$



$\tan z = b_1 z + b_3 z^3 + \dots$
(ungerade)

$\frac{\tan z}{z^3} = b_1 \frac{1}{z^2} + b_3 + O(z^2)$ Laurentreihe bei $\underline{\underline{z=0}}$!

- $\underline{\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{1}{-\sin(z)}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3}$

$f(z) = \frac{\frac{1}{z^3}\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{g(z)}{h(z)}$; $g(\frac{\pi}{2}) \neq 0$; $h(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\frac{\pi}{2}$ ist einfache Nullstelle für $\cos z$

- $\underline{\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \text{ analog}}$

3. Schritt Residuensatz:

$$\int_{|z|=2} \frac{\tan z}{z^3}\, dz = \left(\underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, 0\right)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, \frac{\pi}{2}\right)}_{=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} + \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{\tan z}{z^3}, -\frac{\pi}{2}\right)}_{=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}\right) 2\pi i = \underline{\underline{0}}$$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta}$ $\qquad \cos\theta = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\}$; also $\cos\theta = \operatorname{Re}(z)$; $z = e^{i\theta}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{\bar z}{|z|^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\left(|z| = 1 \ !!(!) \quad z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2} \ !!!\right)$

$dz = \gamma'(\theta)\, d\theta = i e^{i\theta} d\theta = i z\, d\theta$

$\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ $\qquad$ also: $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{3z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}}\, dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1} = *$$

Pole innerhalb $|z|=1$:

$z^2+6z+1=0 \iff z = -3 \pm \sqrt{\frac{36}{4}-1}$ $\quad 8=4\cdot 2$

$= -3 \pm \sqrt{8}$

$= -3 \pm 2\sqrt{2}$

$a = -3 \pm 2\sqrt{2}$ liegt innerhalb $\{|z|=1\}$

$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2+6z+1}, -3+2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2(-3+2\sqrt{2})+6} = \frac{1}{-6+4\sqrt{2}+6} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

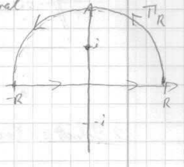
$h(z) = z^2+6z+1$ $\quad * = \frac{2}{i}\, 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$h'(z) = 2z+6$

$g(z) = 1$

Anwendung auf reelle Integrale 30.06.2010

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ Umwandlung in ein komplexes Integral



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \overset{?}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

Residuensatz: $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res(f,a_k)$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ Pole bei $z = \pm i$ (einfache Pole) $\left[\frac{1}{(1+i)(1-i)}\right]$
- Welche Pole liegen innerhalb Γ_R? $a = i$
- $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \; res(f,i)$

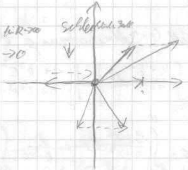
$$res(f,i) = \frac{1}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

zu zeigen bleibt: Der Anteil des Halbkreises H_R im Integral strebt gegen 0.

$$\left| \int_{H_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{2it}}\,dt \right| = (*)$$

$H_R = \{ z = \gamma_R(t) \,;\, t \in [0,\pi] \}$ $\gamma_R(t) = Re^{it}$

$$(*) \le R \int_0^{\pi} \frac{dt}{|1+R^2e^{2it}|} \le \frac{R}{R^2-1}\pi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow{\text{für } R\to\infty} 0$$



$$|1+R^2e^{2it}| \ge |1-R^2| = R^2-1$$

Damit haben wir gezeigt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi$$

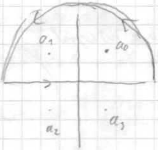
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+z^2}{1+z^4}\,dz \overset{Def}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1+z^2}{1+z^4}\,dz$$

1. Schritt: Best. von Polen innerhalb Γ_R $(R>1)$ KLAUSUR

$f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}$; $1+z^4 = 0$ also $z^4 = -1$

Ansatz: $z = e^{i\theta}$; $-1 = e^{i\pi(2k+1)}$ $k \in \mathbb{N}$ also $4\theta = \pi(2k+1)$; $k = 0,1,2,3$

$\Rightarrow a_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}; a_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}; a_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi}; a_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi}$



Relevant nur a_0, a_1

<u>2. Schritt</u>: Berechnung der Residuen

$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $\quad g(z) = 1+z^2$, $h(z) = 1+z^4$

$g(a_i) \neq 0 \quad i = 0,1$

$h(a_i) = 0 \quad ; h'(a_i) = 4a_i^3 \neq 0$

Wir können die Formel $res(f, a_i) = \frac{g(a_i)}{h'(a_i)}$

$res(f, a_0) = \frac{1+z^2}{4z^3}\Big|_{z=a_0} = \frac{z(1+z^2)}{4z^4}\Big|_{z=a_0} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(1+e^{i\frac{\pi}{2}})}{-4}$

$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{-4} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{-4} = \frac{\sqrt{2}\, i}{-4} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$res(f, a_1) = \frac{z(1+z^2)}{4z^4}\Big|_{z=a_1} = \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}(1+e^{i\frac{3}{2}\pi})}{-4} = \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}(\quad)}{-4} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

<u>Schritt 3</u>: $\int_{\Gamma_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2}}(-i) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$

<u>Schritt 4</u>: Abschätzung des H_R Anteils (muss gegen 0 gehen um vernachlässigbar zu sein)

$\left|\int_{H_R} \frac{1+z^2}{1+z^4}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1+R^2e^{2it}}{1+R^4e^{4it}} Rie^{it}\,dt\right| \leq \int_0^\pi R\,\frac{1+R^2}{R^4-1}\,dt = \pi\,\frac{R+R^3}{R^4-1}$

$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$
$\to 0$ für $R\to\infty$

also: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{1+z^2}{1+z^4}\,dz = \sqrt{2}\,\pi$

Klausuraufgabe!

30.06.2010

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right]$$ – nicht allgemein gültig!

1. Schritt: Finde Polstellen innerhalb T_R: $a = +i$

2. Schritt: Berechne das Residuum:

$$\mathrm{res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = \frac{e^{ii}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ie}$$

3. Schritt: Residuensatz:

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \,\frac{1}{2ie} = \underline{\underline{\frac{\pi}{e}}}$$

4. Schritt: Abschätzung: $\gamma_R(t) = Re^{it}$

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\exp(iR(\cos t + i\sin t))}{1+R^2 e^{2it}}\, iRe^{it}\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\left|\exp(iR\cos t)\exp(-R\sin t)\right| dt$$

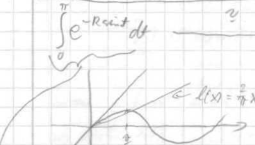
$$= \int_0^\pi \underbrace{\exp(-R\sin(t))}_{\text{negativ für } t\in[0,\pi]}\,dt\,\frac{R}{R^2-1} \leq \pi\frac{R}{R^2-1} \to 0 \text{ für } R\to\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e} \quad \text{für } R>1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{e}}} \quad \text{also} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{2e}}}$$

Integrale, die nicht absolut konvergieren

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt \xrightarrow{?} 0 \text{ für } R\to\infty$$



$$\boxed{\frac{2}{\pi}\theta < \sin\theta < \theta \quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$$ Jordan Lemma

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}\,dt$$

$$= 2\int_0^R \frac{\pi}{2R}e^{-s}\,ds \leq \frac{\pi}{R}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = \frac{\pi}{R} \to 0 \text{ für } R\to\infty$$

$s = R\frac{2}{\pi}t$

$ds = R\frac{2}{\pi}\,dt$