Processus

DEFINITIONS

Définition d'un processus : soit un espace probabilisé (Ω, F, P). On appelle processus stochastique sur (Ω, F, P) toute famille de variables aléatoires $X = X(n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace E, où $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Etat d'un processus : L'espace E est appelé espace d'états. Les éléments de E sont appelés « états ». (=valeurs prises par le processus)

Chaine de Markov : On appelle une chaine de Markov tout processus d'ordre $k = 1$. Autrement dit, on dit que le processus $X = X(n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable est une chaine de Markov si $\forall n \geq 1$ et $\forall\ i_0, \dots, i_n, i_{n-1}$ tel que

$$P(X_0 = i_0, \dots X_n = i_n) > 0$$

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,/\, X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,/\, X_n = i_n)$$

La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant le passé du processus ne dépend que de la valeur de X à l'instant précédent.

Ça s'appelle une chaine car au niveau des graphes, ça fait un graphe orienté et lié ou ce genre de truc

Chaine de Markov homogène : Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov. Si $P(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i)$ ne dépends pas de n, c'est-à-dire si $\forall n \geq 0$ on a $P(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i) = P(X_1 = j \,/\, X_0 = i)$ alors on dit que X est une chaine de Markov homogène.

METHODES

Montrer qu'on a une chaine de Markov :

- Montrer qu'on a une suite aléatoire récurrente
- Montrer qu'on a une suite aléatoire (non récurrente)

Voir vers quoi ça tends quand $n \longrightarrow +\infty$:
Faire la matrice de passage avec les valeurs propres

Chapmann-Kolmogoroff :
A voir + tard

EXERCICES (A SAVOIR PAR CŒUR POUR LE DS)

<u>Résumé</u> fait en TD corrigé ici √

Exercice 1 : questions
Exercice 2 : dé à 6 faces √
Exercice 3 : questions
Exercice 4 : déplacements des mouches √
Exercice 5 : choix du rat √
Exercice 6 : jeu de dé
Exercice 7 : matrices
Exercice 8 : chanteuse d'opéra √
Exercice 9 : questions √
Exercice 10 : urne de molécules
Exercice 11 : transmission d'un message √
Exercice >11 : Processus de Poisson

► Exercice 1 ◄

Exercice 1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires discrètes indépendantes de loi uniforme à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On note $S_0 = 0$ et on définit S_n par la relation $S_n = S_{n-1} + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Donner le système dynamique associé à S_n. (i.e. les f et μ du cours)
2. Montrer que $(S_n)_{(n\in \mathbb{N})}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
3. Donner sa matrice de transition.
4. Donner la loi de probabilité de S_1 et de S_2.
5. Existe-t-il une probabilité invariante ?

Blalabla

► Exercice 2 ◄

Exercice 2. Soit $X_0 = 6$ et une suite X_n définie comme suit. On lance un dé bien équilibré à 6 faces. On note Y_1 sa valeur et on pose $X_1 = min(X_0, Y_1)$, on relance le dé, on note Y_2 et ainsi de suite on a $X_2 = min(X_1, Y_2)$, puis $X_{n+1} = min(X_n, Y_{n+1})$ avec Y_n le résultat du nième lancer de dé.

1. Donner l'espace des états du processus (X_n)
2. Montrer que c'est une chaîne de Markov
3. Donner sa matrice de transition
4. On définit le temps T comme le temps d'atteinte de 1 de la chaîne par $T = min\{n \geq 0, X_n = 1\}$. Calculer $P(T = 1)$, $P(T = 2)$, $P(T = n)$ et montrer que $P(T \geq n)$ tend vers 0 quand n tend vers plus l'infini.

1) Donner l'espace des états du processus (X_n)

Etat du processus (X_n) = valeur possibles prises par la suite (X_n)

L'espace E des processus (X_n) est donc $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

2) Montrer que c'est une chaine de Markov

- X_0 est une variable aléatoire à valeur dans E, E espace d'état fini.
- Y_n est une suite de variables identiquement indépendantes et indépendantes de X_0 (car X_0 est une constante)
- Soit l'application f telle que $X_{n+1} = f(X_n\,;\,Y_{n+1})$ avec $(Y_n)_n \geq 1$
  f est définie par $f(x; y) = \min(s; y)$

→ Donc (X_n) est une suite récurrente aléatoire, donc c'est une Chaine de Markov homogène

3) Donner sa matrice de transition

La matrice de transition P est définie par $P_{i,j} = P(f(i, Y_1) = j) = P(\min(i, Y_1) = j)$

- Si $i < j$ $\quad P_{i,j} = P(\min(i, Y_1) = j) = 0$
  Car si i est le min alors $i = j$ $\quad \Longrightarrow$ contradictoire
  si Y_1 est le min alors $j = Y_1$ et $i > j$ $\quad \Longrightarrow$ contradictoire
- Si $i = j$ $\quad P_{i,j} = P(\min(i, Y_1) = i) = P(Y_1 \geq i)$
  $= 1 - P(Y_1 \leq i - 1) = 1 - \frac{i-1}{6}$
- Si $i > j$ $\quad P_{i,j} = P(\min(i, Y_1) = j) = P(Y_1 = j) = \frac{1}{6}$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ somme des lignes = 1

4) Calculer les probas et montrer les limites

$T = \min\{n \geq 0 \,, X_n = 1\}$

$P(T = 1) = P(Y_1 = 1) = \frac{1}{6}$ (1er tirage, une chance sur six d'avoir 1)

$P(T = 1) = P(Y_1 > 1 \,;\, Y_2 = 1) = \frac{5}{6} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

…

$P(T = n) = P(Y_1 > 1 \,;\, Y_2 > 1 \,; \ldots ;\, Y_{n-1} > 1 \,;\, Y_n = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} * \frac{1}{6}$

$P(T \geq n) = P(Y_1 > 1 \,;\, Y_2 > 1 \,; \ldots ;\, Y_{n-1} > 1\,) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0$ donc $P(T \geq n)$ tends vers 0 lorsque n tends vers l'infini.

CCL : le chiffre 1 a très peu de probabilité de sortir au bout d'un temps long.

► Exercice 3 ◄

Exercice 3. Soit $\{X_n\}$ une suite des variables aléatoires discrètes i.i.d., $\mathbf{P}\{X_n = -1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = q = 1 - p$. Notons $Y_n = X_n X_{n+1}$. Est-ce-que $\{Y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov ?

Blalablabal

► Exercice 4 ◄

Exercice 4. Une mouche saute au hasard sur les sommets d'un triangle. Une seconde mouche saute sur les sommets d'un triangle, mais elle a deux fois plus de chance de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre que dans le sens inverse. Pour chacun des 2 cas, donner la matrice de transition, la ou les probabilité(s) invariante(s) et trouver la probabilité qu'après n étapes, la mouche est retournée au sommet dont elle est partie.

① Matrice de transition

- 1er cas : 1ere mouche 

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrice de transition)}$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\lambda & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= -\lambda^3 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\lambda}{4}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}(-4\lambda^3 + 3\lambda + 1)$$

Si $\lambda = 1$ alors on a $(-4 * 1^3 + 3 * 1 + 1) = 0$ ok

D'où $\lambda = 1$ racine évidente $\Rightarrow$ factorisable par $\lambda - 1$

$$\begin{array}{r|l} -4\lambda^3 + 3\lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} -4\lambda^3 + 4\lambda^2 & -4\lambda^2 - 4\lambda - 1 \\ \hline -4\lambda^2 + 3\lambda + 1 & \\ -4\lambda^2 + 4\lambda + 1 & \\ \hline -\lambda + 1 & \\ -\lambda + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\det(P-\lambda I) = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(-4\lambda^2 - 4\lambda - 1)$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 * (-4) * (-1) = 0$$

$$\det(P-\lambda I) = -\frac{1}{4}(\lambda-1)(4\lambda^2+4\lambda+1) = -\frac{1}{4}(\lambda-1)(2\lambda+1)^2$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda = 1$ racine simple $\Longrightarrow$ vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\lambda = -\frac{1}{2}$ racine double

$Pv = \lambda v$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\,x\\ -\frac{1}{2}\,y\\ -\frac{1}{2}\,z\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y+\frac{1}{2}\,z=0\\ \frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y+\frac{1}{2}\,z=0\\ \frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y+\frac{1}{2}\,z=0\end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$P^n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

2 Proba invariante

Π probabilité

Π invariante si $\Pi * \mathrm{P} = \Pi$

Donc on cherche $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ telle que $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 1$ et $\Pi * \mathrm{P} = \Pi$

$\Pi * \mathrm{P} = \Pi \Leftrightarrow \left(\frac{\Pi_2}{2}+\frac{\Pi_3}{2};\ \frac{\Pi_1}{2}+\frac{\Pi_3}{2};\ \frac{\Pi_1}{2}+\frac{\Pi_2}{2}\right) = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ (d'après la matrice de transition)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\Pi_2}{2}+\frac{\Pi_3}{2} = \Pi_1\\ \frac{\Pi_1}{2}+\frac{\Pi_3}{2} = \Pi_2\\ \frac{\Pi_1}{2}+\frac{\Pi_2}{2} = \Pi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 0\\ \Pi_1-2\Pi_2+\Pi_3 = 0\\ \Pi_1+\Pi_2-2\Pi_3 = 0\end{cases}$$

1^{ere} ligne : $-2\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 0$ or $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 1 \Leftrightarrow \Pi_2+\Pi_3 = 1-\Pi_1$

$-2\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 0 \Leftrightarrow -3\Pi_1 = 1 \Leftrightarrow \Pi_1 = \frac{1}{3}$

De même pour chaque ligne, on obtient : $\Pi_2 = \frac{1}{3}$ et $\Pi_3 = \frac{1}{3}$

Donc $\Pi = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

La probabilité pour chaque sommet du triangle est équiprobable au début et le reste au bout de n fois (reste tout le temps la même).

3 Elle retourne au sommet dont elle est partie

Retour au sommet d'origine P

départ sommet départ sommet départ sommet

$P(A\cap B) = P(A|B) * P(B)$

$$P = P(X_n = 1, X_0 = 1) \; + \; P(X_n = 2, X_0 = 2) \; + \; P(X_n = 3, X_0 = 3)$$

$$= P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) * P(X_0 = 1)$$

$$+ P(X_n = 2 \mid X_0 = 2) * P(X_0 = 2)$$

$$+ P(X_n = 3 \mid X_0 = 3) * P(X_0 = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) * P(X_0 = 1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) * P(X_0 = 2) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) * P(X_0 = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\big(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3)\big)$$

Ceci est la proba que la mouche soit retournée sur le sommet d'origine.

- <u>2eme cas</u> : 2eme mouche 

① Matrice de transition

La mouche a 2 fois plus de chance de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrice de transition)}$$

$$\det(P - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

[…]

$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} =$ résultat final

$\lambda = 1$ est une racine évidente $\Rightarrow$ factorisable par $\lambda - 1$

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} -\lambda^3 + \lambda^2 & -\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{3} \\ \hline -\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} & \\ -\lambda^2 + \lambda & \\ \hline -\frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$\det(P - \lambda I) = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{3}\right)$$

$-\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{3}$ $\qquad \Delta = (1)^2 - 4 * (1) * \left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

$\Longrightarrow$ 2 solutions complexes

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \frac{-1-i\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = -\frac{1}{2} - i * \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{\lambda_3} = \frac{-1+i\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = -\frac{1}{2} + i * \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$|\lambda_2| = \left|-\frac{1}{2} - i * \frac{1}{2\sqrt{3}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

On cherche θ_2 tel que $\cos(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta_2) = \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow \theta_2 = \frac{5\pi}{6}$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

λ_2 et λ_3 sont conjugués $\Longrightarrow \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ et $\lambda_1 = 1$

Il existe une matrice M telle que $P^n = MD^nM^t$

$$P^n = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{\frac{5in\pi}{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-\frac{5in\pi}{6}} \end{pmatrix}$$

③ Elle retourne au sommet dont elle est partie

Les systèmes sont trop durs à résoudre avec des valeurs propres complexes donc on fait juste les valeurs des diagonales

${P_{1,1}}^{(n)}$ la proba de partir du sommet 1 et d'y revenir, s'écrit sous la forme :

$${P_{1,1}}^{(n)} = a + b * \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{\frac{5in\pi}{6}} + c\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-\frac{5in\pi}{6}} \qquad a, b \text{ et } c \text{ complexes}$$

$$a = x_A + iy_A \qquad b = x_B + iy_B \qquad c = x_C + iy_C \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$${P_{1,1}}^{(n)} = (x_A + iy_A) + (x_B + iy_B) * \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{\frac{5in\pi}{6}} + (x_C + iy_C)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-\frac{5in\pi}{6}}$$

$${P_{1,1}}^{(n)} = (x_A + iy_A) + (x_B + iy_B) * \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n * \left(\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right) + (x_C + iy_C)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n * \left(\cos\left(\frac{-5n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5n\pi}{6}\right)\right)$$

$${P_{1,1}}^{(n)} = (x_A + iy_A) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[x_B\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + ix_B\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + iy_B\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) - y_B\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + x_C\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) - ix_C\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + iy_C\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + y_C\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$$

$${P_{1,1}}^{(n)} = (x_A + iy_A) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[(x_B + x_C)\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + (y_B + y_C)\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + i\left((x_B - x_C)\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + (y_B + y_C)\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right)\right]$$

On sépare partie réelle et partie imaginaire. Et ${P_{1,1}}^{(n)}$ correspond à la partie réelle.

$${P_{1,1}}^{(n)} = (x_A + iy_A) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[(x_B + x_C)\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + (y_B + y_C)\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$$

$${P_{1,1}}^{(n)} = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[\beta\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + \gamma\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$$

Ceci correspond à la proba de retourner sur le sommet 1 en partant du sommet 1 après n déplacements. Il faut donc trouver α, β et γ

On cherche donc à avoir un système d'équations à 3 inconnues. Pour cela, on regarde la proba de retourner sur le sommet 1 en partant du sommet 1 après 0, 1 ou 2 déplacements.

- $n = 0$

${P_{1,1}}^{(0)} = 1$ (elle part du sommet 1 et a fait 0 déplacement, la proba de se trouver en 1 est donc 100%)

Et ${P_{1,1}}^{(0)} = \alpha + \beta\cos 0 + \gamma\sin 0$ donc $\alpha + \beta = 1$

- $n = 1$

${P_{1,1}}^{(1)} = 0$ (elle part du sommet 1 et a fait 1 déplacement, elle ne peut donc en aucun cas se trouver au sommet 1)

Et ${P_{1,1}}^{(1)} = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\beta\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \gamma\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\beta\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\gamma\right)$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\beta\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\gamma\right) = 0 \quad \Rightarrow \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\gamma = 0$$

- $n = 2$

${P_{1,1}}^{(2)} = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ (cf schéma)

Et ${P_{1,1}}^{(2)} = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left[\beta\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + \gamma\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)\right] = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left[\beta\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

$$= \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\beta * \frac{1}{2} + \gamma * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \alpha + \frac{\beta}{6} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta * \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\gamma}{2} = \frac{4}{9}$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\gamma = 0 \\ \alpha + \beta * \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\gamma}{2} = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 & (1) \\ \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \frac{\beta}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\gamma = \frac{4}{9} & (3) \end{cases}$$

$$(2) + (3) \quad \Leftrightarrow 2\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{6} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 2\alpha - \frac{2\beta}{6} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 2\alpha - \frac{\beta}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \beta \Rightarrow 2(1-\beta) - \frac{\beta}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow 2 - 2\beta - \frac{\beta}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow -\frac{7\beta}{3} = \frac{4}{9} - 2 \Rightarrow -\frac{7\beta}{3} = -\frac{14}{9}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{14}{9} * \frac{3}{7} \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

$\alpha = 1 - \frac{2}{3} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

② $\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\gamma = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\gamma = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}\gamma = 0 \Longrightarrow \gamma = 0$

D'où on remplace dans la probabilité que la mouche retourne sur le sommet 1 en partant du sommet 1 après n déplacements : ${P_{1,1}}^{(n)} = \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[\beta \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + \gamma \sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$ car on a α, β et γ

$\Longrightarrow {P_{1,1}}^{(n)} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[\frac{2}{3}\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$

Or, peu importe le sommet depuis lequel elle part, le principe reste le même, on a donc :

${P_{1,1}}^{(n)} = {P_{2,2}}^{(n)} = {P_{3,3}}^{(n)}$

$\Longrightarrow P = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left[\frac{2}{3}\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right]$ C'est la même proba pour les 3 sommets.

② Proba invariante

Π probabilité

Π invariante si $\Pi * \mathrm{P} = \Pi$

Donc on cherche $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ telle que $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$ et $\Pi * \mathrm{P} = \Pi$

$\Pi * \mathrm{P} = \Pi \Leftrightarrow (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) * \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ (d'après la matrice de transition)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} = \Pi_1 \\ = \Pi_2 \\ = \Pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{cases}$$

Suite dans le TD

► Exercice 5 ◄

Exercice 5. Un rat est entraîné à choisir un objet A parmi deux objets A et B, en le récompensant par de la nourriture chaque fois qu'il choisit A. Il peut être dans 3 états d'esprit :

1. Il ne peut se rappeler quel objet est récompensé et choisit au hasard.
2. Il se rappelle et choisit A, mais peut oublier de nouveau
3. Il se rappelle et choisit A et choisira toujours A

Après chaque étape, il peut changer d'état d'esprit suivant la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rat est dans l'état 1 juste avant le 1er essai. Quelle est la probabilité qu'il soit dans l'état 1 juste avant le (n+1)ème essai ? Quelle est la probabilité $P_{n+1}(A)$ qu'il choisisse A au (n+1)ème essai ? Quelqu'un suggère que l'on peut modéliser les choix successifs du rat, une suite de A et de B, par une chaîne de Markov. Dites si cela est possible ou non en vous basant sur $P_{n+1}(A)$

On veut étudier les actions du rat au bout d'un temps long. On cherche si son activité tends vers un pattern précis parmi 1-hasard, 2-en cours de mémorisation, 3-mémorisation

Soit X_n l'état d'esprit du rat avant le $(n+1)$ ième essai.

(X_n) est caractérisé par la matrice de transition P

La loi de X_0, notée M_0 est :

$M_0\big(P(X_0 = 1)\,, P(X_0 = 2)\,, P(X_0 = 3)\big)$

D'où $M_n\big(P(X_n = 1)\,, P(X_n = 2)\,, P(X_n = 3)\big)$

Donc $X = (X_n)$ est une chaine de Markov homogène de matrice de transition P

On a $\mu_n = \mu_0 * P^n$

le pb est comment calculer P^n

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i = situation du rat (hasard, en cours, mémorisation) // j = nb de fois dans la situation

On cherche les valeurs propres :

$$\det(P - XI) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} - X & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 - X \end{vmatrix}$$

$$\det(P - XI) = (1 - X)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} - X \end{vmatrix}$$

$$\det(P - XI) = (1 - X)\left[\left(\frac{1}{2} - X\right)\left(\frac{1}{12} - X\right) - \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\right]$$

$$\det(P - XI) = (1 - X)\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}X - \frac{1}{12}X + X^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$\det(P - XI) = (1 - X)\left(X^2 - \frac{7}{12}X - \frac{5}{24}\right)$

$\det(P - XI) = 0 \qquad \Leftrightarrow (1 - X)\left(X^2 - \frac{7}{12}X - \frac{5}{12}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - X = 0$ ou $X^2 - \frac{7}{12}X - \frac{5}{12} = 0$

$\Delta = \left(-\frac{7}{12}\right)^2 - 4 * 1 * \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{49}{144} + \frac{20}{24} = \frac{49}{144} + \frac{10}{12} = \frac{49}{144} + \frac{120}{144} = \frac{169}{144} = \frac{13^2}{12^2}$

$X_1 = \frac{\frac{7}{12} - \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{7}{12} - \frac{13}{12}}{2} = \frac{-\frac{6}{12}}{2} = -\frac{1}{4}$

$X_2 = \frac{\frac{7}{12} + \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{7}{12} + \frac{13}{12}}{2} = \frac{\frac{20}{12}}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4} \qquad \lambda_3 = \frac{5}{6}$

- $Pv_1 = \lambda_1 v_1$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on connait le résultat direct $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $Pv_2 = \lambda_2 v_2$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{4} \\ -\frac{y}{4} \\ -\frac{z}{4} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{x}{4} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{12} + \frac{5z}{12} = -\frac{y}{4} \\ z = -\frac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{5z}{12} = 0 \\ \frac{5z}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $Pv_2 = \lambda_3 v_2$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x}{6} \\ \frac{5y}{6} \\ \frac{5z}{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{2} = \frac{5x}{6} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{12}+\frac{5z}{12} = \frac{5y}{6} \\ z = \frac{5z}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2x}{6}+\frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{9y}{12}+\frac{5z}{12} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{3y}{4} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y = 0 \\ 2x-3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^n = M\begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}M^{-1}$$

$P = MDM^{-1}$
Décomposition de la matrice de passage
$P^n = (MDM^{-1})^n$
$= MD\cancel{M^{-1}} * \cancel{M}D\cancel{M^{-1}} * \ldots * \cancel{M}DM^{-1}$

On calcul M^{-1} avec la technique du système :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3i \\ a-3b+2c & d-3e+2f & g-3h+2i \\ a & d & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1\begin{cases} a+2b+3c = 1 \\ d+2e+3f = 0 \\ g+2h+3i = 0 \end{cases}$$

$$2\begin{cases} a-3b+2c = 0 \\ d-3e+2f = 1 \\ g-3h+2i = 0 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ g = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b+3c = 1 \\ -3b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 3b \\ c = \frac{3b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+3*\frac{3b}{2} = 1 \\ \frac{13b}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{13} \\ c = \frac{3}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e+3f = 0 \\ -3e+2f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}f+2f = 1 \\ e = \frac{-3f}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = \frac{2}{13} \\ e = \frac{-3}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2h+3i = 0 \\ -3h+2i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2}+\frac{9}{2}i+2i = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -\frac{1}{2}+\frac{15}{26} \\ \frac{13}{2}i = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{13} \\ i = -\frac{5}{13} \end{cases}$$

$$P^n = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1)^n & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 13\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

Lorsqu'on fait tendre n vers ∞ (pour voir si l'activité du rat prends un pattern particulier)

On regarde le résultat des valeurs propres, puis on multiplie toutes les valeurs ensemble, on obtient $P^n = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Soit un pattern de mémorisation pour tous les cas : il ne se trompe plus.

A completer ac le TD ?

► Exercice 6 ◄

Exercice 6. Un joueur joue au jeu suivant : il mise 1 euro et lance un dé. Si le résultat est pair il perd sa mise. Si le résultat est impair il gagne le résultat du dé en euros moins la mise. Avant de jouer il a un montant $X_0 = 10$ euros, après n étapes de jeu le montant de sa fortune est noté X_n. Le jeu s'arrête quand le joueur n'a plus d'argent et si $X_n = 0$ alors quel que soit $p \geq 0$, on pose $X_{n+p} = 0$.

1. Montrer que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Préciser son espace des états et sa matrice de transition.
2. On appelle T la durée de jeu c'est-à-dire le 1er instant n pour lequel $X_n = 0$. Calculer $P(T = 10)$.
3. Donner les états transients et récurrents de la chaîne. Justifier.

Bfdoifbo

► Exercice 7 ◄

Exercice 7. Pour chacune des matrices de transition suivantes, identifier les classes de communication. Donner les classes sont fermées, les états récurrents et les états transients et les probabilités invariantes ?

$$P = \begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Blalablabal

► Exercice 8 ◄

Exercice 8. Une chanteuse d'opéra doit donner une longue série de concerts. Son tempérament d'artiste la pousse à vouloir tous les soirs arrêter les concerts, et ce avec une probabilité $1/2$. Une fois qu'elle a décidé d'arrêter, elle ne chantera pas de nouveau jusqu'à ce que l'organisateur la convainque de son admiration. Pour cela il lui envoie des fleurs chaque jour jusqu'à ce qu'elle revienne. Des fleurs coûtant x milliers d'euros, $0 \leq x \leq 1$, amènent une réconciliation avec la probabilité $\sqrt{x}$. L'organisateur fait 750 euros de bénéfice à chaque représentation donnée. Combien doit-il dépenser en fleurs ?

Schéma

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} & 1-\sqrt{x} \end{pmatrix}$$

On recherche la proba invariante telle que $\Pi * \mathrm{P} = \Pi$ (car on en a besoin dans la formule)

$\Pi = (\Pi_1, \Pi_2)$ avec $\Pi_1 + \Pi_2 = 1$

$\Pi * \mathrm{P} = \Pi \Leftrightarrow (\Pi_1, \Pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} & 1-\sqrt{x} \end{pmatrix} = (\Pi_1, \Pi_2)$ (d'après la matrice de transition)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\Pi_1 + \sqrt{x}\Pi_2 = \Pi_1 & ① \\ \frac{1}{2}\Pi_1 + (1-\sqrt{x})\Pi_2 = \Pi_2 & ② \end{cases}$$

$\Pi_1 + \Pi_2 = 1 \Longrightarrow \Pi_1 = 1 - \Pi_2$

② $\frac{1}{2}\Pi_1 + \Pi_2 - \sqrt{x}\Pi_2 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1-\Pi_2) + \cancel{\Pi_2} - \sqrt{x}\Pi_2 = \cancel{\Pi_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{\Pi_2}{2} - \sqrt{x}\Pi_2 = 0$

$\Pi_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+2\sqrt{x}} \qquad \Pi_1 = 1 - \Pi_2 = 1 - \frac{1}{1+2\sqrt{x}} = \frac{1+2\sqrt{x}-1}{1+2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)P(X_n = 0) + \left(P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)P(X_n = 1)\right)$$

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \sqrt{x}P(X_n = 1)$$

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \sqrt{x}\left(1 - P(X_n = 0)\right)$$

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \sqrt{x} - \sqrt{x}P(X_n = 0)$$

$$P(X_{n+1} = 0) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)P(X_n = 0) + \sqrt{x}$$

Or on a la formule

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \alpha u_n + \beta \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \left(u_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n + \frac{\beta}{1-\alpha}}$$

Ici $\alpha = \frac{1}{2} - \sqrt{x}$ et $\beta = \sqrt{x}$

$$P(X_n = 0) = \left(P(X_n = 0) - \frac{\sqrt{x}}{1-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)}\right)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)^n + \frac{\sqrt{x}}{1-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$$P(X_n = 0) = \left(P(X_n = 0) - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-2\sqrt{x}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}$$

$$P(X_n = 0) = \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-2\sqrt{x}}{2}\right)^n + \frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$$

Gain	$0{,}75$	$-x$
Proba	$\frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{1+2\sqrt{x}}$

$E = 0{,}75 * \frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} - \frac{x}{1+2\sqrt{x}} = \frac{1{,}5\sqrt{x}-x}{1+2\sqrt{x}}$ fonction à étudier

► Exercice 9 ◄

Exercice 9. Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov homogène à l'espace d'états $\mathcal{E} = \{0, 1, 2\}$ dont la matrice stochastique est

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice $P^{(n)} = \|p_{ij}^{(n)}\|$ et $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$.

Le but est de calculer P^n

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \quad P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on utilise la technique classique avec déterminant et valeurs propres, on obtient qu'une seule v.p. réelle =

$$P = \frac{1}{4}(I + B) = \frac{1}{4}(B + I)$$

Avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

$B^3 = 9B$ $\qquad$ $B^4 = 27B$

$\Longrightarrow B^n = 3^{n-1} * B$ (à démontrer par récurrence)

<u>Initialisation</u> : Montrons que l'égalité $B^n = 3^{n-1} * B$ est vraie pour $n = 1$

$B^1 = B$ et $3^{1-1} * B = 3^0 * B = 1 * B = B$

L'égalité est vraie pour $n = 1$

Hérédité : Montrons que si l'égalité est vraie au rang k, c'est-à-dire

$B^{k+1} = 3^k * B = 3^{k-1} * B * B = 3^{k-1} * B^2 = 3^{k-1} * 3 * B = 3^k * B$

Conclusion : l'égalité est vraie au rang $k+1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad B^n = 3^{n-1} * B$

[avec la technique classique (calcul de det(P- λI)) on trouve qu'une seule valeur propre réelle = pb]

► Exercice 10 ◄

Exercice 10. L'urne d'Ehrenfest. Dans un récipient divisé en deux compartiments par une parois poreuse, sont réparties N molécules de gaz. A chaque unité de temps, une molécule choisie au hasard change de d'enceinte.

1. Proposer une modélisation microscopique, la matrice de transition et le système dynamique associé.
2. Proposer une modélisation macroscopique, la matrice de transition et le système dynamique associé.
3. Montrer que la loi binomiale $B(N, \frac{1}{2})$ est invariante pour le modèle macroscopique.

Blalablabal

► Exercice 11 ◄

Exercice 11. Transmission d'un message. On transmet un message codé en 0 ou 1. Chaque bit est transmis avec une proba d'erreur qui vaut a si on passe de 0 à 1 et b si l'erreur est de 1 à 0. Le résultat de la transmission au nième relais est noté X_n et l'on suppose que les relais ont des actions indépendantes les uns des autres. On se pose la question de la taille critique du réseau au delà de laquelle la proba d'erreur est supérieure à ϵ. On note l la longueur du message.

1. On suppose que $l = 1$
   (a) Donner la matrice de transition associée à $(0, 1)$
   (b) Donner l'équation de récurrence qui lie $g_{n+1} = P(X_{n+1} = 0)$ à g_n. Soit g le point fixe de cet équation. Calculer g et montrer que $g_n - g = (1 - a - b)^n (g_0 - g)$.
   (c) En déduire la proba $r_n(0)$ que le message ne soit pas erroné si $X_0 = 0$ et $r_n(1)$ sinon.
2. Si $l > 1$. Donner une borne inférieure à r_n. En déduire la taille critique du réseau.

1. a) Donner la matrice de transition

Schéma

$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

1. b) Donner l'équation de récurrence

$P_{0,0}{}^{(n+1)} = P(X_{n+1} = 0) \quad = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) P(X_n = 0) + \big(P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) P(X_n = 1)\big)$

$$P(X_{n+1}=0)=(1-a)P(X_n=0)+bP(X_n=1)$$

$$P(X_{n+1}=0)=(1-a)P(X_n=0)+b\big(1-P(X_n=0)\big)$$

$$P(X_{n+1}=0)=(1-a)P(X_n=0)+b-bP(X_n=0)$$

$$P(X_{n+1}=0)=b+(1-a-b)P(X_n=0)$$

$g_{n+1}=b+(1-a-b)g_n$ $\qquad\qquad$ $g_n=P(X_n=0)$

***g* point fixe $\Rightarrow g_{n+1}=g_n$**

$$g=b+(1-a-b)g$$

$$g-(1-a-b)g=b$$

$$g(1-1+a+b)=b \qquad \Leftrightarrow g=\frac{b}{a+b}$$

Propriété du cours : $\boldsymbol{u_{n+1}=\alpha u_n+\beta \quad \Leftrightarrow \quad u_n=\left(u_0-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n+\frac{\beta}{1-\alpha}}$

Ici $\alpha=(1-a-b)$ $\qquad\qquad$ $\beta=b$

Donc $g_n=\left(g_0-\frac{b}{1-1+a+b}\right)(1-a-b)^n+\frac{b}{1-1+a+b}$

$$g_n=\left(g_0-\frac{b}{a+b}\right)(1-a-b)^n+\frac{b}{a+b}$$

1. c) Proba que le message ne soit pas erroné

$$r_n(0)=P(X_n=0|X_0=0)$$

$$r_n(1)=P(X_n=1|X_1=1)$$

$$P_{0,0}{}^{(n+1)}=(1-a-b)P_{0,0}{}^{(n)}+b$$

$$P_{0,0}{}^{(n+1)}=\left(P_{0,0}{}^{(n)}-\frac{b}{a+b}\right)(1-a-b)^n+\frac{b}{a+b}$$

De même (on est sensés refaire tout pour le cas 2)

$$P(X_n=1|X_0=1)=P_{1,1}{}^{(n)}=r_n(1)=\frac{b}{a+b}(1-a-b)^n+\frac{a}{a+b}$$