

Απαντήσεις στα προβλήματα, δεκτές ηλεκτρονικά μέσω ηλεκτρονικής αλληλογραφίας:

email: compPhysicsEKPA@gmail.com
attachments: *.ipynb .OR. *.txt

Στην περίπτωση που κάποια άσκηση έχει ζητηθεί να αναρτηθεί ως εργασία (με ή χωρίς bonus) στο e-class, μετά την ανάρτηση της απάντησής σας στο e-class, μη παραλείψετε να στείλετε αντίγραφό της και στο compPhysicsEKPA@gmail.com και να γράψετε το **όνομα και τον αριθμό μητρώου σας!** Το αρχείο (*.txt) πρέπει να περιέχει σχολιασμένο κώδικα σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού, **καθώς και το αποτέλεσμα της εκτέλεσής του (printout).** Μη στέλνετε αρχεία τύπου *.doc, *.docx και απαντήσεις για προβλήματα που έχουν μαρκαριστεί ως μη-παραδοτέα.

Πρόβλημα 1 (παραδοτέο έως 24.10.2022)

Λαμβάνοντας υπόψη το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού, που δίνεται στο τέλος της εκφώνησης, να υπολογίσετε:

- τον αριθμητικό μέσο όρο του δείγματος $\hat{\mu} = N^{-1} \sum x_i$,
- την τετραγωνική διασπορά του δείγματος $s^2 = (N - 1)^{-1} \sum (x_i - \hat{\mu})^2$,
- την (προκατειλημμένη) τετραγωνική διασπορά του δείγματος $s_N^2 = N^{-1} \sum (x_i - \hat{\mu})^2$,

θεωρώντας ως ισοπίθανα $p_i = 1/6$ τα αποτελέσματα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Σχολιάστε αν βρείτε κάτι παράξενο.

4, 2, 3, 6, 1, 5, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 5, 5, 3, 1, 2, 3, 4,
3, 6, 3, 6, 4, 2, 3, 3, 6, 4, 1, 1, 6, 4, 6, 3, 4, 6, 6, 4, 2, 2,
6, 3, 6, 5, 4, 6, 3, 3, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 6,
3, 6, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 2, 6, 1, 3, 3,
3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 6, 4, 4,
3, 6, 2, 4, 3, 6, 5, 3, 6, 2, 3, 3, 5, 3, 4, 5, 4, 3, 1, 3, 2, 6,
4, 3, 5, 4, 3, 3, 1, 6, 4, 4, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 6,
2, 3, 6, 1, 3, 6, 1, 4, 1, 2, 1, 6, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 6, 1, 3, 4,
6, 6, 4, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 3, 4, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 6, 4, 5, 3, 5,
5, 6, 3, 1, 3, 3, 6, 1, 6, 5, 2, 5, 4, 1, 3, 6, 5, 3, 2, 3, 1, 3,
6, 4, 1, 6, 3, 1, 2, 6, 4, 6, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 1, 5, 6, 3, 5, 3,
4, 5, 4, 1, 2, 6, 6, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 1, 2, 6,
2, 1, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 2, 6, 3, 1, 6, 1, 4, 6, 5, 3, 1,
2, 6, 2, 1, 1, 3, 5, 6, 1, 5, 5, 3, 5, 3

Μπορείτε να βρείτε το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού ως **απλό αρχείο** κειμένου (μορφή *.txt) σε αυτόν τον **φάκελο**. (Λύση του προβλήματος **εδώ**.)

Πρόβλημα 2 (παραδοτέο έως 31.10.2022)

Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας, γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να παράγει τυχαίους αριθμούς $X \sim 1/x$ στο διάστημα $0.5 < x < 10.5$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο:

- α) αντίστροφου μετασχηματισμού.
- β) δειγματοληψίας απόρριψης (hit-or-miss).

Συγκρίνετε την απόδοση των δύο μεθόδων υπολογίζοντας πόσες επαναλήψεις χρειαστήκατε σε κάθε περίπτωση. (**Λύση** του προβλήματος **εδώ** και **εδώ**.)

Πρόβλημα 3 (μη παραδοτέο)

- α) Δημιουργήστε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών βασισμένη στον γραμμικό μετασχηματισμό ισοδυναμίας υπολοίπου $x_{n+1} = (2147483629x_n + 2147483587) \bmod (2^{31} - 1)$ που να παράγει τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας στο $[0, 1)$.
- β) Μελετήστε το διάγραμμα συχνοτήτων (ιστόγραμμα) της γεννήτριάς σας.

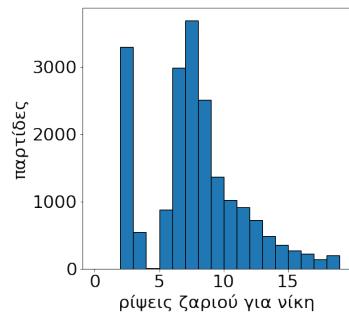
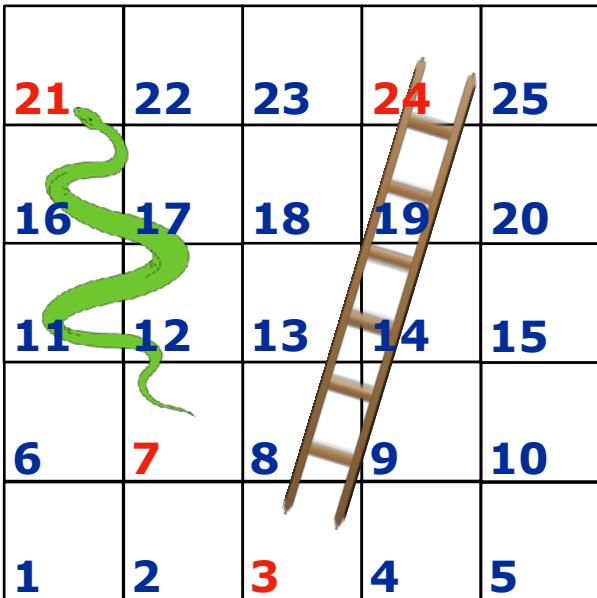
Πρόβλημα 4 (μη παραδοτέο)

- α) Εξομοιώστε ένα ζάρι.
- β) Εξομοιώστε ένα ζάρι που έχει 30% πιθανότητα να φέρει 6 και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα ισοπίθανα.

Τυποδείξεις: Χρησιμοποιήστε την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας και ‘τεμαχίστε’ κατάλληλα το διάστημα $[0, 1)$ σε 6 ‘τεμάχια’, ελέγχοντας σε ποιο από αυτά ανήκει ο αριθμός που παράχθηκε. (**Λύση** του προβλήματος **εδώ** και **εδώ**.)

Πρόβλημα 5 (μη παραδοτέο)

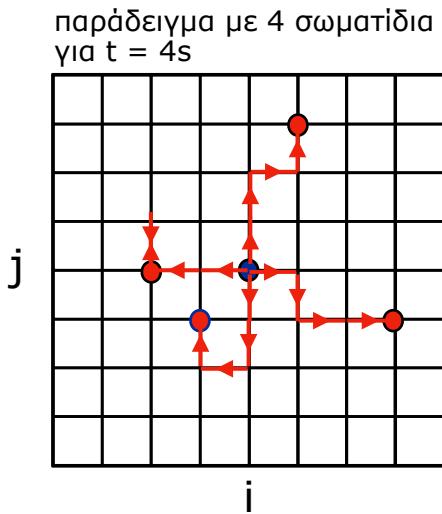
Βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X που χαρακτηρίζει τον αριθμό ρίψεων ενός ζαριού, προκειμένου να κερδίσει (φτάσει στο τετράγωνο 25) κάποιος στο παρακάτω ‘φιδάκι’.



1. Υπολογίστε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος των τιμών x που έλαβε η μεταβλητή X στα παιχνίδια που παίξατε.
2. Προσθέστε ή αφαιρέστε σκάλες και φίδια και αυξομειώστε το μέγεθος του παιχνιδιού παρατηρώντας την μετάβαση σε μία ‘κανονικότητα’ $X \sim e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$ όταν το ‘παρακάνετε’. Γιατί συμβαίνει αυτό;
3. Σε ένα παιχνίδι μεταξύ δύο ατόμων, ποια η πιθανότητα να κερδίσει αυτός που ξεκινά δεύτερος; (Στελτε μου αν θέλετε την πιθανότητα που υπολογίσατε.)
4. Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $\bar{x} \approx 7.4$ και $\hat{\sigma} \approx 4.1$, θα ήταν σωστό να πούμε ότι χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $x = 7.4 \pm 4.1$ ζαριές για να κερδίσουμε ένα παιχνίδι;

Πρόβλημα 6 (με bonus παραδοτέο έως 07.11.2022)

Χίλια σωματίδια Brown διαχέονται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων. Τα σωματίδια εκτελούν τυχαίο βηματισμό σε ένα δισδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα ακμής ενός εκατοστού με ταχύτητα 1 cm/s .



Βρείτε πόσο μακριά θα βρίσκεται κατά μέσο όρο το κάθε σωματίδιο μετά από $t = 100$ βήματα του ενός δευτερολέπτου, υπολογίζοντας το

$$\bar{d} = \frac{1}{1000} \sum_{w=1}^{1000} \sqrt{x_w^2 + y_w^2}$$

όπου (x_w, y_w) η θέση του κάθε σωματιδίου $w = 1, 2, 3 \dots 1000$ για $t = 100s$. Στην συνέχεια βρείτε τον μέσο όρο του τετραγώνου της απόστασης του καθενός σωματιδίου (για $t = 100s$)

$$\bar{d}^2 = \frac{1}{1000} \sum_{w=1}^{1000} x_w^2 + y_w^2$$

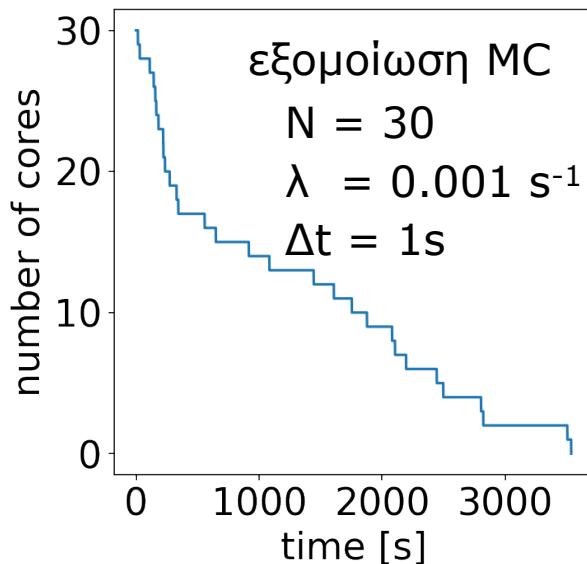
και συγχρίνετε τις απαντήσεις σας με το μονοδιάστατο πρόβλημα.

Τυποδείξεις: Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστείτε να φτιάξετε ένα ζάρι τεσσάρων όψεων (πάνω - κάτω - δεξιά - αριστερά) το οποίο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί κάθε σωματίδιο σε κάθε 'γύρο'.

Πρόβλημα 7 (μη παραδοτέο)

Να γραφεί πρόγραμμα που ως εξομοιώνει την ραδιενεργό διάσπαση $N = 1000$ πυρήνων συναρτήσει του χρόνου, σε διαχριτά χρονικά βήματα $\Delta t = 1\text{s}$. Θεωρήστε ότι κάθε αδιάσπαστος πυρήνας έχει σταθερή πιθανότητα διάσπασης $p = \lambda\Delta t = 10^{-3}$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1\text{s}$. Το πρόγραμμα ως πρέπει να επιστρέψει στην ‘έξοδό’ του το πλήθος των αδιάσπαστων πυρήνων ύστερα από συνολικό χρόνο εξομοίωσης ίσο με 1000s.

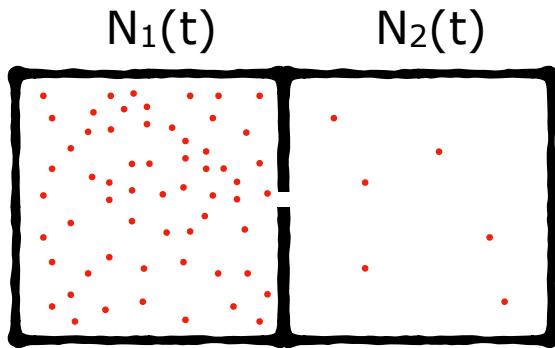
Τυποδείξεις: Ανά μονάδα χρόνου, κάθε πυρήνας περνάει από δοκιμή Bernoulli (ανεξαρτησία διασπάσεων, άνευ μηνήμης). Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστεί να φτιάξετε ένα κέρμα δύο όψεων με πιθανότητα $p = \lambda\Delta t = 10^{-3}$ να φέρει κορώνα, το οποίο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε αν κάποιος πυρήνας θα υποστεί διάσπαση ρίχνοντας το κέρμα $N(t)$ φορές, όπου $N(t)$ ο πληθυσμός των εναπομεινάντων πυρήνων την χρονική στιγμή t .



Δείτε την λύση του προβλήματος στο [YouTube](#)

Πρόβλημα 8 (μη παραδοτέο)

Θεωρείστε ότι έχουμε ένα αέριο σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία, με $N_1(t)$ και $N_2(t)$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκεται σε κάθε δοχείο.



Να βρεθεί η χρονική εξέλιξη των δύο πληθυσμών $N_1(t)$ και $N_2(t)$ αν:

$$N1(0) = 100$$
$$N2(0) = 0$$

και $p = \lambda\Delta t = 1\%$ πιθανότητα για κάθε μόριο του αερίου να διασχίσει την τρύπα και να περάσει από το ένα δοχείο στο άλλο στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$.

Πρόβλημα 9 (μη παραδοτέο)

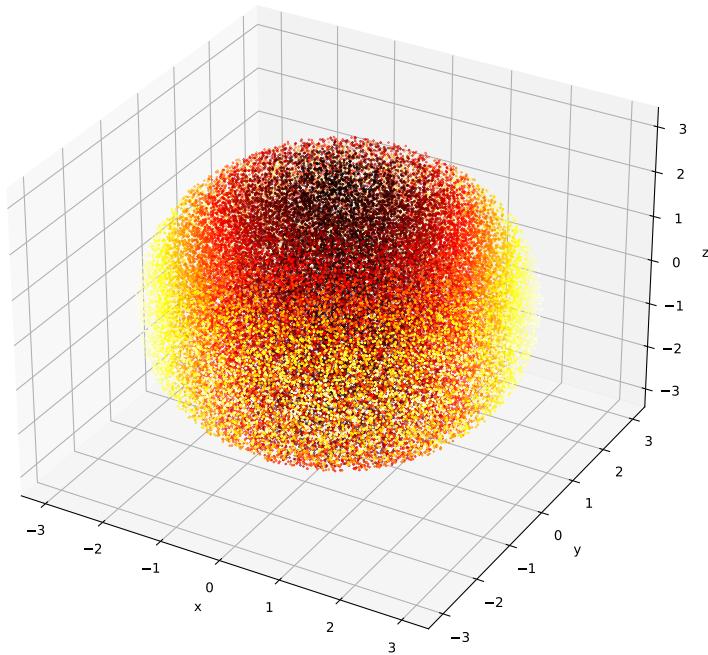
Τπολογίστε το

$$I = \int_{0.5}^{10.5} \frac{1}{x} dx$$

με την μέθοδο απλοϊκού Monte-Carlo καθώς και την αβεβαιότητα της εκτίμησης που κάνατε.
Ποιο είναι το αναμενόμενο (ψεωρητικά) σχετικό σφάλμα αν έχετε στην διάθεσή σας $N = 10^{10}$
δείγματα τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής; (Λύση του προβλήματος **εδώ** και **εδώ.**)

Πρόβλημα 10 (μη παραδοτέο)

Τυπολογίστε την μάζα σφαίρας ακτίνας $R = 3$ και πυκνότητας $\rho(x, y, z) = \frac{5}{648\pi}(x^2 + y^2)$ με χέντρο την αρχή των αξόνων με την μέθοδο Monte–Carlo.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο [YouTube](#) καθώς και τον κώδικα που χρησιμοποιήσα για να φτιάξω την παραπάνω εικόνα στο [GitHub](#).

Πρόβλημα 11 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{10} e^x dx$ (και η αβεβαιότητά του) με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας $N = 1000$ τυχαίους αριθμούς. Να δομήσετε το πρόγραμμά σας έχοντας ως αφετηρία γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1]$.

- Να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα $\delta \hat{I}/\hat{I}$ της MC ολοκλήρωσης
- Να υπολογιστεί (αναλυτικά) το θεωρητικός αναμενόμενο σχετικό σφάλμα $\delta I/I$ της μεθόδου, για το ίδιο πλήθος τυχαίων δειγμάτων ($N = 1000$).
- Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση $\sqrt{s^2}$ ενός δείγματος¹ αποτελούμενο από 4×10^4 MC ολοκληρώσεις (με $N = 1000$ η κάθε μία) και να την συγχρίνετε με το δI και το $\delta \hat{I}$ που υπολογίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Να φτιάξετε ένα ιστόγραμμα που να δείχνει την κατανομή των \hat{I} και να σχολιάσετε την μορφή της.
- Εάν χωρίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στα δύο, έτσι ώστε

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^5 e^x dx + \int_5^{10} e^x dx$$

και ‘επενδύσουμε’ στις επιμέρους δύο ολοκληρώσεις τους διαθέσιμους τυχαίους αριθμούς χωρισμένους σε δύο ίσα δείγματα $N = N_1 + N_2 = 500 + 500$, περιμένουμε το σχετικό σφάλμα της απλοϊκής MC ολοκλήρωσης να μεγαλώσει, να μικρύνει ή να μείνει το ίδιο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας επαναλαμβάνοντας το ερώτημα (β) για τα επιμέρους ολοκληρώματα I_1 , I_2 και υπολογίζοντας την συνολική αβεβαιότητα του αθροίσματός τους.

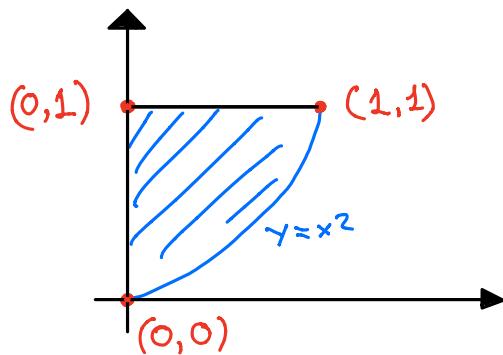
- Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α), (β) και (γ) για την ολοκλήρωση με την μέθοδο απόρριψης MC (hit-or-miss) θεωρώντας $N = 1000$ ζευγάρια τυχαίων αριθμών (x, y) που έχουν παραχθεί ομοιόμορφα στο $[0, 1] \times [0, 1]$.

¹To s^2 ορίστηκε στο πρόβλημα 1 ως η τετραγωνική διασπορά ενός δείγματος παρατηρήσεων (μετρήσεων).

Πρόβλημα 12 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί με την απλοϊκή (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωση, η μάζα των παρακάτω αντικειμένων και η αβεβαιότητά τους, για $N = 1000$ γεγονότα.

- α) Δισδιάστατη πλάκα που οριοθετείται στην περιοχή $\{x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$ (διαστάσεις μήκους σε μέτρα) με πυκνότητα $\rho(x, y) = \frac{20}{13}(x + y)$ [kg/m³].



- β) Κύβος πυκνότητας $\rho(x, y) = \frac{12}{31}(x^2 + yz)$ [kg/m³] που οριοθετείται στην περιοχή $\{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ με διαστάσεις μήκους μετρημένες σε μέτρα.

Δίνεται, προς σύγκριση, ο ακριβής υπολογισμός της μάζας των δύο σωμάτων είναι $M = 1$ kg.

H áskēsi autή eίναι λυμένη στο web.

https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/problems/2019_2020

H διδακτική της αξία ωστόσο παραμένει, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος θα προσπαθήσει να την λύσει δίχως να συμβουλευτεί (εξ αρχής) τις δοσμένες λύσεις.

Πρόβλημα 13 (μη παραδοτέο)

Δίνεται η εξίσωση,

$$\tan x = \frac{x}{1 - x^2}. \quad (1)$$

α) Να λυθεί η εξ.(1) στο διάστημα $x \in [2, 4]$ χρησιμοποιώντας:

- 1) την μέθοδο της διχοτόμησης με 15 επαναλήψεις. Θεωρήστε σαν τελική εκτίμηση της ρίζας (ρ) το μέσο του διαστήματος διχοτόμησης στην 15ή επανάληψη, δηλ. $\hat{\rho} = 0.5(b_{14} + a_{14}) \approx \rho$, με $a_0 = 2$ και $b_0 = 4$.
- 2) την επαναληπτική σχέση²

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

με

$$f(x) = \tan x - \frac{x}{1 - x^2}$$

χρησιμοποιώντας $x_0 = 3.0$ και θεωρώντας σαν εκτιμητή της ρίζας το $x_6 = \hat{\rho} \approx \rho$.

Να εκτυπωθούν οι τιμές $\hat{\rho}$ και $f(\hat{\rho})$ για τις δύο περιπτώσεις. Ποια μέθοδος έδωσε $f(\hat{\rho})$ που να είναι περισσότερο συμβατό με το 0 ;

β) Να διερευνηθεί η ύπαρξη ριζών στο διάστημα $x \in [4, 10]$.
 – θέμα ελεύθερης ανάπτυξης ;-)

Τπόδειγμα κώδικα:

```

/*      C/C++      */
#include "math.h"
double f(double x){return tan(x) - x/(1 - x*x);}
double df(double x){/* implement f'(x) */}
int main()
{
  double a = 2;
  double b = 4;
  double n = 0;
  double x = 3;
  while( n < 15 )
  {
    // ... implement bisection logic
    double c = 0.5*(a + b);
  }
}
  
```

²Η σχέση αυτή είναι διάσημη με το όνομα Newton-Raphson.

```
// ... implement newton-raphson
if ( n < 6 )
{
    // x = x - f(x)/f'(x)
    // if (n == 5) ektypwsi twn x, f(x)
}
n = n + 1;
}

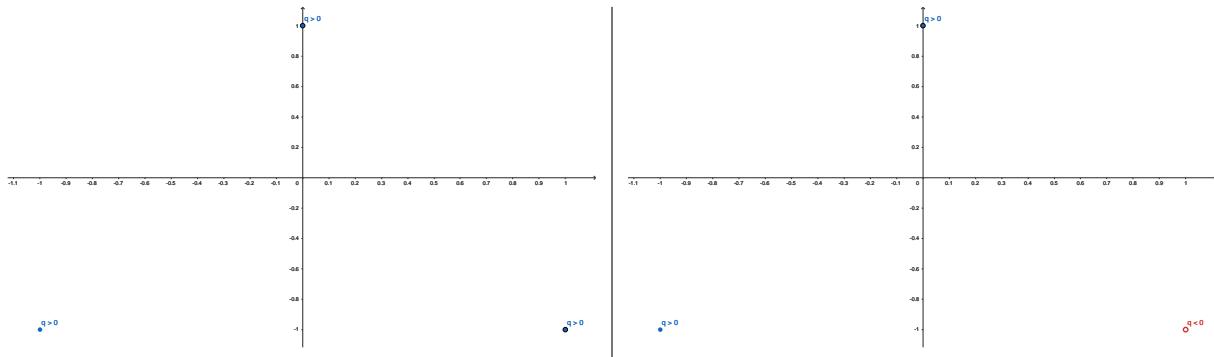
### /* Python */ ###
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # for exploratory graphics ;-
def f(x): return np.tan(x) - x/(1-x**2)
def df(x): return 0. # implement here the derivative

# first: plot f(x) to get an idea how it varies
x = np.linspace(-10,10,100) # an array with 100 steps for x [-10, 10]
y = f(x)
ax, fig = plt.subplots(figsize=(10,10))
plt.plot(x, y) # plots f(x)
plt.plot(x, [0. for i in x]) # plots y = 0, i.e., x-axis
plt.show()

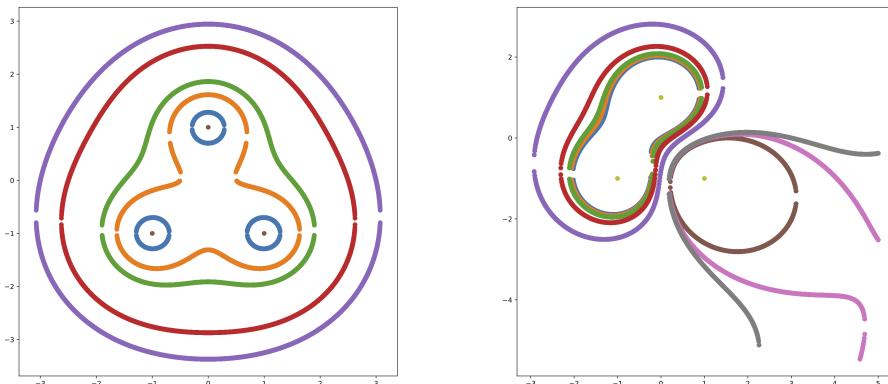
# logic for bisection/newtowon similar as for the C/C++ example
```

Πρόβλημα 14 – Εφαρμογή (μη παραδοτέο)

Βρείτε τις ισοδυναμικές καμπύλες στο επίπεδο $z = 0$, μιας (διαμορφώσιμης από τον χρήστη) διαχριτής κατανομής ηλεκτρικού φορτίου. Το συνολικό δυναμικό στην θέση \vec{r} είναι $V(\vec{r}) = \sum_i k q_i / |\vec{r} - \vec{r}_i|$ όπου το i απαριθμεί τα φορτία πήγες που έχετε τοποθετήσει στις θέσεις \vec{r}_i . Θεωρείστε για απλότητα ότι τα φορτία πηγές κείτονται στο επίπεδο xy ($z = 0$) και έχουν $|q_i| = 1$, $k = 1$. Λύστε τις μη-γραμμικές εξισώσεις $V(x, y) = V_{\text{ref}}$ στο επίπεδο xy ($z = 0$), χρησιμοποιώντας την μέθοδο τις διχοτόμησης (Bisection) δίνοντας μόνοι σας κάποιες τιμές για στο δυναμικό αναφοράς V_{ref} ³ και υπολογίζοντας για ποια y το δυναμικό ισούται με V_{ref} για $x = [-5.0, -4.9, \dots, 4.9, 5.0]$. Ως παράδειγμα, θεωρείστε τις δύο παρακάτω κατανομές φορτίου που βρίσκονται στο επίπεδο xy ($z = 0$).



Μια πιθανή υλοποίηση του παραπάνω προγράμματος (με αντικειμενοστραφή σύνταξη) βρίσκεται στο [GitHub](#) και δίνεται ως παράδειγμα εφαρμογής στην φυσική, αλγορίθμων που λύνουν γρήγορα και αυτοματοποιημένα μη-γραμμικές εξισώσεις. Φτιάξτε τις δικές σας υλοποίσεις/γραφικά με όποιον τρόπο θέλετε.



³π.χ. $V_{\text{ref}} = V(0.25, 0), V(0, 0.25) \dots V(1.5, 0), V(2.5, 0), V(3.0, 0)$.

Πρόβλημα 15 (μη παραδοτέο)

Έστω η αναδρομική σχέση σταθέρου σημείου $x_{n+1} = 5 + \sqrt{x_n}$, με $x_0 = 4$. Βρείτε αναλυτικά το σταθερό σημείο ρ για $n \rightarrow \infty$, λύνοντας την εξίσωση $\rho = 5 + \sqrt{\rho}$. Γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει τα x_n και βρείτε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να γίνει το $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$.

Η άσκηση αυτή είναι υποσύνολο λυμένης άσκησης στο [GitHub](#) και στις σημειώσεις του μαθήματος (2022) υπάρχει αναλυτική εκτίμηση του σφάλματος $|x_n - \rho|$.

Πρόβλημα 16 (μη παραδοτέο)

Απαντήσεις στην επομένη σελίδα.

- α) Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις των μεθόδων Gauss-Seidel και Jacobi για το σύστημα $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχοντας σαν αρχική εκτίμηση το $X^T = [0, 0, 0]^T$. Να διερευνηθεί η συμπεριφορά των Gauss-Seidel και Jacobi για το ίδιο πρόβλημα και $n = 200$ επαναλήψεις.

- β) Να λυθεί το σύστημα⁴ $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

και

$$b = [4, -1, -5, -2, 2, 2, -1, 1, 6]^T$$

Να επαληθευθεί η ορθότητα των λύσεων υπολογίζοντας τη συμβατότητα του $AX - b$ με το μηδενικό διάνυσμα (πίνακα-στήλη) για τα ερωτήματα α) και β).

⁴Πίνακες της μορφής A προκύπτουν κατά την διαχριτοποίηση της εξίσωσης Poisson σε τετραγωνικό πλέγμα στις δύο διαστάσεις, βλέπε σημειώσεις μαθήματος – παράδειγμα με $\nabla^2\phi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon$.

Απαντήσεις:

α) Για $n = 3$ παίρνουμε

$$X = [1.347, -1.116, \quad 0.884]^T$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [2.917, -1.389, \quad 0.167]^T$$

για την Jacobi. Για $n = 200$ παίρνουμε

$$X = [1, -1, \quad 1]^T$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [\sim 10^{37}, \sim 10^{37}, \sim 10^{37}]^T$$

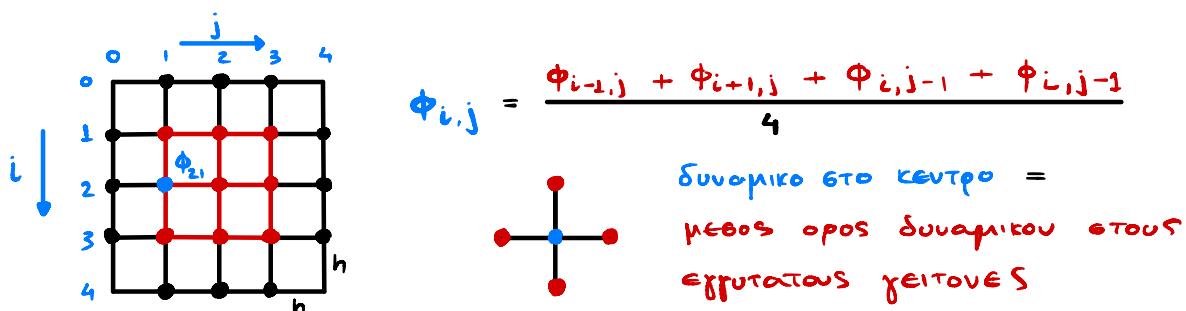
για την Jacobi (δε συγκλίνει). Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα που συγκλίνει η Gauss-Seidel αποτελεί την λύση του συστήματος.

β) Η λύση του συστήματος είναι η

$$X = [1, \quad 0, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 2]^T.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα αυτό αποτελεί λύση του συστήματος.

Πρόβλημα 17 – Εφαρμόγη (μη παραδοτέο)



Δείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_{11} \\
 \phi_{12} \\
 \phi_{13} \\
 \phi_{21} \\
 \phi_{22} \\
 \phi_{23} \\
 \phi_{31} \\
 \phi_{32} \\
 \phi_{33}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \phi_{01} + \phi_{10} \\
 \phi_{02} \\
 \phi_{03} + \phi_{04} \\
 \phi_{20} \\
 0 \\
 \phi_{24} \\
 \phi_{41} + \phi_{30} \\
 \phi_{42} \\
 \phi_{43} + \phi_{34}
 \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στην επίλυση της εξίσωσης Laplace $\nabla^2\phi(x, y) = 0$ για την εύρεση του δυναμικού πάνω σε ένα τετραγωνικό πλέγμα

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi(x+h, y) + \phi(x-h, y) + \phi(x, y+h) + \phi(x, y-h)}{h^2}$$

όταν το δυναμικό στο σύνορο είναι γνωστό (πρόβλημα Dirichlet), όπου h η στοιχειώδης απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων και $\phi_{ij} = \phi(x = ih, y = jh)$. Χρησιμοποιείστε ανάπτυγμα Taylor χρατώντας όρους μέχρι $O(h^2)$

$$\begin{aligned}
 \phi(x \pm h, y) &= \phi(x, y) \pm \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \\
 \phi(x, y \pm h) &= \phi(x, y) \pm \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} h^2 + O(h^3)
 \end{aligned}$$

για να δείξετε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του πλέγματος ισούται (χατά προσέγγιση) με το μέσο όρου του δυναμικού των εγγύτατων γείτονων

$$4\phi_{i,j} = \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}.$$

Ως εφαρμογή, ψεωρείστε ότι το δυναμικό στο πάνω σύνορο είναι ίσο με 3, $h = 1$, και δείξτε ότι $\phi_{11} = \phi_{13} \approx 1.29$, $\phi_{12} \approx 1.58$, $\phi_{21} = \phi_{23} \approx 0.56$, $\phi_{22} \approx 0.75$ και $\phi_{31} = \phi_{33} \approx 0.21$, $\phi_{22} \approx 0.29$.

Συστήματα με αραιούς πίνακες (*sparse matrix*) ιδιας περιοδικής μορφής με αυτόν που παρουσιάστηκε στην εφαρμογή αυτή (που ήταν μόλις διαστάσεων 3×3), χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της εξίσωσης Laplace σε μεγάλα πλέγματα $n \times n$. Η επίλυση αυτών γίνεται (συνήθως) με επαναληπτικές μεθόδους, καθώς οι ακριβείς μέθοδοι επίλυσης (π.χ. LU) έχουν απαγορευτικό χρόνο εκτέλεσης $\sim O(2n^3/3)$.

Πρόβλημα 18 (μη παραδοτέο)

Να μελετηθεί η ευστάθεια της λύσης του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 + \epsilon & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

με την μέθοδο απαλοιφής Gauss, με και δίχως μερική οδήγηση. Διερευνήστε την ευστάθεια της λύσης υέτοντας διαδοχικά πολύ μικρές τιμές για την παράμετρο ϵ π.χ., $\epsilon = 0, 10^{-15}, 2 \times 10^{-15}, 9 \times 10^{-15}, 10^{-16}$.

Πρόβλημα 19 (μη παραδοτέο)

- α) Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της λογικής του κώδικα που παρατίθεται, να υπολογιστεί το $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί την σχέση $1.0 + \epsilon = 1.0$ για αριθμούς κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας (double precision – binary64). Έπειτα, για $p(x) = x^2$, να διερευνηθεί η τιμή του λόγου

$$\frac{p(x + n\epsilon) - p(x)}{n\epsilon} \Big|_{x=2}, \quad (2)$$

για $n = 1, 2, 3, 4, 5, 50000, 50001, 50002, 50003$. Θεωρώντας ότι η εξ. (2) αποτελεί έναν αριθμητικό εκτιμητή της παραγώγου της $p(x)$ στο $x = 2$, να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα⁵ για τις τιμές του n που δίνονται.

- β) Να υπολογιστούν οι λόγοι:

- (I) $(0.1 + 0.1 - 0.2)/\epsilon$
- (II) $(0.1 + 0.2 - 0.3)/\epsilon$
- (III) $(7./3. - 4./3. - 3./3.)/\epsilon$

Υπόδειγμα κώδικα για τον υπολογισμό του ϵ :

```
/*      C/C++      */
double e = 1.0;
while(1.0 + e != 1.0) e = 0.5*e;

# Python
e = 1.0
while(1.0 + e != 1.0): e = 0.5*e
```

⁵Γενικός ορισμός, αν \hat{w} εκτιμητής του w , το απολυτό σχετικό σφάλμα του \hat{w} είναι $|(w - \hat{w})/w|$.