Temă Bonus:

Să se dem că definițiile următoare sunt echivalente:

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{(-\infty, a]\} \rangle$ ①

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{(-\infty, a)\} \rangle$ ②

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{(a, \infty)\} \rangle$ ③

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{[a, \infty)\} \rangle$ ④

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{(a, b)\} \rangle$ ⑤

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{(a, b]\} \rangle$ ⑥

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{[a, b)\} \rangle$ ⑦

$B_{\mathbb{R}} = \langle \{[a, b]\} \rangle$ ⑧

Știm că Borelienele sunt închise la:

- complement
- reuniuni numărabile
- intersecții numărabile

a. $\langle \{[a, b]\} \rangle \subset \langle \{(a, b)\} \rangle$

Fie $[x, y]$ un interval.

$$[x\ y] = \overline{(x-1) \cup (y\ y+1)} \cap (x-1\ y+1)$$

$\Rightarrow [x, y] \in \langle \{(a,b)\} \rangle$ q.e.d. (baza lui $\langle \{[a,b]\} \rangle$ este în $\langle \{(a,b)\} \rangle$.)

b. $\langle \{(a, b)\} \rangle \subset \langle \{[a, b]\} \rangle$

Fie (x, y) un interval.

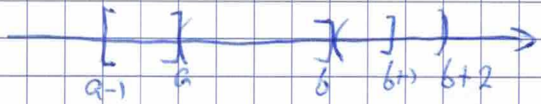
$$(x\ y) = \overline{[x-1\ x] \cup [y\ y+1]} \cap [x-1\ y+1]$$

$\Rightarrow (x\ y) \in \langle \{[a, b]\} \rangle$ q.e.d.

Asadar, din d. si b, $\langle \{[a,b]\} \rangle = \langle \{(a,b)\} \rangle = \langle \{[a,b]\} \cup \{(a,b)\} \rangle$.

c. $\langle \{(a,b]\} \rangle \subset \langle \{[a,b]\} \cup \{(a,b)\} \rangle$

Fie $(a,b]$ un interval.



$$(a,b] = \overline{[a-1,\ a] \cup (b,\ b+2)} \cap [a-1,\ b+1]$$

$\Rightarrow (a,b] \in \langle \{[a,b]\} \cup \{(a,b)\} \rangle$ q.e.d.

d. analog, $\langle \{[a,b)\} \rangle \subset \langle \{[a,b]\} \cup \{(a,b)\} \rangle$.

e. $\langle \{(a,b)\} \rangle \subset \langle \{(a,b]\} \rangle$

Fie (a,b) un interval.

$$(a,b) = \left(a,\ b - \tfrac{b-a}{2}\right] \cup \left(a,\ b - \tfrac{b-a}{3}\right] \cup \dots \cup \left(a,\ b - \tfrac{b-a}{k}\right] \cup \dots$$

$\Rightarrow (a,b) \in \langle \{(a,b]\} \rangle$.

f. analog, $(a,b) \in \langle \{[a,b)\} \rangle$.

f. $\langle \{(-\infty,a)\} \rangle = \langle \{[a,\infty)\} \rangle$

Fie $(-\infty,a)$ un interval.

$(-\infty,a) = \overline{[a,\infty)}$

Fie $[a,\infty)$ un interval

$[a,\infty) = \overline{(-\infty,a)}$

q.e.d

g. $\langle \{(-\infty,a]\} \rangle = \langle \{(a,\infty)\} \rangle$

analog cu f.

h. $<\{(-\infty, a]\}> \subset <\{[a,b]\}>$

Fie $(-\infty, a]$ un interval

$(-\infty, a] = [a-1\ a] \cup [a-2\ a] \cup \dots \cup [a-n\ a] \cup \dots$

$\Rightarrow (-\infty, a] \in <\{[a,b]\}>$ q.e.d.

i. analog, $<\{[a,\infty)\}> \subset \{[a,b]\}>$

j. $<\{(a,b]\}> \subset <\{(-\infty\ a]\}\}$

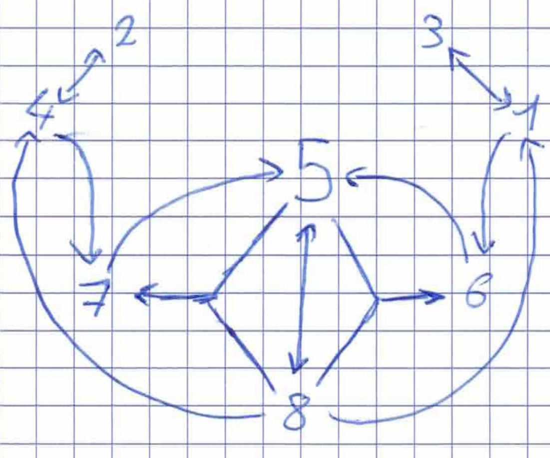
Fie $(a,b]$ un interval.

$(a,b] = (-\infty\ b] \cap \overline{(-\infty\ a]}$

$\Rightarrow (a,b] \subset <\{(-\infty, a]\}>$ q.e.d

k. analog, $<\{[a,b)\}> \subset <\{[a,\infty)\}>$.

din a, ..., k. avem următoarele implicații între definiții:



observăm că graful este o singură componentă tare-conex
așadar definițiile sunt echivalente.

q. e. d.