Biletul nr. 1

1. Un student are de susţinut într-o sesiune 4 examene. Notăm cu E_i evenimentul de a promova examenul i cu i=1,4. Scrieţi evenimentele corespunzătoare următoarelor situaţii:
   a) Toate evenimentele sunt promovate
   b) Cel puţin două examene sunt promovate – $(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_4) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_4) \cup (E_3 \cap E_4)$
   c) Cel puţin un examen şi cel mult trei examene sunt promovate
   d) Niciun examen nu este promovat
   e) Cel mult un examen este promovat

2. Dintr-o urnă cu 5 bile albe şi 10 bile negre se scot succesiv două bile, fără revenire. Precizaţi cu ce probabilitate vor apărea:
   a) Două bile albe
   b) Prima bilă albă şi a doua bilă neagră
   c) Bile de culori diferite
   d) Exact o bilă albă
   e) Prima bilă albă
   f) Cel puţin o bilă albă
   g) Cel mult o bilă albă
   h) Nicio bilă alba

3. Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete despre care se cunosc informaţiile centralizate în tabelul de mai jos:

$x + \frac{1}{12}$

X\Y	1	2	3	Pi
-1	1/24	1/8		1/4
0		1/4	1/6	1/2
1			1/12	
qj	1/6			

   Determinaţi:
   a) Repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y şi repartiţiile marginale ale variabilelor X şi respectiv Y.
   b) Stabiliţi daca v.a. X şi Y sunt sau nu independente şi justificaţi răspunsul.
   c) Scrieţi repartiţiile v.a. XY, 3X+Y, X/Y=2.
   d) Calculaţi cov(3X+Y, X+Y).

4. Fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = Ax^3 \exp(-\frac{x}{p})$, $x > 0, p > 0$.
   a) Determinaţi parametrul real A astfel încât funcţia de mai sus să fie o densitate de probabilitate
   b) Calculaţi media şi dispersia variabilei aleatoare continue X definită prin densitatea de probabilitate de mai sus.

5. Determinaţi variabila aleatoare X ştiind că are densitatea de probabilitate definită prin $f: R \to R, f(x) = ax^2, x \in [1, b]$ cu condiţia ca $E(13X) = 30$, calculaţi funcţia de repartiţie

$F(x)$ şi calculaţi $P(X < 2/X > 1)$.

6. Într-o comunitate 36% dintre familii deţin un câine şi 22% dintre acestea deţin şi o pisică. Se cunoaşte şi faptul că 30% dintre familiile din comunitate deţin o pisică. Determinaţi:
   a) Probabilitatea ca o familie aleasă la întâmplare să deţină atât un câine cât şi o pisică
   b) Probabilitatea ca o familie aleasă la întâmplare să deţină un câine ştiind că aceasta deţine o pisică.
7. O monedă nemăsluită (echilibrată) este aruncată până când capul apare de 10 ori. Fie X o v.a. ce numără de câte ori apare pajura în cadrul acestor aruncări. Determinaţi funcţia de masă a v.a. X.

8. Fie X o v.a. repartizată normal cu media 12 şi dispersia 4. Determinaţi valoarea parametrului c pentru care $P(X > c) = 0.1$.

Biletul nr. 2

1. Un om de afaceri încheie într-o zi trei afaceri care pot fi rentabile sau nu. Notăm cu A_i evenimentul ca afacerea i să fie rentabilă, cu i=1,3. Scrieţi evenimentele ce descriu următoarele situaţii:
   a) Exact o afacere este rentabilă
   b) Cel puţin o afacere este rentabilă
   c) Cel mult o afacere e rentabilă
   d) Nicio afacere nu e rentabilă
   e) Cel mult două afaceri sunt rentabile

2. La o expoziţie se găsesc 25 de ghizi studenţi, dintre care 10 băieţi şi 15 fete, ale căror nume sunt trecute într-un tabel într-o anumită ordine(fiecare student are asociat un număr de la 1 la 25). Se aleg la întâmplare 6 numere din tabel. Precizaţi cu ce probabilitate grupul celor şase persoane este format din :
   a) Numai din fete
   b) Numai din băieţi
   c) Trei fete şi trei băieţi
   d) Cel mult o fată
   e) Cel puţin 5 băieţi

3. Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete despre care se cunosc informaţiile centralizate în tabelul de mai jos:

X\Y	0	1	Pi
-1	k		½
1			½
Qj		2/3	

Determinaţi:
   a) Repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y şi repartiţiile marginale ale variabilelor X şi respectiv Y.
   b) Explicitaţi tabelul pentru k=1/6 şi respectiv k=1/12 şi stabiliţi daca v.a. X şi Y sunt sau nu independente în fiecare caz în parte.
   c) Scrieţi repartiţiile v.a. XY, 3X+Y, X/Y=0 pentru k=1/12.
   d) Calculaţi cov(3X+Y, X+Y).

4. Fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = Ax^{10}\exp(-\frac{x^2}{4})\,, x > 0$.
   a) Determinaţi parametrul real A astfel încât funcţia de mai sus să fie o densitate de probabilitate
   b) Calculaţi media şi dispersia variabilei aleatoare continue X definită prin densitatea de probabilitate de mai sus.

5. Determinaţi variabila aleatoare X ştiind că are densitatea de probabilitate definită prin

$f: R \to R, f(x) = \frac{x}{4}, x \in [a, b], 0 < a < b$ cu condiţia ca $E(6X + 5) = 18$, calculaţi funcţia de

repartiţie $F(x)$ şi calculaţi $P(X < 1/X > 0.5)$.

6. În cadrul unei universităţi 52% dintre studenţi sunt fete şi 5% dintre studenţi studiază Informatică. Se ştie că 2% dintre studenţi sunt femei care studiază Informatică. Daca un student se alege la întâmplare determinaţi:

a) Probabilitatea ca studentul să fie fată ştiind că acesta studiază Informatică
b) Probabilitatea ca studentul să studieze Informatică ştiind că acesta e fată.

7. Într-o cutie ce conţine 20 de becuri se găsesc 4 becuri defecte. Se extrag de mai multe ori eşantioane de câte 3 becuri(simultan). Determinaţi numărul mediu de becuri defecte dintre cele 3 extrase.

8. Se ştie că înalţimea(măsurată în cm) bărbaţilor de 25 de ani este o variabilă aleatoare repartizată normal de medie $m = 176$ cm şi dispersie 25. Determinaţi ce procent din aceşti barbaţi au înălţimea mai mare de 186 cm.

Biletul nr. 3

1. Fie A şi B două evenimente care se exclud reciproc definite pe acelaşi spaţiu de probabilitate. Ştiind că P(A)=0.3 şi P(B)=0.5 determinaţi probabilitatea ca:
   a) Se întâmplă A sau B
   b) A se întâmplă iar B nu se întâmplă
   c) Atât A cât şi B se întâmplă
2. S-a stabilit că, în medie, din trei persoane care se adresează unei agenţii de turism una cumpără bilete şi două nu cumpără. Să se determine probabilitatea ca din 8 persoane care se adresează agenţiei:
   a) trei să cumpere şi restul să nu cumpere bilete
   b) toate persoanele să cumpere
   c) cel mult trei persoane să nu cumpere
   d) cel puţin patru persoane să cumpere
3. Într-o comunitate una din 10 000 de persoane este infectată cu virusul X. Există un test care identifică prezenţa virusului în sânge cu o *acurateţe* de 99%(adică în 99% din cazurile în care testul se aplică pe o persoană infestată este identificată prezenţa în sânge a virusului X). Determinaţi probabilitatea ca o persoană care face testul şi iese pozitiv să fie într-adevăr infestată cu virusul X. Daca aceeaşi persoană repetă testul de 2 ori şi obţine încă un rezultat pozitiv şi unul negativ care este probabilitatea ca aceasta să aibă virusul în sânge?
4. Se dau variabilele aleatoare independente:

$$X:\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix} \text{ şi } Y:\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-q & p \end{pmatrix}, \quad p,q,a \in \mathbb{R}.$$

   a) Să se determine parametrul real a astfel încât variabila aleatoare $X-Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

   b) Stabiliţi dacă valoarea parametrului real a influenţează valoarea coeficientului de corelaţie dintre X şi Y.

   c) Construiţi repartiţia comună a celor 2 variabile aleatoare
5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=kx^5(1-x)^7$, $x\in(0,1)$, $k\in\mathbb{R}$. Să se determine:

   a) valoarea parametrului real k astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue X.

   b) media şi dispersia lui X
6. Într-un cazino intră în medie o persoană la 2 minute. Determinaţi:
   a) Probabilitatea ca nicio persoană să nu intre în cazino în intervalul 12:00-12:05.
   b) Probabilitatea ca cel puţin 4 persoane să intre în cazino în intervalul 12:00-12:05.
7. Durata necesară(exprimată în ore) pentru reparaţia unei maşini este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial de parametru $\lambda=\frac{1}{2}$. Determinaţi:
   a) Probabilitatea ca reparaţia să dureze mai mult de 2 ore
   b) Probabilitatea ca reparaţia să dureze 10 ore ştiind că reparaţia durează mai mult de 9 ore
8. Se ştie că înalţimea(măsurată în cm) a femeilor de 25 de ani este o variabilă aleatoare repartizată normal de medie $m = 162$ cm şi dispersie 16. Determinaţi ce procent din aceste femei au înălţimea mai mică de 158 cm.