

## Contrôle continu n° 2

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

**Exercice 1.** Soit  $C$  une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  définie par une équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$ , avec  $\rho$  une fonction  $C^1$  sur un intervalle  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Autrement dit, le paramétrage cartésien de  $C$  est donné par  $(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta))$ , pour  $\theta \in I$ .

1. Calculer la longueur de la courbe en fonction de  $\rho$ . (3 points)
2. Application : montrer que la spirale d'équation polaire  $\rho(\theta) = ae^{-b\theta}$  avec  $a, b > 0$ , définie pour  $\theta \in [0, \infty[$ , a une longueur finie et calculer celle-ci. (3 point)

**Solution.**

1. On part du paramétrage  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta).$$

On calcule  $\gamma'(\theta)$  :

$$\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta),$$

et on en déduit

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2.$$

Ainsi, en utilisant la formule de la longueur d'un arc paramétré, si  $I = [a, b]$ , on a

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_a^b \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta.$$

2. On applique la formule de la question 1 (on peut aussi recalculer directement) :

$$\ell(\gamma|_{[0,T]}) = \int_0^T a\sqrt{b^2 + 1}e^{-b\theta} d\theta = a\sqrt{b^2 + 1} \int_0^T e^{-b\theta} d\theta.$$

On calcule l'intégrale, ce qui donne

$$\ell(\gamma|_{[0,T]}) = a\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}(e^0 - e^{-bT}) = a\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}(1 - e^{-bT}).$$

Pour obtenir la longueur totale, il suffit de prendre la limite de la longueur sur  $[0, T]$  quand  $T$  tend vers l'infini. D'après la formule précédente, il vient que

$$\ell(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \ell(\gamma|_{[0,T]}) = a\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} < \infty.$$

**Exercice 2.** Soit  $C$  la courbe de paramétrage  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), -\sin(t), 2t)$ , pour un certain  $T > 0$ .

1. Calculer le vecteur tangent unitaire  $T(t)$  et la courbure  $k(t)$  en tout point de la courbe. (2 points)
2. Montrer que l'angle entre  $T(t)$  et le vecteur  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  est constant. On dit que  $\gamma$  est une hélice. (2 points)

**Solution.**

1. On applique les formules du cours :

$$T(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t), \quad k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

On a en l'occurrence

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), -\cos(t), 2), \quad \|\gamma'(t)\|^2 = 3,$$

de sorte que

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin(t), -\cos(t), 2).$$

D'autre part,

$$\gamma''(t) = (-\cos(t), \sin(t), 0),$$

donc

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = -(2\sin(t), 2\cos(t), 1).$$

Il vient que  $\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = \sqrt{5}$ , et que  $k(t) = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ . En particulier la courbure est constante.

2. On calcule le produit scalaire  $\langle T(t), \vec{u} \rangle$  pour  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  :

$$\langle T(t), \vec{u} \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

donc il ne dépend pas de  $t$ . Or, si l'on note  $\theta(t)$  l'angle entre  $T(t)$  et  $\vec{u}$  on a

$$\langle T(t), \vec{u} \rangle = \cos(\theta(t)) = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

ce qui montre que l'angle  $\theta(t)$  est constant lorsque  $t$  varie.

**Exercice 3.** Soit  $C$  le graphe de la fonction  $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$  sur  $]0, 1[$  (on l'appelle la *courbe sinus du topologue*).

1. Montrer que  $\gamma : (t) = (t, f(t))$  est un paramétrage régulier de  $C$ . Peut-on étendre ce paramétrage à  $[0, 1]$ ? (1 point)
2. On note  $L$  la longueur de  $C$ .
  - (a) Montrer que  $L \geq \int_0^1 |f'(t)| dt$ . (1 point)
  - (b) On pose  $\delta = \frac{\pi}{6}$ . Montrer, pour tout  $k$  assez grand et tout  $t \in [\frac{1}{2k\pi + \delta}, \frac{1}{2k\pi - \delta}]$ ,  $|f'(t)| \geq \frac{1}{2t}$ . (2 points)
  - (c) En déduire l'inégalité suivante pour un entier  $K \geq 0$  assez grand (2 points)

$$L \geq \frac{1}{2} \sum_{k \geq K} \ln \left( \frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta} \right).$$

- (d) (*Question bonus*) En conclure que  $L = +\infty$ . On pourra admettre que la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  diverge. (2 points)

**Solution.**

- Le fait que  $\gamma$  soit un paramétrage de  $C$  est une conséquence de la définition du graphe d'une fonction. Il s'agit surtout de montrer qu'il est régulier. Cela découle du fait que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$ , et que  $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$  pour tout  $t \in ]0, 1[$ . En revanche on ne peut pas étendre le paramétrage à  $t = 0$  car  $f$  n'est pas dérivable en 0 (elle reste néanmoins continue).
- (a) Par définition,

$$L = \int_0^1 \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt,$$

or pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $t^2 \geq 0$  donc

$$L \geq \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

- (b) Calculons  $f'(t)$  pour tout  $0 < t < 1$  :

$$f'(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right),$$

et lorsque  $\frac{1}{2k\pi + \delta} \leq t \leq \frac{1}{2k\pi - \delta}$ , on a  $2k\pi - \delta \leq \frac{1}{t} \leq 2k\pi + \delta$ . Or, pour  $k \geq 1$  on a donc  $\frac{1}{t} \geq 2\pi - \delta > 1$ , donc

$$|f'(t)| = |\sin(1/t) - 1/t \cos(1/t)| \geq 1/t \cos(1/t) - |\sin(1/t)|.$$

Or pour tout  $x \in ]2k\pi - \delta, 2k\pi + \delta[$ , on a  $|x \cos x| = x \cos x \geq x \cos(\delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ , et  $|\sin x| \geq \sin \delta = \frac{1}{2}$ , donc

$$|f'(t)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2t} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - t}{2t} \geq \frac{1}{2t},$$

en utilisant le fait que  $t$  est très petit pour  $k$  assez grand.

- (c) Soit  $K$  assez grand pour que l'inégalité de la question (b) soit vraie, et pour que  $[\frac{1}{2k\pi + \delta}, \frac{1}{2k\pi - \delta}] \subset ]0, 1[$ . On a

$$\int_0^1 |f'(t)| dt \geq \sum_{k \geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi + \delta}}^{\frac{1}{2k\pi - \delta}} |f'(t)| dt \geq \sum_{k \geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi + \delta}}^{\frac{1}{2k\pi - \delta}} \frac{1}{2t} dt,$$

et on peut calculer explicitement le terme de droite :

$$\sum_{k \geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi + \delta}}^{\frac{1}{2k\pi - \delta}} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \sum_{k \geq K} [\ln(t)]_{\frac{1}{2k\pi + \delta}}^{\frac{1}{2k\pi - \delta}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq K} \ln\left(\frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta}\right).$$

- (d) Il reste à comparer deux séries terme à terme. Pour tout  $k \geq K$ ,

$$\ln\left(\frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\delta}{2k\pi - \delta}\right) \sim \frac{2\delta}{2k\pi} = \frac{\delta}{k\pi}.$$

Le terme général de la série qu'on veut calculer est donc équivalent à celui de la série harmonique (à une constante près), qui diverge, donc la série de terme général

$$\ln \left( \frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta} \right)$$

diverge, et on en déduit bien que  $L = +\infty$ .

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{T}$  la surface décrite par l'équation implicite suivante (il s'agit d'un tore de révolution), pour  $0 < r < R$  :

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2.$$

1. Montrer que  $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$\sigma(\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

est un paramétrage régulier de  $\mathbb{T}$ . (2 points)

2. Donner un paramétrage du plan tangent à  $\mathbb{T}$  au point  $(r + R, 0, 0)$ . (2 points)

**Solution.**

1. On pose  $x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)$  les coordonnées de  $\sigma$ . On vérifie que ces coordonnées satisfont l'équation du tore :

$$x(\theta, \phi)^2 + y(\theta, \phi)^2 = (R + r \cos \theta)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{x(\theta, \phi)^2 + y(\theta, \phi)^2} - R \right)^2 + z(\theta, \phi)^2 &= (R + r \cos \theta - R)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2, \end{aligned}$$

donc c'est bien un paramétrage. Montrons qu'il est régulier :

$$D\sigma(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \phi & -(R + r \cos \theta) \sin \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ r \cos \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que  $D\sigma(\theta, \phi)$  est de rang 2, il suffit de montrer qu'un déterminant  $2 \times 2$  d'une de ses sous-matrices est non nul, et c'est le cas : les différents déterminants sont

$$\begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \phi & -(R + r \cos \theta) \sin \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & (R + r \cos \theta) \cos \phi \end{vmatrix} = -r(R + r \cos \theta) \sin \theta,$$

qui s'annule uniquement si  $\theta = k\pi$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \phi & -(R + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi,$$

qui s'annule uniquement si  $\theta = \pi/2 + k\pi$  ou  $\phi = k\pi$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ , ou encore

$$\begin{vmatrix} -r \sin \theta \sin \phi & (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi,$$

qui s'annule uniquement si  $\theta = \pi/2 + k\pi$  ou  $\phi = \pi/2 + k\pi$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Il vient que pour tout couple  $(\theta, \phi)$ , au moins un de ces déterminants est non nul.

2. Un paramétrage du plan tangent  $T_{(R+r,0,0)}\mathbb{T}$  est donné par

$$\eta : (s, t) \mapsto \sigma(\theta_0, \phi_0) + s\psi'_1(\theta_0) + \psi'_2(\phi_0),$$

où

$$\psi_1 : \theta \mapsto \sigma(\theta, \phi_0), \quad \psi_2 : \phi \mapsto \sigma(\theta_0, \phi).$$

Il s'agit donc d'abord de déterminer  $(\theta_0, \phi_0)$  tel que  $\sigma(\theta_0, \phi_0) = (r + R, 0, 0)$ . Il s'agit clairement de  $\theta_0 = 0$  et  $\phi_0 = 0$ . Ensuite, on peut calculer  $\psi_1$  et  $\psi_2$  :

$$\psi_1(\theta) = (R + r \cos \theta, 0, r \sin \theta), \quad \psi_2(\phi) = ((R + r) \cos \phi, (R + r) \sin \phi, 0).$$

Leurs dérivées respectives sont les suivantes :

$$\psi'_1(\theta) = (-r \sin \theta, 0, r \cos \theta), \quad \psi'_2(\phi) = (-(R + r) \sin \phi, (R + r) \cos \phi, 0).$$

Finalement, on obtient que

$$\eta(s, t) = (R + r)(1, t, s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$