

## TD n° 2 – Géométrie hyperbolique élémentaire (suite)

### Encore un peu de plan hyperbolique

**Exercice 1.** *Flot géodésique*

On définit le *fibré tangent unitaire* au plan hyperbolique par

$$T^1\mathbb{H}^2 = \{(z, w) : z \in \mathbb{H}^2, w \in T_z\mathbb{H}^2, \|z\|_v = 1\}.$$

Le *flot géodésique* est un groupe à un paramètre  $a_t : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^2$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ , de sorte que pour tout  $(z, v) \in T^1\mathbb{H}^2$ ,

$$a_t(z, v) = (\gamma(t), \gamma'(t))$$

soit l'unique géodésique paramétrée par la longueur d'arc telle que  $\gamma(0) = z$ ,  $\gamma'(0) = v$ .

1. Montrer que  $T^1\mathbb{H}^2 \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On pourra utiliser la *décomposition d'Iwasawa* : toute matrice  $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  peut s'écrire comme un produit de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in (0, \infty)$ , et  $\theta \in [0, 2\pi)$ , et le fait que pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$ , il existe  $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $g \cdot z = i$ .

2. Montrer que le flot géodésique est donné par l'action à droite du sous-groupe à un paramètre

$$\left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Indice : on pourra commencer par étudier le cas de  $(i, i) \in T^1\mathbb{H}^2$ .

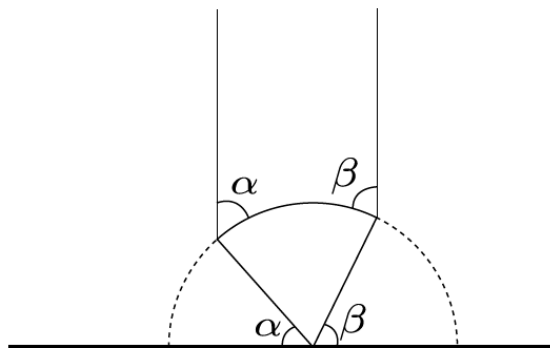
**Exercice 2.** *Formule de Gauss–Bonnet*


FIGURE 1 – Un triangle hyperbolique

1. Soit  $T$  un triangle hyperbolique dont un des sommets est dans  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  comme dans la figure 1 ci-dessus. En utilisant le fait que les angles euclidiens et les angles hyperboliques coïncident dans le demi-plan supérieur, montrer que l'aire de  $T$  est égale à  $\pi - \alpha - \beta$ .

2. Montrer que tout triangle hyperbolique peut s'écrire comme la différence entre deux tels triangles. En déduire la *formule de Gauss–Bonnet* : pour un triangle hyperbolique quelconque, son aire vérifie  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ .
3. En déduire la formule de l'aire d'un triangle idéal (c'est-à-dire dont les trois sommets sont dans  $\partial\mathbb{H}^2$ ), ainsi que l'aire d'un polygone hyperbolique d'angles  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

## Surfaces hyperboliques compactes

### Exercice 3. Domaines fondamentaux

Une *surface hyperbolique* est un quotient  $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ , pour un sous-groupe discret  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Pour que  $M$  soit une variété, il faut que  $\Gamma$  ne contienne pas d'élément elliptique. Soit  $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  une telle surface. Un sous-ensemble  $F \subset \mathbb{H}^2$  est un *domaine fondamental* pour l'action de  $\Gamma$  si

- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot F = \mathbb{H}^2$ ,
- Pour tout  $\gamma \neq \gamma' \in \Gamma$ ,  $\gamma \cdot F \cap \gamma' \cdot F = \emptyset$ .

1. Montrer que si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux domaines fondamentaux pour  $\Gamma$  et si  $F_1$  est d'aire finie, alors  $\mathrm{Aire}(F_1) = \mathrm{Aire}(F_2)$ . On dit que  $\Gamma$  est un *réseau* s'il possède un domaine fondamental d'aire finie.
2. Montrer que tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  agit proprement discontinument, c'est-à-dire que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , tout  $z \in \mathbb{H}^2$  et tout compact  $K \subset \mathbb{H}^2$ ,  $\{g \in \Gamma : gz \in K\}$  est fini.
3. Étant donné un sous-groupe discret  $\Gamma$  et  $p \in \mathbb{H}^2$  qui n'est pas un point fixe de  $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ , on définit le *domaine fondamental de Dirichlet* par

$$D = D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, p) < d(z, \gamma p), \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}\}.$$

Montrer que  $D$  est bien un domaine fondamental.

### Exercice 4. Formule de Gauss–Bonnet, le retour

Soit  $M$  une surface hyperbolique compacte orientable de genre  $g$ . On se donne une triangulation de  $M$ , c'est-à-dire que l'on recouvre  $M$  par des triangles dont les intérieurs sont disjoints deux à deux. On admet qu'une triangulation peut toujours être choisie de sorte que les côtés des triangles soient géodésiques. En utilisant l'exercice 2, démontrer la formule générale de Gauss–Bonnet :

$$\mathrm{Aire}(M) = 4\pi(g - 1). \quad (1)$$

On pourra utiliser la formule d'Euler suivante : si  $G = (V, E, F)$  est un graphe plongé dans  $M$  de sorte que ses faces soient simplement connexes et que ses arêtes ne se rencontrent qu'à leurs extrémités, alors

$$|V| - |E| + |F| = \chi(M) = 2 - 2g.$$

### Exercice 5. Théorème de Budzinski–Curien–Petri

Pour  $g \geq 2$ , on pose

$$D_g = \min\{\mathrm{Diam}(X) : X \text{ surface fermée orientable hyperbolique de genre } g\}.$$

L'objectif est de démontrer le théorème de Budzinski–Curien–Petri :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{D_g}{\log g} = 1. \quad (2)$$

Pour ce faire, on se donne pour tout  $a$  une surface  $T_a$  construite par recollement d'une infinité dénombrable de pantalons (sphères à trois trous)  $P_a$  dont les bords sont tous de longueur  $a$ ,

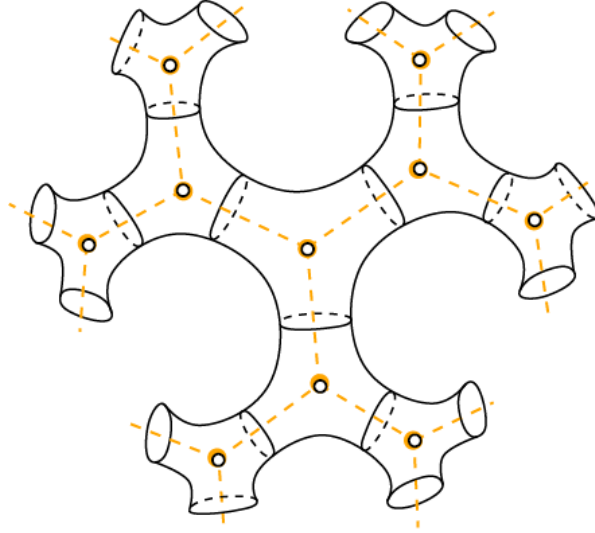


FIGURE 2 – La surface  $T_a$

comme dans la figure 2 ci-dessous. On fixe un point de base  $p_0 \in P_a$ , et on crée un graphe en reliant toutes les copies de  $p_0$  des pantalons adjacents (cf. fig. 2). Le point  $p_0$  et ses copies forment ce que l'on appelle des *points médians*.

On définit

$$N_a(R) = \#\{\text{points médians à distance inférieure ou égale à } R \text{ d'un point de base } O \in T_a \text{ fixé}\}.$$

Étant donné un graphe 3-régulier  $\mathcal{G}_n$  à  $2n$  sommets, on associe à chaque sommet de  $\mathcal{G}_n$  une copie de  $P_a$ , et on recolle entre elles les copies associées à des sommets adjacents, comme dans la figure 3.

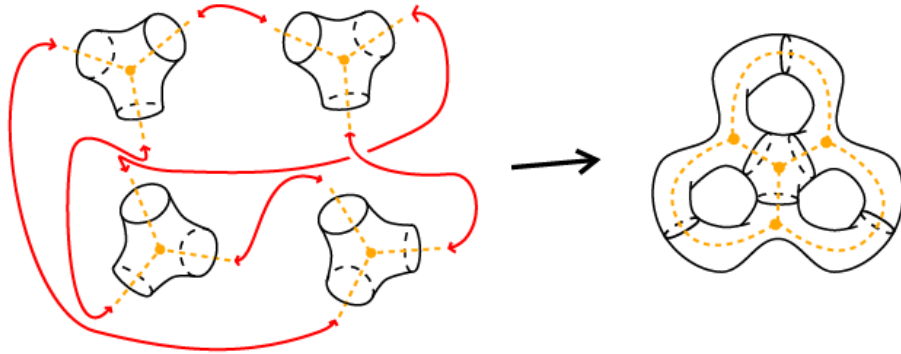


FIGURE 3 – Construction de la surface  $S_{a,n}$

On admet les deux résultats suivants.

— pour tout  $a \in (0, \infty)$ , il existe des constantes  $C_a$  et  $\delta_a$  dans  $(0, 1)$  telles que

$$N_a(R) \sim C_a e^{\delta_a R}, \quad R \rightarrow \infty.$$

— pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec grande probabilité quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\text{Diam}(S_{a,n}) \leq \left( \frac{1}{\delta_a} + \varepsilon \right) \log n.$$

À partir de ces résultats, démontrer le théorème. Indice : on pourra utiliser la “borne triviale” du cours,  $\text{Diam}(S_{a,n}) \geq \log \text{Aire}(S_{a,n}) + O(1)$ , vraie pour toute surface hyperbolique.