Metodo Fasci by

Joele Andrea Ortore

(LAZY theorem)

Data una eq diff di n ordine con $a_0, \dots, a_n, K$ coeff reali, sia F una funzione trigonometrica del tipo $K\cos(wt)$ o $K\sin(wt)$ con $K \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{y^{(i)}}_{\text{DERIVATA i esima}} = F(t)$$

la soluz particolare può essere portata in regime fasoriale

$$\bar{y} \sum_{i=0}^{n} (jw)^i a_i = \bar{F} \qquad *$$

la soluzione di quest'equazione per $\bar{y}$ sarà del tipo: $c_1 - jc_2$ che riportato in regime sinusoidale ci da: $c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt)$ che è la soluzione particolare cercata.

Posso scrivere $*$ così $\longrightarrow$

$$\underbrace{\overbrace{Re\left\{\sum_{i=0}^{n}(jw)^i a_i \bar{y}\right\}}^{\alpha} + j\,\overbrace{Imm\left\{\sum_{i=0}^{n}(jw)^i a_i \bar{y}\right\}}^{\beta}}_{\text{chiameremo questa porzione: } \gamma} = Re\{\bar{F}\} + j\,Imm\{\bar{F}\}$$

$$\bar{y} = \frac{(a - j\beta)\left[Re\{\bar{F}\} + j\,Imm\{\bar{F}\}\right]}{|\gamma|^2}$$

$$\bar{y} = \underbrace{\frac{a\,Re\{\bar{F}\} + \beta\,Imm(\bar{F})}{|\gamma|^2}}_{c_1} - j\,\underbrace{\frac{+\beta\,Re\{\bar{F}\} - a\,Imm\{\bar{F}\}}{|\gamma|^2}}_{c_2}$$

$$\bar{y} = c_1 - jc_2$$

DIM *

Vogliamo vedere che un eq scritta in questo modo: $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = F(t)$ se portata nel dominio dei fasori la soluzione per y trovata è soluzione particolare, quindi procederemo a ritroso dal prototipo di soluzione fornito dal metodo di similitudine e ci aspetteremo di trovare una cosa simile

$$\sum_{i=0}^{n} (jw)^i \bar{y} = \underbrace{x_1 + jx_2}_{} \longrightarrow \text{Forma in Fasore della Forzante}$$

La formula per trovare le costanti sarà per il metodo di somiglianza:

$$c_1 \sum_{i=0}^{n}\left\{w^i \cos\left[wt + i\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n}\left\{w^i \sin\left[wt + i\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = y(t)$$

notiamo subito che i valori moltiplicati per $w^n \dots w^0$ si ripetono

si "ripetono" ogni volta che i arriva ad un multiplo di 4

ES

$$\cos\left[wt + 0\right] = \cos\left[wt + 4\frac{\pi}{2}\right]$$

questo genera un parallelismo interessante con i numeri complessi

infatti $i^0 = i^4$, portando infatti tutto nel dominio dei Fasori si ha

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{ w^i e^{i\frac{\pi}{2}j} \right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{ w^i \underbrace{e^{(i-1)\frac{\pi}{2}j}} \right\} = \bar{Y}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sin\left(wt + i\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(wt + i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{FASORE} \downarrow \\ e^{\left(i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)j} \rightarrow e^{(i-1)\frac{\pi}{2}j} \end{gathered}}$$

che può essere riscritto come

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{ w^i j^i \right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{ w^i j^{i-1} \right\} = \bar{Y}$$

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i - j c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i = \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = (c_1 - jc_2) \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i$$

che posso riscrivere come

$$\bar{Y} = (c_1 - jc_2) \left\{ Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} + j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} \right\}$$

$$\frac{\bar{Y}}{\left\{ Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} + j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} \right\}} = c_1 - jc_2$$

$$\frac{\bar{Y} \left\{ Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} - j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} \right\}}{\left| \left\{ Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} + j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} \right\} \right|^2} = c_1 - jc_2$$

$$Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \bar{Y} \right\} - j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \bar{Y} \right\} = \overbrace{\left| \left\{ Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} + j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \right\} \right\} \right|^2}^{P} (c_1 - jc_2)$$

FACCIO IL COMPLESSO coniugato da entrambe le parti

$$Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \bar{Y} \right\} + j\, Imm\left\{ \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i \bar{Y} \right\} = P\,(c_1 + jc_2) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \left\{ wj \right\}^i Y = (c_1 + jc_2) \cdot P$$

IL RISULTATO È COERENTE CON QUANTO ASPETTATOCI.