Chương 1: Cơ bản

- $(A+B) \equiv (A \cup B)$; $(A \cdot B) \equiv (A \cap B)$
- $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
  $\Rightarrow P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Xác suất có điều kiện

- $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ with $P(B) > 0$
  $\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ with $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là hệ đầy đủ biến cố.
- **Bayes's Formula:** $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$.

Chương 2: Biến ngẫu nhiên

Expectation:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

- $E(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$ là một hằng số.
- $E(cX) = c \cdot E(X)$.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- X, Y độc lập: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Variance: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- $Var(c) = 0$ với $c \in R$ là một hằng số.
- $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$.
- $Var(c+X) = Var(X)$.
- X, Y độc lập: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

$$F(x) = P(X \le x) = x = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ f(x_1) & , x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ 1 & , x \ge x_n \end{cases}$$

Các phân phối cơ bản

Phép thử Bernoulli: $P(A) = p \quad \Rightarrow P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Phân phối Bernoulli: $X \sim B(1,p)$; $E(X) = p$; $Var(X) = pq$.

Phân phối nhị thức $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

- $X \sim B(n,p)$; $E(X) = np$; $Var(X) = npq$.

Phân phối Poisson: $X \sim P(\lambda)$;
$E(X) = \lambda$; $Var(X) = \lambda$.

- Hàm mật độ xác suất: $f(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$.
  $\Rightarrow$ Hàm phân phối xác suất: $F(x) = \sum_{i=0}^{x} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$.
- $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.
- *Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng Poisson:* $B(n,p) \sim P(\lambda)$ với $n \ge 100$, $p \le 0.01$, $\lambda = np \le 20$.

Phân phối đều: $X \sim U(a,b)$;
$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

- Hàm mật độ xác suất: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.
- Hàm phân phối xác suất: $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Phân phối mũ: $X \sim Exp(\lambda)$; $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

- Hàm mật độ xác suất: $f(t) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- Hàm phân phối xác suất: $F(t) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Trong đó, λ là số biến cố xảy ra trong một đơn vị thời gian ,t là thời gian đến biến cố kế tiếp.

Phân phối chuẩn hóa: $X \sim N(\mu, \sigma)$ với $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$; $E(X) = \mu$; $Var(X) = \sigma^2$.

- Hàm mật độ xác suất: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Hàm phân phối xác suất: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$.
- $P(X \le b) = P(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{b-\mu}{\sigma}) = \phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})$. (Tra bảng phân phối chuẩn)
  - $P(a \le X \le b) = \phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$.
  - $P(X \ge a) = 1 - \phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$.
  - $P(X \le a) = \phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$.
  - $P(|X-\mu| \le k\sigma) = P(-k \le \dfrac{X-\mu}{\sigma} \le k)$
    $= 2\phi(k) - 1$.
- **Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn:** $B(n,p) \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = np = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X) = npq$ với $np \ge 5$, $n(1-p) \ge 5$. Áp dụng định lí giới hạn trung tâm.
  - $P(X \le b) \approx P(X \le b + 0.5)$
    $\approx P(\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}) = \phi(\dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}})$
  - $P(X \ge a) \approx P(X \ge a - 0.5)$
    $\approx P(\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}} \ge \dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}) = \phi(\dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}})$