

2023 Fall 数学分析 B1

1. 课程信息

1.1. 授课教师

屠彩凤老师

- 地址:管科楼1309
- 邮箱:tucf@ustc.edu.cn

1.2. 推荐教材

- 数学分析讲义 程艺 陈卿 李平
- 数学分析教程 常庚哲 史济怀
- 数学分析 卓里奇

1.3. 助教

- 马天开
- 杨锴闻
- 曲司成

1.4. 成绩评定

待定.

1.5. 作业要求

每周一交,无特殊情况不扣分. ddl每周五3,4节课之间(即每周五上午10:35之前),可以迟交但会扣一定量分数.

1.6. 作业分组

待定.

1.7. 习题课,答疑课

- 时间:每周周日晚19:00开始,约一个半小时(可提前离开)
- 地点:2321

1.8. 关于这份文档

会简要记录课程内容,但不建议替代自己的笔记,可以用作复习参考.

部分扩展内容超出课程要求,不需掌握,甚至扩展的部分引理不能直接在考试中"不加说明地使用",复习时请留意.

2. Lecture 1

Time: Week 1, 9.11 Mon

Author: TianKai Ma

2.1. 补充知识

补充一些这门课可能用的记号和它们的LaTeX代码作为参考.

符号	说明	LaTeX
\mathbb{N}	自然数	<code>\mathbb{N}</code>
\mathbb{Z}	整数	<code>\mathbb{Z}</code>
\mathbb{Q}	有理数	<code>\mathbb{Q}</code>
\mathbb{R}	实数	<code>\mathbb{R}</code>
\mathbb{C}	复数	<code>\mathbb{C}</code>
\forall	任意	<code>\forall</code>
\exists	存在	<code>\exists</code>
$\exists!$	唯一存在	<code>\exists!</code>
\subset	子集	<code>\subset</code>
\subseteq	真子集	<code>\subseteq</code>
\cup	并集	<code>\cup</code>
\cap	交集	<code>\cap</code>
\setminus	差集	<code>\setminus</code>
$\dot{\cup}$	并集(不相交)	<code>\dot{\cup}</code>
\in	属于	<code>\in</code>
\notin	不属于	<code>\notin</code>

符号	说明	LaTeX
\Rightarrow	蕴含	<code>\implies</code>
\Leftrightarrow	等价	<code>\iff</code>
\nearrow	单调递增	<code>\nearrow</code>
\searrow	单调递减	<code>\searrow</code>
\mapsto	映到	<code>\mapsto</code>
$\stackrel{\text{def}}{=}$	定义为	<code>\triangleq</code>
$:=$	定义为	<code>:=</code>
\sim	等价	<code>\sim</code>
\wedge	与	<code>\wedge</code>
\vee	或	<code>\vee</code>
\propto	成正比	<code>\propto</code>
Σ	求和	<code>\sum</code>
Π	求积	<code>\prod</code>
\blacksquare	证毕	<code>\qed</code>
∞	无穷	<code>\infty</code>

掌握这些符号后,请在证明中减少不必要的语言描述,直接使用符号表达即可. 如果符号难以说明的,还请语言表述.

2.2. 数域扩张

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1)$$

2.2.1. \mathbb{N}

\mathbb{N} 的定义依赖Peano公理,移步 \Rightarrow Section 3.1.1

2.2.2. \mathbb{Z}

定义:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &:= \{0\} \cup \mathbb{N}^+ \cup (-\mathbb{N}^+) \\ -\mathbb{N}^+ &:= \{-n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2.3. \mathbb{Q}

定义:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad (3)$$

\mathbb{Q} 是可数集,移步 \Rightarrow Section 3.1.2

2.2.4. \mathbb{R}

请证明/思考:

$\sqrt{2}$ 是无理数

常用的构造 \mathbb{R} 的方法有:

- 10-进制小数
- Dedekind 分割
- Cauchy 列

2.2.4.1. Dedekind分割

这样构造核心是"分割" \mathbb{Q} , 将其分割为 A, B , 满足:

- $Q = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$ (这点可忽略, 直接要求第三条)
- $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a < b$

请注意, Dedekind分割并不需要在无理数($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)处分割, 分割出的也并不必然是无理数, 课堂上似乎传递了这样的误解.

这样分割的结果会有如下三种可能:

- 在 \mathbb{Q} 中 A 有最大数, B 无最小数
- 在 \mathbb{Q} 中 A 无最大数, B 有最小数, 在前面这两种情况中, 我们说这个分割定义了有理数.
- 在 \mathbb{Q} 中 A 无最大数, B 无最小数, 我们说这个分割定义了一个无理数 α , 向 A 或者 B 中任一添加这个 α , 都会让 \mathbb{Q} 更加"完备"

请证明/思考:

为什么没有第四种可能(在 \mathbb{Q} 中 A 有最大数, B 有最小数)?

我们把所有有理数的分割的集合称为实数集, 记作 \mathbb{R} . 每个分割都对应一个实数.

2.2.4.2. Cauchy列

这点需要在后续引入极限后说明.

2.3. 一些问题

2.3.1. 归纳法

Time: 2023.9.12

Author: Tiankai Ma

定理:

对于一个列命题 $\{S_n\}$ (其中每个元素 S_i 都是一个命题), 如果能说明:

- S_1 成立
- $S_n \Rightarrow S_{n+1}$

则可以说明 $\forall n, S_n$ 都成立.

有时这样的"命题列"会跟命题本身中的数列混淆, 我们使用群里提出的一道题目来说明这个问题:

请证明/思考:

$a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 都是正数且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$, 求证:

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^n a_k \quad (4)$$

一个很有价值的问题是,如果在这里使用归纳法,从 n 推向 $n+1$ 时,是否还能说明 $a_1 + \dots + a_{n+1} < 1$?因为我们只知道前 n 项和小于1,但是不知道第 $n+1$ 项的大小.

这里的问题就在于混淆了命题跟数列编号的问题,按照"命题列"的思路,我们来给出第 S_n 个命题的准确定义:

$$\forall \{a_k\}_{k=1}^n \quad \sum_{k=1}^n a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^n (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^n a_k \quad (5)$$

因为确实容易混乱,我们把 S_{n+1} 的定义也写出来:

$$\forall \{a_k\}_{k=1}^{n+1} \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad (6)$$

在 S_{n+1} 的命题中,一般情况下并不能自然的得到前 n 项直接套用 S_n 中的结论,只不过:

$$a_1 + \dots + a_n < a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} < 1 \quad (7)$$

进而这里的前 $\{a_k\}_{k=1}^n$ (前 n 项)自然符合 S_n 中的 $\{a_n\}$ 的要求,进而可以使用 S_n 的结论.事实上甚至可以对后 n 项使用 S_n 的结论(可以试试).

3. 扩展内容

标蓝的内容选读,无需掌握

3.1.1. \mathbb{N} 的定义, Peano公理

在提出 \mathbb{N} 的定义这个问题之前,似乎没人想过去关心自然数怎样"定义", $1+1=2$ 的不证自明似乎很显然.出于公理化的考量,我们也需要对自然数进行公理化的定义.

定义: Peano公理

Peano公理 提出了基于下面五条的公理体系:

- $0 \in \mathbb{N}$
- $\forall a \in \mathbb{N}, \exists! a' \in \mathbb{N}$, 对于每个确定的 a , 在 \mathbb{N} 中总能找到唯一的 a' , 称为 a 的后继.
- $\forall b, c \in \mathbb{N}, b = c \Leftrightarrow b' = c'$, 也就是说, 如果两个数的后继相等, 当且仅当这两个数也相等.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n' \neq 0$, 也就是说, 任意一个数的后继不是0.
- $\forall \{S_n\}$, 其中 S_n 均为命题, 如果 S_0 成立, 且 $S_n \Rightarrow S_{n'}$, 则命题对所有自然数均成立, 也就是说 $\forall n, S_n$ 都是成立的.

[更深入了解 \$\Rightarrow\$](#)

- [数域 \$\mathbb{F}\$ 上的加法, 乘法](#)
- [有序集, 有序域](#)

3.1.2. \mathbb{Q} 可数

在分析中我们会经常无穷集合, 透过一些性质, 我们认为他们的"大小"不完全相同.

但不同于有限集合, 无穷集合无法直接通过比较元素"个数"来比较大小, 无穷集合的大小需要通过映射进行比较, 来定义"基数".

定义: 无穷集合的基数

无穷集合的基数并不是元素的个数, 但确实是有限集合中"个数"概念的推广.

我们通过两个集合 A, B 之间的关系来定义基数:

1. 如果 $\exists f: A \rightarrow B$ 是一一映射(双射), 则称 A 和 B 的基数相同, 记作 $|A| = |B|$.
2. 如果 $\forall f: A \rightarrow B$ 总不存在一一映射, 但 $\exists f: A \rightarrow C \subseteq B$ (存在一个到 B 真子集 C 的一一映射, 与这个子集 C 有相同的基数), 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $|A| < |B|$.

因为这是门分析的课, 我们补充说明"基数相同"是"良定义"的, 意味着这样定义有着良好的性质:

- 自反性: $|A| = |A|$
- 对称性: $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$
- 传递性: $|A| = |B|, |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$

在后续的课程中, 满足这样性质的关系称为"等价关系", 这里不做过多解释.

定义: 可数

特别的, 如果一个集合 A 与自然数集 \mathbb{N} 存在相同的基数, 即存在 $f: A \rightarrow \mathbb{N}, a \mapsto n$ 是双射, 我们称这个集合是可数的.

我们通过下面几个例子来说明可数的概念.

定理:

\mathbb{Z} 是可数的.

证明:

证明可数的方式,一般是考虑构造定义中的双射,在这里需要构造:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \\ z &\mapsto n \end{aligned} \quad (8)$$

首先考虑

$$f = |z| \quad (9)$$

但这里 f 不是双射,例如 -1 和 1 都被映射到了 1 .

只需做一点缩放,对负数的部分做一些调整,就可以得到这样的双射:

$$f = \begin{cases} |z| * 2 & z \geq 0 \\ |z| * 2 - 1 & z < 0 \end{cases} \quad (10)$$

容易说明 f 是双射,因此 \mathbb{Z} 是可数的.

定理:

\mathbb{Q} 是可数的.

证明:

回忆课上的对角线的图示,那个方法足够直观,我们来完善这个证明:

考虑 \mathbb{Q} 的定义:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\} \quad (11)$$

我们可以按照 $n = |p| + |q|$ 对 \mathbb{Q} 进行一次分类:

- $n = 0, Q_0 = \emptyset$
- $n = 1, Q_1 = \{0\}$
- $n = 2, Q_2 = \left\{ \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}$
- $n = 3, Q_3 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1} \right\}$
- $n = 4, Q_4 = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1} \right\}$
- ...

把这些数组"展平"成一维数组,我们可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup \dots \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \dots \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

依照这样的办法 $\mathbb{Q} = \{q_n\}$,自然形成了一个双射: $n \mapsto q_n$,因此 \mathbb{Q} 是可数的.

这里用数列表示的方式说明可数,也对应着可数的另一个翻译:可列

在部分教材中会区分这两个概念:认为可数是指"有限或可列",而可列是指一定是无穷多的.

事实上这两个名字都是从 countable 翻译而来的,一般来说都不会指有限集合,需要包含有限集合时会使用"至多可数"的概念.