TD n° 4 – Pantalons et trigonométrie

Des triangles aux hexagones

Exercice 1. Cet exercice fait suite à l'exercice sur la trigonométrie du triangle hyperbolique (TD 1, exercice 4).

1. On se donne un quadrilatère hyperbolique à trois angles droits et un angle quelconque γ (cf. figure 1). Montrer les formules suivantes :

$$\sinh(a)\sinh(b) = \cos(\gamma),$$

$$\tanh(c)\tanh(d) = \cos(\gamma).$$

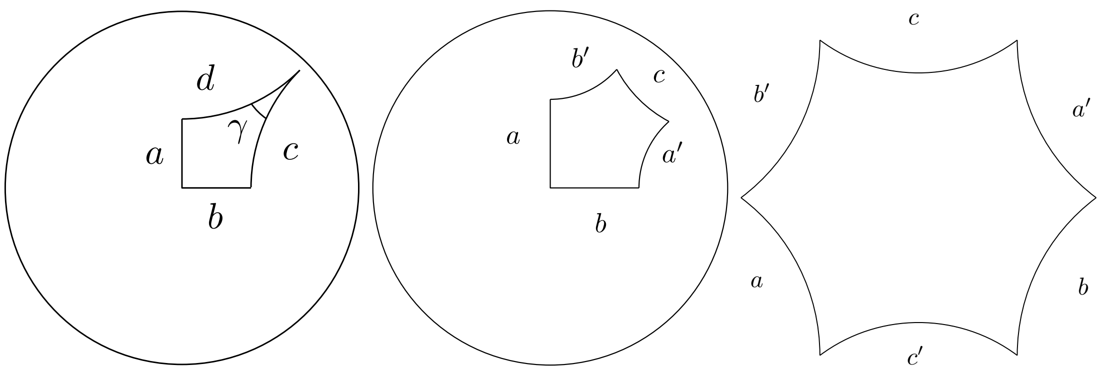

Figure 1 – De gauche à droite : un quadrilatère, un pentagone, un hexagone. Les angles non marqués sont des angles droits.

2. On se donne un pentagone à cinq angles droits comme sur la figure 1. Montrer les formules suivantes :

$$\cosh(c) = \sinh(a)\sinh(b),$$

$$\cosh(c) = \coth(a')\coth(b').$$

3. On se donne un hexagone hyperbolique dont tous les angles sont droits, et dont les longueurs des côtés sont données, cycliquement, par a, c', b, a', c, b' (cf. figure 1).

   Montrer les formules suivantes :

$$\cosh(c) = \sinh(a)\sinh(b)\cosh(c') - \cosh(a)\cosh(b), \tag{1}$$

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(a')} = \frac{\sinh(b)}{\sinh(b')} = \frac{\sinh(c)}{\sinh(c')}, \tag{2}$$

$$\coth(a')\sinh(c') = \cosh(a')\cosh'(b) - \coth(a)\sinh(b). \tag{3}$$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tous réels $a, b > 0$ tels que $\sinh a \sinh b > 1$, il existe un unique pentagone hyperbolique à bords géodésiques dont deux côtés consécutifs ont pour longueurs a et b.

2. En déduire que pour tous réels $a, b, c > 0$ il existe un unique hexagone hyperbolique convexe à bords géodésiques tel que ses côtés non-adjacents soient de longueurs respectives a, b, c. En particulier, en déduire que les longueurs a, b, c conditionnent les longueurs des trois autres côtés.

Pantalons hyperboliques

Exercice 3. Soit Y un pantalon hyperbolique de bords géodésiques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de longueurs respectives ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

1. Montrer que Y peut être obtenu par recollement de deux hexagones hyperboliques de bords de longueurs (a, c', b, a', c, b'), avec $a = \ell_1/2, b = \ell_2/2, c = \ell_3/2$.
2. Montrer que les ensembles

$$\mathscr{C}^*(\gamma_i)) = \{p \in Y : \sinh(d(p, \gamma_i)) \sinh(\frac{1}{2}\ell_i) \leq 1\},$$

sont deux à deux disjoints et que chacun est homéomorphe à $[0, 1] \times S^1$. Indice : considérer, pour une paire de côtés c_1, c_2, la géodésique perpendiculaire h à ces deux côtés, et montrer en utilisant l'exercice 1 que

$$\sinh(c_k) \sinh(d(c_k, h)) > 1, \quad k \in \{1, 2\},$$

comme sur la figure 2 ci-dessous.

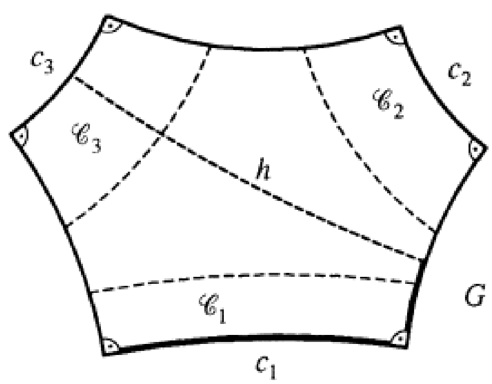

FIGURE 2 – Construction de la géodésique perpendiculaire h.

3. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et pour tout $p \in \mathscr{C}^*(\gamma_i)$, il existe dans $\mathscr{C}^*(\gamma_i)$ une unique géodésique perpendiculaire à γ_i.