HW #2
20120085 엄태경
CSE4170 기초 컴퓨터 그래픽스
법선 벡터와 평면에 대한 아핀 변환
2019. 4. 18.

(전제). 기하 물체의 한 점 $p = (x, y, z, 1)^T$ 은 어떤 아핀 변환 행렬 $M_{4\times4}$ 에 의해 점 $p' = Mp$ 로 변환된다.

#1 p 에서의 법선벡터 $n = (n_x, n_y, n_z, 0)^T$ 는 M 에 의해 $(M^{-1})^T n$ 으로 변환됨을 증명하라.

Solution
법선 평면 상의 임의의 점을 $p_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)^T$ 이라 하자. 그러면 $p - p_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, 0)^T$ 는 법선 평면 상의 벡터이다. 즉 $p - p_0$ 는 n 과 수직을 이룬다. 따라서,

$$n^T(p - p_0) = 0 \tag{1}$$

p, p_0, n 에 변환 M 을 적용한 결과를 각각 $p' = (x', y', z', 1)^T, p'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0, 1)^T, n' = (n'_x, n'_y, n'_z, 0)^T$ 으로 두자. 그러면 전제에 의해,

$$p' = Mp \tag{2}$$
$$p'_0 = Mp_0 \tag{3}$$

M 이 역변환이 존재하는 변환이라고 가정하면, M 의 역행렬 M^{-1} 이 존재한다. (2), (3)의 양변에 M^{-1} 을 곱하면,

$$M^{-1}p' = p \tag{4}$$
$$M^{-1}p'_0 = p_0 \tag{5}$$

(4), (5)를 (1)에 대입하면,

$$n^T(M^{-1}p' - M^{-1}p'_0) = 0 \tag{6}$$

(6)의 좌변은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} n^T(M^{-1}p' - M^{-1}p'_0) &= n^T M^{-1}(p' - p'_0) \\ &= ((M^{-1})^T n)^T (p' - p'_0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(7)에 의해 벡터 $(M^{-1})^T n$ 가 벡터 $p' - p'_0$ 와 수직을 이룬다. 이때 $p' - p'_0$ 은 변환된 법선 평면 상의 임의의 벡터이다. 따라서 변환된 법선 벡터는 다음 식으로 표현된다.

$$n' = (M^{-1})^T n \tag{8}$$

□

#2 임의의 평면 $ax + by + cz + d = 0$에 M을 적용하여 얻은 평면 $a'x + b'y + c'z + d' = 0$에 대해, $(a', b', c', d') = (a, b, c, d)M^{-1}$ 임을 증명하라.

Solution 평면 $ax + by + cz + d = 0$의 법선 벡터를 n이라 하면, $n = (a, b, c, 0)^T$ 이다. 이 평면 위의 한 점을 $p_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)$이라 하면, 다음이 성립한다.

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \tag{9}$$

(9)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} d &= -(ax_0 + by_0 + cz_0) \\ &= -(a, b, c, 0)^T(x_0, y_0, z_0, 1) \\ &= -n^T p_0 \end{aligned} \tag{10}$$

그러면 평면 $ax + by + cz + d = 0$은 다음 식을 만족하는 점 $p = (x, y, z, 1)$의 집합이라고 할 수 있다.

$$n^T p - n^T p_0 = n^T(p - p_0) = 0 \tag{11}$$

p, p_0, n에 변환 M을 적용한 결과를 각각 $p' = (x', y', z', 1)^T, p'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0, 1)^T, n' = (a', b', c', 0)^T$으로 두자. 그러면 위와 같은 방법으로,

$$d' = -n'^T p'_0 \tag{12}$$

또, (8)로 부터,

$$n'^T = n^T M^{-1} \tag{13}$$

(12)에 (3)과 (13)을 대입하고 (10)을 적용하면,

$$\begin{aligned} d' &= -n'^T p'_0 \\ &= -n^T M^{-1} M p_0 \\ &= -n^T p_0 \\ &= d \end{aligned} \tag{14}$$

한편, M은 아핀 변환 행렬이므로 M^{-1}도 아핀 변환 행렬이고, 아핀 변환 행렬의 제4열은 $(0, 0, 0, 1)^T$이다. 따라서,

$$(0, 0, 0, d') = (0, 0, 0, d')M^{-1} = (0, 0, 0, d)M^{-1} \tag{15}$$

(13), (15)을 적용하면,

$$\begin{aligned} (a', b', c', d') &= (a', b', c', 0) + (0, 0, 0, d') \\ &= n'^T + (0, 0, 0, d)M^{-1} \\ &= n^T M^{-1} + (0, 0, 0, d)M^{-1} \\ &= (a, b, c, 0)M^{-1} + (0, 0, 0, d)M^{-1} \\ &= (a, b, c, d)M^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

□