# Bases de la géométrie différentielle : synthèse de cours

Thibaut Lemoine

9 décembre 2025

**Résumé**

Ces notes sont un bref aperçu des notions abordées en cours et en TD, essentiellement sans preuves (sauf pour quelques résultats), agrémentées de quelques remarques personnelles qui me semblent utiles.

## 1 Rappels de calcul différentiel

Notations :

— On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ et ainsi de suite, de sorte que tout élément de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n = (x_1, \ldots, x_n)$.

— On note $(e'_1, \ldots, e'_n)$ la base duale de $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Toute forme linéaire $L \in (\mathbb{R}^n)^*$ s'écrit donc $L = L_1 e'_1 + \ldots + L_n e'_n$.

On notera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

et les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & \ldots & L_n \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs lignes et colonnes sont des cas particuliers de matrices, et le fait d'appliquer une forme linéaire à un vecteur revient à multiplier une matrice de taille $1 \times n$ et une matrice de taille $n \times 1$ :

$$L(x) = \sum_{i,j=1}^{n} L_i x_j e'_i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} L_i x_i = \begin{pmatrix} L_1 & \ldots & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 1.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

**Définition 1.1.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x_0 \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0$ si il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|),$$

quand $\|h\|$ tend vers 0. On note $Df(x_0) = L$ la différentielle de $f$ en $x_0$. On dit que $f$ est différentiable sur $U$ si elle est différentiable en tout point de $U$.

**Définition 1.2.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. La dérivée partielle de $f$ en $x_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ dans la direction $i \in \{1, \ldots, n\}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left( f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)} + t, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \right).$$

Autrement dit, c'est la dérivée en $x_i^{(0)}$ de la fonction $x \mapsto f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Le gradient de $f$ en $x_0$ est le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que la différentielle en un point est la transposée du gradient :

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = (\nabla f(x_0))^t,$$

de sorte que pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i = \langle \nabla f(x_0), h \rangle.$$

Par la suite, nous noterons $\mathrm{d}x_i = e_i'$, de sorte que la différentielle de $f$ s'écrira

$$Df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\mathrm{d}x_n.$$

## 1.2 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

**Définition 1.3.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x_0 \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$ définie par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ pour tout $x \in U$ est différentiable en $x_0$ (resp. sur $U$) si $f_1, \ldots, f_m$ sont différentiables en $x_0$ (resp. sur $U$). On note $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ la différentielle de $f$ en $x_0$, identifiée à sa matrice jacobienne dans la base canonique :

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

De cette définition découle le fait que tout ce qui a été dit dans la section précédente s'applique coordonnée par coordonnée.

**Théorème 1.1** (Règle de la chaîne/composition des différentielles)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts, $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $f : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables. Soit $x \in U$ tel que $f(x) \in V$. La fonction $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x$ et on a*[1]

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x), \end{pmatrix}$$

*en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ et $g(y) = g_1(y), \dots, g_p(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^m$. Autrement dit, le $(i, j)$-ème coefficient de la matrice jacobienne de $g \circ f$ en $x$ est donné par $\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$.*

**Théorème 1.2** (Inversion locale/isomorphisme local)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable en $U$. Si $Df(a)$ est un isomorphisme (i.e. si sa matrice est inversible*[2]*), alors il existe un voisinage $U_1$ de $x$ dans $U$ et un voisinage $V_1$ de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre $U_1$ et $V_1$.*

**Théorème 1.3** (Fonctions implicites)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $(x_0, y_0) \in U$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 \in \mathbb{R}^m$) tels que*

1. *$f(x_0, y_0) = (0, \dots, 0)$,*
2. *la jacobienne partielle*
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$
*soit inversible*[3].

*Alors il existe un voisinage $V$ de $x_0$ ans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $\Omega$ de $(x_0, y_0)$ dans $U$, et une fonction $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,*

$$((x, y) \in \Omega \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

*Autrement dit,*
$$\{(x, y) \in \Omega, f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\},$$
*et $y$ est représenté par une fonction implicite de $x$.*

**Exemples.** Voici des exemples qui permettront par la suite d'étudier les courbes et les surfaces dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

— Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors $y$ s'écrit localement comme fonction de $x$.

— Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors $z$ s'écrit localement comme fonction de $x$ et $y$.

1. Ici, par convention, pour éviter les confusions on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $y_1, \dots, y_m$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^m$. les dérivées partielles ont néanmoins le même rôle, et $x, y$ sont des notations muettes !
2. En pratique, on calcule son déterminant et on vérifie qu'il est non nul.
3. En particulier il faut au moins que $m = p$ !

— Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vérifie $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ et la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, alors $y$ et $z$ sécrivent localement comme fonctions de $x$.

Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites se généralisent à des espaces de Banach quelconques (donc en particulier en dimension infinie). Cependant, dans le cas de la dimension infinie, il faut remplacer la différentielle par ce qu'on appelle une dérivée de Fréchet (et c'est largement hors-programme).

# 2 Courbes différentiables

## 2.1 Définitions et caractérisations

**Définition 2.1.** Une courbe différentiable paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ différentiable sur un intervalle ouvert $I = ]a, b[$. On appelle trace de $\gamma$ son image $\gamma(I)$. Une courbe différentiable est un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, il existe une courbe différentiable paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, un point $t_0 \in I$ et un voisinage $U$ de $x$ tels que

1. $\gamma(t_0) = x$,
2. $\gamma(I) = U \cap \Gamma$.

Dans ce cas, $\gamma$ est un paramétrage local de $\Gamma$ au voisinage de $x$.

De manière générale, on identifiera une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ et la courbe différentiable $\Gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ par abus de langage/notation.

**Définition 2.2.** Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable paramétrée, et $t_0 \in I$. Le point $\gamma(t_0)$ est un point régulier si $\gamma'(t_0) \neq (0, \ldots, 0)$. La courbe est régulière si tous ses points sont réguliers.

**Théorème 2.1** (Équation implicite). *Soit $\Gamma$ une courbe différentiable, et $x_0 \in \Gamma$. Le point $x_0$ est régulier si et seulement si il existe un voisinage $U$ de $x_0$ et $F : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ tels que*

1. $\Gamma \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = (0, \ldots, 0)\}$,
2. $\mathrm{rang}(DF(x)) = n - 1$ *pour tout* $x \in U \cap \Gamma$.

Deux courbes $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ ont même trace (ou sont deux paramétrages d'une même courbe différentielle) si et seulement si il existe un difféomorphisme $\theta : I \to J$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathbb{R}^n \\ J \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \psi \circ \theta(t)$.

## 2.2 Tangente

**Définition 2.3.** Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une courbe régulière $\Gamma$, et $t_0 \in I$. La droite tangente à $\gamma$ au point $p = \gamma(t_0)$ est la droite paramétrée

$$T_p\Gamma = \{\gamma(t_0) + t\gamma'(t_0),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

La droite ne dépend pas du paramétrage.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe différentiable dans $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation implicite $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$, où $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction différentiable définie par $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$, autrement dit

$$\Gamma = F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0).$$

Si $DF(x_0, y_0, z_0)$ est de rang 2, alors la tangente Ã  $\Gamma$ en $p = (x_0, y_0, z_0)$ est définie par le système d'équations linéaires

$$T_p\Gamma = \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, $T_p\Gamma$ est l'ensemble des solutions $h = (x, y, z)$ de $DF(p)(h - p) = 0$.

## 2.3 Longueur d'arc

**Définition 2.4.** Soit $\gamma : ]a, b[ \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. Sa longueur d'arc (ou abscisse curviligne) à partir du point $t_0 \in ]a, b[$ est la fonction $s : ]t_0, b[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du.$$

Donc si on note $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, on a

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x_1'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2} dt.$$

La longueur totale de la courbe est donnée par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Définition 2.5.** Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est paramétrée à la vitesse unitaire (ou paramétrée par la longueur d'arc) si pour tout $t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

— Toute courbe régulière possède un paramétrage à vitesse unitaire.

— Si $\gamma : ]a, b[ \to \mathbb{R}^n$ est paramétrée à vitesse unitaire, on voit que

$$\ell(\gamma) = \int_a^b dt = b - a.$$

### 2.4 Courbure

**Définition 2.6.** Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée à vitesse unitaire, et $p = \gamma(t)$ un point de cette courbe.

1. Son vecteur tangent unitaire est le vecteur $T(t) = \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$.
2. Sa courbure en $p$ est le scalaire $k(t) = \|T'(t)\| = \|\gamma''(t)\|$.
3. Son vecteur normal unitaire est le vecteur $N(t) = \frac{1}{k(t)}T'(t)$.

La principale difficulté de l'étude des courbes est qu'elles ne sont pas forcément paramétrées à vitesse unitaire, tandis que la notion de vecteur tangent, vecteur normal ou courbure sont des notions géométriques qui ne devraient pas dépendre du paramétrage.

**Définition 2.7.** Une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ est birégulière si pour tout $t \in I$ les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ ne sont pas colinéaires.

**Théorème 2.2.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe birégulière et $p = \gamma(t)$ un point de $\gamma$.*

1. *Son vecteur tangent unitaire est*
$$T(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t).$$
2. *Son vecteur normal unitaire est*
$$N(t) = \frac{1}{k(t)}\tilde{T}(t),$$
*avec*
$$\tilde{T}(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \left\langle \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}, T(t) \right\rangle T(t).$$

Note : le vecteur $\tilde{T}(t)$ n'est pas égal à $T'(t)$ en général, sauf lorsque $\gamma$ est paramétrée par la longueur d'arc ! On n'obtient donc pas la formule de $N(t)$ en dérivant celle de $T(t)$ puis en la normalisant.

*Démonstration.* On introduit l'abscisse curviligne
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du.$$

Alors $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, et $s$ est un difféomorphisme entre $I$ et $J = s(I)$, d'inverse $\theta : J \to I$. Pour tout $u \in J$ on a $\theta'(u) = \frac{1}{s'(\theta(u))}$, et $\phi = \gamma \circ \theta$ est paramétré à vitesse unitaire :
$$\|\phi'(u)\| = \|(\gamma \circ \theta)'(u)\| = \|\gamma'(\theta(u))\|/\|\gamma'(\theta(u))\| = 1.$$

Les dérivées successives de $\phi$ sont données, pour $u \in J$ :
$$\phi'(u) = (\gamma \circ \theta)'(u) = \gamma'(\theta(u))\theta'(u),$$
$$\phi''(u) = (\gamma \circ \theta)''(u) = \gamma''(\theta(u))\theta'(u)^2 + \gamma'(u)\theta''(u).$$

On peut donc calculer les vecteurs tangent unitaire, normal unitaire et la courbures à l'aide de $\gamma'$, $\gamma''$, et des dérivées de $\theta$. On a

$$1 = \|\phi'(u)\| = \|\gamma'(\theta(u))\||\theta'(u)|,$$

donc $|\theta'(u)| = 1/\|\gamma'(\theta(u))\|$, et on obtient la formule pour $T(t)$. Par ailleurs, on obtient aussi

$$\theta'(u)^2 = \frac{1}{\|\gamma'(\theta(u))\|^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i'(\theta(u))^2},$$

en posant $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Si l'on dérive par rapport à $u$ on obtient

$$2\theta'(u)\theta''(u) = -\frac{\sum_{i=1}^n 2x_i''(\theta(u))\theta'(u)x_i'(\theta(u))}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4} = -2\theta'(u)\frac{\langle\gamma'(\theta(u)), \gamma''(\theta(u))\rangle}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4}.$$

Comme $\theta'(u) \neq 0$ pour tout $u$, il vient que

$$\theta''(u) = -\frac{\langle\gamma'(\theta(u)), \gamma''(\theta(u))\rangle}{\|\gamma'(\theta(u))\|^4}.$$

Si l'on pose $X(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}$, on obtient pour tout $u$

$$\phi''(u) = X(\theta(u)) - \langle X(\theta(u)), T(\theta(u))\rangle T(\theta(u)).$$

Donc $\phi''(u)$ est le projeté orthogonal de $X(\theta(u))$ sur le plan orthogonal à $T(\theta(u))$. $\square$

### 2.5 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

Une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est appelée une *courbe plane.*

**Théorème 2.3** (Formules de Frenet)**.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière paramétrée à vitesse unitaire. On a*

$$T'(t) = k(t)N(t) \tag{1}$$
$$N'(t) = -k(t)T(t) \tag{2}$$

**Théorème 2.4** (Reconstruction d'une courbe)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant $0$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $p \in \mathbb{R}^2$ un point du plan et $T \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire du plan. Alors il existe une unique courbe paramétrée à vitesse unitaire $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ telle que*

1. *$\gamma(0) = p$,*
2. *$\gamma'(0) = T$,*
3. *$k(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$.*

## 2.6 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Une courbe dans $\mathbb{R}^3$ est appelée une *courbe gauche.*

**Proposition 2.5.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe gauche birégulière. Sa courbure vérifie*

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \tag{3}$$

**Définition 2.8.** On appelle repère de Frenet d'une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ en un point $p = \gamma(t)$ la base orthonormée directe $(T(t), N(t), B(t))$, où $T(t)$ (resp. $N(t)$) est le vecteur tangent (resp. normal) unitaire, et $B(t) = T(t) \times N(t)$ est appelé vecteur binormal unitaire.

**Théorème 2.6** (Formules de Frenet)**.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée à vitesse unitaire. Il existe une fonction $\tau : I \to \mathbb{R}$, appelée torsion, telle que*

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2.7** (Reconstruction d'une courbe)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant $0$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $p \in \mathbb{R}^3$ un point du plan, et $(T_0, N_0, B_0)$ un repère orthonormé direct. Alors il existe une unique courbe paramétrée à vitesse unitaire $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ telle que*

1. *$\gamma(0) = p$,*
2. *Le repère de Frenet $(T(t), N(t), B(t))$ vérifie $T(0) = T_0$, $N(0) = N_0$, $B(0) = B_0$,*
3. *$k(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$,*
4. *$\tau(t) = g(t)$ pour tout $t \in I$.*

# 3 Surfaces

## 3.1 Définitions et caractérisations

**Définition 3.1.** Une surface différentiable de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \Sigma$, il existe une fonction $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, un point $(s_0, t_0) \in U$ et un voisinage $V$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que

1. $\sigma(s_0, t_0) = x$,
2. $\sigma(U) = V \cap \Sigma$.

On dit que $\sigma$ est un paramétrage local de $\Sigma$ au voisinage de $x$.

**Définition 3.2.** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une surface différentiable, $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage de $\Sigma$ et $(s_0, t_0) \in U$. Le point $x = \sigma(s_0, t_0)$ est un point régulier de $\Sigma$ si $D\sigma(s_0, t_0)$ est de rang 2 (c'est-à-dire de rang maximal !). La surface est régulière si tous ses points sont réguliers.

**Théorème 3.1** (Équation implicite)**.** *Soit $\Sigma$ une surface différentiable, et $x_0 \in \Sigma$. Le point $x_0$ est régulier si et seulement si il existe un voisinage $U$ de $x_0$ et $F : U \to \mathbb{R}^{n-2}$ tels que*

*1.* $\Sigma \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = (0, \dots, 0)\}$,

*2.* $\mathrm{rang}(DF(x)) = n - 2$ *pour tout* $x \in U \cap \Sigma$.

**Remarque.** On pourra noter l'analogie avec les courbes. En fait les courbes et les surfaces dans $\mathbb{R}^n$ sont des cas particuliers de sous-variétés, respectivement de dimensions 1 et 2, et la définition par paramétrage et par équation implicite s'étend aux sous-variétés de dimension supérieure.

### 3.2 Courbes tracées dans une surface

Soit $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, et $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe paramétrée contenue dans le domaine $U$. L'application $\sigma \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ est une courbe tracée dans la surface. En particulier, l'étude de la courbe (vecteur tangent, normal, courbure) peut directement se faire dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de $\sigma \circ \gamma$.

### 3.3 Plan tangent

**Définition 3.3.** Soit $\Sigma$ une surface de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage de $\Sigma$. Le plan tangent à $\Sigma$ en un point régulier $p = \sigma(s_0, t_0)$ est le plan $T_p\Sigma$ qui vérifie :

1. $p \in T_p\Sigma$,
2. Pour toute courbe $\Gamma$ contenue dans $\Sigma$ telle que $p$ est un point régulier de $\Gamma$, le vecteur $T_p\Gamma$ appartient au plan $T_p\Sigma$.

**Proposition 3.2.** *Soit $\Sigma$ une surface de $\mathbb{R}^n$ et $\Sigma : U \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage de $\Sigma$. Si $p = \sigma(s_0, t_0)$ est un point régulier de $\Sigma$, alors un paramétrage de $T_p\Sigma$ est donné par*

$$T_p\Sigma = \{\sigma(s_0, t_0) + s\psi_1'(s_0) + t\psi_2'(t_0),\ \ s, t \in \mathbb{R}\},$$

*en notant $\psi_1 : s \mapsto \sigma(s, t_0)$ et $\psi_2 : t \mapsto \sigma(s_0, t)$ des fonctions définies respectivement au voisinage de $s_0$ et de $t_0$.*

Pour être plus précis dans les notations, si l'on prend par exemple une surface dans $\mathbb{R}^3$ de paramétrage $\sigma : (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, z))$, alors on a

$$\psi_1'(s_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0)\right),$$

$$\psi_2'(t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0)\right).$$

On a également une formule lorsque la surface est donnée par une fonction implicite : soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface différentiable dans $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation implicite $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$, où $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ est de rang 2, alors le plan tangent à $\Sigma$ en $p = (x_0, y_0, z_0)$ est défini par l'équation linéaire

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0.$$

Autrement dit, $T_p\Sigma$ est l'ensemble des solutions $h = (x, y, z)$ de $DF(p)(h-p) = 0$, ou encore, si on note $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, l'équation du plan tangent se réécrit

$$\langle \nabla F(p), \vec{v} \rangle = 0.$$

**Définition 3.4.** Soit $\Sigma$ une surface de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_1, \Gamma_2$ deux courbes dans $\Sigma$, et $p \in \mathbb{R}^n$ un point d'intersection entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. L'angle entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ en $p$ est défini par l'angle entre $T_p\Gamma_1$ et $T_p\Gamma_2$ dans $T_p\Sigma$.

### 3.4 Formes fondamentales

**Définition 3.5.** Soit $\Sigma$ une surface différentiable, $p$ un point de $\Sigma$. La première forme fondamentale de $\Sigma$ au point $p$ est la forme quadratique $I_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ définie par

$$I_p(X) = \langle X, X \rangle, \quad \forall X \in T_p\Sigma.$$

Si $\Sigma$ est une surface paramétrée par $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$, on sait que $T_p\Sigma$ est notamment engendré par les vecteurs non colinéaires $\sigma_1(u_0, v_0)$ et $\sigma_2(u_0, v_0)$, en notant $p = \sigma(u_0, v_0)$ et

$$\sigma_1(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \quad \sigma_2(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v).$$

La forme fondamentale $I_p$ est donc caractérisée par ses valeurs en $\sigma_1 = \sigma_1(u_0, v_0)$ et $\sigma_2 = \sigma_2(u_0, v_0)$ : si $X = \lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2$, alors

$$I_p(X) = I_p(\lambda, \mu) := \lambda^2 E + 2\lambda\mu F + \mu^2 G,$$

où $E = \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle$, $F = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ et $G = \langle \sigma_2, \sigma_2 \rangle$.

La première forme fondamentale permet d'étudier plusieurs quantités importantes :

— Si $\Gamma$ est une courbe dans $\Sigma$ paramétrée par $\sigma \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, le vecteur tangent à $\Gamma$ en $p = \sigma \circ \gamma(t_0)$ est

$$(\sigma \circ \gamma)'(t_0) = I_p(\gamma'(t_0)).$$

En particulier, la longueur de la courbe $\Gamma$ est donnée par

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{I_p(\gamma'(t))} dt.$$

— Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée par $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. L'aire de la surface est donnée par

$$A(\Sigma) = \int_U \|\sigma_1(u, v) \times \sigma_2(u, v)\| dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

— Si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont deux courbes tracées dans $\Sigma$ et dont les vecteurs tangents sont respectivement $\lambda_1\sigma_1 + \mu_1\sigma_2$ et $\lambda_2\sigma_1 + \mu_2\sigma_2$, alors l'angle $\theta$ entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ est donné par

$$\cos\theta = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{I_p(\lambda_1, \mu_1) I_p(\lambda_2, \mu_2)}}$$

# 4 Formes différentielles

**Définition 4.1.** Une forme différentielle de degré $k \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une fonction lisse $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. On note $\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ l'espace vectoriel des $k$-formes différentielles et $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré quelconque.

Toute forme différentielle s'écrit à l'aide de la base $\{e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_k}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_i)$ est la base duale de $(\mathbb{R}^n)^*$. On notera, pour des raisons qui deviendront évidentes a posteriori, $\mathrm{d}x_i = e'_i$. Autrement dit, toute forme différentielle $\omega$ de degré $k$ sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

avec $(f_{i_1,\ldots,i_k})$ une famille de fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par convention, les formes différentielles de degré 0 sont les fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$.

**Exemples.**

1. Pour $k = 0$, par convention $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$ donc les 0-formes sont simplement les fonctions lisses $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. Pour $k = 1$, les 1-formes sont de la forme
$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \mathrm{d}x_i.$$
3. Pour $k = 2$, les 2-formes sont de la forme
$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

## 4.1 1-Formes différentielles

Toute forme différentielle de degré 1, ou 1-forme différentielle, s'écrit sous la forme

$$\omega(x) = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n(x)\mathrm{d}x_n.$$

Comme $\mathrm{d}x_i$ est une forme linéaire pour tout $i$, on peut l'apparier avec un vecteur $h = h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$ pour obtenir un nombre réel :

$$\omega(x)(h) = \sum_{i,j} f_i(x) h_j \mathrm{d}x_i(e_j) = \sum_{i=1}^n f_i(x) h_i = \langle f(x), h \rangle,$$

en notant $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Un cas particulier important de 1-forme différentielle est la différentielle d'une fonction : si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\mathrm{d}x_n.$$

En utilisant le fait que $\mathrm{d}x_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j$, on retrouve le fait que

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle \nabla f(x), h \rangle, \quad \forall h = h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n.$$

### 4.2 Dérivée extérieure

L'ensemble $\Lambda^\bullet\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k\mathbb{R}^n$ des formes différentielles de degré quelconque est muni d'un opérateur $\mathrm{d} : \Lambda^k\mathbb{R}^n \to \Lambda^{k+1}\mathbb{R}^n$, appelé dérivée extérieure, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathrm{d}f = Df, \quad \forall f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n)^*, \quad \text{(différentielle)}$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta, \quad \forall \alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*,\ \forall \beta \in \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n)^*, \quad \text{(règle de Leibniz)}$$

$$(\mathrm{d} \circ \mathrm{d})\omega = 0, \quad \forall \omega \in \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n)^*. \quad \text{(homologie)}$$

**Définition 4.2.** Une $k$-forme différentielle $\omega$ est fermée si $\mathrm{d}\omega = 0$, et elle est exacte si il existe une $(k-1)$-forme $\alpha$ telle que $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

Il est clair que toute forme exacte est fermée, puisque si $\omega = \mathrm{d}\alpha$, alors $d\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$ par propriété de la dérivée extérieure. La réciproque n'est pas vraie en général mais on a le résultat partiel suivant dans $\mathbb{R}^n$.

**Théorème 4.1** (Lemme de Poincaré). *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert simplement connexe, alors toute forme différentielle sur $U$ est exacte si et seulement si elle est fermée.*

### 4.3 Tiré-en-arrière

Si $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, avec $1 \leq k \leq n$, on peut "tirer en arrière" une $\ell$-forme sur $\mathbb{R}^n$ en une $\ell$-forme sur $U$ comme suit :

— Si $\omega = g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une 0-forme, on définit $f^*\omega = f^*g \in \mathscr{C}^\infty(U)$ en posant

$$f^*g(x) = g \circ f(x), \quad \forall x \in U.$$

— Si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, alors $f^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega).$$

— Si $\alpha \in \Omega^{k_1}(\mathbb{R}^n), \beta \in \Omega^{k_2}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

### 4.4 Intégration de formes différentielles

L'intégration de forme différentielles de degré $k$ se fait toujours sur des domaines de dimension $k$. On définit d'abord l'intégration de $k$-formes différentielles dans $\mathbb{R}^k$ à l'aide de l'intégrale de Lebesgue, puis on peut s'en servir pour l'intégration de formes différentielles de degré quelconque sur des sous-variétés (par exemple des 1-formes le long de courbes ou des 2-formes le long de surfaces).

**Définition 4.3.** Soit $\omega : t \mapsto f(t)\mathrm{d}t$ une 1-forme différentielle sur $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Son intégrale sur $[t_0, t_1]$ est définie par

$$\int_{[t_0,t_1]} \omega(t) = \int_{[t_0,t_1]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt,$$

où la dernière intégrale est au sens de Lebesgue. Plus généralement, si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$ est une $k$-forme sur $\mathbb{R}^k$ de la forme

$$\omega(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_k,$$

son intégrale sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^k$ est définie par

$$\int_D \omega = \int_D f(x_1, \dots, x_k)\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_D f(x_1, \dots, x_k)dx_1 \dots dx_k,$$

où la dernière intégrale est au sens de Lebesgue.

Voici comment cela s'étend en pratique :

— Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe différentiable paramétrée par $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ et $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ est une 1-forme de la forme $\omega(x,y) = f_1(x,y)\mathrm{d}x + f_2(x,y)\mathrm{d}y$, l'intégrale de $\omega$ le long de $\Gamma$ est définie par

$$\int_\Gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega = \int_I (f_1(\gamma(t))x'(t) + f_2(\gamma(t))y'(t))dt.$$

— Plus généralement, si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe différentiable paramétrée par $\gamma : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et $\omega = f_1(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n$ est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$, on peut alors définir l'intégrale de $\omega$ le long de $\Gamma$ par

$$\int_\Gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega = \int_I \left(f_1(\gamma(t))x_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))x_n'(t)\right) dt.$$

— Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface différentiable paramétrée par $\sigma : U \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ et $\omega$ est une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + f_2(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,$$

on peut définir l'intégrale de $\omega$ le long de $\Sigma$ par

$$\int_\Sigma \omega = \int_U \sigma^*\omega = \int_U \left( f_1 \circ \sigma(t)\frac{D(x,y)}{D(s,t)} + +f_2 \circ \sigma(s,t)\frac{D(y,z)}{D(s,t)} + f_3 \circ \sigma(s,t)\frac{D(x,z)}{D(s,t)} \right) dsdt,$$

en notant

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial y}{\partial st}(s,t) \end{pmatrix},$$

et les autres déterminants de manière analogue.

## 4.5 Formule de Stokes et variations

**Théorème 4.2.** *Soit $D$ une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k$, avec $1 \leq k \leq n$, munie d'un bord $\partial D$ lisse de dimension $k-1$. Pour toute $(k-1)$-forme $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \iota^*\omega,$$

*où $\iota : \partial D \to \mathbb{R}^n$ est l'inclusion canonique de $\partial D$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Beaucoup de formules intégrales de mathématiques et de physique sont des cas particuliers de ce théorème :

1. Le théorème fondamental de l'analyse : si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, c'est en particulier une courbe lisse dans $\mathbb{R}$, de bord $\{a, b\}$, et si on le voit comme une courbe orientée de $a$ vers $b$, alors pour toute 0-forme différentielle $\omega(t) = f(t)$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{[a,b]} \mathrm{d}\omega = \int_{[a,b]} f'(t)\mathrm{d}t = \int_{\{a,b\}} \omega(t) := [f(t)]_a^b = f(b) - f(a).$$

2. La formule de Green–Riemann : si $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine compact à bord lisse et $\omega = f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y$ est une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$, alors on a

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)\right) dxdy = \int_{\partial D} f_1(x, y)dx + \int_{\partial D} f_2(x, y)dy.$$

Cela provient du fait que d'une part

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}\omega,$$

et d'autre part

$$\int_{\partial D} f_1(x, y)dx + \int_{\partial D} f_2(x, y)dy = \int_{\partial D} f_1(x, y)\mathrm{d}x + \int_{\partial D} f_2(x, y)\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \omega.$$

3. Théorème d'Ostrogradski : si $K \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine compact à bord lisse et $\omega = f_1(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + f_2(x, y, z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_3(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$, alors

$$\iiint_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z)\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint_{\partial K} \omega.$$

# A Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs. Leur produit vectoriel [4] $w = u \times v$ est le vecteur nul si $u$ et $v$ sont colinéaires ; sinon, c'est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que

1. $w$ est orthogonal à $u$ et $v$,
2. $\|w\| = \|u\|\|v\| \sin(\widehat{u, v})$,
3. le triplet $(u, v, w)$ est une base directe, c'est-à-dire que $\det(u, v, w) > 0$.

Quelques propriétés pêle-mêle :

4. On trouve parfois $u \wedge v$ dans certains ouvrages, mais c'est une notation qui entre en conflit avec le produit extérieur.

— En coordonnées, si on note $w = (x_3, y_3, z_3)$, on a

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - x_2z_1 \\ x_1y_2 - x_2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

— Le produit vectoriel est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique :

$$u \times (\lambda v) = (\lambda u) \times v = \lambda(u \times v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2, \quad \forall u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3,$$
$$(u_1 + u_2) \times v = u_1 \times v + u_2 \times v, \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^3,$$
$$u \times v = -v \times u, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

— Le produit vectoriel n'est pas associatif : pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w,$$

$$(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u.$$

— Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$\|u \times v\|^2 + \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2.$$

# B Changement de variables dans les intégrales

## B.1 Intégrale de Lebesgue

On note $dx = dx_1 \dots dx_n$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

**Théorème B.1.** *Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. On a*

$$\int_V g(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx, \tag{4}$$

*où $J_\varphi(x) = \det(D\varphi(x))$ est le déterminant de la matrice jacobienne.*

## B.2 Intégrale de Riemann

À partir du théorème de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue, on peut retrouver celui de l'intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}$ (dans le cas où la fonction est à la fois intégrable au sens de Riemann et de Lebesgue).

**Théorème B.2.** *Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors elle est intégrable au sens de Riemann et de Lebesgue, et pour tout difféomorphisme $\varphi : ]a,b[ \to ]u,v[$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \tag{5}$$

*Démonstration.* **Première preuve : intégrale de Lebesgue.** On applique le théorème B.1 :

$$\int_u^v f(y)dy = \int_{]u,v[} f(y)dy = \int_{]a,b[} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx.$$

Comme $\varphi$ est un difféomorphisme entre deux intervalles, c'est en particulier une fonction monotone. On note $\varphi(a) = \lim_{x\to a^+} \varphi(x)$ et $\varphi(b) = \lim_{x\to b^-} \varphi(x)$. On sait que $\varphi(]a,b[) = ]u,v[$, donc si $\varphi$ est croissante, alors $\varphi(a) = u$ et $\varphi(b) = v$, et on a

$$\int_u^v f(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Sinon, $\varphi$ est décroissante, $\varphi(a) = v$, $\varphi(b) = u$ et on a

$$\int_u^v f(y) = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)dy = -\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

de sorte que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Dans les deux cas on a obtenu le résultat.

**Deuxième preuve : théorème fondamental de l'analyse.** Soit $F$ une primitive de $f$ sur $]u,v[$, qui existe bien car $f$ est continue. Alors $F$ est dérivable sur $]u,v[$ et $F \circ \varphi$ est dérivable sur $]a,b[$, de dérivée

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad \forall x \in ]a,b[.$$

Il vient que

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

et par le théorème fondamental de l'analyse on a

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□

## C Algèbre extérieure

**Définition C.1.** Une forme $k$-linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ est une application $f : E^k \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$ et pour tout $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k \in E$, l'application $f_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k} : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k}(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

est une application linéaire. Une forme $k$-linéaire est dite alternée si elle s'annule dès que deux de ses arguments sont égaux.

On peut montrer que toute application $k$-linéaire alternée est antisymétrique. Par exemple,

$$f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k) = -f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k).$$

Plus généralement, si $\sigma \in S_k$ est une permutation, et $\varepsilon(\sigma)$ sa signature, on a

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_k).$$

L'espace vectoriel $\Lambda^k E^*$ des formes $k$-linéaires alternées sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie est aussi de dimension finie, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, alors une base de $\Lambda^k E^*$ est donnée par

$$\{e'_{i_1} \wedge e'_{i_2} \wedge \ldots \wedge e'_{i_k}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\},$$

où $e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_k}$ est la forme $k$-linéaire définie par

$$e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \det(M),$$

où $M$ est la matrice définie à l'aide des indices $i_1, \ldots, i_k$ et des vecteurs $x_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}), \ldots, x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)})$ par

$$M = \begin{pmatrix} x_1^{(i_1)} & \ldots & x_1^{(i_k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{(i_1)} & \ldots & x_k^{(i_k)} \end{pmatrix}.$$

On munit l'espace vectoriel $\Lambda^\bullet E^* = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k E^*$ d'une opération, appelée produit extérieur et notée $\wedge$, telle que pour toutes formes $\alpha$ et $\beta$ de degrés respectifs $k_1$ et $k_2$, $\alpha \wedge \beta$ est une forme $k_1 + k_2$-linéaire, et

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k_1 k_2} \beta \wedge \alpha$$

L'espace $(\Lambda^\bullet E^*, +, \wedge, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative (si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), appelée *algèbre extérieure.*

**Proposition C.1.** *Si on note $n = \dim E$, alors pour tout $k > n$ $\Lambda^k E^* = \{0\}$. Sinon, si $k \leq n$,* $\dim \Lambda^k E^* = \binom{n}{k}$.

**Note.** On peut en fait définir aussi une algèbre extérieure $(\Lambda^\bullet E, +, \wedge, \cdot)$, qui n'est pas définie sur les formes multilinéaires, mais sur les produits tensoriels d'éléments de $E$. Cela nécessite d'introduire le produit tensoriel, qui sort du cadre du cours, mais cela permet d'avoir des propriétés générales intrinsèques.