Contrôle continu n° 2

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

Exercice 1. Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, avec ρ une fonction C^1 sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Autrement dit, le paramétrage cartésien de C est donné par $(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta))$, pour $\theta \in I$.

1. Calculer la longueur de la courbe en fonction de ρ. *(3 points)*
2. Application : montrer que la spirale d'équation polaire $\rho(\theta) = ae^{-b\theta}$ avec $a, b > 0$, définie pour $\theta \in [0, \infty[$, a une longueur finie et calculer celle-ci. *(3 point)*

Solution.

1. On part du paramétrage $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta).$$

On calcule $\gamma'(\theta)$:

$$\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta),$$

et on en déduit

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2.$$

Ainsi, en utilisant la formule de la longueur d'un arc paramétré, si $I = [a, b]$, on a

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_a^b \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta.$$

2. On applique la formule de la question 1 (on peut aussi recalculer directement) :

$$\ell(\gamma|_{[0,T]}) = \int_0^T a\sqrt{b^2+1}e^{-b\theta} d\theta = a\sqrt{b^2+1}\int_0^T e^{-b\theta} d\theta.$$

On calcule l'intégrale, ce qui donne

$$\ell(\gamma|_{[0,T]}) = a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}(e^0 - e^{-bT}) = a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}(1 - e^{-bT}).$$

Pour obtenir la longueur totale, il suffit de prendre la limite de la longueur sur $[0, T]$ quand T tend vers l'infini. D'après la formule précédente, il vient que

$$\ell(\gamma) = \lim_{T\to\infty} \ell(\gamma|_{[0,T]}) = a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}} < \infty.$$

Exercice 2. Soit C la courbe de paramétrage $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), -\sin(t), 2t)$, pour un certain $T > 0$.

1. Calculer le vecteur tangent unitaire $T(t)$ et la courbure $k(t)$ en tout point de la courbe. *(2 points)*
2. Montrer que l'angle entre $T(t)$ et le vecteur $\vec{u} = (0,0,1)$ est constant. On dit que γ est une hélice. *(2 points)*

Solution.

1. On applique les formules du cours :

$$T(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t),\ \ k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

On a en l'occurrence

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), -\cos(t), 2), \quad \|\gamma'(t)\|^2 = 3,$$

de sorte que

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin(t), -\cos(t), 2).$$

D'autre part,

$$\gamma''(t) = (-\cos(t), \sin(t), 0),$$

donc

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = -(2\sin(t), 2\cos(t), 1).$$

Il vient que $\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = \sqrt{5}$, et que $k(t) = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$. En particulier la courbure est constante.

2. On calcule le produit scalaire $\langle T(t), \vec{u}\rangle$ pour $\vec{u} = (0,0,1)$:

$$\langle T(t), \vec{u}\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

donc il ne dépend pas de t. Or, si l'on note $\theta(t)$ l'angle entre $T(t)$ et $\vec{u}$ on a

$$\langle T(t), \vec{u}\rangle = \cos(\theta(t)) = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

ce qui montre que l'angle $\theta(t)$ est constant lorsque t varie.

Exercice 3. Soit C le graphe de la fonction $f : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ sur $]0,1[$.

1. Montrer que $\gamma : (t) = (t, f(t))$ est un paramétrage régulier de C. Peut-on étendre ce paramétrage à $[0,1]$? *(1 point)*
2. On note L la longueur de C.
   (a) Montrer que $L \geq \int_0^1 |f'(t)|dt$. *(1 point)*
   (b) On pose $\delta = \frac{\pi}{6}$. Montrer, pour tout k assez grand et tout $t \in \left[\frac{1}{2k\pi+\delta}, \frac{1}{2k\pi-\delta}\right]$, $|f'(t)| \geq \frac{1}{2t}$. *(2 points)*
   (c) En déduire l'inégalité suivante pour un entier $K \geq 0$ assez grand *(2 points)*

$$L \geq \frac{1}{2}\sum_{k\geq K} \ln\left(\frac{2k\pi+\delta}{2k\pi-\delta}\right).$$

(d) (*Question bonus*) En conclure que $L = +\infty$. On pourra admettre que la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. *(2 points)*

Solution.

1. Le fait que γ soit un paramétrage de C est une conséquence de la définition du graphe d'une fonction. Il s'agit surtout de montrer qu'il est régulier. Cela découle du fait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, et que $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$ pour tout $t \in]0,1[$. En revanche on ne peut pas étendre le paramétrage à $t=0$ car f n'est pas dérivable en 0 (elle reste néanmoins continue).

2. (a) Par définition,

$$L = \int_0^1 \sqrt{t^2 + f'(t)^2} dt,$$

or pour tout $t \in]0,1[$, $t^2 \geq 0$ donc

$$L \geq \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

(b) Calculons $f'(t)$ pour tout $0 < t < 1$:

$$f'(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\cos\left(\frac{1}{t}\right),$$

et lorsque $\frac{1}{2k\pi+\delta} \leq t \leq \frac{1}{2k\pi-\delta}$, on a $2k\pi - \delta \leq \frac{1}{t} \leq 2k\pi + \delta$. Or, pour $k \geq 1$ on a donc $\frac{1}{t} \geq 2\pi - \delta > 1$, donc

$$|f'(t)| = |\sin(1/t) - 1/t\cos(1/t)| \geq 1/t\cos(1/t) - |\sin(1/t)|.$$

Or pour tout $x \in]2k\pi - \delta, 2k\pi + \delta[$, on a $|x\cos x| = x\cos x \geq x\cos(\delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, et $|\sin x| \geq \sin\delta = \frac{1}{2}$, donc

$$|f'(t)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2t} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - t}{2t} \geq \frac{1}{2t},$$

en utilisant le fait que t est très petit pour k assez grand.

(c) Soit K assez grand pour que l'inégalité de la question (b) soit vraie, et pour que $[\frac{1}{2k\pi+\delta}, \frac{1}{2k\pi-\delta}] \subset]0,1[$. On a

$$\int_0^1 |f'(t)| dt \geq \sum_{k\geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi+\delta}}^{\frac{1}{2k\pi-\delta}} |f'(t)| dt \geq \sum_{k\geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi+\delta}}^{\frac{1}{2k\pi-\delta}} \frac{1}{2t} dt,$$

et on peut calculer explicitement le terme de droite :

$$\sum_{k\geq K} \int_{\frac{1}{2k\pi+\delta}}^{\frac{1}{2k\pi-\delta}} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\sum_{k\geq K} [\ln(t)]_{\frac{1}{2k\pi+\delta}}^{\frac{1}{2k\pi-\delta}} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq K} \ln\left(\frac{2k\pi+\delta}{2k\pi-\delta}\right).$$

(d) Il reste à comparer deux séries terme à terme. Pour tout $k \geq K$,

$$\ln\left(\frac{2k\pi+\delta}{2k\pi-\delta}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\delta}{2k\pi-\delta}\right) \sim \frac{2\delta}{2k\pi} = \frac{\delta}{k\pi}.$$

Le terme général de la série qu'on veut calculer est donc équivalent à celui de la série harmonique (à une constante près), qui diverge, donc la série de terme général

$$\ln\left(\frac{2k\pi+\delta}{2k\pi-\delta}\right)$$

diverge, et on en déduit bien que $L=+\infty$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{T}$ la surface décrite par l'équation implicite suivante (il s'agit d'un tore de révolution), pour $0<r<R$:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2.$$

1. Montrer que $\sigma:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ défini par

$$\sigma(\theta,\phi)=((R+r\cos\theta)\cos\phi,(R+r\cos\theta)\sin\phi,r\sin\theta)$$

   est un paramétrage régulier de $\mathbb{T}$. *(2 points)*
2. Donner un paramétrage du plan tangent à $\mathbb{T}$ au point $(r+R,0,0)$. *(2 points)*

Solution.

1. On pose $x(\theta,\phi),y(\theta,\phi),z(\theta,\phi)$ les coordonnées de σ. On vérifie que ces coordonnées satisfont l'équation du tore :

$$x(\theta,\phi)^2+y(\theta,\phi)^2=(R+r\cos\theta)^2,$$

   donc

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x(\theta,\phi)^2+y(\theta,\phi)^2}-R\right)^2+z(\theta,\phi)^2=&(R+r\cos\theta-R)^2+r^2\sin^2\theta\\=&r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\=&r^2,\end{aligned}$$

   donc c'est bien un paramétrage. Montrons qu'il est régulier :

$$D\sigma(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\cos\phi & -(R+r\cos\theta)\sin\phi\\ -r\sin\theta\sin\phi & (R+r\cos\theta)\cos\phi\\ r\cos\theta & 0\end{pmatrix}.$$

   Pour montrer que $D\sigma(\theta,\phi)$ est de rang 2, il suffit de montrer qu'un déterminant 2×2 d'une de ses sous-matrices est non nul, et c'est le cas : les différents déterminants sont

$$\begin{vmatrix}-r\sin\theta\cos\phi & -(R+r\cos\theta)\sin\phi\\ -r\sin\theta\sin\phi & (R+r\cos\theta)\cos\phi\end{vmatrix}=-r(R+r\cos\theta)\sin\theta,$$

   qui s'annule uniquement si $\theta=k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{vmatrix}-r\sin\theta\cos\phi & -(R+r\cos\theta)\sin\phi\\ r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=-r(R+r\cos\theta)\cos\theta\sin\phi,$$

   qui s'annule uniquement si $\theta=\pi/2+k\pi$ ou $\phi=k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$, ou encore

$$\begin{vmatrix}-r\sin\theta\sin\phi & (R+r\cos\theta)\cos\phi\\ r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=-r(R+r\cos\theta)\cos\theta\sin\phi,$$

   qui s'annule uniquement si $\theta=\pi/2+k\pi$ ou $\phi=\pi/2+k\pi$, pour $k\in\mathbb{Z}$. Il vient que pour tout couple (θ,ϕ), au moins un de ces déterminants est non nul.

2. Un paramétrage du plan tangent $T_{(R+r,0,0)}\mathbb{T}$ est donné par

$$\eta : (s,t) \mapsto \sigma(\theta_0, \phi_0) + s\psi_1'(\theta_0) + \psi_2'(\phi_0),$$

où

$$\psi_1 : \theta \mapsto \sigma(\theta, \phi_0), \quad \psi_2 : \phi \mapsto \sigma(\theta_0, \phi).$$

Il s'agit donc d'abord de déterminer (θ_0, ϕ_0) tel que $\sigma(\theta_0, \phi_0) = (r + R, 0, 0)$. Il s'agit clairement de $\theta_0 = 0$ et $\phi_0 = 0$. Ensuite, on peut calculer ψ_1 et ψ_2 :

$$\psi_1(\theta) = (R + r\cos\theta, 0, r\sin\theta), \quad \psi_2(\phi) = ((R+r)\cos\phi, (R+r)\sin\phi, 0).$$

Leurs dérivées respectives sont les suivantes :

$$\psi_1'(\theta) = (-r\sin\theta, 0, r\cos\theta), \quad \psi_2'(\phi) = (-(R+r)\sin\phi, (R+r)\cos\phi, 0).$$

Finalement, on obtient que

$$\eta(s,t) = (R+r)(1,t,s), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$