TD n° 7 – La formule des traces

La formule des traces de Selberg est un résultat fondamental en analyse harmonique, car c'est essentiellement le seul outil existant aujourd'hui pour étudier le spectre du laplacien sur des surfaces hyperboliques compactes.

Exercice 1. *Formule des traces sur le cercle* La *formule sommatoire de Poisson* dit que pour toute fonction test "raisonnable" $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} h(\rho) e^{2\mathrm{i}\pi n \rho} d\rho.$$

C'est par exemple vrai pour $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ avec $|h(\rho)| << (1 + |\rho|)^{-1-\delta}$ pour un certain $\delta > 0$. L'objectif de cet exercice est de voir cette formule comme un exemple élémentaire de formule des traces.

1. Soit $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(\rho) < 0$. Montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\rho^2 - m^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi \mathrm{i} |n| \rho'}}{\rho^2 - {\rho'}^2} d\rho'.$$

En déduire que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\rho^2 - m^2} = \frac{\mathrm{i}\pi}{\rho} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi \mathrm{i} n \rho},$$

puis que

$$\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{\rho - m} + \frac{1}{\rho + m} \right] = \pi \cot(\pi \rho).$$

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique pour $|\mathrm{Im}(\rho)| \leq \sigma$ pour un certain $\sigma > 0$, et telle que $|h(\rho)| << (1 + |\mathrm{Re}(\rho)|)^{-1-\delta}$ pour un certain $\delta > 0$, uniformément en ρ dans la bande $\mathrm{Im}(\rho) \leq \sigma$. Montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C h(\rho) \cot(\pi \rho) d\rho,$$

où C est le chemin d'intégration indiqué sur la figure 1.

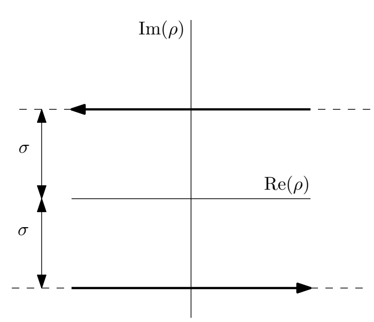

FIGURE 1 – Contour d'intégration.

Exercice 2. *Formule des pré-traces* Soit $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte. Soit h la transformée de Selberg d'un noyau radial k (cf. TD 6) [1]. Soit $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de fonctions propres de Δ sur $L^2(S)$. On note $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ les valeurs propres de Δ, et pour tout j on pose

$$\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2,$$

où $r_j \in \mathbb{C}$ vérifie $|\mathrm{Im}(r_j)| \leq \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'on a l'égalité suivante dans L^2 :

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(r_j)\phi_j(z)\phi_j(w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma w).$$

   On admettra que l'égalité est également valable en convergence est également absolue et uniforme.

2. Montrer que pour tout z,

$$k(z,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\tanh(\pi r) r dr.$$

3. En déduire la *formule des pré-traces* :

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(r_j)|\phi_j(z)|^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\tanh(\pi\rho)d\rho + \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\{1\}} k(z,\gamma z).$$

Exercice 3. *Formule des traces* On se place dans les hypothèses de l'exercice précédent.

1. Montrer que si D est un domaine fondamental de S,

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(r_j) = \frac{\mathrm{Aire}(M)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\tanh(\pi\rho)d\rho + \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\{1\}}\int_D k(z,\gamma z)d\mu(z).$$

2. Soit $\gamma\in\Gamma$, on note Γ_γ le centralisateur de γ :

$$\Gamma_\gamma = \{\gamma'\in\Gamma : \gamma\gamma' = \gamma'\gamma\}.$$

   On pose $D_\gamma = \bigcup_{\gamma_1\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}\gamma_1 D$. Montrer que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\{1\}}\int_D k(z,\gamma z)d\mu(z) = \sum_{\gamma\neq 1}\int_{D_\gamma} k(z,\gamma z)d\mu(z).$$

3. En déduire que

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(r_j) = \frac{\mathrm{Aire}(M)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\tanh(\pi\rho)\rho d\rho + \sum_{\gamma\in\mathcal{G}(M)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell g(n\ell)}{2\sinh(n\ell/2)},$$

   où $\mathcal{G}(M)$ est l'ensemble des géodésiques périodiques de M et g est la transformée de Fourier de h. On admettra que pour tout γ, il existe un unique élément primitif δ tel que

$$\Gamma_\gamma = \{\delta^n, n\in\mathbb{Z}\}.$$

4. En déduire la *formule des traces* de Selberg :

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(r_j) = \frac{\mathrm{Aire}(M)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\tanh(\pi\rho)\rho d\rho + \sum_{\gamma\in\mathcal{G}(M)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma g(n\ell_\gamma)}{2\sinh(n\ell_\gamma/2)}.$$

---

1. On peut en particulier montrer que c'est le cas pour toute fonction h analytique paire telle que $|\mathrm{Im}(h)| \leq \sigma$ pour un certain $\sigma > \frac{1}{2}$, et qui vérifie $|h(\rho)| \leq C(1+|\mathrm{Re}(\rho)|)^{-N}$ pour tout $N > 1$ uniformément dans la bande $|\mathrm{Im}(\rho)| \leq \sigma$, pour $\delta > 0$ fixé.