Université de Strasbourg
U.F.R. de Mathématique et d'Informatique
Licence L3 2025/26 , Bases de la géométrie differentielle S5

Décembre 2025
Carlo GASBARRI

Troisieme Contrôle
Section mathématiques fondamentales

Durée de l'épreuve : 2h.

L'usage de calculatrices et de documents n'est pas autorisé.
Résoudre les exercices suivants et justifier les réponses.

Exercice 1. Montrer que, si (a, b) est un couple de réels suffisamment proche de $(1, -1)$, le système d'équations suivant admet une solution :

$$\begin{cases} x\,e^y + y = a \\ x\,e^y - y = b. \end{cases}$$

Exercice 2. Montrer que l'équation

$$e^{x+yz} + (x+z)\,y^2 + y = 2$$

détermine y comme une fonction de x et z au voisinage de $x = z = 0$, et calculer le gradient de cette fonction en $(0, 0)$.

Exercice 3. On considère la surface S d'équation $F(x, y, z) = 0$ pour $F(x, y, z) = x^2 + ye^z$.

a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla F(x, y, z)$ est orthogonal au plan tangent à S en (x, y, z).

b) Trouver l'ensemble des points (x, y, z) de S pour lesquels le plan tangent est orthogonal au vecteur $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On considère deux surfaces S et T de $\mathbb{R}^3$: S est la surface d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$, et T est la surface paramétrée par :

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u^2 - v^2,\ 2uv,\ u + v). \end{aligned}$$

a) Déterminer un vecteur normal à S en un point $p \in S$.

b) Déterminer les points réguliers du paramétrage σ, et un vecteur normal $N_T(u, v)$ en tout point régulier $q = \sigma(u, v)$.

c) Déterminer l'ensemble des couples $(p, q) \in S \times T$ tels que les plans tangents en p et en q soient parallèles.

Exercice 5. Calculer l'aire de la portion du plan P d'équation $2x + y + z = 3$ qui se trouve dans le premier octant, c'est-à-dire dans l'espace $(\mathbb{R}_+)^3$ des points dont les trois coordonnées sont positives ou nulles.

Exercice 6. Considérons la couronne :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\},$$

et la 1-forme $\omega \in \Omega^1(U)$ suivante :

$$\omega = \frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{x^2 + y^2}.$$

a) Vérifier que ω est *fermée*.

b) Montrer que ω n'est *pas exacte* sur U. Indication : raisonner par l'absurde et intégrer ω le long d'un cercle contenu dans U.

Exercice 7. Considérons le domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dont la frontière est la réunions des deux courbes C_1 et C_2 définie par :

$$C_1 = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2 - x^3\}, \qquad C_2 = [0, 1] \times \{0\}.$$

a) Rappeler la formule de Green. Comment peut-on appliquer cette formule pour exprimer l'aire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ quelconque comme une intégrale curviligne le long du bord $\partial\Omega$?

b) Donner un paramétrage pour chacune des courbes C_1 et C_2.

c) Calculer l'aire de D.