Tema 1 Algoritmi Avansati

Moroianu Theodor

23 martie 2021

3 Problema Comis Voiajorului

Cerinţa 1

A

Pentru a rezolva acest exercitiu presupunem ca determinarea existentei unui ciclu hamiltonian este *NP-Complete*.

Lema 1. *Problema Covis Voiajorului este NP-Hard pe grafurile complete cu muchii cu valori in multimea* $\{\ 1,\ 2\ \}$.

Demonstraţie. Vom demonstra lema prin reducerea determinarii existentei unui ciclu hamiltonian la problema comis voiajorului intr-un graf cu muchii de 1 si 2.

Fie $G = (V, E)$ un graf oarecare.
Consideram $G' = (V, E')$, unde $E' = \{(a, b, 1) \mid (a, b) \in E\} \cup \{(a, b, 2) \mid (a, b) \notin E\}$.
In alte cuvinte, G' este un graf complet peste acelasi set de noduri, in care muchiile existente in G sunt inlocuite cu muchii de cost 1, si muchiile inexistente cu muchii de cost 2.

Afirmatie: *Fie C costul minim al comis voiajorului in G', si H valoarea de adevar al existentei unui ciclu hamiltonian in G.*
Atunci, $H \iff (C = |V|)$.
Demonstratia Afirmatiei:

- $H \implies (C = |V|)$ Daca exista un ciclu hamiltonian in G, atunci exista un ciclu hamiltonian cu muchii de cost 1 in G'. Cum nu exista muchii de cost mai mic de 1 si orice drum al comis voiajorului are distanta minim $|V|$, atunci $C = |V|$.
- $(C = |V|) \implies H$ Daca exista o parcurgere a nodurilor din G' de cost $|V|$, cum orice parcurgere are lungimea minim $|V|$ atunci pargurgerea este un ciclu hamiltonian trecand exclusiv prin muchii de cost 1.
  Asadar, acelasi ciclu hamiltonian exista si in G.

Asadar, existenta unui ciclu hamiltonian in G este echivalenta printr-o transformare polinomiala cu rezolvarea problemei comis voiajorului pe un graf cu muchii din multimea $\{\ 1,\ 2\ \}$.
PCV este asadar *NP-Hard* si pentru instanta cu muchii de 1 si 2. $\square$

B

Muchiile avand costuri de 1 si 2, orice combinatie de 3 muchii $a,\ b,\ c$ respecta inegalitatea $a + b + c - max(a, b, c) \geq max(a, b, c)$. $\square$

C

Algoritmul prezentat la curs, cu factor de aproximare 2 este urmatorul:

- Se construieste un APM al grafului.
- Se extrage parcurgerea in-ordine, la care adaugam din nou radacina.
- Se trag muchii intre toate perechile de noduri consecutive.

Algoritmul prezentat la curs asadar plimba comis voiajorul conform parcurgerii in pre-ordine, aducandu-l inapoi la destinatie dupa-aceea.

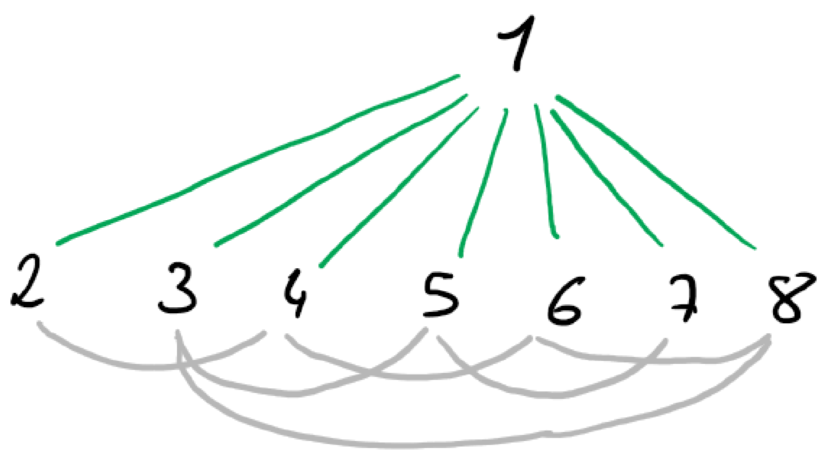

Figura 1: Input cu grad de aproximare mai mare de $\frac{3}{2}$

Consideram graful depictat de imaginea de mai sus $G = (V, E)$, unde:

- $V = \{\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8\ \}$
- E este format din toate muchiile verzi si gri, cu cost 1, si toate muchiile intre noduri neconectate din imagine, cu cost 2.

Graful admite un ciclu hamiltonian exclusiv din muchii de 1:

$$1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 3 \to 5 \to 7 \to 1$$

Asadar, costul solutiei optime este 8.

Algoritmul descris la curs va alege ciclul $1 \to 2 \to 3 \cdots \to 8 \to 1$, de cost 14.

Asadar, cum $14 > \frac{3}{2} * 8$, algoritmul din curs nu este $\frac{3}{2}$ aproximativ. $\square$

Cerinţa 2

A

Consideram urmatoarele 4 puncte:

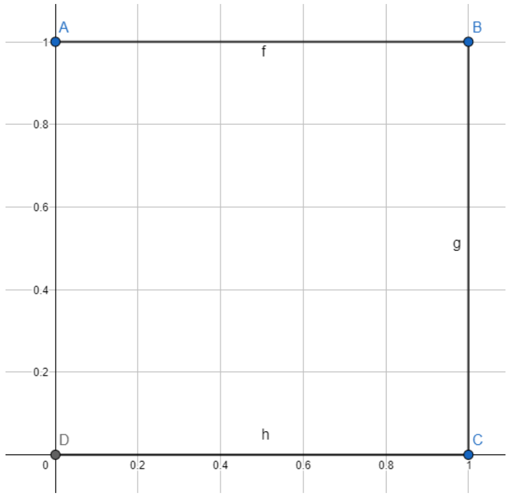

Figura 2: APM intr-un patrat

APM-ul are un cost de 3.
Observam noul APM obtinut adaugand punctul $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

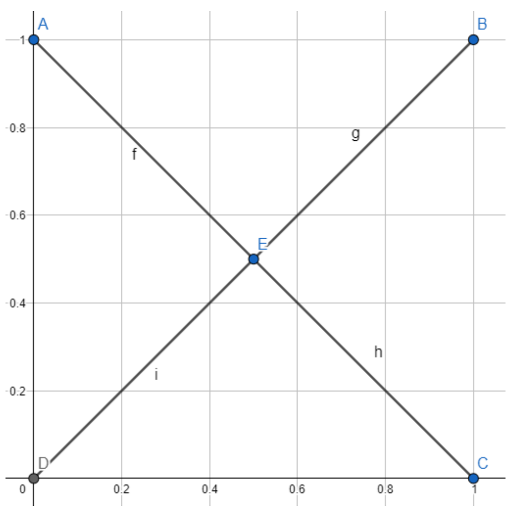

Figura 3: APM intr-un patrat

Noul APM are un cost de $4 * \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 2.8284$.

Asadar, adaugand punctul $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ multimii $\{\ (0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0)\ \}$ obtinem un APM de cost mai mic. $\square$

B

Consideram urmatorul algoritm ALG:

- Gasim un MST al lui $P \cup Q$.
- Gasim parcurgerea in pre-ordine (*"Pre-Order Traversal"*) al MST-ului.
- Stergem toate nodurile din Q din parcurgere.
- Unim toate nodurile adiacente in parcurgerea ramasa, obtinand un lant.

Lema 2. *Algoritmul ALG produce un lant W cu $L(W) \leq 2 * L(G)$, unde $L(X)$ reprezinta suma lungimilor muchiilor din graful X.*

Demonstraţie. Din functionarea parcurgerii in pre-ordine, fiecare muchie din MST va fi considerata de cel mult doua ori:

- Cand parcurgerea intra in subarborele acelei muchii.
- Cand parcurgerea iese din subarbore.

Stergerea unor noduri din parcurgere, din inegalitatea triunghiului, nu creste lungimea muchiilor parcurse, asadar $L(W) \leq L(EUL) = 2 * L(APM)$, unde EUL reprezinta parcurgerea euleriana a APM-ului.

Avem deci $L(W) \leq 2 * L(MST)$. □

Folosind algoritmul ALG, avem un algoritm care sa ne dea un arbore cu costul cel mult $2 * L(APM)$. Asadar, costul oricarui APM al lui P o sa fie cel mult costul arborelui generat, adica $L(T) \leq L(ALG) \leq L(APM)$. □

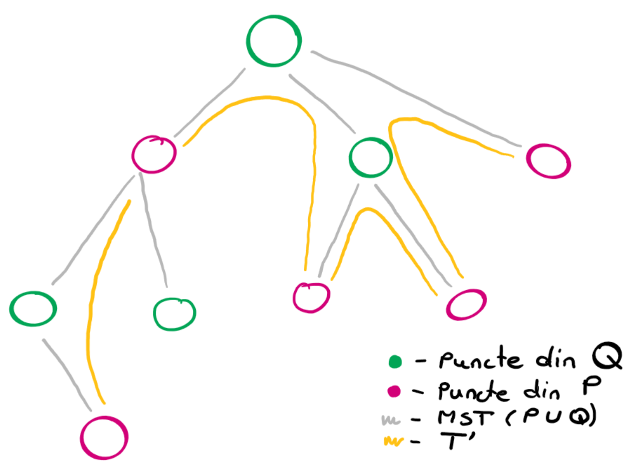

Figura 4: Reducerea unui MST