



Institut für Grundlagen und Theorie
der Elektrotechnik
Technische Universität Graz



Seminararbeit:
Finite Elemente Software
zur Lösung von
elektrostatischen und stationären
Strömungsfeld-Problemen

vorgelegt von:
Tobias Florian Lafer (01530012)
am 12. August 2019

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Bauernfeind

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Die Methode der finiten Elemente	3
1.2	Finite Elemente und Formfunktionen	3
1.2.1	Lineare Dreieckselemente	4
1.2.2	Quadratische Dreieckselemente	5
1.2.3	Kubische Dreieckselemente	6
1.3	Problemtypen	7
1.3.1	Elektrostatische Probleme	8
1.3.2	Stationäre Strömungsfeldprobleme	9
2	Implementierung	10
2.1	Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh	10
2.1.1	Erstellung der Geometrie	10
2.1.2	Generierung des Gitters	11
2.2	Import und Verarbeitung des FEM-Gitters	11
2.2.1	Import des Gitters	12
2.2.2	Verarbeitung der Gitterinformation	13
2.2.3	Zuordnung der Knoten am dirichletschen- und Dreiecksseiten am neumannschen Rand	14
2.3	Berechnung der Elementgleichungssysteme (gesamt: 3 Seiten)	17
2.3.1	Berechnung der Element-Matrix (2 Seite)	17
2.3.2	Berechnung des Rechtsseiten-Vektors (1 Seite)	17
2.4	Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems (gesamt: 1 Seite)	17
3	Simulationen	17
3.1	Simulation 1 (2 Seiten)	17
3.2	Simulation 2 (2 Seiten)	17
3.3	Simulation 3 (2 Seiten)	17

1 Theorie

1.1 Die Methode der finiten Elemente

Die analytische Lösung eines Randwertproblems, wie jenes definiert in (1), ist nur in sehr wenigen Fällen möglich. Zur numerischen Lösung existieren daher verschiedenste Methoden, wobei eine der Prominentesten die *Methode der finiten Elemente* darstellt. Bei dieser Methode wird das zu untersuchende Problemgebiet Ω in viele einzelne Teilgebiete unterteilt, in welchen jeweils die gesuchte Funktion $u(x)$ aus durch Verwendung von Ansatzfunktionen (zum Beispiel Polynomen) approximiert wird.

Ein Beispiel für ein Randwertproblem ist

$$L\{u(x)\} = f(x) \quad (1)$$

mit $u = \bar{u} \ \forall x \in \Gamma_D$ als dirichletschen, und $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_N \ \forall x \in \Gamma_N$ als neumannschen Randbedingungen, L als Differentialoperator, f als gegebener und u als gesuchter Funktion.

Als häufige Ansätze zur numerischen Berechnung dienen dabei das sogenannte *Ritzsche Verfahren* (Spezialfall einer Variationsmethode) oder das *Galerkinsche Verfahren* (Spezialfall einer Residuenmethode). Diese Verfahren führen auf ein lineares Gleichungssystem (2) mit den Werten der gesuchten Funktion u an den Elementknoten als Unbekannte \mathbf{u}_{ges} .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{r} \quad (2)$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{A} und des Rechtsseitenvektors \mathbf{r} ergeben sich aus den Zusammenhängen im Problemgebiet (Differentialgleichungen), den vorgegebenen Randwerten und der Geometrie sowie deren Unterteilung.

1.2 Finite Elemente und Formfunktionen

Ein häufiger Ansatz zur Unterteilung des Problemgebietes ist jener der Unterteilung in Dreiecke bzw. Tetraeder. Innerhalb jedes dieser Elemente wird die gesuchte Funktion u aus 1, im Weiteren auch Potential genannt, durch einfache Funktionen, meist Polynome erster oder zweiter Ordnung, angenähert.

Für ein Element, welches durch N Knoten definiert wird lautet ein möglicher Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} N_k^e u_k \quad (3)$$

wobei die Funktionen N_k^e als *Formfunktionen* des e -ten Elements bezeichnet werden. Sie besitzen im k -ten Elementknoten den Wert 1 und in allen Anderen den Wert 0.

Für ein Dreieck mit einem Knoten an jeder Ecke ($N = 3$) ergeben sich lineare Funktionen für N_k^e , für Dreiecke mit zusätzlichen Knoten in der Mitte jeder Seite ($N = 6$) quadratische Funktionen usw.

Da die Funktionen für N_k^e nur von der Geometrie des jeweiligen Elements abhängen bleiben einzig die u_k als gesuchte Parameter, welche durch Verwendung des Ansatzes aus (3) im z.B. Galerkinschen Verfahren ermittelt werden können.

Wie aus (3) erkennbar, müssen für jedes Element die N_k^e separat ermittelt werden da sie von der jeweiligen Elementgeometrie abhängen. Betrachtet man nun jedes finite Element in einem lokalen Koordinatensystem, welches im Weiteren durch die Variablen ξ, η dargestellt wird, und verwendet die Formfunktionen auch zur Beschreibung der Elementgeometrie, so spricht man von *isoparametrischen finiten Elementen*.

Die Formfunktionen müssen dabei nur einmalig für einen bestimmten Typ von finiten Elementen (z.B. lineare Dreiecke) einmalig ermittelt werden. Die Zusammenhänge für Geometrie und Potential lauten dann wie folgt:

$$u = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) u_k \quad x = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) x_k \quad y = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) y_k$$

wobei x_k und y_k die Koordinaten des k -ten Knoten darstellen. Sinnvollerweise sind die jeweiligen finiten Elemente im lokalen ξ, η -Koordinatensystem geradlinig angesetzt. (Siehe Abbildung 2) Die Krümmung und Verzerrung im globalen Koordinatensystem ergibt sich anschließend durch (4).

1.2.1 Lineare Dreieckselemente

Das isoparametrische lineare Finite Dreieckselement ist im lokalen ξ, η -Koordinatensystem wie in Abbildung 1 gezeigt dargestellt.

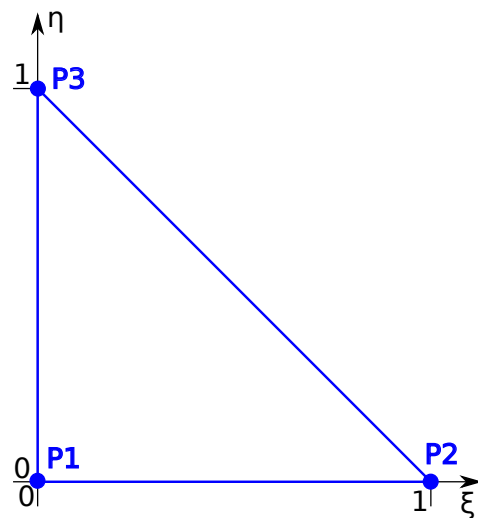
Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (1, 0) \\ P_3 &= (0, 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Als Ansatz für die Potentialfunktion bzw. die globalen Koordinaten x und y wählt man folgenden Ansatz:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \eta \quad (5)$$

Die drei Unbekannten c_0, c_1 und c_2 können durch Einsetzen der Koordinaten der



4 Abbildung 1: Ansatz für lineares Element

Elementknoten ermittelt werden.

$$P_1 : u(0, 0) = u_1 = c_0 \quad (6)$$

$$P_2 : u(1, 0) = u_2 = c_0 + c_1$$

$$P_3 : u(0, 1) = u_3 = c_0 + c_2$$

bzw. unter Verwendung der Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (7)$$

Die Lösung $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}$ lautet:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Oder ausgeschrieben:

$$c_0 = u_1 \quad (9)$$

$$c_1 = u_2 - u_1$$

$$c_2 = u_3 - u_1$$

Setzt man dies wiederum in (5) ein, so erhält man:

$$u(\xi, \eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta \quad (10)$$

bzw. nach einfacher Umformung:

$$u(\xi, \eta) = \underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} u_1 + \underbrace{(\xi)}_{N_2} u_2 + \underbrace{(\eta)}_{N_3} u_3 \quad (11)$$

Die Formfunktionen für das lineare finite Dreieckselement lauten also:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (12)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta$$

1.2.2 Quadratische Dreieckselemente

Das quadratische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 2 definiert.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1/2, 0) \quad (13)$$

$$P_3 = (1, 0), \quad P_4 = (1/2, 1/2)$$

$$P_5 = (0, 1), \quad P_6 = (0, 1/2)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 \quad (14)$$

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$u(0, 0) = u_1 = c_0 \quad (15)$$

$$u(1/2, 0) = u_2 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_4$$

$$u(1, 0) = u_3 = c_0 + c_1 + c_4$$

$$u(1/2, 1/2) = u_4 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_5$$

$$u(0, 1) = u_5 = c_0 + c_2 + c_5$$

$$u(1/2, 0) = u_6 = c_0 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_5$$

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.2.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_6$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang

1.2.3 Kubische Dreieckselemente

Das kubische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 3 definiert.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1/3, 0) \quad (16)$$

$$P_3 = (2/3, 0), \quad P_4 = (1, 0)$$

$$P_5 = (2/3, 1/3), \quad P_6 = (1/3, 2/3)$$

$$P_7 = (0, 1), \quad P_8 = (0, 2/3)$$

$$P_9 = (0, 1/3), \quad P_{10} = (1/3, 1/3)$$

$$(17)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 + c_6\xi^2\eta + c_7\xi\eta^2 + c_8\xi^3 + c_9\eta^3 \quad (18)$$

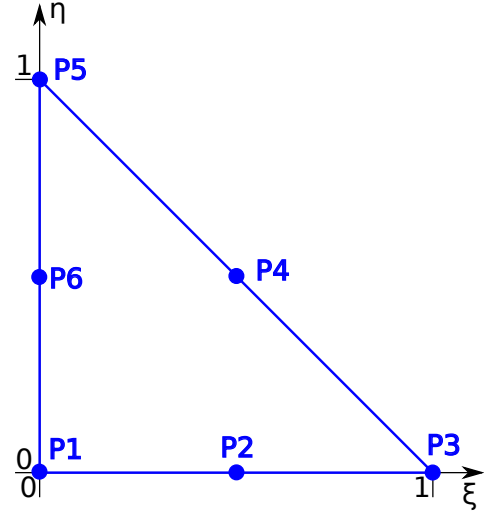


Abbildung 2: Ansatz für quadratisches Element

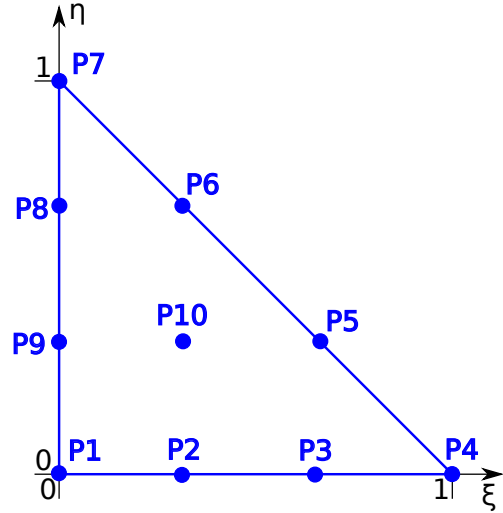


Abbildung 3: Ansatz für quadratisches Element

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= u_1 = c_0 \\
u(1/3,0) &= u_2 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{27}c_8 \\
u(2/3,0) &= u_3 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{8}{27}c_8 \\
u(1,0) &= u_4 = c_0 + c_1 + c_4 + c_8 \\
u(2/3,1/3) &= u_5 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{4}{27}c_6 + \frac{2}{27}c_7 + \frac{8}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/2,0) &= u_6 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{2}{27}c_6 + \frac{4}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1) &= u_7 = c_0 + c_2 + c_5 + c_9 \\
u(0,2/3) &= u_8 = c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1/3) &= u_9 = c_0 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/3,1/3) &= u_{10} = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_6 + \frac{1}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9
\end{aligned} \tag{19}$$

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.2.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_{10}$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang

1.3 Problemtypen

In diesem Kapitel werden die in der Software implementierten Problemtypen beschrieben. In beiden Fällen handelt es sich um zweidimensionale, ebene Probleme. Resultat dieses Abschnitts werden analytische Berechnungsvorschriften für die einzelnen Elementgleichungssysteme sein.

Die Berechnungen aus diesem Abschnitt stammen, sofern nicht anders angegeben, aus [?] | Abschnitte 7 und 8. Für ausführliche Herleitungen, auf welche in diesem Fall bewusst verzichtet wird, sei auf das oben genannte Werk verwiesen.

Wie aus Abschnitt 1.1 bekannt, ist das Randwertproblem zuerst als Operatorgleichung mit entsprechenden Randwertbedingungen zu formulieren. Die Operatorgleichung kann nun entweder direkt im Galerkinschen Verfahren oder über Umweg eines äquivalenten Funktional im Ritzschen Verfahren verwendet werden. Dabei wird für die gesuchte Funktion u in jedem Teilgebiet (finites Element) ein entsprechender Approximationsansatz wie in Abschnitt 1.2 ermittelt, eingesetzt. Das Ergebnis sind 'lokale' lineare Gleichungssysteme (für jedes Element eines), welche zu einem großen, 'globalen' Gleichungssystem assembliert werden müssen. Auf die Assemblierung wird dabei genauer in Abschnitt 2.4 eingegangen.

Ausgangspunkt für Probleme aus der Elektrotechnik sind im Allgemeinen die Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (23)$$

mit den Materialzusammenhängen

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (25)$$

mit $[\epsilon]$ und $[\mu]$ als ortsabhängigen Materialtensoren.

1.3.1 Elektrostatistische Probleme

Für den elektrostatischen Fall ist \mathbf{J} sowie sämtlichen zeitlichen Änderungen $\equiv 0$ wodurch sich $\mathbf{B} \equiv 0$ sowie die rechten Seiten von (20) und (21) zu $\equiv 0$ ergeben.

Ein elektrostatisches Problem wird somit durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (27)$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes aus (26) kann nun folgender Ansatz für die elektrostatische Feldstärke \mathbf{E} verwendet werden:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V \quad (28)$$

mit V als sogenanntem *Skalapotential*.

Setzt man (28) nun unter Verwendung von 24 in (27) ein, so erhält man die partielle Differentialgleichung für V als:

$$\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad} V = -\rho \quad (29)$$

Hierbei entspricht $\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad}$ dem Differentialoperator L aus 1, das Potential V der gesuchten Funktion u und $-\rho$ der gegebenen Funktion f .

Die Randbedingungen für ein solches Problem sind gegeben als

$$V = \bar{V} \quad (30)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} V = \sigma \quad (31)$$

am neumannschen Rand Γ_N , mit \mathbf{n} als Flächennormale und σ der am neumannschen Rand gegebenen Flächenladungsdichte entspricht.

Unter Verwendung des Ritzschen *oder* Galerkinschen Verfahrens erhält man nun Lösung zur Berechnung der Elementgleichungssysteme, wobei beide Verfahren *dieselbe (!)* Lösung liefern. Unter Verwendung des in 1.2 vorgestellten Ansatzes für das Potential $V = \sum_{k=1}^N N_k V_k$ ergibt sich für das Elementgleichungssystem $[k_{ij}] \cdot \{V_j\} = \{r_j\}$:

$$k_{ij} = \int_x \int_y \left(\epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (32)$$

$$r_j = \int_x \int_y N_j \rho dx dy + \int_{\Gamma_N} N_j \sigma d\Gamma \quad (33)$$

Anmerkung: Um auf die oben gezeigte Form für k_{ij} zu kommen ist es notwendig den Permittivitätstensor $[\epsilon]$ auf eine Hauptachsenform zu transformieren:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

Man beachte dass die Formfunktionen für isoparametrische finite Elemente $N_i = N_i(\xi, \eta)$ gilt, wodurch alle Integrale in den Variablen ξ und η durchgeführt werden müssen. Die entsprechende Substitution sowie die Realisierung der Integrale werden in Abschnitt 2.3 genauer behandelt.

1.3.2 Stationäre Strömungsfeldprobleme

Stationäre Strömungsfeldprobleme lassen sich über das Gesetz der Ladungserhaltung definieren:

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \quad (34)$$

Es muss außerdem das Ohmsche Gesetz in seiner differentiellen Form gelten:

$$\mathbf{J} = [\gamma] \mathbf{E} \quad (35)$$

mit $[\gamma]$ als ortsabhängigem Tensor der spezifischen Leitfähigkeit.

Stationäre Strömungsfeldprobleme können somit analog zu elektrostatischen Problemen mittels folgender Differentialgleichung ermittelt werden:

$$\text{div}[\gamma] \text{grad} V = 0 \quad (36)$$

Als Randbedingungen ergeben sich:

$$V = \bar{V} \quad (37)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}V = J_e \quad (38)$$

wobei J_e die eingeprägte Flächenstromdichte am neumannschen Rand darstellt.

2 Implementierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit diversen Details der Implementierung des finite Elemente Algorithmus in der Software. Es wird beschrieben wie mittels der Software Gmsh die Problemgeometrie erstellt, sowie ein finite Elemente Gitter generiert und exportiert wird. Anschließend erfolgt ein kurzer Umriss des Imports und Verarbeitung des Gitters zur Verwendung im eigentlichen Lösungsalgorithmus auf den detaillierter am Ende dieses Kapitels eingegangen wird.

2.1 Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh

2.1.1 Erstellung der Geometrie

Die Erstellung der Geometrie sowie die Generierung des FEM-Gitters erfolgt mit der Open-Source Software Gmsh. [?] Gmsh stellt zwei CAD-Kernel ('Built-In' und 'Open-CASCADE') zur Verfügung welche jedoch sehr ähnlich zu bedienen sind. Auf Unterschiede wird entsprechend hingewiesen.

Gmsh nutzt dabei eine eigene Skript-Sprache zur Erstellung der Geometrie, wobei die einzelnen Kommandos für den jeweiligen CAD-Kernel übersetzt werden. Eine Geometrie in Gmsh wird also durch ein ASCII-codiertes File mit einer Sequenz von Kommandos repräsentiert. Ein Beispiel für ein einfaches Viereck ist in Abbildung ... gezeigt. Die Erstellung der Geometrie erfolgt dabei 'Bottom-Up'. Dabei werden zuerst Punkte im Raum festgelegt, welche dann durch Linien verbunden werden. Mehrere aneinander grenzende Linien bilden eine Fläche und mehrere aneinander grenzende Flächen ein Volumen. Für eine genauere Beschreibung des Ablaufs sei auf die sehr ausführliche Dokumentation auf der Gmsh-Homepage verwiesen ([?]).

Eine besondere Rolle bei der Erstellung der Problemgeometrie nehmen die sogenannten 'Physical Groups' ein. Wie ihr Name schon sagt, sind dies Gruppen von Elementen (z.B. Linien) mit der gleichen physikalischen Eigenschaft. (z.B. dem gleichen Potential). Um dies besser zu erklären ist in Abbildung ... die Problemgeometrie eines einfachen Plattenkondensators dargestellt. Die Linien die die obere Elektrode bilden wurden zu einer 'Physical Group' mit dem Namen 'dir100' zusammengefügt. Später wird diese geschlossene Kurve als dirichletscher Rand mit einer Bedingung von $V = 100$ deklariert. Das äußere Viereck dient als ferner Rand mit einer dirichletschen Randbedingung von $V = 0$ und wird daher ebenfalls zu einer 'Physical Group' mit dem Namen 'farbound'

zusammengefasst. Ebenso wird der Rand der unteren Elektrode zu einer Gruppe mit dem Namen 'dir0' zusammengefasst. zusammengefasst.

Auch Flächen können zu 'Physical Groups' zusammengefasst werden. Typischerweise sind dies Areale mit den gleichen Materialeigenschaften (Permittivität) und/oder gleichen Quellen (freie Raumladungen). In dem gezeigten Beispiel gibt es drei sogenannte 'Physical Surfaces', eine welche den Bereich der umschließenden Luft modelliert, und zwei zur Modellierung eines geschichteten Dielektrikums zwischen den Kondensatorplatten.

2.1.2 Generierung des Gitters

Gmsh erlaubt die Verwendung von verschiedenen Algorithmen zur Gittergenerierung. In der Standardeinstellung wählt Gmsh automatisch einen geeigneten Algorithmus aus, wobei sich dies als völlig zufriedenstellend herausgestellt hat. Wie schon bei der Geometrie, erfolgt die Generierung des Gitters 'Bottom-Up' wobei zuerst Linen, dann Flächen und schließlich Volumen bearbeitet werden. Ein simpler Klick auf *Mesh* → *2D* führt alle benötigten Schritte durch, wobei standardmäßig ein lineares, 3-knotiges Dreiecksgitter erzeugt wird. Zum Wechsel auf ein Gitter höherer Ordnung ist ein Klick auf *Mesh* → *Set order<n>* nötig, wobei *<n>* für die gewünschte Gitterordnung steht. Um das bestehende Gitter zu verfeinern, muss lediglich auf *Mesh* → *Refine by splitting* geklickt werden. Bei unpassender Aufteilung des verfeinerten Gitters empfiehlt sich ein erneuter Klick auf *Mesh* → *2D* wodurch sich die Aufteilung der Elemente wieder verbessern sollte.

Zum Export des Gitters ist folgender Ablauf zu befolgen:

- *File* → *Export*
- Auswahl des Ordners und Dateinamens **mit der Endung .msh** (Gmsh erkennt des Typ der zu Exportierenden Datei anhand seiner Endung)
- Auswahl der 'Version 2' unter den anschließend angezeigten Optionen

Anmerkung: Ein simpler Export mittels *File* → *Save mesh* ist nicht möglich, da Gmsh dann das Gittern in einer .msh-Datei der Version 4 abspeichert, das FEM-Tool jedoch nur Version 2 unterstützt.

Anmerkung: Die Generierung des Gitters kann auch automatisiert im FEM-Tool erfolgen. Somit ist ein händischer Export nur nötig wenn spezielle Änderungen am Gitter von Hand vorgenommen werden müssen.

2.2 Import und Verarbeitung des FEM-Gitters

In diesem Abschnitt wird kurz der Import und die Verarbeitung des im vorherigen Kapitel erstellten FEM-Gitters beschrieben. Dabei wird genauer auf die Methodik zur korrekten Interpretation der Randbedingungen eingegangen. So erfordert zum Beispiel

die Berechnung des Elementgleichungssystems ein Kurvenintegral entlang des neumannschen Randes, wobei sich diese aus mehreren Dreiecksseiten zusammensetzt. Somit ist es zwingend notwendig aus dem generierten Gitter herauszulesen welche Seite oder Seiten der entsprechenden Elemente am neumannschen Rand liegen.

2.2.1 Import des Gitters

Wie schon zuvor erwähnt unterstützt benötigt die Software eine Gitterdatei der Version 2. Dabei handelt es sich um ASCII-codierte Dateien mit mindestens folgenden Informationen:

- Das Format der Datei im Abschnitt *\$MeshFormat\$*. Die Software unterstützt nur Dateien der Version 2.2.0.8
- Informationen über die 'Physical Groups' der Problemgeometrie im Abschnitt *\$Physical Names\$*. Dabei gibt der erste Eintrag des Abschnitts die Anzahl der 'Physical Groups' an. Jeder weitere Eintrag steht für eine 'Physical Group' definiert durch jeweils drei Parameter:
 1. Dimension der 'Physical Group'. 1: 1-dimensional (Kurve), 2: 2-dimensional (Fläche)
 2. ID. Jede Gruppe bekommt eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifikation zugewiesen.
 3. Name. Jener Name der in Gmsh der Gruppe zugewiesen wurde.
- Daten der Elementknoten des Gitters im Abschnitt *\$Nodes\$*. Der erste Eintrag gibt wieder die Anzahl der Knoten an, jeder weitere Eintrag steht für einen Knoten, wobei die erste Zahl eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifizierung des Knotens darstellt. Die weiteren drei Einträge sind Gleitkommazahlen für die x-, y- und z-Koordinaten.
- Die Definitionen der finiten Elemente im Abschnitt *\$Elements\$*. Der erste Eintrag gibt wieder Anzahl der Elemente an, und jeder weiter Zeile definiert ein Element nach dem folgenden Schema:
 1. ID. Eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifikation des Elements.
 2. Typ des Elements. Gmsh kennt viele verschiedene Elementtypen. Für eine vollständige Liste sei auf die Dokumentation von Gmsh verwiesen ([?]). Da die Software dreieckige finite Elemente bis zur Ordnung 3 unterstützt sind hier folgende Einträge möglich:
 - 2: 2-knotige lineare Linie/Kurve
 - 3: 3-knotiges lineares Dreieckselement
 - 8: 3-knotige quadratische Line/Kurve
 - 9: 6-knotiges quadratisches Dreieckselement

- 26: 4-knotige kubische Linie/Kurve
- 21: 10-knotiges kubisches Dreieckselement

Anmerkung: In Zukunft könnten weitere Elementtypen unterstützt werden.

3. Der nächste Eintrag gibt die Anzahl der 'Physical Tags' an. Auch hier sei zu deren genauen Bedeutung auf die Dokumentation von Gmsh verwiesen.[?]. Standardmäßig ist der erste Eintrag danach die ID der 'Physical Group' der das Element angehört. Alle Weiteren 'Tags' werden nicht benötigt.
4. 'Physical Tage'. Siehe vorheriger Punkt.
5. IDs der Elementknoten. Je nach Elementtyp (siehe oben) finden sich nun die IDs der Knoten welche das Element definieren. Dabei ist zu beachten dass Gmsh die Knoten anders als das FEM-Tool definiert. Hierbei sei auf die Gmsh Dokumentation, Abschnitt 9.2 verwiesen. Die Definition welche das FEM-Tool verwendet findet sich in diesem Dokument unter Abschnitt 1.2. Es ist also ein Umordnen der Knoten notwendig, was jedoch von der Software automatisch beim Import durchgeführt wird.

Eine Beispielhafte Gitterdatei zu dem in Abbildung 5 gezeigten Beispiel findet sich in Code 1.

2.2.2 Verarbeitung der Gitterinformation

Nach erfolgreichem Import der Gitterinformation ist als letzter Schritt or der eigentlichen Lösung nun notwendig die Randbedingungen des Problems, sowie Materialeigenschaften und weitere Informationen wie zum Beispiel Quellen (freie Raumladungen etc.) den einzelnen Elementen zuzuordnen. Hierbei kommen die bei der Erstellung der Geometrie definierten 'Physical Groups' zum Tragen.

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, ist jedes finite Element einer solchen Gruppe zugeteilt. Für die hier betrachteten zweidimensionalen Probleme können zwei Arten von *Physical Groups* definiert werden: Kurven (*Physical Curves*) und Flächen (*Physical Surfaces*). Erstere beschreiben die dirichletschen und neumannschen Randbedingungen und Ihnen sind somit nur eindimensionale Element zugeordnet. Letztere beschreiben die Materialien des Problemgebietes sowie dessen Quellen. Daher sind solchen Gruppen nur zweidimensionale Elemente zugeordnet.

Folgende Parameter müssen nun jedem Element zugeordnet werden:

- Knoten am dirichletschen Rand: Das Potential des entsprechenden Elementknotens ist bereits vorgegeben, was bei der Berechnung des Elementgleichungssystems entsprechend berücksichtigt werden muss.
- Knoten und Seiten am neumannschen Rand: Wie in (33) ersichtlich erfordert die Berechnung von r_j ein Integral über die neumannsche Randfläche, welche im zwei-

dimensionalen Fall zu einem Kurvenintegral entartet. Dabei ist es wichtig zu wissen welche Dreiecksseite am neumannschen Rand liegt.

- Materialeigenschaften im Element: Wie in 32 ersichtlich ist es notwendig ϵ_x und ϵ_y für jedes Element zu kennen. Die Deklaration von ϵ_x und ϵ_y erfolgt in einem separaten File, welches in Abschnitt ... genauer behandelt wird. Die Zuordnung zum entsprechenden Element erweist sich als trivial da jeder Elementdefinition die ID der entsprechenden 2D Physical Group beiliegt.
- Analog zu den Materialeigenschaften verhält es sich mit den Quellen innerhalb eines Elements. Die Quellen kommen z.B. bei der Berechnung von (33) als Parameter ρ zum Tragen. Auch hier erweist sich die Zuordnung wieder als trivial.

Die Zuordnung der Knoten und Dreiecksseiten an den Rändern des Problems wird im folgenden Kapitel beschrieben.

2.2.3 Zuordnung der Knoten am dirichletschen- und Dreiecksseiten am neumannschen Rand

Wie bereits oben erwähnt ist eine direkte Zuordnung der Dreieckselemente am dirichletschen und neumannschen Rand nicht möglich. Vielmehr muss ein Umweg über die eindimensionalen Elemente gegangen werden. Die angewandten Algorithmen werden im Folgenden beschrieben:

Knoten am dirichletschen Rand:

1. Man ermittle alle Elementknoten am gewählten Rand aus den dem Rand zugeordneten Kurvenelementen. Da die Definition der Kurvenelemente in der Gitterdatei bereits die ID der entsprechenden *Physical Group* enthält ist diese Aufgabe trivial.
2. Man suche nun alle Dreieckselemente die die vorher ermittelten Knoten beinhalten und speichere diese Zuordnung samt Randwerte für die entsprechenden Knoten.

Dreiecksseiten am neumannschen Rand:

1. Man wende den gleichen Algorithmus wie oben an.
2. Man ermittle die Dreiecksseite am neumannschen Rand durch Vergleich der Rand- und Elementknoten:
Je nach Elementtype ist eine Dreiecksseite durch 2, 3 oder 4 Knoten definiert. Siehe dazu Abschnitt 1.2. Liegt ein Dreieckselement am neumannschen Rand, so stimmen alle Knoten einer oder mehrerer Seiten mit den Knoten am Rand überein. Hierbei ist zu erwähnen dass auch bei mehr als 2 Knoten pro Seite immer nur eine ganze Seite am Rand liegen kann!
Wie aus (33) bekannt muss ein Kurvenintegral entlang der entsprechenden Dreiecksseite am neumannschen Rand durchgeführt werden. Aufgrund der Verwendung von isoparametrischen finiten Elementen sind im lokalen Koordinatensystem

nur drei verschiedene Kurvenintegrale möglich, was eine statische Zuordnung eines Kurvenintegrals zu jeder Seite ermöglicht. Zu diesem Zweck wird jeder Dreiecksseite eine Nummer zugewiesen von welcher ausgehend ein bestimmtes Kurvenintegral berechnet wird. Die Zuordnung lautet wie folgt:

- Die Dreiecksseite auf der ξ -Achse sei definiert als *Seite 1*.
- Die Dreiecksseite auf der η -Achse sei definiert als *Seite 2*.
- Die verbleibende Seite sei definiert als *Seite 3*

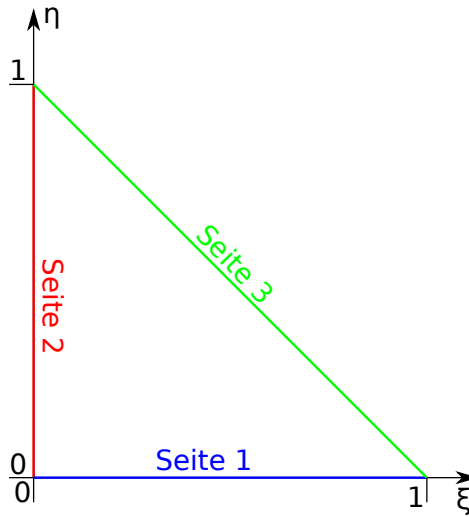


Abbildung 4: Zuordnung der Dreiecksseiten

3. Zu guter Letzt ordne man noch den Dreiecksseiten am Rand den Wert der Randbedingung (in (33) der Parameter σ) zu.

Um die in diesem Abschnitt gezeigten Zusammenhänge zu verdeutlichen, wird die Zuordnung der Dreiecksseiten zum neumannschen Rand anhand des in Abbildung 5 gezeigten Beispiels verdeutlicht. Eine beispielhafte Gitterdatei ist in Code 1 gezeigt.

```
$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$PhysicalNames
2
1 1 "neumann_boundary"
2 2 "material"
$EndPhysicalNames
$Nodes
4
1 <x1> <y1> <z1>
2 <x2> <y2> <z2>
3 <x3> <y3> <z3>
4 <x4> <y4> <z4>
```

```

$EndNodes
$Elements
1 2 2 1 x 2 3
2 2 2 1 x 1 2
3 3 2 2 x 1 2 4
4 3 2 2 x 4 2 3
$EndElements

```

Code 1: Exemplarische Gitterdatei

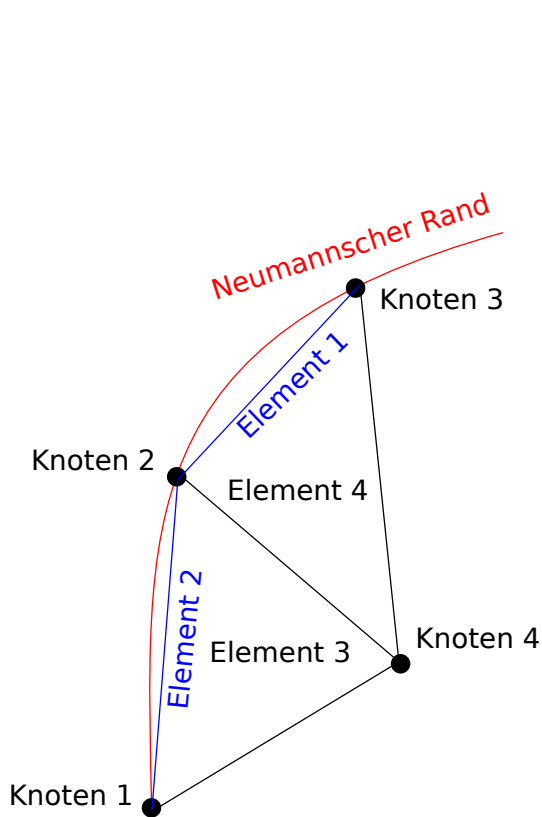


Abbildung 5: Zuordnung der Dreiecksseiten

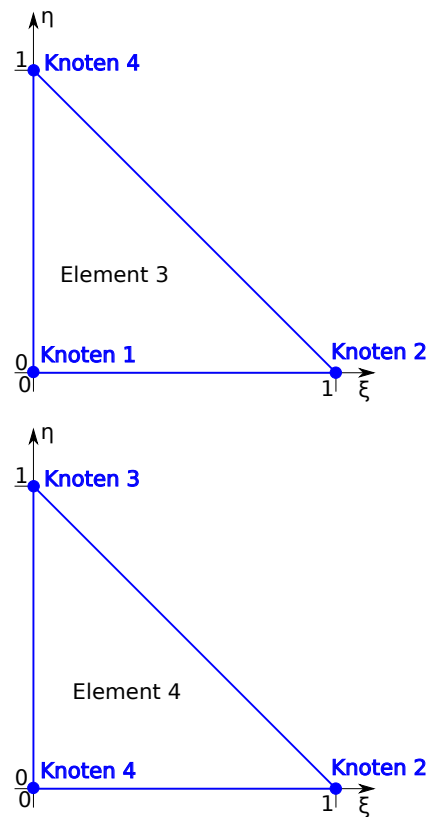


Abbildung 6: Elemente 3 und 4 im lokalen Koordinatensystem

Wie aus Code 1 ersichtlich, setzt sich die Geometrie aus 4 Knoten und 4 Elementen zusammen. Abbildung 6 zeigt die Dreieckselemente 3 und 4 in ihrem lokalen Koordinatensystem.

Wie mit Hilfe von Abbildung 4 zu erkennen ist, liegt Element 3 mit Seite 1, und Element 4 mit Seite 2 am neumannschen Rand. Der oben beschriebene Algorithmus wird nun auf dieses Beispiel angewandt um dessen Funktion zu erklären.

1. Die Elemente 1 und 2 sind, wie aus Code 1 ersichtlich der *Physical group* 1 zugeteilt. (Vierter Eintrag in den beiden Elementdefinitionen). Somit ist nun bekannt dass die Knoten 1, 2 und 3 am neumannschen Rand liegen.

2. Die Knoten 1 und 2 von Element 3 stimmen mit den Knoten am neumannschen Rand überein. Zudem definieren sie die Dreiecksseite 1, über welche in weiterer Folge integriert werden muss. Selbiges lässt sich für Seite 2 von Element 4 durchführen.

2.3 Berechnung der Elementgleichungssysteme (gesamt: 3 Seiten)

2.3.1 Berechnung der Element-Matrix (2 Seite)

2.3.2 Berechnung des Rechtsseiten-Vektors (1 Seite)

2.4 Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems (gesamt: 1 Seite)

3 Simulationen

3.1 Simulation 1 (2 Seiten)

3.2 Simulation 2 (2 Seiten)

3.3 Simulation 3 (2 Seiten)