

Algoritmi avansați

Seminar 6 (săpt. 11 și 12)

1. Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2 \dots P_{12}$, unde $P_0 = (0, -2)$, $P_1 = (5, -6)$, $P_2 = (7, -4)$, $P_3 = (5, -2)$, $P_4 = (5, 2)$, $P_5 = (7, 4)$, $P_6 = (7, 6)$ iar punctele P_7, \dots, P_{12} sunt respectiv simetricele punctelor P_6, \dots, P_1 față de axa Oy .

2. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5, 0)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (-1, 2)$, $P_4 = (-3, 0)$, $P_5 = (-1, -2)$, $P_6 = (3, -2)$. Arătați că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, așa încât, aplicând metoda din teoremă și mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare și suficiente două camere pentru supravegherea unei galerii având forma poligonului \mathcal{P} .

3. Dați exemplul de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât și concave și toate să fie principale.

4. Fie $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

5. Dați un exemplu de mulțime din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 6 triunghiuri și 11 muchii.

6. În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

7. Fie \mathcal{G} un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de fețe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3 . Demonstrați inegalitățile

$$\begin{aligned} v &\leq \frac{2}{3}m, & m &\leq 3v - 6 \\ m &\leq 3f - 6, & f &\leq \frac{2}{3}m \\ v &\leq 2f - 4, & f &\leq 2v - 4 \end{aligned}$$

Dați exemplul de grafuri în care au loc egalități în relațiile de mai sus.