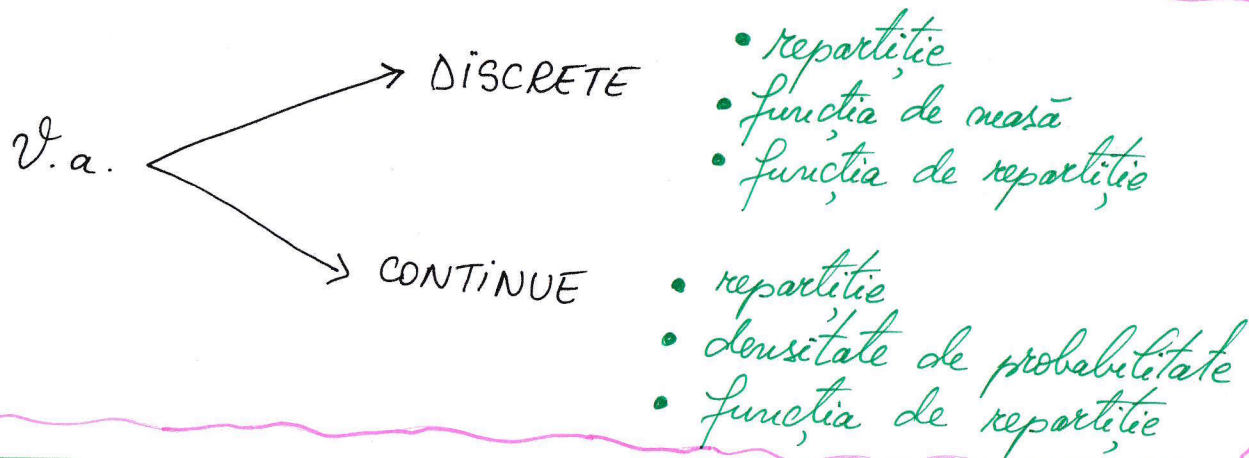


VARIABLE ALEATOARE (v.a.)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spațiu de probabilitate



def. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este v.a.
dacă $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

(adică dacă X este o funcție măsurabilă)

Obs.

- ① Elementele mulțimii Ω nu sunt neapărat numere. De aceea putem să ne gândim la o v.a. X ca fiind o funcție ce asociază „etichete numerice” stărilor din Ω .
- ② Prin convenție, când vrem să calculăm probabilitatea ca X să ia o anumită valoare putem scrie $\mathbb{P}(X < 3)$ (în loc de $\mathbb{P}(X(\omega) < 3)$)
→ această parte se subînțelege
- ③ Dacă $X(\Omega)$ este o mulțime cel mult numărabilă atunci X este o v.a. discretă, iar dacă $X(\Omega)$ este infinită dar numărabilă („infinită de puterea continuului”) atunci X este o v.a. continuă.

I Variabile aleatoare discrete

Forma generală:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

valori pe care le poate lua
v.a. X

$$x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$$

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

→ condiție importantă!

probabilitățile cu care X ia valorile x_1, \dots, x_n

- Obs.
- ① Reprezentarea de mai sus se numește repartitia v.a. X .
 - ② Repartitia v.a. discrete conține toate valori pe care le poate lua X , cu o probabilitate strict pozitivă.
 - ③ Valorile x_1, x_2, \dots, x_n se pun, de obicei, în ordine crescătoare și sunt valori distincte.

def. O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcția de masă a v.a. discrete X dacă e definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \text{ pt. } i = \overline{1, n} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

def. O funcție $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcția de repartiție a v.a. X dacă:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Probabilitatea condiționată

Fie A și B două evenimente definite pe același spațiu de probabilitate. Atunci:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{pt. } P(B) \neq 0$$

Interpretare

$P(A|B)$ ne determină probabilitatea de producere a evenimentului A știind că evenimentul B s-a produs.

Obs Dacă A și B sunt evenimente independente atunci:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{și} \quad P(B|A) = P(B)$$

Formula lui Bayes

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

În cazul lucrului cu v.a. discrete evenimentele sunt de tipul $X = 3$, $X < 2$, $X \geq 1$.

ex. $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2 / X < 3) &= \frac{P((X \geq 2) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} = \frac{P(2 \leq X < 3)}{P(X < 3)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Example

① Fie v.a. discretă X definită astfel:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calculați:

a) $P(X \leq 0) = ?$

$$P(X \leq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

b) $P(X > 0) = ?$

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

evenimente complementare

c) $P(X = 1) = ?$

$P(X = 1) = 0$ (deoarece 1 nu face parte din mulțimea valorilor pe care le poate lua X)

d) $P(X \leq 2) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

② Determinați parametrul real p astfel încât X să fie o v.a. discretă.

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & ? \\ 1-p & 2p & -9p+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{C.E.} \begin{cases} 1-p \geq 0 \\ 2p \geq 0 \\ -9p+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 1 \\ p \geq 0 \\ p \leq \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$1-p+2p+(-9p+2) = 1 \Leftrightarrow -8p = -2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$$

Este $p = \frac{1}{4}$ soluție? NU, pentru că $\frac{1}{4} \notin \left[0, \frac{2}{9}\right]$.

Operații cu v.a. discrete

① Operații „unare” (transformări de v.a.)

Fie $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$
 $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

1) $X \overset{\text{adunare/scădere/multiplicare cu o constantă}}{\pm c} : \begin{pmatrix} x_1 \pm c & x_2 \pm c & \dots & x_n \pm c \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

2) $X \overset{\text{ridicarea la putere}}{^c} : \begin{pmatrix} x_1^c & x_2^c & \dots & x_n^c \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

condiția e
suficientă, dar NU
și necesară

3) Mai general, pentru o funcție $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă avem:

$$g(X): \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Obs. ① În cazul operațiilor „unare” (afectează o singură v.a.) se modifică doar valorile v.a. probabilitățile rămânând aceleași.

② Dacă funcția g nu este bijectivă o anumită valoare a lui $g(X)$ poate să apară de mai multe ori, caz în care se scrie o singură dată iar probabilitățile se adună.

ex. $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{g(x)=x^2} g(X): \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

② Operații „liniare” cu v.a. independente

Fie $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$

două v.a. discrete.

def. Spunem că X și Y sunt v.a. independente dacă

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

„și”

Dacă X și Y sunt independente atunci:

$$X \pm Y: \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 & x_1 \pm y_2 & \dots & x_1 \pm y_m & x_2 \pm y_1 & x_2 \pm y_2 & \dots & x_m \pm y_m \\ p_1 \cdot q_1 & p_1 \cdot q_2 & \dots & p_1 \cdot q_m & p_2 \cdot q_1 & p_2 \cdot q_2 & \dots & p_m \cdot q_m \end{pmatrix}$$

Obs. ① Operația dintre X și Y se aplică pe toate combinațiile de valori (x_i, y_j) , $i=1, m$, $j=1, m$, iar probabilitățile se înmulțesc. Dacă aceeași valoare apare de mai multe ori se va scrie o singură dată iar probabilitățile se adună.

② $\frac{X}{Y} \stackrel{\text{not.}}{=} X \cdot Y^{-1}$

ex. $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ X, Y independente

$$X+Y: \begin{pmatrix} -1+0 & -1+1 & 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad X+Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

TEMA

Obs. Cerințele sunt valabile pentru toate grupele, dar fiecare student va rezolva doar subpunctele aferente grupei din care face parte.

1) Fie X și Y două v.a. discrete independente.

1) Pornind de la X și Y construiți următoarele v.a.

a) $X: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad Y: \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$3X = ?$, $X^{-1} = ?$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right) = ?$, $Y^2 = ?$, $Y + 3 = ?$

b) $X: \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad Y: \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

GRUPA 252

$X - 1 = ?$, $X^{-2} = ?$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot X\right) = ?$, $Y \cdot 5 = ?$, $e^Y = ?$

c) $X: \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

GRUPA 253

$2X = ?$, $X^{-3} = ?$, $\lg(\pi \cdot X) = ?$, $Y - 2 = ?$, $1/Y = ?$

d) $X: \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}, \quad Y: \begin{pmatrix} e & e^3 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

GRUPA 254

$2 - X = ?$, $X^3 = ?$, $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot X\right) = ?$, $Y^{-1} = ?$, $\ln Y = ?$

2) Folosind v.a. X și Y de la 1) determinați:

a) $2X+3Y$, $3X-Y$, $X^2 \cdot Y^3$ GRUPA 251

b) $X-Y$, $\cos(\pi \cdot X \cdot Y)$, X^2+3Y GRUPA 252

c) $X+Y$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot X \cdot Y\right)$, $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ GRUPA 253

d) $X \cdot Y$, $\frac{X}{Y}$, $|X-Y^2|$ GRUPA 254

3) Determinați parametri reali p și q știind că:

a) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0,1 & \frac{p+q+2}{2} \end{pmatrix}$ GRUPA 251

sunt v.a. bine definite

b) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & p & q^2 \end{pmatrix}$ și $X^2: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ p & p & p^2 \end{pmatrix}$ GRUPA 252

sunt v.a. bine definite

c) $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p^2 & q \end{pmatrix}$ și $X^4: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ GRUPA 253

sunt v.a. bine definite

d) $X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2p & q \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 7q \end{pmatrix}$ GRUPA 254

sunt v.a. bine definite

4) Folosind repartițiile r.a. de la 1,2) calculați:

a) $P(2X+3Y > 1) = ?$

$$P(2X+3Y > 1 \mid X > 0) = ?$$

$$P(2X+3Y < 3 \mid Y < -2) = ?$$

$$P(X^2 \cdot Y^3 > 3) = ?$$

$$P(X^2 \cdot Y^3 \leq 3) = ?$$

$$P(2X+3Y < 3X-Y) = ?$$

b) $P(X-Y > 0) = ?$

$$P(X-Y < 0 \mid X > 0) = ?$$

$$P(X-Y > 0 \mid Y \leq 0) = ?$$

$$P(\cos(\pi XY) < \frac{1}{2}) = ?$$

$$P(X^2+3Y \geq 3) = ?$$

$$P(X-Y < X^2+3Y) = ?$$

c) $P(X+Y < 2) = ?$

$$P(X+Y > 2 \mid X > 5) = ?$$

$$P(X+Y < 12 \mid Y < 0) = ?$$

$$P(\sin(\frac{\pi}{2} \cdot XY) \leq \frac{1}{2}) = ?$$

$$P(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} < 1 \mid Y < 0) = ?$$

$$P(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} < X+Y) = ?$$

$$d) \quad P(X \cdot Y \leq e^4) = ?$$

$$P(X \cdot Y \geq 7 \mid X < 0) = ?$$

$$P(X \cdot Y < 9 \mid Y > 3) = ?$$

$$P\left(\frac{X}{Y} < 1\right) = ?$$

$$P(|X - Y^2| \geq 3) = ?$$

$$P\left(\frac{X}{Y} < |X - Y^2|\right) = ?$$