NuMa GÜ 3

31. MAI 2010

3.11.) Satz 3.9.

Es gelte $\chi(A) = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$ (Vor.)

sei $x + \Delta x$ Lsg. $(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$

Dann gilt: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\chi(A)}{1 - \chi(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0,985 & 2,146 \\ 1,478 & 3,175 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0,597 \\ 0,888 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 3,175 & -2,146 \\ -1,478 & 0,985 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 4,653$

$\|A^{-1}\|_\infty = 119,807\ldots$

$\|b\|_\infty = 0,888$

$\left.\begin{matrix} \|A\|_\infty \\ \|A^{-1}\|_\infty \end{matrix}\right\} \chi^\infty(A) = 557,463\ldots$

~~####~~ $\|\Delta A\|_\infty = 2 \cdot 0,0005$

$\|\Delta b\|_\infty = 1 \cdot 0,0005$

$\chi^\infty(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \overset{!}{<} 1$?

$= 0,1196\ldots < 1 \Rightarrow$ Satz 3.9 anwendbar

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 0{,}4927\ldots \approx 50\%$$

3.10.)

$$A = \begin{pmatrix} 2{,}0 & -0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}1 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

a.) Für sym. Matrizen gilt:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{max}(A)}$$

$$\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda^3 - 4{,}8\lambda^2 + 7{,}02\lambda - 3{,}22 \stackrel{!}{=} 0$$

Nullstelle $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda^3 - 4{,}8\lambda^2 + 7{,}02\lambda - 3{,}22) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 3{,}8\lambda + 3{,}22$$

$$\Rightarrow \lambda_{23} = 1{,}9 \pm \sqrt{1{,}9^2 - 3{,}22} = 1{,}9 \pm \sqrt{0{,}39}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2{,}5244998\ldots, \quad \lambda_3 = 1{,}27\mathbf{55}\ldots$$

$$\Rightarrow \kappa_2(A) = 2{,}5244998$$

b.)

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0{,}009 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & -0{,}003 & -0{,}002 \\ 0{,}005 & 0{,}002 & 0{,}007 \end{pmatrix}$$

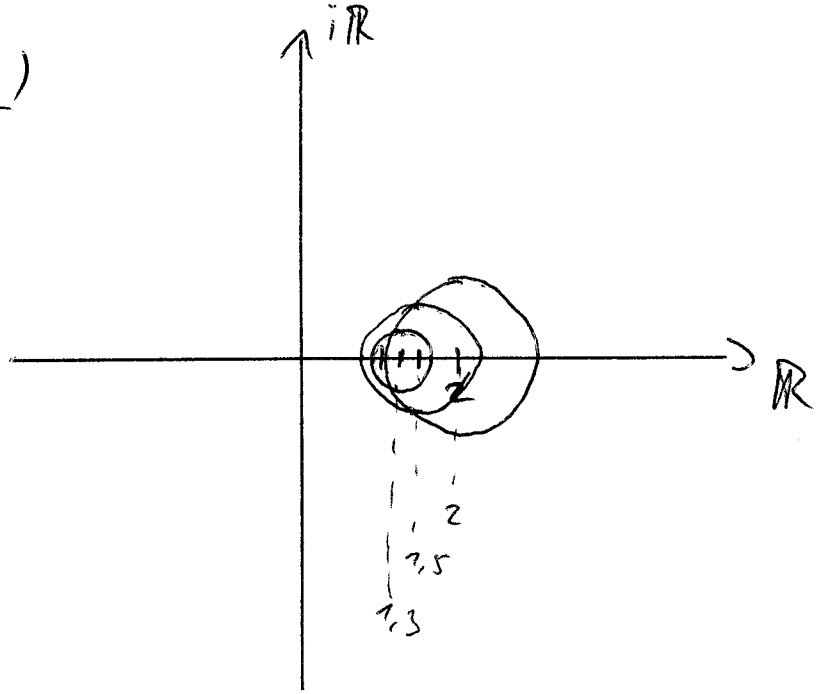
$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|M\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|M\|_\infty ; \quad \|\Delta A\|_2 \leq \sqrt{3} \cdot \|\Delta A\|_\infty = \sqrt{3} \cdot 0{,}014 \approx 0{,}02425$$

NuMa GÜ3

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|} \leq \frac{\kappa_2(A)}{1-\kappa_2(A)\frac{\sqrt{n}\,\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_2}} \left(\frac{\sqrt{n}\,\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_2} + \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \right) \approx 0{,}03991\ldots$$

c.)



$0{,}5 \leq EW(A) \leq 3 \quad \Rightarrow \kappa_2(A) \approx \frac{3}{0{,}5} = 6$