# Algèbre

## Matrices : valeurs propres, vecteurs propres

### DEFINITIONS

Définition : On appelle valeurs propres λ et vecteurs propres U, tous couples (λ, U) tels que

**AU = λU** (A matrice, λ réel, U vecteur)

λ est une valeur propre ssi λI – A n'est pas inversible

ssi det(λI –A) = 0 On peut aussi utiliser det(A –λI) = 0

Définition : On appelle polynôme caractéristique P(λ) le polynôme : **P(λ) = det (λI – A)**

Définition : On appelle multiplicité le nombre de fois où une même valeur de λ est présente (Si deux valeurs identiques alors multiplicité = 2).

Définition : λ valeur propre, V vecteur propre.

$V(\lambda) = \{V \in \mathbb{R}^N, AV = \lambda V\}$ (ensemble des vecteurs propres)

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^N$ appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ.

Définition : Une matrice est INVERSIBLE si son **déterminant est ≠ 0**

Définition : Une matrice est DIAGONALISABLE si dans $\mathbb{R}^N$ elle possède N vecteurs propres, linéairement indépendants (dans $\mathbb{R}^1$ : un vecteur propre, dans $\mathbb{R}^2$ : deux vecteurs propres, etc, pas plus, pas moins et indépendants)

### TECHNIQUES

Valeurs propres

- Construire λI – A
- Construire **P(λ) = det (λI – A)**
- Factoriser P(λ) (rechercher les racines réelles et/ou complexes) grâce à **P(λ) = 0**
  - Permet de trouver les valeurs propres
  - Permet de trouver la multiplicité de chaque valeur propre

Vecteurs propres

- Ecrire **AU = λU** (pour chaque valeur propre)
  <=> AU – λU = 0
  <=> (A – λ)U = 0
- Résoudre ce système linéaire => infinité de solutions
- Trouver une famille de solutions linéairement indépendantes et génératrices (base)

Diagonalisation

- Résoudre $\boldsymbol{\alpha\, U_{\lambda 1} + \beta\, U_{\lambda 2} + \gamma\, U_{\lambda 3} = 0}$ <=> $\boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma = 0}$ ⇒ vecteurs indépendants

## ENTRAINEMENT

**A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ λI = $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ d'où ici, λI-A = $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

**Calcul de det (λI – A)**

det (λI – A) = $\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}$

$= \lambda(\lambda^2 - 1) + (-\lambda - 1) - (1 + \lambda)$

$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - (\lambda + 1) - (\lambda + 1)$

$= (\lambda + 1)[\lambda(\lambda - 1) - 1 - 1]$

$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2)$

$\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 9$

$\lambda_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ $\lambda_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

det (λI – A) = $(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

$= (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$

on doit extraire les valeurs propres issues de la factorisation.
/!\ penser aux signes :
(λ-α) => α valeur propre
(λ+α) => - α valeur propre

Deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ (racine double, multiplicité 2) et $\lambda_2 = 2$

Résolution de système **AU = λU** avec U(x,y,z)

- λ = – 1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{matrix}$ AU = λU <=> $\begin{cases} y+z = \lambda x \\ x+z = \lambda y \\ x+y = \lambda z \end{cases}$

$\lambda_1 = -1$ d'où AU = λU <=> $\begin{cases} y+z = -x \\ x+z = -y \\ x+y = -z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ <=> $x+y+z = 0$

3 inconnues, 1 équation : dim = 2 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- λ = 2 de même façon on a :

$\begin{cases} y+z = 2x \\ x+z = 2y \\ x+y = 2z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 2x - z \\ x+z = 2(2x - z) \\ x + 2x - z = 2z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 2x - z \\ x+z = 4x - 2z \\ 3x = 3z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 2x - z \\ -3x = -3z \\ 3x = 3z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = z \\ y = 2x - x \\ = x \end{cases}$

x = y = z dim = 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## DEUX METHODES POUR DETERMINER A-1

avec A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

**Avec la formule** : **$A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ com(A)$^t$**

det A $= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2 * 2 + (-2) + 0 = 2$ det A = 2

det$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ = a*d – b*c

**si det = 0 => A n'est pas inversible**

com (A) commatrice de A = matrice des déterminants de A

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det $A_{11} = 2$ det $A_{12} = -2$ det $A_{13} = 2$

$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det $A_{21} = -2$ det $A_{22} = 4$ det $A_{23} = -4$

$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ det $A_{31} = 1$ det $A_{32} = -2$ det $A_{33} = 3$

com (A) = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ => com(A)$^t$ = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (transposée = on garde la diagonale et on inverse)

$$\frac{1}{\det A}\,\mathrm{com}(A)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

**Sans la formule** (avec un système*) → à utiliser de préférence si la matrice contient des 0

* on peut aussi faire un pivot de gauss

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

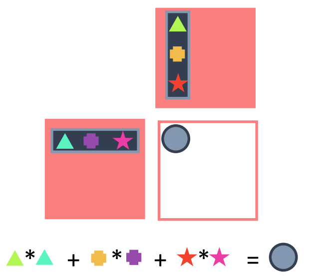
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-b & 2d-e & 2g-h \\ -a+2b-c & -d+2e-f & -g+2h-i \\ -2b+2c & -2e+2f & -2h+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$① \begin{cases} 2a-b=1 \\ -a+2b-c=0 \\ -2b+2c=0 \end{cases} \quad ① \begin{cases} b=c \\ 2a-b=1 \\ -a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} 2d-e=0 \\ -d+2e-f=1 \\ -2e+2f=0 \end{cases} \quad ② \begin{cases} e=f \\ e=2d \\ -d+4d-2d=1 \end{cases} \quad \begin{cases} d=1 \\ e=2 \\ f=2 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} 2g-h=0 \\ -g+2h-i=0 \\ -2h+2i=1 \end{cases} \quad ③ \begin{cases} h=2g \\ -g+2*2g-i=0 \\ -2*2g+2*3g=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3g-i=0 \\ 2g=1 \\ i=3g \end{cases} \quad \begin{cases} g=1/2 \\ h=1 \\ i=3/2 \end{cases}$$

Vérification: $A*A^{-1} = I$




$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$

# Matrices : Système différentiel linéaire (SDL)

## DEFINITIONS

Système différentiel linéaire (SDL) ( ≈ equations différentielles pour les matrices)

**X'(t) = AX(t) + F(t)** F(t) => second membre pour les equa diff normales

Si on connait une condition initiale, on dit que le problème est de Cauchy

$X(t_0) = X_0$

Si F=0 le problème de Cauchy est dit **homogène**

Pour résoudre le problème de Cauchy :

- trouver les valeurs propres $\lambda$ puis les vecteurs propres $U$
- faire la matrice des vecteurs propres C et sa matrice inverse $C^{-1}$
- trouver $e^{tA}$ avec $\boldsymbol{e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}}$ et avec $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda 1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda 2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda 3} \end{pmatrix}$
- trouver $X(t)$ avec $\boldsymbol{X(t) = e^{tA}U + X_p(t)}$ avec U condition initiale

## ENTRAINEMENT, partiel 2013

**Exercice 1**

**On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^3$**

$$(\boldsymbol{PC1}) \begin{cases} \boldsymbol{X'(t) = AX(t)} \\ \boldsymbol{X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \end{cases}$$

**Avec A =** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{6} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-6} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-4} \end{pmatrix}$

**(1.1) Monter que cette matrice A est diagonalisable**

**(1.2) Comment peut t on exprimer plus simplement $\exp(tA) = e^{tA}$ pour $t \geq 0$ ?**

**(1.3) Quelle est la solution du Problème de Cauchy $(PC1)$**

**On donnera explicitement les solutions des composantes $x_1(t)$, $x_3(t)$ de X(t) en fonction de $a, b$ et $c$.**

**(1.4) Cette solution possède t elle une limite lorsque t $\to +\infty$ ?**

**(1.5) Déterminer la solution du Problème de Cauchy $(PC1)$ satisfaisant la condition initiale**

$$\boldsymbol{X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**1)** On est dans $\mathbb{R}^3$ donc A est diagonalisable ssi A admet 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Calculons det(A– λI)

λI = $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ d'où ici, A– λI = $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 6 & 4-\lambda & -6 \\ 4 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$

det(A– λI) = $3-\lambda \begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4-\lambda & -6 \end{vmatrix}$

det(A– λI) = $(3-\lambda)((4-\lambda)(-4-\lambda)+12) - 6(-4-\lambda+6) + 4((-6+12-3\lambda)$

det(A– λI) = $(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda - 16 + 12) - 6(2-\lambda) + 4(6-3\lambda)$

det(A– λI) = $(3-\lambda)(\lambda^2 - 4) + 6(\lambda-2) - 12(\lambda-2)$

det(A– λI) = $(3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) - 6(\lambda-2)$

det(A– λI) = $(\lambda-2)[(3-\lambda)(\lambda+2) - 6]$

det(A– λI) = $(\lambda-2)(3\lambda + 6 - \lambda^2 - 2\lambda - 6)$

det(A– λI) = $(\lambda-2)(\lambda - \lambda^2)$

det(A– λI) = $\lambda(\lambda-2)(1-\lambda)$

trois valeurs propres : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ , $\lambda_3 = 1$

Résolution de système **AU = λU** avec U(x,y,z)

- λ = 0 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3x + y - 3z \\ 6x + 4y - 6z \\ 4x + 2y - 4z \end{matrix}$ AU = λU <=> $\begin{cases} 3x + y - 3z = \lambda x \\ 6x + 4y - 6z = \lambda y \\ 4x + 2y - 4z = \lambda z \end{cases}$

$\lambda_1 = 0$ d'où AU = λU <=> $\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ 6x + 4y - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 3z - 3x \\ 6x + 4(3z - 3x) - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} y = 3z - 3x \\ 6x + 12z - 12x - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 3z - 3x \\ -6x + 6z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 3z - 3x \\ 6z = 6x \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$

D'où $U_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- λ = 1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de même façon on a :

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3x + y - 3z \\ 6x + 4y - 6z \\ 4x + 2y - 4z \end{matrix}$ AU = λU <=> $\begin{cases} 3x + y - 3z = \lambda x \\ 6x + 4y - 6z = \lambda y \\ 4x + 2y - 4z = \lambda z \end{cases}$

$\lambda_1 = 0$ d'où AU = λU <=> $\begin{cases} 3x + y - 3z = x \\ 6x + 4y - 6z = y \\ 4x + 2y - 4z = z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = 3z - 2x \\ 6x + 3(3z - 2x) - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$ <=>

$$\begin{cases} y = 3z - 2x \\ 6x + 9z - 6x - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3z - 2x \\ 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où $U_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- λ = 2 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de même façon on a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3x + y - 3z \\ 6x + 4y - 6z \\ 4x + 2y - 4z \end{matrix} \qquad AU = \lambda U \iff \begin{cases} 3x + y - 3z = \lambda x \\ 6x + 4y - 6z = \lambda y \\ 4x + 2y - 4z = \lambda z \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$ d'où $AU = \lambda U \iff \begin{cases} 3x + y - 3z = 2x \\ 6x + 4y - 6z = 2y \\ 4x + 2y - 4z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3z - x \\ 6x + 2(3z - x) - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} y = 3z - x \\ 6x + 6z - 2x - 6z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3z - x \\ 4x = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

D'où $U_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour z=1

$U_{\lambda=0}$, $U_{\lambda=1}$ et $U_{\lambda=2}$ sont linéairement indépendants ssi il existe 3 réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que :

$\alpha\, U_{\lambda=0} + \beta\, U_{\lambda=1} + \gamma\, U_{\lambda=2} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\alpha\, U_{\lambda=0} + \beta\, U_{\lambda=1} + \gamma\, U_{\lambda=2} = 0 \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \gamma = -\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = -\alpha \\ 2\alpha + 3(-\alpha) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = -\alpha \\ -\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs sont linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable.

**2)** A est diagonalisable donc $e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$ où C est la matrice des vecteurs propres

**3)** $(PC1)$ est un problème de Cauchy homogène. Donc la solution de problème est $X(t) = e^{tA} X_0$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons $C^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b & d-e & g-h \\ 2b+3c & 2e+3f & 2h+3i \\ a+c & d+f & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$①\begin{cases} a-b=1 \\ 2b+3c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \quad ①\begin{cases} c=-a \\ b=a-1 \\ 2(a-1)+3(-a) \ =0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a-2-3a=0 \\ b=a-1 \\ c=-a \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

$$②\begin{cases} d-e=0 \\ 2e+3f=1 \\ d+f=0 \end{cases} \quad ②\begin{cases} d=e \\ f=-d \\ 2(d)+3(-d) \ =1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2d-3d-1=0 \\ e=d \\ f=-d \end{cases} \quad \begin{cases} d=-1 \\ e=-1 \\ f=1 \end{cases}$$

$$③\begin{cases} g-h=0 \\ 2h+3i=0 \\ g+i=1 \end{cases} \quad ③\begin{cases} h=g \\ 2(g)+3(1-g)=0 \\ i=1-g \end{cases} \quad \begin{cases} 2g+3-3g=0 \\ h=g \\ i=1-g \end{cases} \quad \begin{cases} g=3 \\ h=3 \\ i=-2 \end{cases}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de $e^{tA}$ : $e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d'où $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -e^t & 0 \\ 0 & 2e^t & 3e^{2t} \\ 1 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2+3e^t & -1+e^t & 3-3e^t \\ -6e^t+6e^t & -2e^t+3e^{2t} & 6e^t-6e^{2t} \\ -2+2e^t & -1+e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{pmatrix} = e^{tA}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+3e^t & -1+e^t & 3-3e^t \\ -6e^t+6e^t & -2e^t+3e^{2t} & 6e^t-6e^{2t} \\ -2+2e^t & -1+e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a(-2+3e^t)+b(-1+e^t)+c(3-3e^t) \\ a(-6e^t+6e^t)+b(-2e^t+3e^{2t})+c(6e^t-6e^{2t}) \\ a(-2+2e^t)+b(-1+e^{2t})+c(3-2e^{2t}) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a+b-3c)e^t-2a-b+3c \\ (-6a-2b+6c)e^t+(6a+3b-6c)e^{2t} \\ (2a+b-2c)e^{2t}-2a-b+3c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x1(t)=(3a+b-3c)e^t-2a-b+3c \\ x2(t)=(-6a-2b+6c)e^t+(6a+3b-6c)e^{2t} \\ x3(t)=(2a+b-2c)e^{2t}-2a-b+3c \end{cases}$$

**4)** $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{2t} = +\infty$ Donc $\lim x1(t) = \lim x2(t) = \lim x3(t) = +\infty$

**5)** $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x1(t)=1 \\ x2(t)=0 \\ x3(t) \ =1 \end{cases}$

**Exercice 2 :**

**On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$**

$$(\boldsymbol{PC2})\begin{cases} \boldsymbol{x'1(t) = 2x1(t) + 2x2(t) - 2} \\ \boldsymbol{x'2(t) = -2x1(t) - x2(t) + 5} \\ \boldsymbol{x1(0) = a} \\ \boldsymbol{x2(0) = b} \end{cases}$$

**(2.1) Mettre ce problème de Cauchy sous la forme X'(t) = PX(t) +F pour t $\geq \boldsymbol{0}$ avec $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^2$**

**(2.2) Quelle est la solution générale du système différentiel X'(t) = PX(t) pour t $\geq \boldsymbol{0}$ ?**

**(2.3) Trouver une solution particulière du système complet X'(t) = PX(t) +F pour t $\geq \boldsymbol{0}$**

**(2.4) Calculer la solution du Problème de Cauchy $(\boldsymbol{PC}2)$**

**(2.5) Cette solution possède-t-elle une limite lorsque t $\rightarrow +\infty$ ?**

**1)** P = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ X(t) = $\begin{pmatrix} x1(t) \\ x2(t) \end{pmatrix}$ F = $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

**2)** Solution générale : X(t) = $e^{tA}U$ +X$_p(t)$

U matrice des vecteurs propres de A

X$_p(t)$ solution particulière de l'équation

**3)** $\begin{matrix} x1(t) = m & x2(t) = n \\ x'1(t) = 0 & x'2(t) = 0 \end{matrix}$ m et n constantes

$$\begin{array}{c} 0 = 2m - 2n - 2 \\ 0 = \ -2m - n + 5 \\ \hline 0 = \ -3n + 3 \end{array} \qquad n = 1 \quad m = 2$$

Solution particulière X$_p(t)$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**4)** det P = 2, det P ≠ 0 donc P inversible

det (P− λI) = $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 \quad = \ -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4 \quad = \lambda^2 - \ \lambda - 6$

$\Delta = (1)^2 - 4 * 1 * (-6) = 1+24 = 25$

$\lambda_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ $\lambda_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

Deux valeurs propres : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$

Résolution de système **AU = λU**  avec U(x,y,z)

- λ = -2  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2x-2y \\ -2x-y \end{matrix} \qquad \text{PU} = \lambda\text{U} \iff \begin{cases} 2x-2y = \lambda x \\ -2x-y = \lambda y \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$ d'où AU = λU $\iff \begin{cases} 2x-2y = -2x \\ -2x-y = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-2y = 0 \\ -2x+y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y = 0 \\ 2x-y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases}$

$U(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec x=1

- λ = 3  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2x-2y \\ -2x-y \end{matrix} \qquad \text{PU} = \lambda\text{U} \iff \begin{cases} 2x-2y = \lambda x \\ -2x-y = \lambda y \end{cases}$$

$\Lambda_2 = 3$ d'où AU = λU $\iff \begin{cases} 2x-2y = 3x \\ -2x-y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -x-2y = 0 \\ -2x-4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ -2x-4y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \end{cases}$

$U(\lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec y=1

C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  det C = 5  Calculons $C^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-2b & c-2d \\ 2a+b & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a-2b = 1 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b+1 \\ 2(2b+1)+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b+1 \\ 4b+2+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(-\frac{2}{5})+1 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} c-2d = 0 \\ 2c+d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2d \\ 2(2d)+d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2d \\ d = \frac{1}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{1}{5} \end{cases}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Calcul de $e^{tA}$ : $e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$

$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$  d'où $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
& \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \arrow[d] & & \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \arrow[d] \\
\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} e^{-2t} & -2e^{3t} \\ 2e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \arrow[rr] & & \begin{pmatrix} \frac{-e^{-2t}-4e^{3t}}{5} & \frac{-2e^{-2t}-2e^{3t}}{5} \\ \frac{2e^{-2t}-2e^{3t}}{5} & \frac{4e^{-2t}+e^{3t}}{5} \end{pmatrix} = e^{tA}
\end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{X(t) = e^{tA}U + X_p(t)}$ avec U condition initiale