1.1 EDO I ORDINE:

- A VARIABILI SEPARABILI: $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$

1. cerco SOL COSTANTI imponendo $y(t) = c$, e quindi $y'(t) = 0 \Rightarrow g(c) = 0 \ \forall t$

$$0 = h(t) \cdot g(y(t)) \qquad \forall t$$

2. cerco SOL NON COSTANTI (integrale generale) dividendo per $g(y(t))$ e integrando:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h \, dt$$

In particolare, se la EDO è del tipo $y'(t) = k\,y(t)$, la sol. sarà del tipo:

$$y(t) = c\,e^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}$$

- LINEARE: $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$ $\quad a, b \in J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

NB. se $b(t) = 0$, trovo eq. OMOGENEA ASSOCIATA

1. cerco SOL COSTANTI

$$0 = a(t)\,y(t) + b(t)$$

2. cerco INTEGRALE GENERALE:

$$y(t) = e^{A(t)} \left(\int e^{-A(t)} b(t) \, dt + c \right)$$

con $A(t)$ primitiva di $a(t)$

- NON LINEARE: $y'(t) = k(t)\,y(t) + h(t)\,y(t)^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0$
(eq di Bernoulli) $\quad k, h$ continue

1. cerco SOL COSTANTI:

$$0 = k(t)\,y(t) + h(t)\,y(t)^{\alpha}$$

2. cerco INT GENERALE dividendo per $y(t)^{\alpha}$

$$\boxed{\frac{y'(t)}{y(t)^{\alpha}}} = k(t)\,y(t)^{1-\alpha} + h(t)$$

3_ pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$ e determino l'eq soddisfatta da $z(t)$

$$z'(t) = (1-\alpha)\boxed{y(t)^{-\alpha}\cdot y'(t)}$$
$$= (1-\alpha)\left[k(t)\,y(t)^{1-\alpha} + h(t)\right]$$
$$= (1-\alpha)\left[k(t)\,y(t)^{1-\alpha}\right] + (1-\alpha)h(t)$$

4_ risolvo EDO lineare in $z(t)$:

$$z'(t) = (1-\alpha)k(t)z(t) + (1-\alpha)h(t)$$

5_ torno a variabile $y(t)$:

$$z(t) = y(t)^{1-\alpha} \rightsquigarrow y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1_ cerco SOL COSTANTI e vedo se $y(t) = c = y_0 \ \forall t$ — sì $\Rightarrow$ FINE; no $\Rightarrow$ 2

2_ cerco INT. GENERALE $[\dots + c]$

NB. se il dominio è discontinuo, considero intervallo a cui appartiene t_0

3_ sostituisco t_0 e y_0 nell'int generale e trovo la costante C

4_ sostituisco c nella formula dell'int. generale e trovo la sol

NB. $\exists!$ sol del pb di Cauchy

1.2 EDO II ORDINE

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

- **OMOGENEA** $\Rightarrow f(t) = 0$

1 - scrivo l'eq del POLINOMIO CARATTERISTICO $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ e trovo gli ZERI del polinomio λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

2 - scrivo la soluzione dell'eq. (int generale)* sfruttando il th di struttura nei 3 casi: $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

- $\Delta > 0$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$\boxed{y_o(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$

- $\Delta = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$

$$\boxed{y_o(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2)}$$

- $\Delta < 0$ $(\lambda_1 = \alpha + i\beta \,;\, \lambda_2 = \alpha - i\beta \,,\; \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y_o(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \operatorname{sen}(\beta t))}$$

- **NON OMOGENEA A COEFF. COSTANTI** $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$

1 - trovo l'int generale dell'eq. omogenea associata $y_o(t)$*
[vedi risoluzione eq omogenea]

2 - determino l'integrale particolare $y_p(t)$ attraverso il METODO DI SOMIGLIANZA con i seguenti tipi di termine noto/forzante $f(t)$:

- ESPONENZIALE $f(t) = Ae^{\alpha t}$ $(A, \alpha \in \mathbb{R})$

  - $p(\alpha) \neq 0$ [cioè, α non è uno zero del polinomio caratteristico]

$$\boxed{y_p(t) = Ce^{\alpha t}}$$

  - $p(\alpha) = 0$, α rad n-upla [cioè, α è zero di $p(\lambda)$ con molt. alg. $= n$]

$$\boxed{y_P(t) = C t^n e^{\alpha t}}$$

- POLINOMIALE $\qquad f(t) =$ polinomio di grado n
  - $p(0) \neq 0$ $\qquad$ [cioè, il termine noto di $p(\lambda)$ è $\neq 0$]

$$\boxed{y_P(t) = a t^n + b t^{n-1} + \dots + c t + d} \qquad a, b, \dots, c, d \in \mathbb{R}$$

  - $p(0) = 0$, 0 rad n-upla [cioè 0 è uno zero di $p(\lambda)$ con m. alg = n]

$$\boxed{y_P(t) = t^n \left(a t^n + b t^{n-1} + \dots + c t + d\right)} \qquad a, b, \dots, c, d \in \mathbb{R}$$

- TRIGONOMETRICO $\qquad f(t) = A\cos(\beta t) + B\,\text{sen}(\beta t) \qquad A, B, \beta \in \mathbb{R}$
  - $p(\pm i\beta) \neq 0$

$$\boxed{y_P(t) = C_1\,\text{sen}(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

  - $p(\pm i\beta) = 0$

$$\boxed{y_P(t) = t\left[C_1\,\text{sen}(\beta t) + C_2\cos(\beta t)\right]}$$

3_ calcolo $y_P'(t)$ e $y_P''(t)$

4_ sostituisco $y_P(t)$, $y_P'(t)$, $y_P''(t)$ al posto di $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ nell'eq di partenza e trovo gli UNICI COEFFICIENTI che rendono vera l'eq

5_ sostituisco i coefficienti trovati nell'eq. dell' $y_P(t)$ e trovo la sol. particolare

6_ l'integrale generale dell' eq completa è:

$$\boxed{y(t) = y_o(t) + y_P(t)}$$

?

- PROBLEMA DI CAUCHY

NON so se è giusto

$$\begin{cases} a(t)\,y''(t) + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \qquad \text{(posiz. iniz. in } t_0\text{)} \\ y'(t_0) = V_0 \qquad \text{(velocità iniz in } t_0\text{)} \end{cases}$$

1- trovo l'int generale dell'eq completa nella forma: $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$

2- sostituisco i valori t_0 e y_0 e trovo un'equazione nelle incognite C_1 e C_2

3- derivo l'int. generale : $y'(t) = y_o'(t) + y_p'(t)$

4- sostituisco i valori t_0 e v_0 e trovo un'altra eq. nelle incognite C_1 e C_2

5- risolvo il sistema di 2 eq in 2 incognite C_1 e C_2

6- sostituisco C_1 e C_2 trovati nell'int. generale di partenza e trovo la sol. al pb di Cauchy