

Seminararbeit:
Finite Elemente Software
zur Lösung von
elektrostatischen und stationären
Strömungsfeld-Problemen

vorgelegt von:
Tobias Florian Lafer (01530012)
am 21. August 2019

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Bauernfeind

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	4
1.1. Die Methode der finiten Elemente	4
1.2. Das Ritzsche Verfahren	4
1.3. Das Galerkinsche Verfahren	5
1.4. Finite Elemente und Formfunktionen	6
1.4.1. Lineare Dreieckselemente	6
1.4.2. Quadratische Dreieckselemente	7
1.4.3. Kubische Dreieckselemente	8
1.5. Problemtypen	9
1.5.1. Elektrostatische Probleme	10
1.5.2. Stationäre Strömungsfeldprobleme	11
2. Implementierung	12
2.1. Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh	12
2.1.1. Erstellung der Geometrie	12
2.1.2. Generierung des Gitters	12
2.2. Import und Verarbeitung des FEM-Gitters	13
2.2.1. Import des Gitters	13
2.2.2. Verarbeitung der Gitterinformation	14
2.2.3. Zuordnung der Knoten am dirichletschen- und Dreiecksseiten am neu- mannschen Rand	15
2.3. Berechnung der Elementgleichungssysteme	17
2.3.1. Elementmatrix-Koeffizienten k_{ij}	18
2.3.2. Rechtsseiten-Elemente r_j	19
2.4. Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems	20
3. Simulationen	21
3.1. Beispiel 1: Idealer Plattenkondensator	21
3.2. Beispiel 2: Strömungsfeld einer Blechplatte	22
3.3. Beispiel 3: Zylinderelektroden über leitender Ebene	25
A. Formfunktionen und ihre partiellen Ableitungen	26
A.1. Lineare Dreieckselemente	26
A.1.1. Formfunktionen	26
A.1.2. Partielle Ableitungen nach ξ	26
A.1.3. Partielle Ableitungen nach η	26
A.2. Quadratische Dreieckselemente	27
A.2.1. Formfunktionen	27
A.2.2. Partielle Ableitungen nach ξ	27
A.2.3. Partielle Ableitungen nach η	27
A.3. Kubische Dreieckselemente	27
A.3.1. Formfunktionen	27
A.3.2. Partielle Ableitungen nach ξ	28
A.3.3. Partielle Ableitungen nach η	28
Literatur	29

Zusammenfassung

Die Methode der finiten Elemente ist eine der am weitesten verbreiteten Methoden zur numerischen Lösungen von Randwertproblemen in Wissenschaft und Technik. Am Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik begann man daher schon vor vielen Jahren mit der Entwicklung von Softwarepaketen zur numerischen Lösung solcher Probleme aus dem Gebiet der Elektrotechnik. Aus diesen Bemühungen entstanden die Softwarepakete *EleFAnT2D* und *EleFAnT3D*.

Obwohl über die Jahre stetig erweitert und optimiert, wurde in jüngster Vergangenheit der Entschluss gefasst ein neues Softwarepaket mit speziellem Fokus auf Verwendung in der Lehre zu entwickeln, da die *EleFAnT*-Softwarepakete durch ihre Mächtigkeit in ihrer Handhabung recht komplex sind.

Diese Seminararbeit ist Teil der Entwicklung jenes neuen Programms und soll ich auf grundlegende Funktionen wie die Anbindung des CAD-Programms *Gmsh*[1] zur Erstellung der Geometrie und des Gitters, sowie der Implementierung eines einfachen FEM-Solvers zur Lösung zweidimensionaler, ebener elektrostatischer und stationärer Strömungsfeld-Probleme fokussieren.

1. Theorie

1.1. Die Methode der finiten Elemente

Die nachfolgenden Abschnitte in diesem Kapitel basieren, bis auf Abschnitt 1.4, im wesentlichen auf [2].

Die analytische Lösung eines Randwertproblems, wie jenes definiert in (1), ist nur in sehr wenigen Fällen möglich. Zur numerischen Lösung existieren daher verschiedenste Methoden, wobei eine der Prominentesten die *Methode der finiten Elemente* darstellt. Bei dieser Methode wird das zu untersuchende Problemgebiet Ω in viele einzelne Teilgebiete unterteilt, in welchen jeweils die gesuchte Funktion $u(x)$ durch Verwendung von Ansatzfunktionen (zum Beispiel Polynomen) approximiert wird.

Ein Beispiel für ein Randwertproblem ist

$$L\{u(x)\} - f(x) = 0 \quad (1)$$

mit $u = \bar{u} \forall x \in \Gamma_D$ als dirichletschen, und $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_N \forall x \in \Gamma_N$ als neumannschen Randbedingungen, L als Differentialoperator, f als gegebener und u als gesuchter Funktion.

Als häufige Ansätze für die numerische Berechnung dienen dabei das sogenannte *Ritzsche Verfahren* (Spezialfall einer Variationsmethode) oder das *Galerkinsche Verfahren* (Spezialfall einer Residuenmethode). Diese Verfahren führen auf ein lineares Gleichungssystem (2) mit den Werten der gesuchten Funktion u an den Elementknoten als Unbekannte \mathbf{u}_{ges} .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{r} \quad (2)$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{A} und des Rechtsseitenvektors \mathbf{r} ergeben sich aus den (i.A. differentiellen) Zusammenhängen im Problemgebiet, den vorgegebenen Randwerten und der Geometrie sowie deren Unterteilung.

1.2. Das Ritzsche Verfahren

Physikalische Systeme gehorchen in vielen Fällen sogenannten *Extremalprinzipien*. Ein solches Prinzip bezeichnet die Eigenschaft eines Systems einen Zustand einzunehmen in dem eine bestimmte Größe minimal oder maximal ist. Zum Beispiel verläuft die Bewegung eines dynamischen Systems immer so dass dessen Bewegungsenergie minimal ist. Eine bekannte Anwendung dieses Prinzips ist der *Lagrange Formalismus*

Ein in der Elektrotechnik vorkommendes Extremalprinzip ist das *Kelvinsche Prinzip* welches besagt dass sich die Ladungsverteilung in einem elektrostatischen System so einstellt, dass die Energie in diesem System minimal ist.

Mathematisch ausgedrückt muss somit die elektrostatische Energie

$$W(V) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} (-\text{grad}V)^2 d\Omega \quad (3)$$

mit $\mathbf{E} = -\text{grad}(V)$ und $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, minimiert werden. Wählt man nun eine Potentialfunktion $V^* = V + \beta\eta$, wobei V den wahren Potentialverlauf, η einer **beliebigen** Abweichung von V^*

gegenüber dem wahren Verlauf, und β einem numerischen *Schaarparameter* entspricht, so kann über

$$\left. \frac{dW(V^*)}{d\beta} \right|_{\beta=0} = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} (-\text{grad}(V + \beta\eta))^2 d\Omega \right) \Big|_{\beta=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

der wahre Verlauf V bestimmt werden.

Die aus (4) resultierenden Differentialgleichungen bezeichnet man als *Euler-Lagrange Differentialgleichungen*. Die Idee des Ritzschen Verfahrens ist nun, einen Ansatz für V^* zur Lösung der Differentialgleichungen zu wählen.

Wählt man als Ansatz für V^*

$$V^* = \phi_0 + \sum_{k=1}^N c_k \phi_k \quad (5)$$

so können nach Einsetzen in (4) die c_j über ein lineares Gleichungssystem ermittelt werden. ϕ_0 und ϕ_k bezeichnet man als *Testfunktionen*.

Man bezeichnet (3) als *Funktional* und (4) als *erste Variation* des Funktionals.

Hat man nun, wie bei einem Randwertproblem üblich, eine Differentialgleichung gegeben, so muss zuerst ein äquivalentes Funktional gefunden werden. Für einige Fälle ist dies über Tabellenbücher möglich.

1.3. Das Galerkinsche Verfahren

Die Operatorgleichung aus (1) ist für alle Werte von $u(x)$ exakt erfüllt. Wählt man nun für u einen Approximationsansatz u^* , so ist (1) nun im Allgemeinen nicht mehr exakt erfüllt. Man definiert $\epsilon := L\{u^*\} - f$ als das sogenannte *Residuum* (Rest) und möchte die Parameter der Approximationsfunktion so verändern dass

$$\int_{\Omega} \epsilon w d\Omega = \int_{\Omega} (L\{u^*\} - f) w d\Omega = 0 \quad (6)$$

ist. w bezeichnet hierbei eine **beliebige** Gewichtsfunktion. Man spricht nun von der *Methode der gewichteten Residuen*.

Wählt man nun als Ansatz für u^*

$$u^* = \phi_0 + \sum_{k=1}^N c_k \phi_k \quad (7)$$

und für die Gewichtsfunktion w

$$w = \phi_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (8)$$

mit $\alpha_k \neq 0$ so spricht man von der *Galerkin-Bubnov-Methode* oder vom *Galerkinschen Verfahren*. Durch Einsetzen der Ansätze für u^* und w in (6) lassen sich die c_k über ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Die α_k müssen nicht berechnet werden, da sie als beliebig und $\neq 0$ angenommen werden.

1.4. Finite Elemente und Formfunktionen

Ein häufiger Ansatz zur Unterteilung des Problemgebietes ist jener der Unterteilung in Dreiecke bzw. Tetraeder. Innerhalb jedes dieser Elemente wird die gesuchte Funktion u aus 1, im Weiteren auch Potential genannt, durch einfache Funktionen, meist Polynome erster oder zweiter Ordnung, angenähert.

Für ein Element, welches durch N Knoten definiert wird lautet ein möglicher Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} N_k^e u_k \quad (9)$$

wobei die Funktionen N_k^e als *Formfunktionen* des e -ten Elements bezeichnet werden. Sie besitzen im k -ten Elementknoten den Wert 1 und in allen Anderen den Wert 0.

Für ein Dreieck mit einem Knoten an jeder Ecke ($N = 3$) ergeben sich lineare Funktionen für N_k^e , für Dreiecke mit zusätzlichen Knoten in der Mitte jeder Seite ($N = 6$) quadratische Funktionen usw.

Da die Funktionen für N_k^e nur von der Geometrie des jeweiligen Elements abhängen bleiben einzig die u_k als gesuchte Parameter, welche durch Verwendung des Ansatzes aus (9) im z.B. Galerkinschen Verfahren ermittelt werden können.

Wie aus (9) erkennbar, müssen für jedes Element die N_k^e separat ermittelt werden da sie von der jeweiligen Elementgeometrie abhängen. Betrachtet man nun jedes finite Element in einem lokalen Koordinatensystem, welches im Weiteren durch die Variablen ξ, η dargestellt wird, und verwendet die Formfunktionen auch zur Beschreibung der Elementgeometrie, so spricht man von *isoparametrischen finiten Elementen*.

Die Formfunktionen müssen dabei nur einmalig für einen bestimmten Typ von finiten Elementen (z.B. lineare Dreiecke) einmalig ermittelt werden. Die Zusammenhänge für Geometrie und Potential lauten dann wie folgt:

$$u = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) u_k \quad x = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) x_k \quad y = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) y_k \quad (10)$$

wobei x_k und y_k die Koordinaten des k -ten Knoten darstellen. Sinnvollerweise sind die jeweiligen finiten Elemente im lokalen ξ, η -Koordinatensystem geradlinig angesetzt. (Siehe Abbildung 2) Die Krümmung und Verzerrung im globalen Koordinatensystem ergibt sich anschließend durch (10).

1.4.1. Lineare Dreieckselemente

Das isoparametrische lineare finite Dreieckselement ist im lokalen ξ, η -Koordinatensystem wie in Abbildung 1 gezeigt dargestellt.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = (1, 0) \quad (11)$$

Als Ansatz für die Potentialfunktion bzw. die globalen Koordinaten x und y wählt man:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \eta \quad (12)$$

Die drei Unbekannten c_0 , c_1 und c_2 können durch Einsetzen der Koordinaten der Elementknoten ermittelt werden.

$$\begin{aligned} P_1 : u(0,0) &= u_1 = c_0 \\ P_2 : u(1,0) &= u_2 = c_0 + c_1 \\ P_3 : u(0,1) &= u_3 = c_0 + c_2 \end{aligned} \quad (13)$$

bzw. unter Verwendung der Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (14)$$

Die Lösung $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}$ lautet:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Oder ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} c_0 &= u_1 \\ c_1 &= u_2 - u_1 \\ c_2 &= u_3 - u_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Setzt man dies wiederum in (12) ein, so erhält man:

$$u(\xi, \eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta \quad (17)$$

bzw. nach einfacher Umformung:

$$u(\xi, \eta) = \underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} u_1 + \underbrace{(\xi)}_{N_2} u_2 + \underbrace{(\eta)}_{N_3} u_3 \quad (18)$$

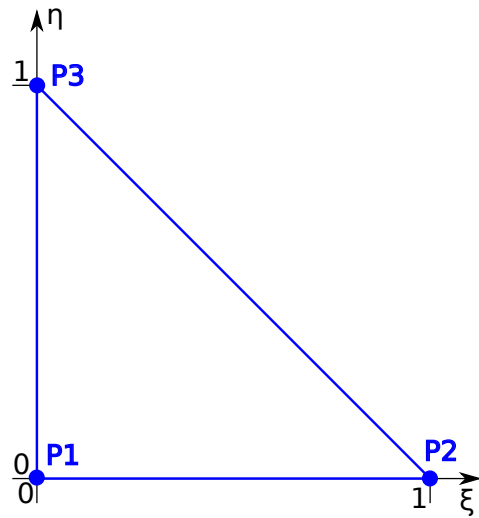


Abbildung 1: Ansatz für lineare Elemente

Die Formfunktionen für das lineare finite Dreieckselement lauten also:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (19)$$

Die Formfunktionen für alle drei, in diesem Kapitel besprochenen Elementtypen, sowie deren partielle Ableitungen, finden sich in Anhang A.

1.4.2. Quadratische Dreieckselemente

Das quadratische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 2 definiert. Die Koordinaten der sechs Elementknoten lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0), & P_2 &= (1/2,0), & P_3 &= (1,0), & P_4 &= (1/2,1/2) \\ P_5 &= (0,1), & P_6 &= (0,1/2) \end{aligned} \quad (20)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 \quad (21)$$

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$u(0, 0) = u_1 = c_0 \quad (22)$$

$$u(1/2, 0) = u_2 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_4$$

$$u(1, 0) = u_3 = c_0 + c_1 + c_4$$

$$u(1/2, 1/2) = u_4 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_5$$

$$u(0, 1) = u_5 = c_0 + c_2 + c_5$$

$$u(1/2, 0) = u_6 = c_0 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_5$$

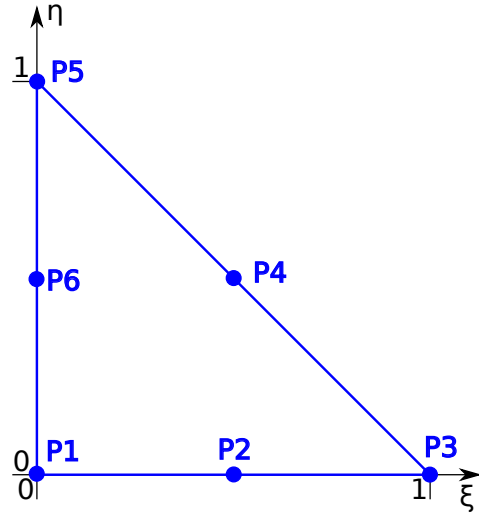


Abbildung 2: Ansatz für quadratische Elemente

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.4.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_6$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang A .

1.4.3. Kubische Dreieckselemente

Das kubische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 3 definiert.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (1/3, 0), & P_3 &= (2/3, 0), & P_4 &= (1, 0), & P_5 &= (2/3, 1/3) \\ P_6 &= (1/3, 2/3), & P_7 &= (0, 1), & P_8 &= (0, 2/3), & P_9 &= (0, 1/3), & P_{10} &= (1/3, 1/3) \end{aligned} \quad (23)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 + c_6\xi^2\eta + c_7\xi\eta^2 + c_8\xi^3 + c_9\eta^3 \quad (24)$$

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= u_1 = c_0 \\
u(1/3,0) &= u_2 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{27}c_8 \\
u(2/3,0) &= u_3 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{8}{27}c_8 \\
u(1,0) &= u_4 = c_0 + c_1 + c_4 + c_8 \\
u(2/3,1/3) &= u_5 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{4}{27}c_6 + \frac{2}{27}c_7 + \frac{8}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/2,0) &= u_6 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{2}{27}c_6 + \frac{4}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1) &= u_7 = c_0 + c_2 + c_5 + c_9 \\
u(0,2/3) &= u_8 = c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1/3) &= u_9 = c_0 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/3,1/3) &= u_{10} = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_6 + \frac{1}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9
\end{aligned} \tag{25}$$

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.4.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_{10}$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang A .

1.5. Problemtypen

In diesem Kapitel werden die in der Software implementierten Problemtypen beschrieben. In beiden Fällen handelt es sich um zweidimensionale, ebene Probleme. Resultat dieses Abschnitts werden analytische Berechnungsvorschriften für die einzelnen Elementgleichungssysteme sein.

Die Berechnungen aus diesem Abschnitt stammen, sofern nicht anders angegeben, aus [2] Kapitel 7 und 8. Für ausführliche Herleitungen, auf welche in diesem Fall bewusst verzichtet wird, sei auf das oben genannte Werk verwiesen.

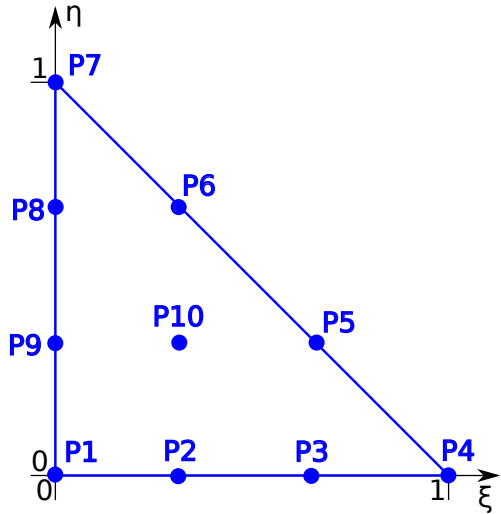


Abbildung 3: Ansatz für kubische Elemente

Wie aus Abschnitt 1.1 bekannt, ist das Randwertproblem zuerst als Operatorgleichung mit entsprechenden Randwertbedingungen zu formulieren. Die Operatorgleichung kann nun entweder direkt im Galerkinschen Verfahren oder über Umweg eines äquivalenten Funktionals im Ritzschen Verfahren verwendet werden. Dabei wird für die gesuchte Funktion u in jedem Teilgebiet (finites Element) ein entsprechender Approximations-Ansatz wie in Abschnitt 1.4 ermittelt, eingesetzt. Das Ergebnis sind 'lokale' lineare Gleichungssysteme (für jedes Element eines), welche zu einem großen, 'globalen' Gleichungssystem assembliert werden müssen. Auf die Assemblierung wird dabei genauer in Abschnitt 2.4 eingegangen.

Ausgangspunkt für Probleme aus der Elektrotechnik sind im Allgemeinen die Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (29)$$

mit den Materialzusammenhängen

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E} \quad (30)$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (31)$$

mit $[\epsilon]$ und $[\mu]$ als ortsabhängigen Materialtensoren.

1.5.1. Elektrostatistische Probleme

Für den elektrostatischen Fall ist \mathbf{J} , \mathbf{H} , sowie sämtliche zeitlichen Änderungen $\equiv 0$ wodurch sich \mathbf{B} sowie die rechte Seite von (26) zu $\equiv 0$ ergeben.

Ein elektrostatisches Problem wird somit durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (33)$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes aus (32) kann nun folgender Ansatz für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} verwendet werden:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V \quad (34)$$

mit V als sogenanntem *Skalapotential*.

Setzt man (34) nun unter Verwendung von (30) in (33) ein, so erhält man die partielle Differentialgleichung für V als:

$$\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad} V = -\rho \quad (35)$$

Hierbei entspricht $\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad}$ dem Differentialoperator L aus (1), das Potential V der gesuchten Funktion u und $-\rho$ der gegebenen Funktion f .

Die Randbedingungen für ein solches Problem sind gegeben als

$$V = \bar{V} \quad (36)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} V = \sigma \quad (37)$$

am neumannschen Rand Γ_N , mit \mathbf{n} als Flächennormale und σ als gegebener Flächenladungsdichte.

Unter Verwendung des Ritzschen *oder* Galerkinschen Verfahrens erhält man nun Formeln zur Berechnung der Elementgleichungssysteme, wobei beide Verfahren dieselben (!) Formeln liefern. Löst man (4) oder (6) mit den entsprechenden Ansätzen, so ergibt sich für jedes Element ein quadratisches lineares *Elementgleichungssystem* $[k_{ij}] \cdot \{V_j\} = \{r_j\}$ der Dimension $N \times N$ mit N als Anzahl der Elementknoten.

$$k_{ij} = \int_x \int_y \left(\epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (38)$$

$$r_j = \int_x \int_y N_i \rho dx dy + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma \quad (39)$$

Anmerkung: Um auf die oben gezeigte Form für k_{ij} zu kommen ist es notwendig den Permittivitätstensor $[\epsilon]$ auf die Hauptachsenform zu transformieren:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

Man beachte dass für Formfunktionen von isoparametrischen finite Elementen $N_i = N_i(\xi, \eta)$ gilt, wodurch alle Integrale in den Variablen ξ und η durchgeführt werden müssen. Die entsprechende Substitution sowie die Realisierung der Integrale werden in Abschnitt 2.3 genauer behandelt.

1.5.2. Stationäre Strömungsfeldprobleme

Stationäre Strömungsfeldprobleme lassen sich über das Gesetz der Ladungserhaltung definieren:

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \quad (40)$$

Es muss außerdem das Ohmsche Gesetz in seiner differentiellen Form gelten:

$$\mathbf{J} = [\gamma] \mathbf{E} \quad (41)$$

mit $[\gamma]$ als ortsabhängigem Tensor der spezifischen Leitfähigkeit.

Stationäre Strömungsfeldprobleme können somit analog zu elektrostatischen Problemen mittels folgender Differentialgleichung ermittelt werden:

$$\text{div}[\gamma] \text{grad} V = 0 \quad (42)$$

Als Randbedingungen ergeben sich:

$$V = \bar{V} \quad (43)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} V = J_e \quad (44)$$

am neumannschen Rand Γ_N , wobei J_e die eingeprägte Flächenstromdichte am Rand darstellt.

Man erkennt die starken Äquivalenzen zwischen stationären Strömungsfeldproblemen und elektrostatischen Problemen. Das Elementgleichungssystem ergibt sich somit für diese Probleme als

$$k_{ij} = \int_x \int_y \left(\gamma_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (45)$$

$$r_j = \int_x \int_y N_i J_e dx dy \quad (46)$$

2. Implementierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit diversen Details der Implementierung des finite Elemente Algorithmus der Software. Es wird beschrieben wie mittels der Software Gmsh die Problemgeometrie erstellt, sowie ein finite Elemente Gitter generiert und exportiert wird. Anschließend erfolgt ein kurzer Umriss des Imports und der Verarbeitung des Gitters zur Verwendung im eigentlichen Lösungsalgorithmus auf den detaillierter am Ende dieses Kapitels eingegangen wird.

2.1. Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh

2.1.1. Erstellung der Geometrie

Die Erstellung der Geometrie sowie die Generierung des FEM-Gitters erfolgt mit der Open-Source Software Gmsh. [1] Gmsh stellt zwei CAD-Kernel ('Built-In' und 'OpenCASCADE') zur Verfügung welche jedoch sehr ähnlich zu bedienen sind. Auf Unterschiede wird entsprechend hingewiesen.

Gmsh nutzt dabei eine eigene Skript-Sprache zur Erstellung der Geometrie, wobei die einzelnen Kommandos für den jeweiligen CAD-Kernel übersetzt werden. Eine Geometrie in Gmsh wird somit durch ein ASCII-codiertes File mit einer Sequenz von Kommandos repräsentiert. Die Erstellung der Geometrie erfolgt dabei in *Bottom-Up*-Reihenfolge. Dabei werden zuerst Punkte im Raum festgelegt, welche dann durch Linien verbunden werden. Geschlossene Kurven aus mehreren aneinander grenzenden Linien bilden eine Fläche und geschlossene Oberflächen aus mehreren aneinander grenzenden Flächen ein Volumen. Für eine genauere Beschreibung des Ablaufs sei auf die sehr ausführliche Dokumentation auf der Gmsh-Homepage verwiesen ([1]).

Eine besondere Rolle bei der Erstellung der Problemgeometrie nehmen die sogenannten *Physical Groups* ein. Wie ihr Name schon sagt, sind dies Gruppen von Elementen (z.B. Linien) mit den gleichen physikalischen Eigenschaften. (z.B. dem gleichen Potential). *Physical curves* sind Gruppen von Linien und werden typischerweise zur Modellierung des dirichletschen oder neumannschen Randes verwendet. *Physical surfaces* sind Gruppen von Flächen welche typischerweise zur Modellierung von Arealen gleichen Materials oder gleicher Raumladungsdichte verwendet werden.

2.1.2. Generierung des Gitters

Gmsh erlaubt die Verwendung von verschiedenen Algorithmen zur Gittergenerierung. In der Standardeinstellung wählt Gmsh automatisch einen geeigneten Algorithmus aus, wobei sich dies als völlig zufriedenstellend herausgestellt hat. Wie schon bei der Geometrie, erfolgt die Generierung des Gitters 'Bottom-Up' wobei zuerst Linien, dann Flächen und schließlich Volumen bearbeitet werden. Ein simpler Klick auf *Mesh* → *2D* führt alle benötigten Schritte durch, wobei

standardmäßig ein lineares, 3-knotiges Dreiecksgitter erzeugt wird. Zum Wechsel auf ein Gitter höherer Ordnung ist ein Klick auf *Mesh* → *Set order*<n> nötig, wobei <n> für die gewünschte Gitterordnung steht. Um das bestehende Gitter zu verfeinern, muss lediglich auf *Mesh* → *Refine by splitting* geklickt werden. Bei unpassender Aufteilung des verfeinerten Gitters empfiehlt sich ein erneuter Klick auf *Mesh* → *2D* wodurch sich die Aufteilung der Elemente wieder verbessern sollte.

Beim Export des Gitters ist folgender Ablauf zu befolgen:

- *File* → *Export*
- Auswahl des Ordners und Dateinamens **mit der Endung .msh** (Gmsh erkennt den Typ der zu Exportierenden Datei anhand seiner Endung)
- Auswahl der 'Version 2' unter den anschließend angezeigten Optionen

Anmerkung: Ein simpler Export mittels *File* → *Save mesh* ist nicht möglich, da Gmsh dann das Gitter in einer .msh-Datei der Version 4 abspeichert, das FEM-Tool jedoch nur Version 2 unterstützt.

Anmerkung: Die Generierung des Gitters kann auch automatisiert im FEM-Tool erfolgen. Somit ist ein händischer Export nur nötig wenn spezielle Änderungen am Gitter von Hand vorgenommen werden müssen.

2.2. Import und Verarbeitung des FEM-Gitters

In diesem Abschnitt wird kurz der Import und die Verarbeitung des FEM-Gitters beschrieben. Dabei wird genauer auf die Methodik zur korrekten Interpretation der Randbedingungen eingegangen. So erfordert zum Beispiel die Berechnung des Elementgleichungssystems im 2D-Fall ein Kurvenintegral entlang des neumannschen Randes, wobei sich diese aus mehreren Dreiecksseiten zusammensetzt. Somit ist es zwingend notwendig aus dem generierten Gitter herauszulesen welche Seite oder Seiten der entsprechenden Elemente am neumannschen Rand liegen.

2.2.1. Import des Gitters

Wie schon zuvor erwähnt benötigt die Software eine Gitterdatei der Version 2. Dabei handelt es sich um ASCII-codierte Dateien mit **mindestens** folgenden Informationen:

- **Format der Datei im Abschnitt *\$MeshFormat\$*.** Die Software unterstützt nur Dateien der Version 2.2.0.8
- **Informationen über die 'Physical Groups' der Problemgeometrie im Abschnitt *\$Physical Names\$*.** Dabei gibt der erste Eintrag des Abschnitts die Anzahl der *Physical Groups* an. Jeder weitere Eintrag steht für eine *Physical Group*, definiert durch jeweils drei Parameter:
 1. **Dimension der *Physical Group*.** 1: 1-dimensional (Kurve), 2: 2-dimensional (Fläche)
 2. **ID.** Jede Gruppe bekommt eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifikation zugewiesen.
 3. **Name.** Jener Name der der *Physical Group* bei der Erstellung zugewiesen wurde.

- **Daten der Elementkonten des Gitters im Abschnitt *\$Nodes\$*.** Der erste Eintrag gibt wieder die Anzahl der Knoten an, jeder weitere Eintrag steht für einen Knoten, wobei die erste Zahl eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifizierung des Knotens darstellt. Die weiteren drei Einträge sind Gleitkommazahlen für die x-, y- und z-Koordinaten.
- **Definitionen der finiten Elemente im Abschnitt *\$Elements\$*.** Der erste Eintrag gibt die Anzahl der finiten Elemente an, und jede weitere Zeile definiert ein Element nach dem folgenden Schema:
 1. **ID.** Eine positive Ganzzahl zur eindeutigen Identifikation des Elements.
 2. **Typ des Elements.** Gmsh kennt viele verschiedene Elementtypen. Für eine vollständige Liste sei auf die Dokumentation von Gmsh verwiesen ([1]). Da die Software dreieckige finite Elemente bis zur Ordnung 3 unterstützt sind hier folgende Einträge möglich:
 - 2: 2-knotige lineare Linie/Kurve
 - 3: 3-knotiges lineares Dreieckselement
 - 8: 3-knotige quadratische Linie/Kurve
 - 9: 6-knotiges quadratisches Dreieckselement
 - 26: 4-knotige kubische Linie/Kurve
 - 21: 10-knotiges kubisches Dreieckselement

Anmerkung: In Zukunft könnten weitere Elementtypen unterstützt werden.
- 3. **Anzahl der *Physical Tags*.**
- 4. 'Physical Tage'. Auch hier sei zu deren genauen Bedeutung auf die Dokumentation von Gmsh [1] verwiesen. Standardmäßig ist der erste Eintrag nach der Anzahl der *Physical Tags* die ID der *Physical Group* der das Element angehört. Alle Weiteren *Tags* werden nicht benötigt.
- 5. **IDs der Elementknoten.** Je nach Elementtyp findet sich hier eine unterschiedliche Anzahl an Einträgen. Es ist zu beachten dass Gmsh die Reihenfolge der Knoten der finiten Elemente anders als das FEM-Tool definiert. Hierbei sei auf die Gmsh Dokumentation, Abschnitt 9.2 verwiesen. Die Definitionen des FEM-Tools finden sich in diesem Dokument unter Abschnitt 1.4. Es ist somit ein Umordnen der Knoten notwendig, was jedoch von der Software automatisch beim Import durchgeführt wird.

Eine Beispielhafte Gitterdatei zu dem in Abbildung 5 gezeigten Beispiel findet sich in Code 1.

2.2.2. Verarbeitung der Gitterinformation

Nach erfolgreichem Import der Gitterinformation ist als letzter Schritt vor der eigentlichen Lösung nun notwendig die Randbedingungen des Problems, sowie Materialeigenschaften und weitere Informationen wie zum Beispiel Quellen (freie Raumladungen etc.) den einzelnen Elementen zuzuordnen:

- **Knoten am dirichletschen Rand.** Das Potential des entsprechenden Elementknotens ist bereits vorgegeben, was bei der Berechnung des Elementgleichungssystems entsprechend berücksichtigt werden muss.

- **Knoten und Seiten am neumannschen Rand.** Wie aus (39) ersichtlich erfordert die Berechnung von r_j ein Integral über die neumannsche Randfläche, welches im zweidimensionalen Fall zu einem Kurvenintegral entartet. Dazu ist es notwendig zu wissen welche Dreiecksseiten der Elemente am neumannschen Rand liegen.
- **Materialeigenschaften im Element.** Wie in 38 ersichtlich ist es notwendig ϵ_x und ϵ_y für jedes Element zu kennen. Die Deklaration von ϵ_x und ϵ_y erfolgt in einem separaten File. Die Zuordnung zum entsprechenden Element erweist sich als trivial da jeder Elementdefinition die ID der entsprechenden 2D Physical Group beiliegt.
- **Quellen im Element.** Analog zu den Materialeigenschaften verhält es sich mit den Quellen innerhalb eines Elements. Die Quellen kommen z.B. bei der Berechnung von (39) als Parameter ρ zum Tragen. Auch hier erweist sich die Zuordnung wieder als trivial.

Die Zuordnung der Knoten und Dreiecksseiten an den Rändern des Problems wird im folgenden Kapitel beschrieben.

2.2.3. Zuordnung der Knoten am dirichletschen- und Dreiecksseiten am neumannschen Rand

Knoten am dirichletschen Rand:

1. Man ermittle alle Elementknoten am gewählten Rand aus den dem Rand zugeordneten Kurvenelementen. Da die Definition der Kurvenelemente in der Gitterdatei bereits die ID der entsprechenden *Physical Group* enthält ist diese Aufgabe trivial.
2. Man suche nun alle Dreieckselemente die mindestens einen der vorher ermittelten Knoten beinhalten und speichere diese Zuordnung samt Randwerte für die entsprechenden Knoten.

Dreiecksseiten am neumannschen Rand:

1. Man wende den gleichen Algorithmus wie oben an.
2. Man ermittle die Dreiecksseite am neumannschen Rand durch Vergleich der Rand- und Elementknoten:

Je nach Elementtyp ist eine Dreiecksseite durch 2, 3 oder 4 Knoten definiert. Siehe dazu Abschnitt 1.4. Liegt ein Dreieckselement am neumannschen Rand, so stimmen alle Knoten einer oder mehrerer Seiten mit entsprechend vielen Knoten am Rand überein. Hierbei ist zu erwähnen dass auch bei mehr als 2 Knoten pro Seite immer nur eine ganze Seite am Rand liegen kann.

Durch die Verwendung von isoparametrischen finiten Elementen sind im lokalen Koordinatensystem nur drei verschiedene Kurvenintegrale möglich, was eine statische Zuordnung eines Kurvenintegrals zu jeder Dreiecksseite ermöglicht. Zu diesem Zweck wird jeder Dreiecksseite eine Nummer zugewiesen:

- Die Dreiecksseite auf der ξ -Achse sei definiert als *Seite 1*.
- Die Dreiecksseite auf der η -Achse sei definiert als *Seite 2*.
- Die verbleibende Seite sei definiert als *Seite 3*

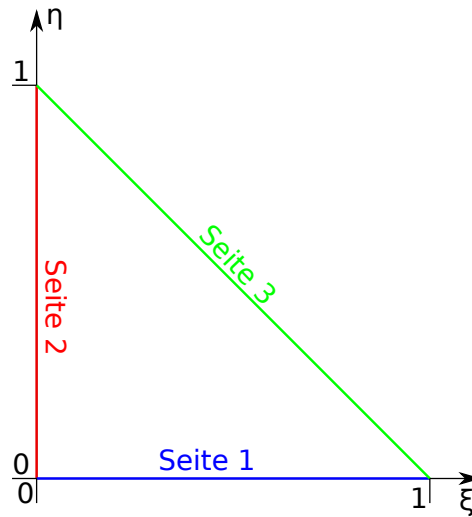


Abbildung 4: Zuordnung der Dreiecksseiten

3. Zu guter Letzt ordne man noch den Dreiecksseiten am Rand den Wert der Randbedingung (in (z.B. σ aus 39)) zu.

Um die in diesem Abschnitt gezeigten Zusammenhänge zu verdeutlichen, wird die Zuordnung der Dreiecksseiten zum neumannschen Rand anhand des in Abbildung 5 gezeigten Beispiels verdeutlicht. Eine beispielhafte Gitterdatei ist in Code 1 gezeigt.

```

$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$PhysicalNames
2
1 1 "neumann_boundary"
2 2 "material"
$EndPhysicalNames
$Nodes
4
1 <x1> <y1> <z1>
2 <x2> <y2> <z2>
3 <x3> <y3> <z3>
4 <x4> <y4> <z4>
$EndNodes
$Elements
1 2 2 1 x 2 3
2 2 2 1 x 1 2
3 3 2 2 x 1 2 4
4 3 2 2 x 4 2 3
$EndElements

```

Code 1: Exemplarische Gitterdatei

Wie aus Code 1 ersichtlich, setzt sich die Geometrie aus 4 Knoten und 4 Elementen zusammen. Abbildung 6 zeigt die Dreieckselemente 3 und 4 in ihrem lokalen Koordinatensystem. Wie mit Hilfe von Abbildung 4 zu erkennen ist, liegt Element 3 mit Seite 1, und Element 4 mit Seite 2 am neumannschen Rand. Der oben beschriebene Algorithmus wird nun auf dieses Beispiel angewandt um dessen Funktion zu erklären.

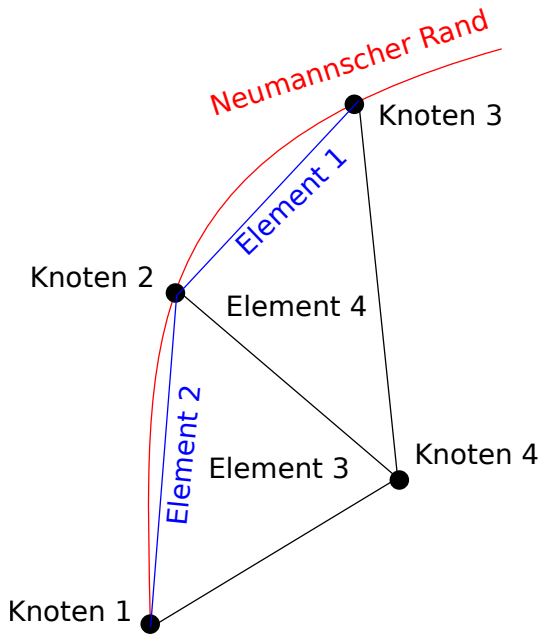


Abbildung 5: Zuordnung der Dreiecksseiten

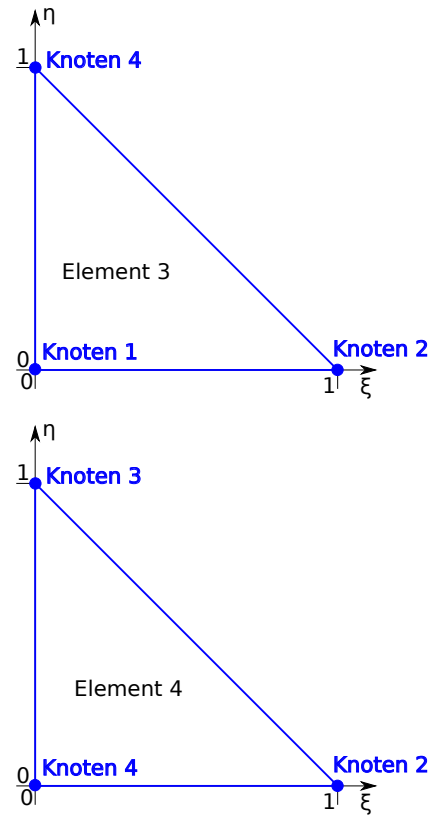


Abbildung 6: Elemente 3 und 4 im lokalen Koordinatensystem

1. Die Elemente 1 und 2 sind, wie aus Code 1 ersichtlich der *Physical group* 1 zugeteilt. (Vierter Eintrag in den beiden Elementdefinitionen). Somit ist nun bekannt dass die Knoten 1, 2 und 3 am neumannschen Rand liegen.
2. Die lokalen Knoten 1 und 2 von Element 3 stimmen mit den globalen Knoten 1 und 2 am neumannschen Rand überein, womit sich nun feststellen lässt dass Element 3 mit Seite 1 am neumannschen Rand liegt.
3. Selbiges wir nun für Element 4 durchgeführt. Die lokalen Knoten 2 und 3 stimmen mit den globalen Knoten 2 und 3 überein, womit sich feststellen lässt dass Element 4 mit Seite 2 am neumannschen Rand liegt.

2.3. Berechnung der Elementgleichungssysteme

Das Elementgleichungssystem in den Koordinaten x und y ergibt sich für ein elektrostatisches Problem als

$$k_{ij} = \int_x \int_y \left(\epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (47)$$

$$r_j = \int_x \int_y N_i \rho dx dy + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma \quad (48)$$

(siehe Kapitel 1.5.1). Die Berechnungen für stationäre Strömungsfeld-Probleme sind zu denen für elektrostatische Probleme äquivalent (Siehe Kapitel 1.5.2) mit $\epsilon \rightarrow \gamma$, $\rho \rightarrow J_e$ und $\sigma \rightarrow 0$

Liegt das Element am dirichletschen Rand, so sind ein oder mehrere Knotenpotentiale bereits vorgegeben was zu einer Reduktion des Elementgleichungssystems führt. Gezeigt wird dies an einem linearen Dreieckselement mit 3 Knoten. Das Elementgleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} k_{11}V_1 + k_{12}V_2 + k_{13}V_3 &= r_1 \\ k_{21}V_1 + k_{22}V_2 + k_{23}V_3 &= r_2 \\ k_{31}V_1 + k_{32}V_2 + k_{33}V_3 &= r_3 \end{aligned}$$

Liegt nun Knoten 2 am dirichletschen Rand so ist V_2 bekannt, und das Elementgleichungssystem reduziert sich wie folgt:

$$\begin{aligned} k_{11}V_1 + k_{13}V_3 &= r_1 - k_{12}V_2 \\ k_{31}V_1 + k_{33}V_3 &= r_3 - k_{32}V_2 \end{aligned}$$

Liegt also der j -te Knoten am dirichletschen Rand, so wird die j -te Zeile aus dem Gleichungssystem eliminiert und die j -te Spalte wird von der rechten Seite subtrahiert.

2.3.1. Elementmatrix-Koeffizienten k_{ij}

Da die Formfunktionen N_i bei isoparametrischen finiten Elementen Funktionen von ξ und η sind, müssen die Integrationsvariablen aller Integrale substituiert werden.

Die partiellen Ableitungen der Formfunktionen in (47) ergeben nach [2], S.72 aus

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k & \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k & \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

zu

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k & -\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \\ -\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k & \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Das Flächenelement $dxdy$ in (47) ergibt sich mit den Beziehungen aus [2], S.74 zu

$$dxdy = \det(\mathbf{J})d\xi d\eta \quad (51)$$

wobei das Flächenintegral in beiden Koordinaten in den Intervallen $\xi \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1 - \xi]$ durchzuführen ist. Somit ergibt sich der Elementmatrix-Koeffizient k_{ij} zu

$$k_{i,j} = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \left[\right. \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_x}{\det(\mathbf{J})} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \right) + \\ & \frac{\epsilon_y}{\det(\mathbf{J})} \left(-\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k \right) \left(-\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k \right) \\ & \left. \right] d\xi d\eta \quad (53) \end{aligned}$$

Anmerkung: Man beachte dass das $\det(\mathbf{J})$ des Flächenelements aus (51) bereits gekürzt wurde.

Die Berechnung der Partiellen Ableitungen der Formfunktionen kann auf analytischem Wege vorweg erfolgen, da diese nur vom gewählten Elementtyp abhängen. Somit ist eine effiziente Berechnung der Terme $\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k$ in Form von Skalarprodukten möglich.

Die numerische Berechnung des Integrals erfolgt über die sogenannte *Gauss-Quadratur*. Hierbei wird das zu berechnende Integral durch eine gewichtete Summe approximiert:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx \approx \sum_k w_k f(x_k) \quad (54)$$

Eine Erweiterung auf mehrdimensionale Integrale ist durch Mehrfachsummen einfach möglich. Ein besonderes Augenmerk bei dieser Methode der numerischen Integration liegt dabei auf der Wahl der Stützstellen x_k und der Gewichte w_k . Die in dieser Arbeit verwendeten Stützstellen-Koordinaten und -Gewichte für isoparametrische Dreieckige finite Elemente wurden aus [3], S.547. übernommen. Implementiert sind eine 3-Punkte sowie eine 7-Punkte Integration.

2.3.2. Rechtsseiten-Elemente r_j

Die Berechnung der Koeffizienten der 'rechten Seite' eines elektrostatischen Problems

$$r_j = \int_x \int_y N_i \rho dx dy + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma \quad (55)$$

r_j erfordert zu einen ein Flächenintegral (erster Summand) und ein Integral über den neumannschen Rand, welches im zweidimensionalen Fall zu einem Kurvenintegral entartet.

Für das Flächenintegral lässt sich die Substitution der Integrationsvariablen sehr einfach durchführen, da keine partiellen Ableitungen des Formfunktionen vorkommen:

$$\int_x \int_y N_i \rho dx dy = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} N_i \rho \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (56)$$

Für Kurvenintegral über den neumannschen Rand ändert sich der Integrand je nach dem über welche Dreiecksseite integriert wird. Das entartete Flächenintegral über den neumannschen Rand hat nun folgende Form:

$$\int_c N_i(\xi, \eta) \sigma ds \quad (57)$$

Allgemein gilt (siehe [2], S. 74f.):

$$\begin{aligned} d\xi &= dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \mathbf{e}_x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \mathbf{e}_y \\ d\eta &= dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \mathbf{e}_x + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (58)$$

Das infinitesimale Kurvenelement ergibt sich somit nun zu $\mathbf{ds} = d\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\eta}$ bzw.

$$ds = \|\mathbf{ds}\| = \sqrt{(d\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\eta})^T \cdot (d\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\eta})} \quad (59)$$

Integriert man über die Dreiecksseite 1, so gilt $d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ und somit auch $d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. Somit gilt für \mathbf{ds} bzw. ds :

$$\begin{aligned} \mathbf{ds} &= d\boldsymbol{\xi} \Rightarrow \\ ds &= \|d\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi = \sqrt{\left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k\right)^2 + \left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k\right)^2} d\xi \end{aligned} \quad (60)$$

Selbiges kann für Dreiecksseite 2 unter Verwendung von $d\xi = 0$ hergeleitet werden. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{ds} &= d\boldsymbol{\eta} \Rightarrow \\ ds &= \|d\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} d\eta = \sqrt{\left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k\right)^2 + \left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k\right)^2} d\eta \end{aligned} \quad (61)$$

Zur Integration über Dreiecksseite 3 muss zuerst die Kurve parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-t \\ t \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \begin{Bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \underline{\underline{d\xi = -dt, \quad d\eta = dt}} \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in (58) und dies wiederum in (59) ein, so erhält man

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} dt \quad (62)$$

Auf das Einsetzen der partiellen Ableitungen von x und y wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Die numerische Integration erfolgt wieder über die Gauss-Quadratur. Stützstellen und Gewichte wurden aus [3], S.542 übernommen.

2.4. Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems

Im vorherigen Abschnitt wurde näher auf die Berechnung der Elementgleichungssysteme eingegangen. Diese müssen nun zu einem 'großen' Gleichungssystem assembliert werden. Der Assemblierungsvorgang entspricht dabei einer simplen Addition der Gleichungssysteme (Siehe [2], S.60ff.). Beispielfhaft wird der Vorgang anhand von 2 Elementgleichungssystemen gezeigt.

Gleichungssystem 1:

$$\begin{aligned} k_{11}^1 V_1 + k_{12}^1 V_2 + k_{13}^1 V_3 &= r_1^1 \\ k_{21}^1 V_1 + k_{22}^1 V_2 + k_{23}^1 V_3 &= r_2^1 \\ k_{31}^1 V_1 + k_{32}^1 V_2 + k_{33}^1 V_3 &= r_3^1 \end{aligned}$$

Gleichungssystem 2:

$$\begin{aligned} k_{22}^2 V_2 + k_{23}^2 V_3 &= r_2^2 - k_{21}^2 V_4 \\ k_{32}^2 V_2 + k_{33}^2 V_3 &= r_3^2 - k_{31}^2 V_4 \end{aligned}$$

Addiert man die Gleichungssysteme so ergibt sich

$$\begin{aligned} k_{11}^1 V_1 + k_{12}^1 V_2 + k_{13}^1 V_3 &= r_1^1 \\ k_{21}^1 V_1 + (k_{22}^1 + k_{22}^2) V_2 + (k_{23}^1 + k_{23}^2) V_3 &= r_2^1 + r_2^2 - k_{21}^2 V_4 \\ k_{31}^1 V_1 + (k_{32}^1 + k_{32}^2) V_2 + (k_{33}^1 + k_{33}^2) V_3 &= r_3^1 + r_3^2 - k_{31}^2 V_4 \end{aligned} \quad (63)$$

Als Resultat des Assemblierungsvorgangs erhält man ein lineares Gleichungssystem mit $N - N_{dir}$ Unbekannten, wobei N die Anzahl der Knoten und N_{dir} die Anzahl der Knoten am dirichlet-schen Rand darstellt. Die Koeffizientenmatrix ist symmetrisch und schwach besetzt.

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch ein geeignetes Verfahren und liefert die unbekannten Knotenpotentiale als Ergebnis. Je nach zugrundeliegendem Problemtyp kann anschließend die gesuchte Feldgröße berechnet werden. Für den Fall eines elektrostatischen Problems wäre dies:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x} V_k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial y} V_k \end{array} \right\} \quad (64)$$

wobei unter der Verwendung von (50) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial x} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \left(\frac{\partial N_k}{\partial \xi} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j - \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \right) \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \left(-\frac{\partial N_k}{\partial \xi} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j \right) \end{aligned}$$

3. Simulationen

Sofern nicht anders angegeben werden 6-knotige quadratische finite Dreieckselemente zur Approximation der Geometrie verwendet.

3.1. Beispiel 1: Idealer Plattenkondensator

In diesem Beispiel wird ein idealer Plattenkondensator unter Vernachlässigung der Randeffekte berechnet. Für ein solches Problem existiert eine analytische Lösung mit einem linearen Potentialverlauf und einem konstanten elektrischen Feld $\mathbf{E} = \frac{U}{d}$ mit d als Plattenabstand.

Für dieses Problem liefert der FEM-Algorithmus die exakte Lösung liefern, da ein quadratischer Approximationsansatz verwendet wird und der Potentialverlauf ein Linearer ist.

Folgende Parameter sind gegeben:

- $U = 10V$
- $d = 1mm$
- $\epsilon = \epsilon_0$

woraus sich ein Potentialverlauf von $V(x) = 10000x$ mit $x = [0, d]$ und ein Elektrischen Feld von $E = 10000V\,m^{-1}$ ergibt.

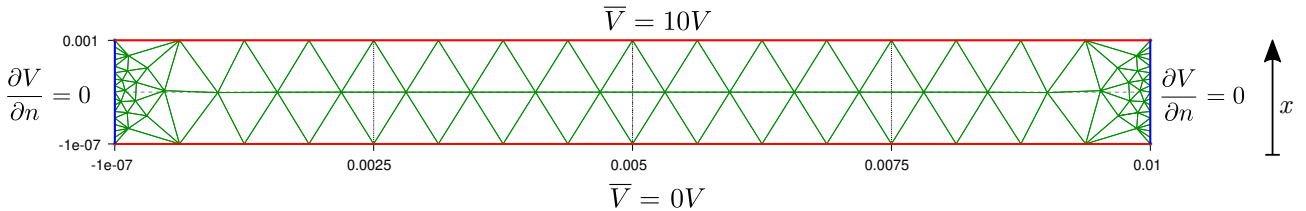


Abbildung 7: Geometrie, Gitter und Randbedingungen zu Beispiel 1

Anmerkung: Die homogenen neumannschen Randbedingungen $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ müssen nicht explizit angegeben werden.

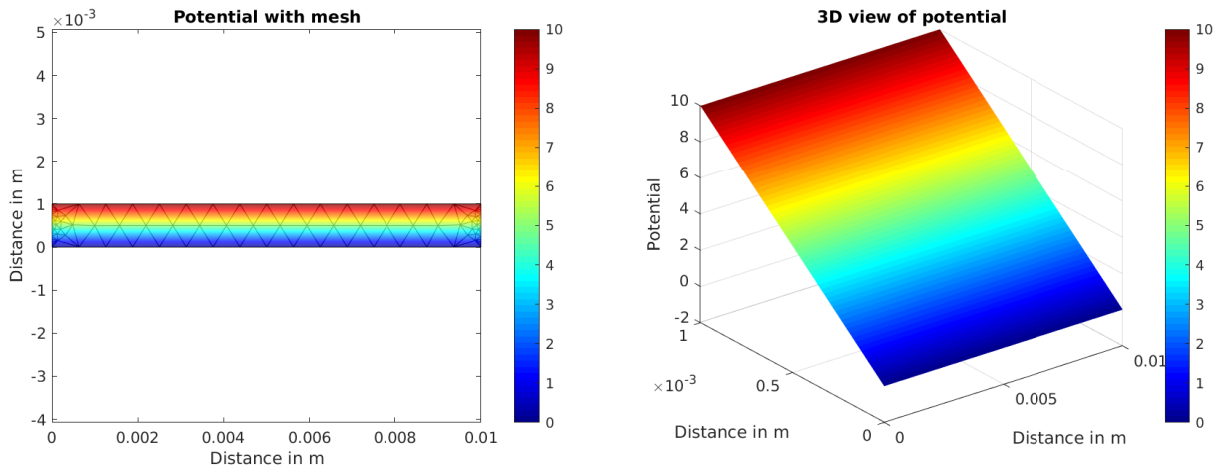


Abbildung 8: Potentialverlauf des Plattenkondensators

Abbildung 8 zeigt den linearen Potentialverlauf innerhalb des Kondensators. Abbildung 9 zeigt im linken Teil die (nicht skalierten) Feldlinien und im rechten Teil den Absolutwert des Feldes.

3.2. Beispiel 2: Strömungsfeld einer Blechplatte

Dieses Beispiel zeigt den Strömungsfeldverlauf einer Blechplatte und wurde aus [2], Kap. 7.2.1 übernommen.

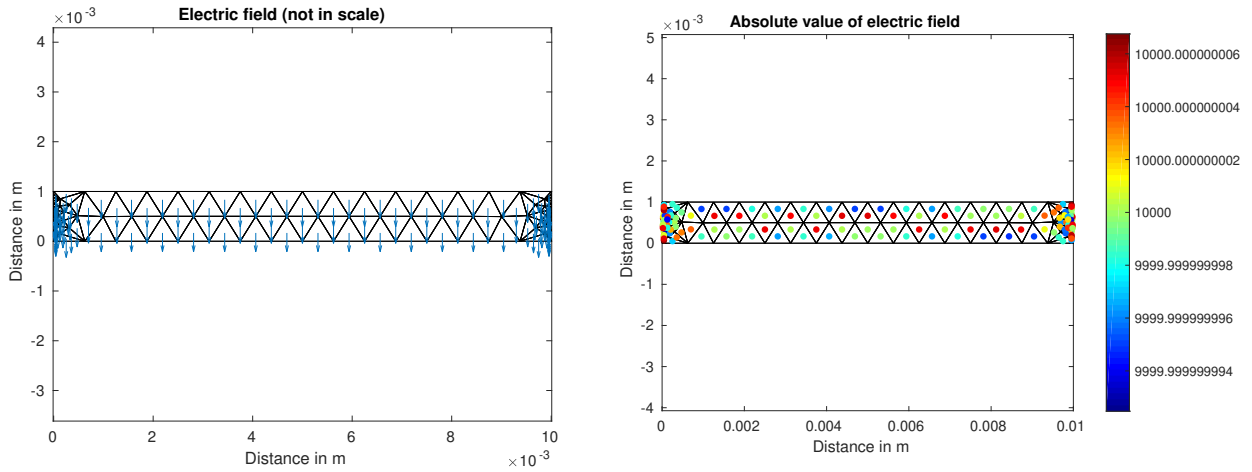


Abbildung 9: Feldverlauf des Plattenkondensators

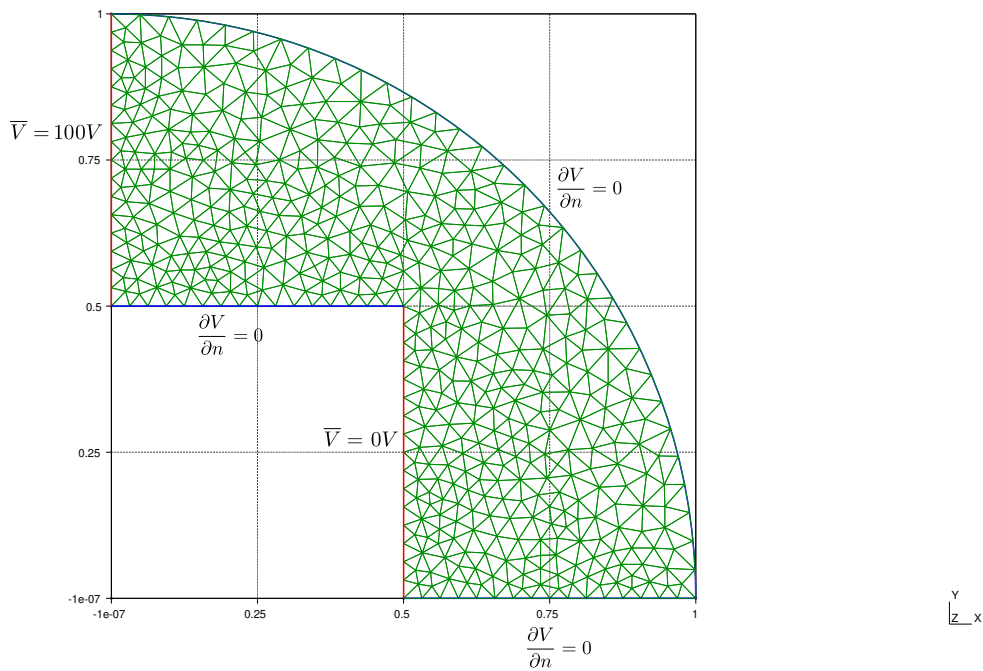


Abbildung 10: Geometrie, Gitter und Randbedingungen zu Beispiel 2

Abbildung 11 zeigt wieder den Verlauf des berechneten Potentials. Im linken Teil der Abbildung ist zu beachten dass der Potentialverlauf innerhalb des inneren, rechteckigen Randes zu ignorieren ist. Er wurde lediglich durch den Algorithmus zur Generierung des Bildes hinzugefügt und besitzt somit keinerlei physikalische Bedeutung.

Abbildung 12 zeigt den Feldverlauf des Strömungsfeldes. Das Strömungsfeld wurde über $\mathbf{J} = -[\gamma] \text{grad} V$ berechnet, wobei $[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gewählt wurde. Somit entspricht bei diesem Beispiel $\mathbf{J} = \mathbf{E}$.

Wie zu erwarten tritt an der Ecke des inneren Randes eine starke Konzentration des Feldes mit einem entsprechend hohen Absolutwert des Feldes auf. Bei der Generierung des Gitters ist hier auf eine entsprechende Auflösung zu achten.

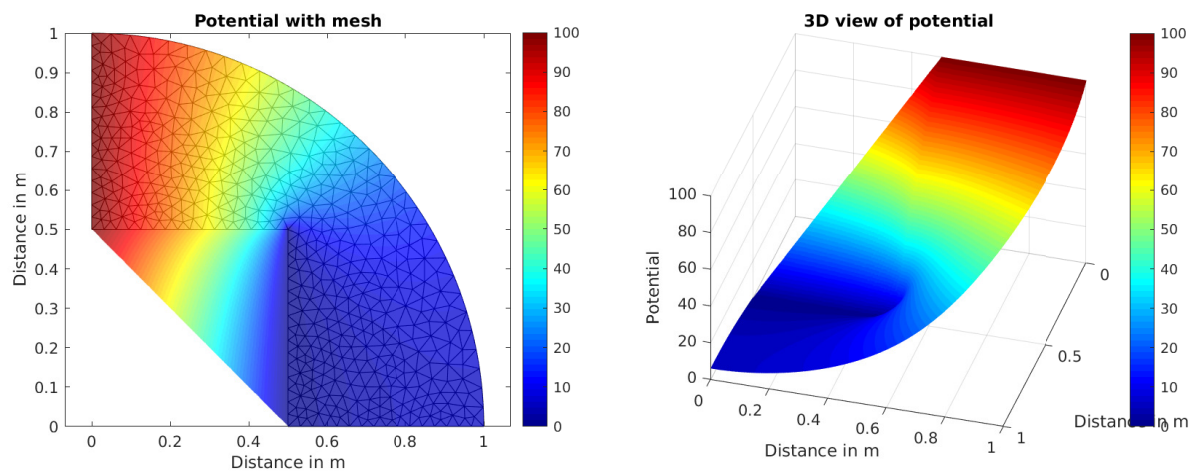


Abbildung 11: Potentialverlauf der Blechplatte

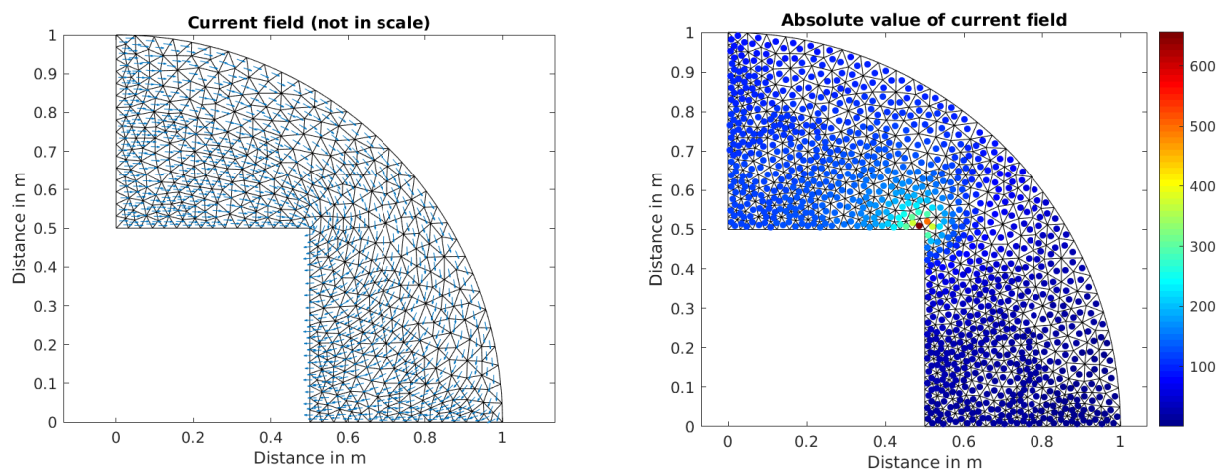


Abbildung 12: Feldverlauf der Blechplatte

3.3. Beispiel 3: Zylinderelektroden über leitender Ebene

Dieses Beispiel zeigt den Feldverlauf zweier Zylinderelektroden über einer leitenden Ebene. Die Elektroden befinden sich 100mm bzw. 200mm in einem Abstand von 100mm über der leitenden Ebene. Die Ebene besitzt ein Potential von $V = 0V$

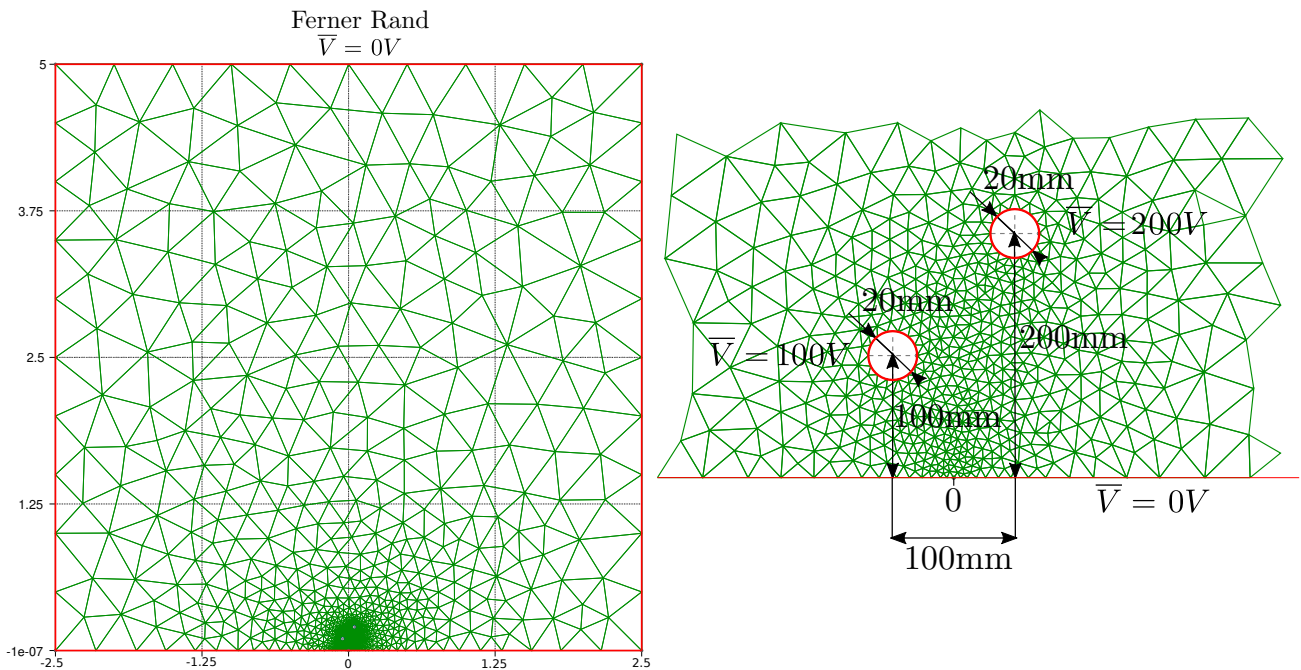


Abbildung 13: Geometrie, Gitter und Randbedingungen zu Beispiel 3

Abbildung 13 zeigt die Geometrie sowie das Gitter und die Randbedingungen des Problems. Im linken Teil erkennt man die gesamte Geometrie inklusive fernem Rand. Im rechten Teil ist der interessante Teil der Geometrie mit den Zylinderelektroden dargestellt.

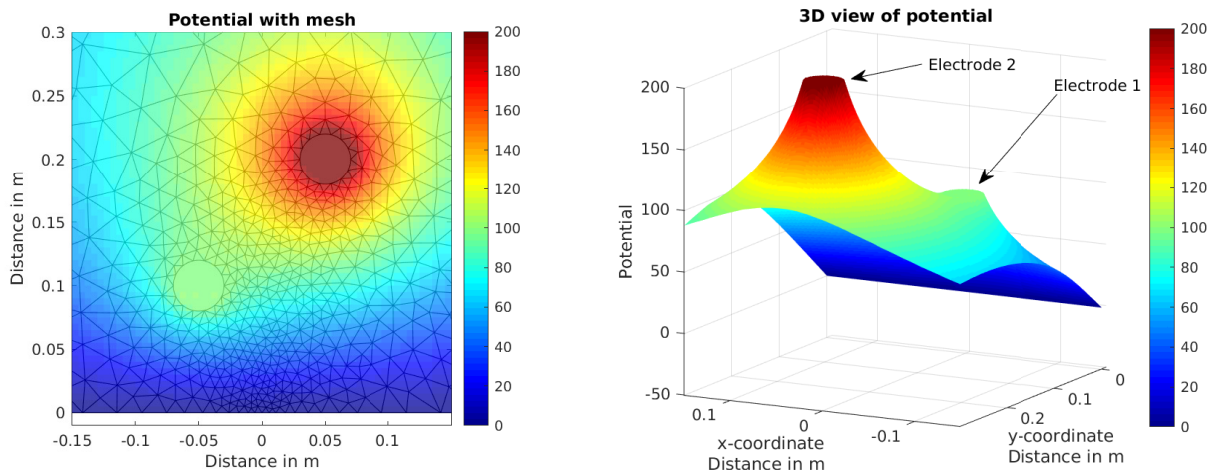


Abbildung 14: Potentialverlauf der Zylinderelektroden

Abbildung 14 zeigt wie bereits bekannt den Potentialverlauf des Problems. Hier ist zu beachten dass beim rechten Teil die Ansicht um 180° gedreht ist, was im linken Teil einer Blickrichtung von oben nach unten entspricht. Diese Ansicht wurde gewählt da sich sonst die Äquipotentialfläche der ersten Elektrode nur schwer zu erkennen ist.

Abbildung 15 zeigt den Feldverlauf und den Absolutwert des Elektrischen Feldes.

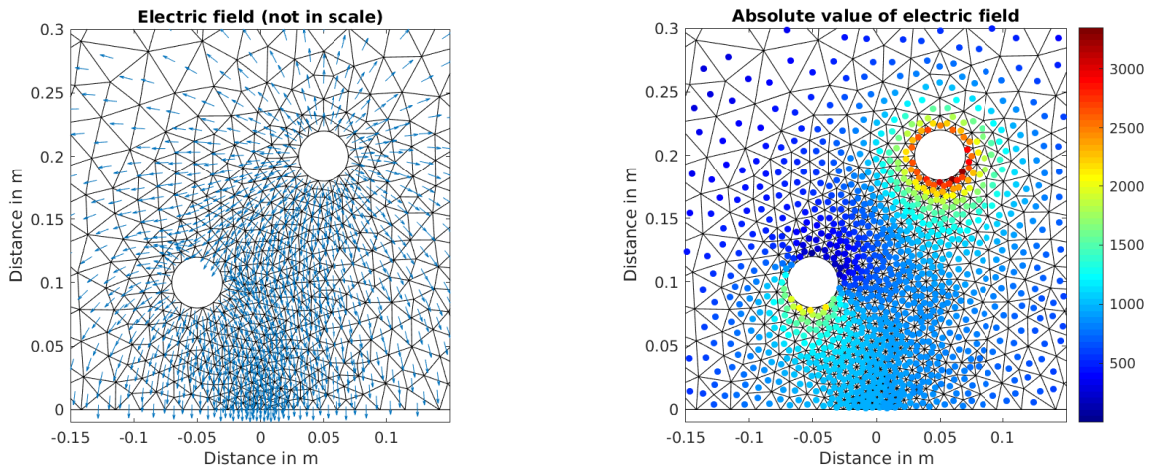


Abbildung 15: Feldverlauf der Zylinderelektroden

A. Formfunktionen und ihre partiellen Ableitungen

A.1. Lineare Dreieckselemente

A.1.1. Formfunktionen

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2 = \xi$$

$$N_3 = \eta$$

A.1.2. Partielle Ableitungen nach ξ

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0$$

A.1.3. Partielle Ableitungen nach η

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1$$

A.2. Quadratische Dreieckselemente

A.2.1. Formfunktionen

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_3 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_6 = -4\eta(1 - \xi - \eta)$$

A.2.2. Partielle Ableitungen nach ξ

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 4 - 8\xi - 4\eta$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 4\xi - 1$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 4\eta$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -4\eta$$

A.2.3. Partielle Ableitungen nach η

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -4\xi$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 4\xi$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = 4\eta - 1$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = 4 - 4\xi - 8\eta$$

A.3. Kubische Dreieckselemente

A.3.1. Formfunktionen

$$N_1 = -\frac{9\eta^3}{2} - \frac{27\eta^2\xi}{2} + 9\eta^2 - \frac{27\eta\xi^2}{2} + 18\eta\xi - \frac{11\eta}{2} - \frac{9\xi^3}{2} + 9\xi^2 - \frac{11\xi}{2} + 1$$

$$N_2 = \frac{27\eta^2\xi}{2} + 27\eta\xi^2 - \frac{45\eta\xi}{2} + \frac{27\xi^3}{2} - \frac{45\xi^2}{2} + 9\xi$$

$$N_3 = \frac{9\eta\xi}{2} - \frac{9\xi}{2} - \frac{27\eta\xi^2}{2} + 18\xi^2 - \frac{27\xi^3}{2}$$

$$N_4 = \frac{9\xi^3}{2} - \frac{9\xi^2}{2} + \xi$$

$$N_5 = \frac{27\eta\xi^2}{2} - \frac{9\eta\xi}{2}$$

$$N_6 = \frac{27\eta^2\xi}{2} - \frac{9\eta\xi}{2}$$

$$N_7 = \frac{9\eta^3}{2} - \frac{9\eta^2}{2} + \eta$$

$$N_8 = \frac{9\eta\xi}{2} - \frac{9\eta}{2} - \frac{27\eta^2\xi}{2} + 18\eta^2 - \frac{27\eta^3}{2}$$

$$N_9 = \frac{27\eta^3}{2} + 27\eta^2\xi - \frac{45\eta^2}{2} + \frac{27\eta\xi^2}{2} - \frac{45\eta\xi}{2} + 9\eta$$

$$N_{10} = -27\eta^2\xi - 27\eta\xi^2 + 27\eta\xi$$

A.3.2. Partielle Ableitungen nach ξ

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{27\eta^2}{2} - 27\eta\zeta + 18\eta - \frac{27\zeta^2}{2} + 18\zeta - \frac{11}{2}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{27\eta^2}{2} + 54\eta\zeta - \frac{45\eta}{2} + \frac{81\zeta^2}{2} - 45\zeta + 9$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{9\eta}{2} + 36\zeta - 27\eta\zeta - \frac{81\zeta^2}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{27\zeta^2}{2} - 9\zeta + 1$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 27\eta\zeta - \frac{9\eta}{2}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{27\eta^2}{2} - \frac{9\eta}{2}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = \frac{9\eta}{2} - \frac{27\eta^2}{2}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = 27\eta\zeta - \frac{45\eta}{2} + 27\eta^2$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} = 27\eta - 54\eta\zeta - 27\eta^2$$

A.3.3. Partielle Ableitungen nach η

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{27\eta^2}{2} - 27\eta\zeta + 18\eta - \frac{27\zeta^2}{2} + 18\zeta - \frac{11}{2}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 27\eta\zeta - \frac{45\zeta}{2} + 27\zeta^2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{9\zeta}{2} - \frac{27\zeta^2}{2}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = \frac{27\zeta^2}{2} - \frac{9\zeta}{2}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = 27\eta\zeta - \frac{9\zeta}{2}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{27\eta^2}{2} - 9\eta + 1$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = 36\eta + \frac{9\zeta}{2} - 27\eta\zeta - \frac{81\eta^2}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \eta} = \frac{81\eta^2}{2} + 54\eta\zeta - 45\eta + \frac{27\zeta^2}{2} - \frac{45\zeta}{2} + 9$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} = 27\zeta - 54\eta\zeta - 27\zeta^2$$

Literatur

- [1] Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. <https://gmsh.info>, 08 2019.
- [2] K. Preis. Simulation mechatronischer Systeme, Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung 437.123. Sommersemester 2016/2017.
- [3] K. J. Bathe. *Finite Elemente Methoden*. Springer, 2001.