

# Algoritmi avansați

Seminar 7 (săpt. 13 și 14)

**1.** Dați exemplu de mulțime  $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$  din  $\mathbb{R}^2$  astfel ca diagrama Voronoi asociată lui  $\mathcal{M}$  să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui  $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$  să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

**2.** a) Fie o mulțime cu  $n$  situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde  $n_v$  este numărul de vârfuri ale diagramei și  $n_m$  este numărul de muchii ale acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi  $\mathcal{D}$  asociată unei mulțimi cu cinci puncte din  $\mathbb{R}^2$  știind că  $\mathcal{D}$  are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ( $n_v = 2n - 5$ )? Justificați!

**3.** Fie punctele  $O = (0, 0)$ ,  $A = (\alpha, 0)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  $C = (2, 0)$ ,  $D = (1, -1)$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$  este un parametru. Discutați, în funcție de  $\alpha$ , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii  $\{O, A, B, C, D\}$ .

**4.** (i) Fie punctul  $A = (1, 2)$ . Alegeți două drepte distincte  $d, g$  care trec prin  $A$ , determinați dualele  $A^*, d^*, g^*$  și verificați că  $A^*$  este dreapta determinată de punctele  $d^*$  și  $g^*$ .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct  $M$ . Se alege două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de  $M$  și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

**5.** a) Fie semiplanele  $H : x + y - 3 \leq 0$  și  $H' : -2x + y + 1 \leq 0$ . Dați exemplu de semiplan  $H''$  astfel ca intersecția  $H \cap H' \cap H''$  să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele  $H_1, H_2, H_3, H_4$  date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde  $a \in \mathbb{R}$  este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul  $a$ , natura intersecției  $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ .

**6.** *Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

**7. (Suplimentar)** *Demonstrați că arborele parțial de cost minim al lui  $\mathcal{P}$  este un subgraf al triangulării Delaunay.*