

Bases de la géométrie différentielle : synthèse de cours

Thibaut Lemoine

21 octobre 2025

Résumé

Ces notes sont un bref aperçu des notions abordées en cours et en TD, essentiellement sans preuves (sauf pour quelques résultats), agrémentées de quelques remarques personnelles qui me semblent utiles.

1 Rappels de calcul différentiel

Notations :

- On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ et ainsi de suite, de sorte que tout élément de \mathbb{R}^n s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x_1, \dots, x_n)$.
- On note (e'_1, \dots, e'_n) la base duale de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Toute forme linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit donc $L = L_1 e'_1 + \dots + L_n e'_n$.

On notera les vecteurs de \mathbb{R}^n sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

et les formes linéaires sur \mathbb{R}^n sous la forme

$$L = (L_1 \quad \dots \quad L_n).$$

Les vecteurs lignes et colonnes sont des cas particuliers de matrices, et le fait d'appliquer une forme linéaire à un vecteur revient à multiplier une matrice de taille $1 \times n$ et une matrice de taille $n \times 1$:

$$L(x) = \sum_{i,j=1}^n L_i x_j e'_i(e_j) = \sum_{i=1}^n L_i x_i = (L_1 \quad \dots \quad L_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1.1 Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

Définition 1.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x_0 \in U$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en x_0 si il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|),$$

quand $\|h\|$ tend vers 0. On note $Df(x_0) = L$ la différentielle de f en x_0 . On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U .

Définition 1.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La dérivée partielle de f en $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ dans la direction $i \in \{1, \dots, n\}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + t, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \right).$$

Autrement dit, c'est la dérivée en $x_i^{(0)}$ de la fonction $x \mapsto f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Le gradient de f en x_0 est le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que la différentielle en un point est la transposée du gradient :

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = (\nabla f(x_0))^t,$$

de sorte que pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i = \langle \nabla f(x_0), h \rangle.$$

Par la suite, nous noterons $dx_i = e'_i$, de sorte que la différentielle de f s'écrira

$$Df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n.$$

1.2 Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

Définition 1.3. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x_0 \in U$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ pour tout $x \in U$ est différentiable en x_0 (resp. sur U) si f_1, \dots, f_m sont différentiables en x_0 (resp. sur U). On note $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ la différentielle de f en x_0 , identifiée à sa matrice jacobienne dans la base canonique :

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

De cette définition découle le fait que tout ce qui a été dit dans la section précédente s'applique coordonnée par coordonnée.

Théorème 1.1 (Règle de la chaîne/composition des différentielles). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables. Soit $x \in U$ tel que $f(x) \in V$. La fonction $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en x et on a¹

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ et $g(y) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$ pour $y \in \mathbb{R}^m$. Autrement dit, le (i, j) -ème coefficient de la matrice jacobienne de $g \circ f$ en x est donné par $\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$.

Théorème 1.2 (Inversion locale/isomorphisme local). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable en x . Si $Df(x)$ est un isomorphisme (i.e. si sa matrice est inversible²), alors il existe un voisinage U_1 de x dans U et un voisinage V_1 de $f(x)$ dans \mathbb{R}^n tel que f soit un C^1 -difféomorphisme entre U_1 et V_1 .

Théorème 1.3 (Fonctions implicites). Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 , et $(x_0, y_0) \in U$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 \in \mathbb{R}^m$) tels que

1. $f(x_0, y_0) = (0, \dots, 0)$,
2. la jacobienne partielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

soit inversible³.

Alors il existe un voisinage V de x_0 dans \mathbb{R}^n , un voisinage Ω de (x_0, y_0) dans U , et une fonction $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$((x, y) \in \Omega \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

Autrement dit,

$$\{(x, y) \in \Omega, f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\},$$

et y est représenté par une fonction implicite de x .

Exemples. Voici des exemples qui permettront par la suite d'étudier les courbes et les surfaces dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

- Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors y s'écrit localement comme fonction de x .
- Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors z s'écrit localement comme fonction de x et y .

1. Ici, par convention, pour éviter les confusions on note x_1, \dots, x_n les coordonnées dans \mathbb{R}^n et y_1, \dots, y_m les coordonnées dans \mathbb{R}^m . les dérivées partielles ont néanmoins le même rôle, et x, y sont des notations muettes!

2. En pratique, on calcule son déterminant et on vérifie qu'il est non nul.

3. En particulier il faut au moins que $m = p$!

— Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ et la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, alors y et z s'écrivent localement comme fonctions de x .

Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites se généralisent à des espaces de Banach quelconques (donc en particulier en dimension infinie). Cependant, dans le cas de la dimension infinie, il faut remplacer la différentielle par ce qu'on appelle une dérivée de Fréchet (et c'est largement hors-programme).

2 Courbes différentiables

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 2.1. Une courbe différentiable paramétrée dans \mathbb{R}^n est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$. On appelle trace de γ son image $\gamma(I)$. Une courbe différentiable est un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, il existe une courbe différentiable paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, un point $t_0 \in I$ et un voisinage U de x tels que

1. $\gamma(t_0) = x$,
2. $\gamma(I) = U \cap \Gamma$.

Dans ce cas, γ est un paramétrage local de Γ au voisinage de x .

De manière générale, on identifiera une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et la courbe différentiable $\Gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ par abus de langage/notation.

Définition 2.2. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable paramétrée, et $t_0 \in I$. Le point $\gamma(t_0)$ est un point régulier si $\gamma'(t_0) \neq (0, \dots, 0)$. La courbe est régulière si tous ses points sont réguliers.

Théorème 2.1 (Équation implicite). *Soit Γ une courbe différentiable, et $x_0 \in \Gamma$. Le point x_0 est régulier si et seulement si il existe un voisinage U de x_0 et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tels que*

1. $\Gamma \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = (0, \dots, 0)\}$,
2. $\text{rang}(DF(x)) = n - 1$ pour tout $x \in U \cap \Gamma$.

Deux courbes $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ ont même trace (ou sont deux paramétrages d'une même courbe différentielle) si et seulement si il existe un difféomorphisme $\theta : I \rightarrow J$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ \theta \downarrow & \nearrow \psi & \\ J & & \end{array}$$

c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \psi \circ \theta(t)$.

2.2 Tangente

Définition 2.3. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une courbe régulière Γ , et $t_0 \in I$. La droite tangente à γ au point $p = \gamma(t_0)$ est la droite paramétrée

$$T_p\Gamma = \{\gamma(t_0) + t\gamma'(t_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

La droite ne dépend pas du paramétrage.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe différentiable dans \mathbb{R}^3 donnée par l'équation implicite $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$, où $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction différentiable définie par $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$, autrement dit

$$\Gamma = F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0).$$

Si $DF(x_0, y_0, z_0)$ est de rang 2, alors la tangente à Γ en $p = (x_0, y_0, z_0)$ est définie par le système d'équations linéaires

$$T_p\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0 \end{array} \right.$$

Autrement dit, $T_p\Gamma$ est l'ensemble des solutions $h = (x, y, z)$ de $DF(p)(h - p) = 0$.

2.3 Longueur d'arc

Définition 2.4. Soit $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. Sa longueur d'arc (ou abscisse curviligne) à partir du point $t_0 \in]a, b[$ est la fonction $s :]t_0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Donc si on note $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, on a

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt.$$

La longueur totale de la courbe est donnée par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Définition 2.5. Une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est paramétrée à la vitesse unitaire (ou paramétrée par la longueur d'arc) si pour tout $t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

- Toute courbe régulière possède un paramétrage à vitesse unitaire.
- Si $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ est paramétrée à vitesse unitaire, on voit que

$$\ell(\gamma) = \int_a^b dt = b - a.$$

2.4 Courbure

Définition 2.6. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe \mathcal{C}^2 paramétrée à vitesse unitaire, et $p = \gamma(t)$ un point de cette courbe.

1. Son vecteur tangent unitaire est le vecteur $T(t) = \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$.
2. Sa courbure en p est le scalaire $k(t) = \|T'(t)\| = \|\gamma''(t)\|$.
3. Son vecteur normal unitaire est le vecteur $N(t) = \frac{1}{k(t)}T'(t)$.

La principale difficulté de l'étude des courbes est qu'elles ne sont pas forcément paramétrées à vitesse unitaire, tandis que la notion de vecteur tangent, vecteur normal ou courbure sont des notions géométriques qui ne devraient pas dépendre du paramétrage.

Définition 2.7. Une courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 est birégulière si pour tout $t \in I$ les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ ne sont pas colinéaires.

Théorème 2.2. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe birégulière et $p = \gamma(t)$ un point de γ .

1. Son vecteur tangent unitaire est

$$T(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t).$$

2. Son vecteur normal unitaire est

$$N(t) = \frac{1}{k(t)} \tilde{T}(t),$$

avec

$$\tilde{T}(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \left\langle \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}, T(t) \right\rangle T(t).$$

Note : le vecteur $\tilde{T}(t)$ n'est pas égal à $T'(t)$ en général, sauf lorsque γ est paramétrée par la longueur d'arc ! On n'obtient donc pas la formule de $N(t)$ en dérivant celle de $T(t)$ puis en la normalisant.

Démonstration. On introduit l'abscisse curviligne

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Alors $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, et s est un difféomorphisme entre I et $J = s(I)$, d'inverse $\theta : J \rightarrow I$. Pour tout $u \in J$ on a $\theta'(u) = \frac{1}{s'(\theta(u))}$, et $\phi = \gamma \circ \theta$ est paramétré à vitesse unitaire :

$$\|\phi'(u)\| = \|(\gamma \circ \theta)'(u)\| = \|\gamma'(\theta(u))\| \|\theta'(u)\| = 1.$$

Les dérivées successives de ϕ sont données, pour $u \in J$:

$$\phi'(u) = (\gamma \circ \theta)'(u) = \gamma'(\theta(u)) \theta'(u),$$

$$\phi''(u) = (\gamma \circ \theta)''(u) = \gamma''(\theta(u)) \theta'(u)^2 + \gamma'(\theta(u)) \theta''(u).$$

On peut donc calculer les vecteurs tangent unitaire, normal unitaire et la courbure à l'aide de γ' , γ'' , et des dérivées de θ . On a

$$1 = \|\phi'(u)\| = \|\gamma'(\theta(u))\|\|\theta'(u)\|,$$

donc $|\theta'(u)| = 1/\|\gamma'(\theta(u))\|$, et on obtient la formule pour $T(t)$. Par ailleurs, on obtient aussi

$$\theta'(u)^2 = \frac{1}{\|\gamma'(\theta(u))\|^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x'_i(\theta(u))^2},$$

en posant $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Si l'on dérive par rapport à u on obtient

$$2\theta'(u)\theta''(u) = -\frac{\sum_{i=1}^n 2x''_i(\theta(u))\theta'(u)x'_i(\theta(u))}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4} = -2\theta'(u)\frac{\langle \gamma'(\theta(u)), \gamma''(\theta(u)) \rangle}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4}.$$

Comme $\theta'(u) \neq 0$ pour tout u , il vient que

$$\theta''(u) = -\frac{\langle \gamma'(\theta(u)), \gamma''(\theta(u)) \rangle}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4}.$$

Si l'on pose $X(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}$, on obtient pour tout u

$$\phi''(u) = X(\theta(u)) - \langle X(\theta(u)), T(\theta(u)) \rangle T(\theta(u)).$$

Donc $\phi''(u)$ est le projeté orthogonal de $X(\theta(u))$ sur le plan orthogonal à $T(\theta(u))$. □

2.5 Courbes dans \mathbb{R}^3

On se place désormais dans \mathbb{R}^3 . Dans ce cadre, la courbure admet une expression bien pratique.

Proposition 2.3. *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière. Sa courbure vérifie*

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (1)$$

Définition 2.8. On appelle repère de Frenet d'une courbe birégulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ en un point $p = \gamma(t)$ la base orthonormée directe $(T(t), N(t), B(t))$, où $T(t)$ (resp. $N(t)$) est le vecteur tangent (resp. normal) unitaire, et $B(t) = T(t) \times N(t)$ est appelé vecteur binormal unitaire.

Théorème 2.4 (Formules de Frenet). *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière. Il existe une fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, appelée torsion, telle que*

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

A Changement de variables dans les intégrales

A.1 Intégrale de Lebesgue

On note $dx = dx_1 \dots dx_n$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

Théorème A.1. Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\int_V g(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx, \quad (2)$$

où $J_\varphi(x) = \det(D\varphi(x))$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

A.2 Intégrale de Riemann

À partir du théorème de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue, on peut retrouver celui de l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R} (dans le cas où la fonction est à la fois intégrable au sens de Riemann et de Lebesgue).

Théorème A.2. Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} , et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors elle est intégrable au sens de Riemann et de Lebesgue, et pour tout difféomorphisme $\varphi :]a, b[\rightarrow]u, v[$ de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \quad (3)$$

Démonstration. Première preuve : intégrale de Lebesgue. On applique le théorème A.1 :

$$\int_u^v f(y)dy = \int_{]u, v[} f(y)dy = \int_{]a, b[} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx.$$

Comme φ est un difféomorphisme entre deux intervalles, c'est en particulier une fonction monotone. On note $\varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$ et $\varphi(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$. On sait que $\varphi(]a, b[) =]u, v[$, donc si φ est croissante, alors $\varphi(a) = u$ et $\varphi(b) = v$, et on a

$$\int_u^v f(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Sinon, φ est décroissante, $\varphi(a) = v$, $\varphi(b) = u$ et on a

$$\int_u^v = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)dy = - \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

de sorte que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Dans les deux cas on a obtenu le résultat.

Deuxième preuve : théorème fondamental de l'analyse. Soit F une primitive de f sur $]u, v[$, qui existe bien car f est continue. Alors F est dérivable sur $]u, v[$ et $F \circ \varphi$ est dérivable sur $]a, b[$, de dérivée

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Il vient que

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

et par le théorème fondamental de l'analyse on a

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□