

Contrôle continu n° 2

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

Exercice 1. Soit C une courbe dans \mathbb{R}^2 définie par une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, avec ρ une fonction C^1 sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Autrement dit, le paramétrage cartésien de C est donné par $(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta))$, pour $\theta \in I$.

1. Calculer la longueur de la courbe en fonction de ρ . (*3 points*)
2. Application : montrer que la spirale d'équation polaire $\rho(\theta) = ae^{-b\theta}$ avec $a, b > 0$, définie pour $\theta \in [0, \infty[$, a une longueur finie et calculer celle-ci. (*3 point*)

Exercice 2. Soit C la courbe de paramétrage $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), -\sin(t), 2t)$, pour un certain $T > 0$.

1. Calculer le vecteur tangent unitaire $T(t)$ et la courbure $k(t)$ en tout point de la courbe. (*2 points*)
2. Montrer que l'angle entre $T(t)$ et le vecteur $\vec{u} = (0, 0, 1)$ est constant. On dit que γ est une hélice. (*2 points*)

Exercice 3. Soit C le graphe de la fonction $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1[$ (on l'appelle la *courbe sinus du topologue*).

1. Montrer que $\gamma : (t) = (t, f(t))$ est un paramétrage régulier de C . Peut-on étendre ce paramétrage à $[0, 1]$? (*1 point*)
2. On note L la longueur de C .
 - (a) Montrer que $L \geq \int_0^1 |f'(t)| dt$. (*1 point*)
 - (b) On pose $\delta = \frac{\pi}{6}$. Montrer, pour tout k assez grand et tout $t \in [\frac{1}{2k\pi+\delta}, \frac{1}{2k\pi-\delta}]$, $|f'(t)| \geq \frac{1}{2t}$. (*2 points*)
 - (c) En déduire l'inégalité suivante pour un entier $K \geq 0$ assez grand (*2 points*)

$$L \geq \frac{1}{2} \sum_{k \geq K} \ln \left(\frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta} \right).$$

- (d) (*Question bonus*) En conclure que $L = +\infty$. On pourra admettre que la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. (*2 points*)

Exercice 4. Soit \mathbb{T} la surface décrite par l'équation implicite suivante (il s'agit d'un tore de révolution), pour $0 < r < R$:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2.$$

1. Montrer que $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\sigma(\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

est un paramétrage régulier de \mathbb{T} . (*2 points*)

2. Donner un paramétrage du plan tangent à \mathbb{T} au point $(r + R, 0, 0)$. (*2 points*)