Méthodes Numériques Linéaires

I - Nombres Flottants

$\boldsymbol{X = \pm\ 0\,, d_1, d_2, d_3\,.\,10^p}$

On doit absolument avoir un zéro ici (donc parfois on décale)

mantisse

Arrondir la dernière décimale

Opérations sur les flottants

Multiplication/division : on multiplie/divise les mantisses et on additionne/soustrait les exposants

Addition/Soustraction : on se ramène à la même puissance

Erreur absolue

$|Valeur\ calculée\ par\ technique\ 1\ -\ Valeur\ calculée\ par\ technique\ 2|$

Erreur relative

$$\frac{\text{Erreur absolue}}{\text{valeur théorique}}$$

Exemple TD1 exo 1

Nombres flottants en base 10 à 3 décimales $\boldsymbol{X = \pm\ 0\,, d_1, d_2, d_3\,.\,10^p}$

$a = \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots \rightarrow 0{,}333.10^0$

$b = \frac{2}{3} = 0{,}666 \ldots \rightarrow$ on arrondi donc 0,667 $\rightarrow 0{,}667.10^0$

$c = \sqrt{2} = 1{,}414 \ldots \rightarrow 0{,}1414.10^1 = 0{,}141.10^1$

$d = 1{,}12.10^5 = 1{,}414 \ldots \rightarrow 0{,}1414.10^1 = 0{,}141.10^1$

$e = 32412 = 0{,}32412.10^5 = 0{,}324.10^5$

II – Résolution de systèmes linéaires

Il faut que la matrice soit inversible (c.à.d. $det \neq 0$)

Note : réorganiser le plan de la partie « matrices »

• Rappels généraux (matrices) •

DEFINITIONS

Définition : On appelle valeurs propres λ et vecteurs propres U, tous couples (λ, U) tels que

AU = λU (A matrice, λ réel, U vecteur)

λ est une valeur propre ssi λI – A n'est pas inversible

ssi det(λI –A) = 0

On peut aussi utiliser det(A –λI) = 0

Définition : On appelle polynôme caractéristique P(λ) le polynôme : **P(λ) = det (λI – A)**

Définition : On appelle multiplicité le nombre de fois où une même valeur de λ est présente (Si deux valeurs identiques alors multiplicité = 2).

Définition : λ valeur propre, V vecteur propre.

V(λ) = {V∈ $\mathbb{R}^N$, AV = λ V} (ensemble des vecteurs propres)

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^N$ appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ.

Définition : Une matrice est INVERSIBLE si son **déterminant est ≠ 0**

Définition : Une matrice est DIAGONALISABLE si dans $\mathbb{R}^N$ elle possède N vecteurs propres, linéairement indépendants (dans $\mathbb{R}^1$: un vecteur propre, dans $\mathbb{R}^2$: deux vecteurs propres, etc, pas plus, pas moins et indépendants)

TECHNIQUES

Valeurs propres

- Construire λI – A
- Construire **P(λ) = det (λI – A)**
- Factoriser P(λ) (rechercher les racines réelles et/ou complexes) grâce à **P(λ) = 0**
  - Permet de trouver les valeurs propres
  - Permet de trouver la multiplicité de chaque valeur propre

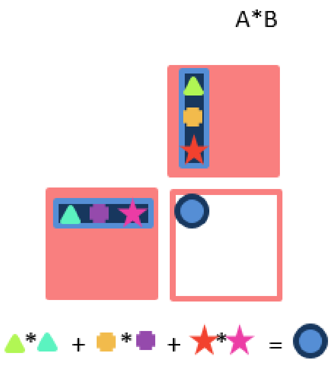
Vecteurs propres

- Ecrire **AU = λU** (pour chaque valeur propre)
  <=> AU – λU = 0
  <=> (A – λ)U = 0
- Résoudre ce système linéaire => infinité de solutions
- Trouver une famille de solutions linéairement indépendantes et génératrices (base)

Diagonalisation

Résoudre $\alpha U_{\lambda 1} + \beta U_{\lambda 2} + \gamma U_{\lambda 3} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$ ⇒ vecteurs indépendants

Multiplication matricielle



Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Matrice tridiagonale

$$\begin{pmatrix} n & n & 0 & 0 & 0 \\ n & n & n & 0 & 0 \\ 0 & n & n & n & 0 \\ 0 & 0 & n & n & n \\ 0 & 0 & 0 & n & n \end{pmatrix} ?$$

Matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} n & n & n \\ 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ n & n & 0 \\ n & n & n \end{pmatrix}$$

Matrice tilde ?

A tilde = matrice fusion = (A ;b)= (|)

Matrice inverse

avec A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Avec la formule : **$A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ com(A)^t**

det A = $2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

= 2 * 2 + (-2) + 0 = 2   det A = 2

det $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ = a*d **–** b*c

si det = 0 => A n'est pas inversible

com (A)   commatrice de A = matrice des déterminants de A

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det A_{11} = 2 det A_{12} = -2 det A_{13} = 2

$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det A_{21} = -2 det A_{22} = 4 det A_{23} = -4

$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ det A_{31} = 1 det A_{32} = -2 det A_{33} = 3

com (A) = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ => com(A)^t = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (transposée = on garde la diagonale et on inverse)

$\frac{1}{\det A}$ com(A)^t = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Sans la formule (avec un système*)   → à utiliser de préférence si la matrice contient des 0

* on peut aussi faire un pivot de gauss

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-b & 2d-e & 2g-h \\ -a+2b-c & -d+2e-f & -g+2h-i \\ -2b+2c & -2e+2f & -2h+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

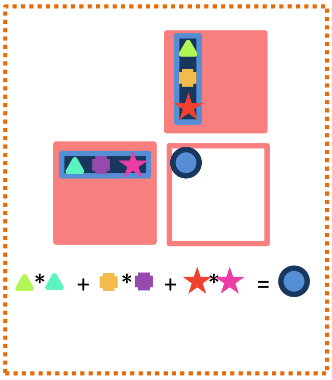
$$① \begin{cases} 2a-b=1 \\ -a+2b-c=0 \\ -2b+2c=0 \end{cases} \quad ① \begin{cases} b=c \\ 2a-b=1 \\ -a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} 2d-e=0 \\ -d+2e-f=1 \\ -2e+2f=0 \end{cases} \quad ② \begin{cases} e=f \\ e=2d \\ -d+4d-2d=1 \end{cases} \quad \begin{cases} d=1 \\ e=2 \\ f=2 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} 2g-h=0 \\ -g+2h-i=0 \\ -2h+2i=1 \end{cases} \quad ③ \begin{cases} h=2g \\ -g+2*2g-i=0 \\ -2*2g+2*3g=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3g-i=0 \\ 2g=1 \\ i=3g \end{cases} \quad \begin{cases} g=1/2 \\ h=1 \\ i=3/2 \end{cases}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Vérification: $A*A^{-1} = I$



• Méthodes directes •

Le but est de simplifier les calculs matriciels, principalement au niveau de l'exécution machine (à l'époque où les ordis étaient pas oufs puissants, il était préférable de minimiser les coûts si on voulait pas que l'algo tourne pendant cent sept ans !)

◀ PIVOT DE GAUSS ▶

Ça marche avec tout et c'est la base mais c'est long.

Technique

Dans le cas matriciel, on utilise la résolution par combinaison linéaire pour obtenir des « 0 » dans la partie triangulaire inférieure de la matrice.
Rq : on peut aussi résoudre Gauss avec un système non matriciel.

On cherche à passer de ça $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ à ça $\begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow a.\ell_2 - b.\ell_1 \\ \leftarrow a.\ell_3 - c.\ell_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & f & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e.\ell_3 - f.\ell_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix}$$

C'est plus simple lorsque a vaut 1.
On prend comme ligne de référence ℓ_1 (ici : a, d, g) la ligne la plus simple.

A noter que les e, h, f et i vont changer après les calculs de combinaisons

Exemple

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1.\ell_2 + 4.\ell_1 = (-4+4),\ (-4+8),\ (-4+12) = \mathbf{0}, 4, 8 \\ \leftarrow 1.\ell_3 - 5.\ell_1 = (5-5),\ (8-10),\ (7-15) = \mathbf{0}, -2, -8 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 4.\ell_3 + 2.\ell_2 = (-8+8),\ (-32+16) = \mathbf{0}, -16 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -16 \end{pmatrix}$$

On peut ensuite résoudre un système pour trouver des inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Quand on a fini et trouvé (x, y, z), on peut remplacer les valeurs dans le système pour vérifier.

◄ DECOMPOSITION L.U. ►

Moins de calculs (coût).

Technique

On décompose A en produit de deux matrices triangulaires. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U}$ (lower/upper)

Matrice A = matrice d'origine
Matrice U = triangulaire sup issue de A
Matrice L = triangulaire inf issue des coefficients

On fait un pivot sur A très similaire à Gauss pour la transformer en $\boldsymbol{U}$ (fin du pivot) et on stocke les coefficients issus des combinaisons linéaires dans $\boldsymbol{L}$. Une fois qu'on a L et U, on a la décomposition.

On cherche à passer de ça $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ à ça $\begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \dfrac{a.\ell_2}{a} - \dfrac{b}{a}.\ell_1 \\ \leftarrow \dfrac{a.\ell_3}{a} - \dfrac{c}{a}.\ell_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & f & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \dfrac{e.\ell_3}{e} - \dfrac{f}{e}.\ell_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dfrac{b}{a} & 1 & \mathbf{0} \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{f}{e} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{b}{a} & 1 & \mathbf{0} \\ -\frac{c}{a} & -\frac{f}{e} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & d & g \\ \mathbf{0} & e & h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U}$$

Exemple

$$A = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{1.\ell_2}{1} + \frac{4}{1}.\ell_1 = (-4+4),\ (-4+8),\ (-4+12) = \mathbf{0}, 4, 8 \\ \leftarrow \frac{1.\ell_3}{1} - \frac{5}{1}.\ell_1 = (5-5),\ (8-10),\ (7-15) = \mathbf{0}, -2, -8 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \frac{4.\ell_3}{4} + \frac{2}{4}.\ell_1 = (-2+2),\ (-8+4) = \mathbf{0}, -4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}$$

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & \mathbf{0} \\ -5 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & \mathbf{0} \\ -5 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A = L * U}$$

◀ CHOLESKY ▶

Seulement sur certains cas mais moins de calculs (coût) car on a des matrices particulières.

Technique

On décompose A en produit de deux matrices triangulaires. $\boldsymbol{A = L * D * L^T}$

Matrice A = matrice d'origine
Matrice L = triangulaire inf issue des coefficients de la décomposition $L.U$.
Matrice D = diagonale de U (valeurs propres)
Matrice L^T = transposée de L

On commence par faire une décomposition $L.U$. On en tire facilement $\boldsymbol{D}$ en prenant la diagonale de la matrice U et des zéros partout ailleurs. On garde $\boldsymbol{L}$ telle quelle et on définit $\boldsymbol{L^T}$ par une simple transposition de la matrice L (symétrie par rapport à la diagonale)

/!\ il faut que les nombres sur la diagonale D soient positifs /!\ (valeurs propres $\lambda_i > 0$)

Exemple

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & ½ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & ½ & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Avec l'exemple de tout à l'heure, Cholesky n'est pas possible.

• Coûts •

But : résoudre $Ax = b$ avec le moyen le moins coûteux $\quad A^{-1}.Ax = A^{-1}.b \Rightarrow x = A^{-1}.b$
on cherche A^{-1}

• Pivot : 2 n^3 • LU : $\frac{2}{3}\, n^3$ • Remonter (quand on résout un système) : 2 n^2

LU : $A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}.L^{-1}$

Cholesky : $A = LU = LDL^T = \left(L\sqrt{D}\right)\left(\sqrt{D}\,L\right)^T = CC^T \qquad A^{-1} = (CC^T)^{-1} = C^{T^{-1}}.C^{-1}$

• Méthodes itératives •

Avec les méthodes itératives, on cherche pas une solution exacte mais un truc qui tend vers cette solution. (en vrai, on se sert pas des méthodes elles même parce qu'elles sont théoriques, on a juste besoin de comprendre leurs principes puis d'apprendre les propriétés pour l'application).

Le but est d'étudier la convergence (lente ou rapide).

◀ JACOBI ▶

Les inconnues ne sont plus des vecteurs mais des suites qui tendent vers les soluces

<u>Exemple</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} (x_1)_0 \\ (x_2)_0 \\ (x_3)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_k = \begin{pmatrix} (x_1)_k \\ (x_2)_k \\ (x_3)_k \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{cases} 4(x_1)_k + (x_2)_k + (x_3)_k = 5 \\ (x_1)_k + 4(x_2)_k + (x_3)_k = 5 \\ (x_1)_k + (x_2)_k + 4(x_3)_k = 2 \end{cases}$$

Jacobi x_{k+1} en fonction de x_k

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} 4(x_1)_{k+1} + (x_2)_k + (x_3)_k & = 5 \\ (x_1)_{k+1} + 4(x_2)_{k+1} + (x_3)_k & = 5 \\ (x_1)_{k+1} + (x_2)_{k+1} + 4(x_3)_{k+1} & = 2 \end{cases}$$

<u>$k = 0$</u>

$4(x_1)_1 + (x_2)_0 + (x_3)_0 = 5$ or $\begin{pmatrix} (x_1)_0 \\ (x_2)_0 \\ (x_3)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 4(x_1)_1 + 0 + 0 = 5$ $\Leftrightarrow 4(x_1)_1 = 5$ $\Leftrightarrow (x_1)_1 = \frac{4}{5}$

$(x_1)_1 + 4(x_2)_1 + (x_3)_0 = 5$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} + 4(x_2)_1 + 0 = 5$ $\Leftrightarrow \frac{4}{5} + 4(x_2)_1 = 5$ $\Leftrightarrow (x_2)_1 = \frac{15}{16}$

$(x_1)_1 + (x_2)_1 + 4(x_3)_1 = 2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} + \frac{15}{16} + 4(x_3)_1 = 2$ $\Leftrightarrow (x_3)_1 = -\frac{3}{64}$

D'où $x_1 = \begin{pmatrix} (x_1)_1 = \frac{5}{4} \\ (x_2)_1 = \frac{15}{16} \\ (x_3)_1 = \frac{-3}{64} \end{pmatrix}$ on peut maintenant trouver x_2, puis de même jusqu'à x_n

◀ GAUSS - SIEDEL ▶

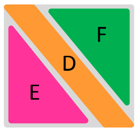
On fait le même principe que Jacobi mais en faisant des trucs aux matrices pour qu'elles donnent des suites arithmético-géométriques (suites particulières sur lesquelles il est plus facile de travailler)

◀ APPLICATION ▶

Techniques qu'on utilise vraiment.

On a une écriture simplifiée pour les calculs : $\boldsymbol{A = M - N}$

On rappelle que la matrice est organisée comme telle : →



Jacobi : $\boldsymbol{M = D}$ $\boldsymbol{N = E + F}$

Gauss-Siedel : $\boldsymbol{M = D - E}$ $\boldsymbol{N = F}$

Et on a deux techniques d'écriture :

$\boldsymbol{M_{x_{k+1}} = N_{x_k} + b}$ ou $\boldsymbol{x_{k+1} = M^{-1}N_{x_k} + M^{-1}b}$

On a ensuite 4 techniques de résolution.

①

A est diagonalisable strictement dominante ⇒ Gauss-Siedel et Jacobi convergent

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} |a| > |d| + |g| \\ |e| > |b| + |h| \\ |i\,| > |c| + |f| \end{array}$$

diagonale strictement dominante

②

A est symétrique définie positive ⇒ Gauss-Siedel converge

③

Jacobi converge ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det\big(\lambda D - (E + F)\big) = 0$ on a $|\lambda| < 1$

(résoudre le det)

④

Gauss-Siedel converge ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(\lambda(D - E) - F) = 0$ on a $|\lambda| < 1$

(résoudre le det)