Tema 1 Algoritmi Avansati

Moroianu Theodor

23 martie 2021

2 Load Balance

Cerinţa 1

A

Consideram setul de greutati $S = \{\ 20,\ 30,\ 60,\ 90\ \}$. Solutia optima este partitionarea multimii S in felul urmator:

- $S_1 = \{\ 20,\ 90\ \}$
- $S_2 = \{\ 30,\ 60\ \}$

Asadar, notand cu OPT solutia optima, avem $OPT = 110$.

Consideram acum urmatoarea partitionare:

- $S_1' = \{\ 20,\ 90\ \}$
- $S_2' = \{\ 30,\ 60\ \}$

Observam ca $ALG = 120$, unde ALG este solutia algoritmului care ne-a generat a doua paritie.

Stiind ca $120 < 110 * 1.1$, exista cel putin un test pentru care incarcarea masinilor cu suma de 80, respectiv 120 este o 2-aproximare. Altfel spus, un algoritm care pentru S ne genereaza impartirea S_1' si S_2' este 2-aproximativ pe acel caz.

Putem asadar afirma ca testul dat nu prezinta un contra-exemplu la afirmatia de aproximare al algoritmului, acesta putand fi corect. □

B

Fie OPT solutia optima.

Lema 1. *$OPT < 110$.*

Demonstraţie. Fie $S_{1,2}$ partitionarea lui S in solutia optima, cu $\sum_{i \in S_1} i \geq \sum_{i \in S_2} i$. Mai departe vom considera $G_{1,2}$ ca fiind suma elementelor din S_1 respectiv S_2.

Exista doua cazuri:

- $G_1 < 110$. *Qed.*
- $G_1 \geq 110$. Alegem un element x din S_1. Conform restrictiilor, $1 \leq x \leq 10$.
  Il mutam pe x din S_1 in S_2, obtinand astfel o solutie mai buna (G_1 scade, si G_2 ramane mai mic decat 100). Contradictie.

□

Conform lemei de mai sus, $OPT < 110$, sau $OPT \leq 109$ si deci orice algoritm 1.1 aproximativ este mai mic sau egal cu $1.1 * 109 = 119.9$.

Cum $ALG = 120$, factorul sau de aproximare nu este corect. □

Cerinţa 2

A

Consideram urmatoarea problema (triviala) de minimizare:
Se da un numar X, si se cere un numar cat mai mic mai mare sau egal cu X.

Consideram urmatorii algoritmi:

- Algoritmul optim, cu $OPT(x) = x$.
- Algoritmul 1, cu $ALG_1(x) = x$.
- Algoritmul 2, cu $ALG_2(x) = 2 * x$.

Este trivial de arat ca ALG_1 este 2-aproximativ si ALG_2 este 4-aproximativ (ALG_1 este chiar 1 aproximativ si ALG_2 2-aproximativ).

Pentru inputul $x = 1$ obtinem ca $ALG_1(x) = 1$ si $ALG_2(x) = 2$, deci exista cel putin un scenariu pentru care $ALG_2(I) \geq 2 * ALG_1(I)$.

Consideram acum doua alegeri diferite pentru $ALG_{1,2}$:

- Alegem algoritmul 1 ca $ALG'_1(x) = 2 * x$.
- Alegem algoritmul 2 ca $ALG'_2(x) = x$.

Din definitie, $ALG'_1 > ALG'_2$, pentru inputul $x = 1$ obtinem ca $ALG'_1(x) = 2$ si $ALG_2(x) = 1$, deci exista cel putin un scenariu pentru care $ALG_2(I) \ngeq 2 * ALG_1(I)$.

Asadar, propozitia este falsa.
De notat ca nici inegalitatea inversa nu este adevarata. □

B

Notand OPT algoritmul optim, pentru oricare input avem urmatoarele inegalitati:

$$OPT \leq ALG_1 \leq 2 * OPT$$
$$OPT \leq ALG_2 \leq 4 * OPT$$

Obtinem asadar urmatoarea inegalitate:

$$OPT \leq ALG_1 \leq 2 * OPT \leq 2 * ALG_2$$

Asadar, pentru oricare input avem $ALG_1 \leq 2 * ALG_2$, si deci pentru niciun input nu avem $ALG_1 > 2 * ALG_2$. Afirmatia este deci adevarata. □

Cerinţa 3

Consideram algoritmul Ordered-Scheduling, si dorim sa aratam ca factorul sau de aproximare este de $\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$.
De fapt, vom gasi un factor de aproximare si mai bun. Mai precis vom arata ca:

$$\frac{OSA}{OPT} \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3 * m}$$

Prin OSA intelegem raspunsul dat de algoritmul Ordered-Scheduling, prin OPT intelegem raspunsul optim, si prim m se intelege numarul de masini. Load-ul masinii i dat de algoritmul OSA este notat cu L_i si greutatea obiectului j este notata cu G_j.

Lema 2. *Bound-ul de* $\frac{3}{2} - \frac{1}{2*m}$ *este mai slab decat bound-ul de* $\frac{4}{3} - \frac{1}{3*m}$.

Demonstraţie. Verificam inegalitatea prin echivalente:

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3 * m} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2 * m}$$

$$\frac{4 * 6 * m}{3} - \frac{6 * m}{3 * m} \leq \frac{3 * 6 * m}{2} - \frac{6 * m}{2 * m}$$

$$8 * m - 2 \leq 9 * m - 3$$

$$1 \leq m$$

Cum m reprezinta numarul de masini, este cel putin egal cu 1. □

Asadar, vom demonstra ca un upper-bound pentru $\frac{OSA}{OPT}$ este $\frac{4}{3} - \frac{1}{3*m}$.

Fie X o instanta a problemei de Load Balancing, OPT solutia optima, si OSA solutia oferita de algoritmul de Ordered Scheduling.
Fie K indicele ultimului obiect pus in masina cu load maxim in OSA.

Lema 3. *Daca $K \neq N$, putem sa eliminam toate obiectele cu indice mai mare decat K, obtinand un nou input pe care algoritmul ALG are un factor de aproximare cel mai mare sau egal cel al inputului initial.*

Demonstraţie. Cum K este ultimul obiect pus de OSA in cea mai umpluta masina, eliminarea obiectelor de dupa K nu afecteaza raspunsul OSA.
Pe de alta parte, algoritmul optim OPT poate fi influentat de eliminarea acestor obiecte.
Asadar, OSA nu se modifica, si OPT scade sau nu se modifica, factorul de aproximare al lui OSA fie nu se modifica fie creste. □

In continuare, vom considera ca masina de load maxim in cadrul algoritmului OSA este masina cu obiectul N, orice alt input pudandu-se reduce la forma aceasta, conform lemei de mei sus.

Consideram doua cazuri posibile:

Caz 1: $G_N > \frac{OPT}{3}$. Cum obiectul N este cel mai usor, inseamna ca nu pot fi puse mai mult de doua obiecte in aceeasi masina. Totusi, in cazul in care sunt cel mult doua obiecte per masina, algoritmul OSA este optim, asignand masinii K obiectele nr. K si $2*m-K+1$.

Asadar, obtinem ecuatia 1:

$$G_N > \frac{OPT}{3} \Rightarrow OSA = OPT$$

Caz 2: $G_N \leq \frac{OPT}{3}$. Fie k masina de load maxim. Conform afirmatiilor de mai sus, obiectul N este asignat acesteia.
Asadar, inainte sa ii fie adaugat obiectul N, masina k avea cel mai mic load, si deci mai mic decat media:

$$L_k - G_N \leq \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{n-1} G \iff L_k \leq \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{n} G_i + (1 - \frac{1}{m}) * G_N$$

Stim ca OPT este mai mare sau egal cu media, si conform cazului in care ne aflam G_N este cel putin $\frac{OPT}{3}$, deci avem:

$$L_k \leq \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{n} G_i + (1 - \frac{1}{m}) * G_N$$
$$G_N \leq \frac{OPT}{3}$$
$$OPT \geq \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Combinand cele 3 relatii, obtinem:

$$L_k \leq OPT + (1 - \frac{1}{m}) * \frac{OPT}{3} \iff L_k \leq OPT * (\frac{4}{3} - \frac{1}{3*m})$$
$$\Rightarrow \frac{OSA}{OPT} \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3*m} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$$

□