2023 Fall 数学分析 B1

1. 课程信息

1.1. 授课教师

屠彩凤老师

- **地址**:管科楼1309
- **邮箱**:`tucf@ustc.edu.cn`

1.2. 推荐教材

- 数学分析讲义 程艺 陈卿 李平
- 数学分析教程 常庚哲 史济怀
- 数学分析 卓里奇

1.3. 助教

- 马天开
- 杨锴闻
- 曲司成

1.4. 成绩评定

待定.

1.5. 作业要求

每周一交,无特殊情况不扣分. ddl每周五3,4节课之间(即每周五上午10:35之前),可以迟交但会扣一定量分数.

1.6. 作业分组

待定.

1.7. 习题课,答疑课

- **时间**:每周周日晚19:00开始,约一个半小时(可提前离开)
- **地点**:2321

1.8. 关于这份文档

会简要记录课程内容,但不建议替代自己的笔记,可以用作复习参考.

部分扩展内容超出课程要求,不需掌握,甚至扩展的部分引理不能直接在考试中"不加说明地使用",复习时请留意.

2. Lecture 1

Time: Week 1, 9.11 Mon
Author: TianKai Ma

2.1. 补充知识

补充一些这门课可能用的记号和它们的LaTeX代码作为参考.

符号	说明	LaTeX
$\mathbb{N}$	自然数	`\mathbb{N}`
$\mathbb{Z}$	整数	`\mathbb{Z}`
$\mathbb{Q}$	有理数	`\mathbb{Q}`
$\mathbb{R}$	实数	`\mathbb{R}`
$\mathbb{C}$	复数	`\mathbb{C}`
$\forall$	任意	`\forall`
$\exists$	存在	`\exists`
$\exists!$	唯一存在	`\exists!`
$\subset$	子集	`\subset`
$\subsetneq$	真子集	`\subseteq`
$\cup$	并集	`\cup`
$\cap$	交集	`\cap`
$\setminus$	差集	`\setminus`
$\dot{\cup}$	并集(不相交)	`\dot{\cup}`
$\in$	属于	`\in`
$\notin$	不属于	`\notin`

符号	说明	LaTeX
$\Rightarrow$	蕴含	`\implies`
$\Leftrightarrow$	等价	`\iff`
$\nearrow$	单调递增	`\nearrow`
$\searrow$	单调递减	`\searrow`
$\longmapsto$	映到	`\mapsto`
$\stackrel{\text{def}}{=}$	定义为	`\triangleq`
$:=$	定义为	`:=`
$\sim$	等价	`\sim`
$\wedge$	与	`\wedge`
$\vee$	或	`\vee`
$\propto$	成正比	`\propto`
Σ	求和	`\sum`
Π	求积	`\prod`
$\blacksquare$	证毕	`\qed`
∞	无穷	`\infty`

掌握这些符号后,请在证明中减少不必要的语言描述,直接使用符号表达即可. 如果符号难以说明的,还请语言表述.

2.2. 数域扩张

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{1}$$

2.2.1. $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$的定义依赖Peano公理,移步 $\Rightarrow$ Section 3.1.1

2.2.2. $\mathbb{Z}$

定义:

$$\begin{gathered} \mathbb{Z} := \{0\} \cup \mathbb{N}^+ \cup (-\mathbb{N}^+) \\ -\mathbb{N}^+ := \{-n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \end{gathered} \tag{2}$$

2.2.3. $\mathbb{Q}$

定义:

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} \tag{3}$$

$\mathbb{Q}$是可数集,移步 $\Rightarrow$ Section 3.1.2

2.2.4. $\mathbb{R}$

> **请证明/思考:**
>
> $\sqrt{2}$是无理数

常用的构造$\mathbb{R}$的方法有:

- 10-进制小数
- Dedekind 分割
- Cauchy 列

2.2.4.1. Dedekind分割

这样构造核心是"分割"$\mathbb{Q}$, 将其分割为A, B,满足:

- $Q = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$ (这点可忽略,直接要求第三条)
- $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a < b$

请注意,Dedekind分割并不需要在无理数($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)处分割,分割出的也并不必然是无理数,课堂上似乎传递了这样的误解.

这样分割的结果会有如下三种可能:

- 在$\mathbb{Q}$中A有最大数, B无最小数
- 在$\mathbb{Q}$中A无最大数, B有最小数,在前面这两种情况中,我们说这个分割定义了有理数.
- 在$\mathbb{Q}$中A无最大数, B无最小数,我们说这个分割定义了一个无理数α,向A或者B中任一添加这个α,都会让$\mathbb{Q}$更加"完备"

> **请证明/思考:**
>
> 为什么没有第四种可能(在$\mathbb{Q}$中A有最大数, B有最小数)?

我们把所有有理数的分割的的集合称为实数集,记作$\mathbb{R}$.每个分割都对应一个实数.

2.2.4.2. Cauchy列

这点需要在后续引入极限后说明.

2.3. 一些问题

2.3.1. 归纳法

```
Time: 2023.9.12
Author: Tiankai Ma
```

> **定理:**
>
> 对于一个列命题$\{S_n\}$(其中每个元素S_i都是一个命题),如果能说明:
>
> - S_1成立
> - $S_n \Rightarrow S_{n+1}$
>
> 则可以说明$\forall n, S_n$都成立.

有时这样的"命题列"会跟命题本身中的数列混淆,我们使用群里提出的一道题目来说明这个问题:

请证明/思考:

$a_1, a_2, ..., a_n (n \geq 2)$都是正数且$a_1 + a_2 + ... + a_n < 1$,求证:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{4}$$

一个很有价值的问题是,如果在这里使用归纳法,从n推向$n + 1$时,是否还能说明$a_1 + ... a_{n+1} < 1$?因为我们只知道前n项和小于1,但是不知道第$n + 1$项的大小.

这里的问题就在于混淆了命题跟数列编号的问题,按照"命题列"的思路,我们来给出第S_n个命题的准确定义:

$$\forall \{a_k\}_{k=1}^{n} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{5}$$

因为确实容易混乱,我们把S_{n+1}的定义也写出来:

$$\forall \{a_k\}_{k=1}^{n+1} \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \tag{6}$$

在S_{n+1}的命题中,一般情况下并不能自然的得到前n项直接套用S_n中的结论,只不过:

$$a_1 + ... + a_n < a_1 + ... + a_n + a_{n+1} < 1 \tag{7}$$

进而这里的前$\{a_k\}_{k=1}^{n}$(前n项)自然符合S_n中的$\{a_n\}$的要求,进而可以使用S_n的结论.事实上甚至可以对后n项使用S_n的结论(可以试试).

3. 扩展内容

标蓝的内容选读,无需掌握

3.1.1. $\mathbb{N}$的定义,Peano公理

在提出$\mathbb{N}$的定义这个问题之前,似乎没人想过去关心自然数怎样"定义",1+1=2的不证自明似乎很显然.出于公理化的考量,我们也需要对自然数进行公理化的定义.

定义: Peano公理

Peano公理 提出了基于下面五条的公理体系:

- $0 \in \mathbb{N}$
- $\forall a \in \mathbb{N}, \exists! a' \in \mathbb{N}$,对于每个确定的$a$,在$\mathbb{N}$中总能找到唯一的$a'$,称为$a$的后继.
- $\forall b, c \in \mathbb{N}, b = c \Leftrightarrow b' = c'$, 也就是说,如果两个数的后继相等,当且仅当这两个数也相等.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n' \neq 0$,也就是说,任意一个数的后继不是0.
- $\forall \{S_n\}$,其中S_n均为命题,如果S_0成立,且$S_n \Rightarrow S_{n'}$,则命题对所有自然数均成立,也就是说$\forall n, S_n$都是成立的.

更深入了解 $\Rightarrow$

- 数域$\mathbb{F}$上的加法,乘法
- 有序集,有序域

3.1.2. $\mathbb{Q}$可数

在分析中我们会经常无穷集合,透过一些性质,我们认为他们的"大小"不完全相同.

但不同于有限集合,无穷集合无法直接通过比较元素"个数"来比较大小,无穷集合的大小需要通过映射进行比较,来定义"基数".

定义: 无穷集合的基数

无穷集合的基数并不是元素的个数,但确实是有限集合中"个数"概念的推广.

我们通过两个集合A, B之间的关系来定义基数:

1. 如果$\exists f : A \to B$是一一映射(双射),则称A和B的基数相同,记作$|A| = |B|$.
2. 如果$\forall f : A \to B$总不存在一一映射,但$\exists f : A \to C \subsetneq B$(存在一个到$B$真子集$C$的一一映射,与这个子集$C$有相同的基数),则称$A$的基数小于$B$的基数,记作$|A| < |B|$.

因为这是门分析的课,我们补充说明"基数相同"是"良定义"的,意味着这样定义有着良好的性质:

- 自反性: $|A| = |A|$
- 对称性: $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$
- 传递性: $|A| = |B|, |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$

在后续的课程中,满足这样性质的关系称为"等价关系",这里不做过多解释.

定义: 可数

特别的,如果一个集合A与自然数集$\mathbb{N}$存在相同的基数,即存在$f : A \to \mathbb{N}, a \mapsto n$是双射,我们称这个集合是可数的.

我们通过下面几个例子来说明可数的概念.

定理:

$\mathbb{Z}$是可数的.

证明:

证明可数的方式,一般是考虑构造定义中的双射,在这里需要构造:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ z &\mapsto n \end{aligned} \tag{8}$$

首先考虑

$$f = |z| \tag{9}$$

但这里f不是双射,例如-1和1都被映射到了1.

只需做一点缩放,对负数的部分做一些调整,就可以得到这样的双射:

$$f = \begin{cases} |z| * 2 & z \geq 0 \\ |z| * 2 - 1 & z < 0 \end{cases} \tag{10}$$

容易说明f是双射,因此$\mathbb{Z}$是可数的.

定理:

$\mathbb{Q}$是可数的.

证明:

回忆课上的对角线的图示,那个方法足够直观,我们来完善这个证明:

考虑$\mathbb{Q}$的定义:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\} \tag{11}$$

我们可以按照$n = |p| + |q|$对$\mathbb{Q}$进行一次分类:

- $n = 0, Q_0 = \emptyset$
- $n = 1, Q_1 = \{0\}$
- $n = 2, Q_2 = \left\{\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}\right\}$
- $n = 3, Q_3 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}\right\}$
- $n = 4, Q_4 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}\right\}$
- ...

把这些数组"展平"成一维数组,我们可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup \cdots \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \cdots \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

依照这样的办法$\mathbb{Q} = \{q_n\}$,自然形成了一个双射:$n \mapsto q_n$,因此$\mathbb{Q}$是可数的.

这里用数列表示的方式说明可数,也对应着可数的另一个翻译:可列

在部分教材中会区分这两个概念:认为可数是指"有限或可列",而可列是指一定是无穷多的.

事实上这两个名字都是从 countable 翻译而来的,一般来说都不会指有限集合,需要包含有限集合时会使用"至多可数"的概念.