



Institut für Grundlagen und Theorie
der Elektrotechnik
Technische Universität Graz



Seminararbeit:
Finite Elemente Software
zur Lösung von
elektrostatischen und stationären
Strömungsfeld-Problemen

vorgelegt von:
Tobias Florian Lafer (01530012)
am 11. August 2019

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Bauernfeind

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Theorie | 3 |
| 1.1 | Die Methode der finiten Elemente | 3 |
| 1.2 | Finite Elemente und Formfunktionen | 3 |
| 1.2.1 | Lineare Dreieckselemente | 4 |
| 1.2.2 | Quadratische Dreieckselemente | 5 |
| 1.2.3 | Kubische Dreieckselemente | 6 |
| 1.3 | Problemtypen | 7 |
| 1.3.1 | Elektrostatische Probleme | 8 |
| 1.3.2 | Stationäre Strömungsfeldprobleme | 9 |
| 2 | Implementierung | 11 |
| 2.1 | Formulierung der finiten Elemente (gesamt: 3 Seiten) | 11 |
| 2.1.1 | 3-Punkte linear (1 Seite) | 11 |
| 2.1.2 | 6-Punkte quadratisch (1 Seite) | 11 |
| 2.1.3 | 10-Punkte kubisch (1 Seite) | 11 |
| 2.2 | Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh (gesamt: 3 Seiten) | 11 |
| 2.2.1 | Erstellen der Geometrie (2 Seiten) | 11 |
| 2.2.2 | Generierung und Export des FEM-Gitters (1 Seiten) | 11 |
| 2.3 | Import und Verarbeitung des FEM-Gitters (gesamt: 4 Seiten) | 11 |
| 2.3.1 | Import (1 Seiten) | 11 |
| 2.3.2 | Ermitteln der Knoten am dirichletschen Rand (1 Seiten) | 11 |
| 2.3.3 | Ermitteln der Element-Seiten am neumannschen Rand (2 Seite) | 11 |
| 2.4 | Berechnung der Elementgleichungssysteme (gesamt: 3 Seiten) | 11 |
| 2.4.1 | Berechnung der Element-Matrix (2 Seite) | 11 |
| 2.4.2 | Berechnung des Rechtsseiten-Vektors (1 Seite) | 11 |
| 2.5 | Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems (gesamt: 1 Seite) | 11 |
| 3 | Simulationen | 11 |
| 3.1 | Simulation 1 (2 Seiten) | 11 |
| 3.2 | Simulation 2 (2 Seiten) | 11 |
| 3.3 | Simulation 3 (2 Seiten) | 11 |
| | Literatur | 12 |

1 Theorie

1.1 Die Methode der finiten Elemente

Die analytische Lösung eines Randwertproblems, wie jenes definiert in (1), ist nur in sehr wenigen Fällen möglich. Zur numerischen Lösung existieren daher verschiedenste Methoden, wobei eine der Prominentesten die *Methode der finiten Elemente* darstellt. Bei dieser Methode wird das zu untersuchende Problemgebiet Ω in viele einzelne Teilgebiete unterteilt, in welchen jeweils die gesuchte Funktion $u(x)$ aus durch Verwendung von Ansatzfunktionen (zum Beispiel Polynomen) approximiert wird.

Ein Beispiel für ein Randwertproblem ist

$$L\{u(x)\} = f(x) \quad (1)$$

mit $u = \bar{u} \ \forall x \in \Gamma_D$ als dirichletschen, und $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u_N \ \forall x \in \Gamma_N$ als neumannschen Randbedingungen, L als Differentialoperator, f als gegebener und u als gesuchter Funktion.

Als häufige Ansätze zur numerischen Berechnung dienen dabei das sogenannte *Ritzsche Verfahren* (Spezialfall einer Variationsmethode) oder das *Galerkinsche Verfahren* (Spezialfall einer Residuenmethode). Diese Verfahren führen auf ein lineares Gleichungssystem (2) mit den Werten der gesuchten Funktion u an den Elementknoten als Unbekannte \mathbf{u}_{ges} .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{r} \quad (2)$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{A} und des Rechtsseitenvektors \mathbf{r} ergeben sich aus den Zusammenhängen im Problemgebiet (Differentialgleichungen), den vorgegebenen Randwerten und der Geometrie sowie deren Unterteilung.

1.2 Finite Elemente und Formfunktionen

Ein häufiger Ansatz zur Unterteilung des Problemgebietes ist jener der Unterteilung in Dreiecke bzw. Tetraeder. Innerhalb jedes dieser Elemente wird die gesuchte Funktion u aus 1, im Weiteren auch Potential genannt, durch einfache Funktionen, meist Polynome erster oder zweiter Ordnung, angenähert.

Für ein Element, welches durch N Knoten definiert wird lautet ein möglicher Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} N_k^e u_k \quad (3)$$

wobei die Funktionen N_k^e als *Formfunktionen* des e -ten Elements bezeichnet werden. Sie besitzen im k -ten Elementknoten den Wert 1 und in allen Anderen den Wert 0.

Für ein Dreieck mit einem Knoten an jeder Ecke ($N = 3$) ergeben sich lineare Funktionen für N_k^e , für Dreiecke mit zusätzlichen Knoten in der Mitte jeder Seite ($N = 6$) quadratische Funktionen usw.

Da die Funktionen für N_k^e nur von der Geometrie des jeweiligen Elements abhängen bleiben einzig die u_k als gesuchte Parameter, welche durch Verwendung des Ansatzes aus (3) im z.B. Galerkinschen Verfahren ermittelt werden können.

Wie aus (3) erkennbar, müssen für jedes Element die N_k^e separat ermittelt werden da sie von der jeweiligen Elementgeometrie abhängen. Betrachtet man nun jedes finite Element in einem lokalen Koordinatensystem, welches im Weiteren durch die Variablen ξ, η dargestellt wird, und verwendet die Formfunktionen auch zur Beschreibung der Elementgeometrie, so spricht man von *isoparametrischen finiten Elementen*.

Die Formfunktionen müssen dabei nur einmalig für einen bestimmten Typ von finiten Elementen (z.B. lineare Dreiecke) einmalig ermittelt werden. Die Zusammenhänge für Geometrie und Potential lauten dann wie folgt:

$$u = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) u_k \quad x = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) x_k \quad y = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) y_k$$

wobei x_k und y_k die Koordinaten des k -ten Knoten darstellen. Sinnvollerweise sind die jeweiligen finiten Elemente im lokalen ξ, η -Koordinatensystem geradlinig angesetzt. (Siehe Abbildung 2) Die Krümmung und Verzerrung im globalen Koordinatensystem ergibt sich anschließend durch (4).

1.2.1 Lineare Dreieckselemente

Das isoparametrische lineare Finite Dreieckselement ist im lokalen ξ, η -Koordinatensystem wie in Abbildung 1 gezeigt dargestellt.

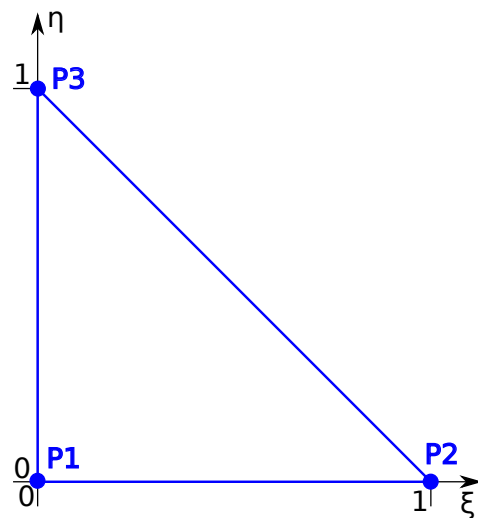
Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (1, 0) \\ P_3 &= (0, 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Als Ansatz für die Potentialfunktion bzw. die globalen Koordinaten x und y wählt man folgenden Ansatz:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \eta \quad (5)$$

Die drei Unbekannten c_0, c_1 und c_2 können durch Einsetzen der Koordinaten der



4 Abbildung 1: Ansatz für lineares Element

Elementknoten ermittelt werden.

$$P_1 : u(0, 0) = u_1 = c_0 \quad (6)$$

$$P_2 : u(1, 0) = u_2 = c_0 + c_1$$

$$P_3 : u(0, 1) = u_3 = c_0 + c_2$$

bzw. unter Verwendung der Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (7)$$

Die Lösung $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}$ lautet:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Oder ausgeschrieben:

$$c_0 = u_1 \quad (9)$$

$$c_1 = u_2 - u_1$$

$$c_2 = u_3 - u_1$$

Setzt man dies wiederum in (5) ein, so erhält man:

$$u(\xi, \eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta \quad (10)$$

bzw. nach einfacher Umformung:

$$u(\xi, \eta) = \underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} u_1 + \underbrace{(\xi)}_{N_2} u_2 + \underbrace{(\eta)}_{N_3} u_3 \quad (11)$$

Die Formfunktionen für das lineare finite Dreieckselement lauten also:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (12)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta$$

1.2.2 Quadratische Dreieckselemente

Das quadratische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 2 definiert.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1/2, 0) \quad (13)$$

$$P_3 = (1, 0), \quad P_4 = (1/2, 1/2)$$

$$P_5 = (0, 1), \quad P_6 = (0, 1/2)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 \quad (14)$$

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$u(0, 0) = u_1 = c_0 \quad (15)$$

$$u(1/2, 0) = u_2 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_4$$

$$u(1, 0) = u_3 = c_0 + c_1 + c_4$$

$$u(1/2, 1/2) = u_4 = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_5$$

$$u(0, 1) = u_5 = c_0 + c_2 + c_5$$

$$u(1/2, 0) = u_6 = c_0 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_5$$

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.2.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_6$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang

1.2.3 Kubische Dreieckselemente

Das kubische isoparametrische finite Dreieckselement ist wie in Abbildung 3 definiert.

Die Koordinaten der drei Elementknoten lauten wie folgt:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1/3, 0) \quad (16)$$

$$P_3 = (2/3, 0), \quad P_4 = (1, 0)$$

$$P_5 = (2/3, 1/3), \quad P_6 = (1/3, 2/3)$$

$$P_7 = (0, 1), \quad P_8 = (0, 2/3)$$

$$P_9 = (0, 1/3), \quad P_{10} = (1/3, 1/3) \quad (17)$$

Der Ansatz der Potentialfunktion wird wie folgt gewählt:

$$u(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2 + c_6\xi^2\eta + c_7\xi\eta^2 + c_8\xi^3 + c_9\eta^3 \quad (18)$$

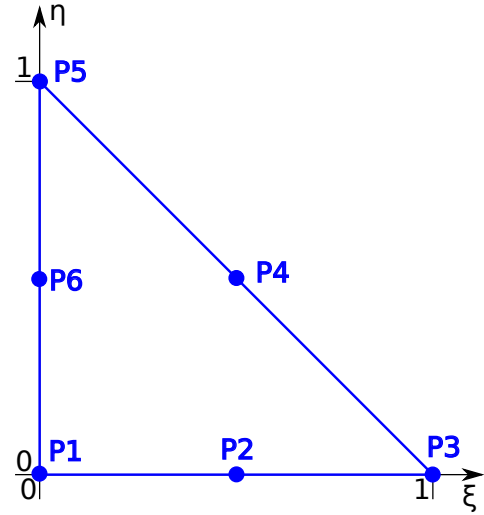


Abbildung 2: Ansatz für quadratisches Element

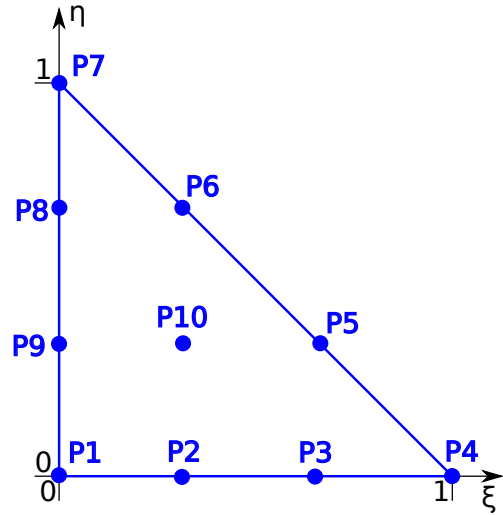


Abbildung 3: Ansatz für quadratisches Element

Nach dem Einsetzen der Knotenkoordinaten ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten c_j :

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= u_1 = c_0 \\
u(1/3,0) &= u_2 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{27}c_8 \\
u(2/3,0) &= u_3 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{8}{27}c_8 \\
u(1,0) &= u_4 = c_0 + c_1 + c_4 + c_8 \\
u(2/3,1/3) &= u_5 = c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{4}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{4}{27}c_6 + \frac{2}{27}c_7 + \frac{8}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/2,0) &= u_6 = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{2}{27}c_6 + \frac{4}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1) &= u_7 = c_0 + c_2 + c_5 + c_9 \\
u(0,2/3) &= u_8 = c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{4}{9}c_5 + \frac{8}{27}c_9 \\
u(0,1/3) &= u_9 = c_0 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_9 \\
u(1/3,1/3) &= u_{10} = c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{9}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_6 + \frac{1}{27}c_7 + \frac{1}{27}c_8 + \frac{1}{27}c_9
\end{aligned} \tag{19}$$

Durch Anwendung des gleichen Prinzips wie in Abschnitt 1.2.1 können nun die Formfunktionen $N_1 \dots N_{10}$ ermittelt werden. Diese finden sich in Anhang

1.3 Problemtypen

In diesem Kapitel werden die in der Software implementierten Problemtypen beschrieben. In beiden Fällen handelt es sich um zweidimensionale, ebene Probleme. Resultat dieses Abschnitts werden analytische Berechnungsvorschriften für die einzelnen Elementgleichungssysteme sein.

Die Berechnungen aus diesem Abschnitt stammen, sofern nicht anders angegeben, aus [1] Abschnitte 7 und 8. Für ausführliche Herleitungen, auf welche in diesem Fall bewusst verzichtet wird, sei auf das oben genannte Werk verwiesen.

Wie aus Abschnitt 1.1 bekannt, ist das Randwertproblem zuerst als Operatorgleichung mit entsprechenden Randwertbedingungen zu formulieren. Die Operatorgleichung kann nun entweder direkt im Galerkinschen Verfahren oder über Umweg eines äquivalenten Funktional im Ritzschen Verfahren verwendet werden. Dabei wird für die gesuchte Funktion u in jedem Teilgebiet (finites Element) ein entsprechender Approximationsansatz wie in Abschnitt 1.2 ermittelt, eingesetzt. Das Ergebnis sind 'lokale' lineare Gleichungssysteme (für jedes Element eines), welche zu einem großen, 'globalen' Gleichungssystem assembliert werden müssen. Auf die Assemblierung wird dabei genauer in Abschnitt 2.5 eingegangen.

Ausgangspunkt für Probleme aus der Elektrotechnik sind im Allgemeinen die Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (23)$$

mit den Materialzusammenhängen

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (25)$$

mit $[\epsilon]$ und $[\mu]$ als ortsabhängigen Materialtensoren.

1.3.1 Elektrostatistische Probleme

Für den elektrostatischen Fall ist \mathbf{J} sowie sämtlichen zeitlichen Änderungen $\equiv 0$ wodurch sich $\mathbf{B} \equiv 0$ sowie die rechten Seiten von (20) und (21) zu $\equiv 0$ ergeben.

Ein elektrostatisches Problem wird somit durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (27)$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes aus (26) kann nun folgender Ansatz für die elektrostatische Feldstärke \mathbf{E} verwendet werden:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V \quad (28)$$

mit V als sogenanntem *Skalapotential*.

Setzt man (28) nun unter Verwendung von 24 in (27) ein, so erhält man die partielle Differentialgleichung für V als:

$$\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad} V = -\rho \quad (29)$$

Hierbei entspricht $\operatorname{div} [\epsilon] \operatorname{grad}$ dem Differentialoperator L aus 1, das Potential V der gesuchten Funktion u und $-\rho$ der gegebenen Funktion f .

Die Randbedingungen für ein solches Problem sind gegeben als

$$V = \bar{V} \quad (30)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} V = \sigma \quad (31)$$

am neumannschen Rand Γ_N , mit \mathbf{n} als Flächennormale und σ der am neumannschen Rand gegebenen Flächenladungsdichte entspricht.

Unter Verwendung des Ritzschen *oder* Galerkinschen Verfahrens erhält man nun Lösung zur Berechnung der Elementgleichungssysteme, wobei beide Verfahren *dieselbe (!)* Lösung liefern. Unter Verwendung des in 1.2 vorgestellten Ansatzes für das Potential $V = \sum_{k=1}^N N_k V_k$ ergibt sich für das Elementgleichungssystem $[k_{ij}] \cdot \{V_j\} = \{r_j\}$:

$$k_{ij} = \int_x \int_y \left(\epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (32)$$

$$r_j = \int_x \int_y N_i \rho dx dy + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma \quad (33)$$

Anmerkung: Um auf die oben gezeigte Form für k_{ij} zu kommen ist es notwendig den Permittivitätstensor $[\epsilon]$ auf eine Hauptachsenform zu transformieren:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

Man beachte dass die Formfunktionen für isoparametrische finite Elemente $N_i = N_i(\xi, \eta)$ gilt, wodurch alle Integrale in den Variablen ξ und η durchgeführt werden müssen. Die entsprechende Substitution sowie die Realisierung der Integrale werden in Abschnitt 2.4 genauer behandelt.

1.3.2 Stationäre Strömungsfeldprobleme

Stationäre Strömungsfeldprobleme lassen sich über das Gesetz der Ladungserhaltung definieren:

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \quad (34)$$

Es muss außerdem das Ohmsche Gesetz in seiner differentiellen Form gelten:

$$\mathbf{J} = [\gamma] \mathbf{E} \quad (35)$$

mit $[\gamma]$ als ortsabhängigem Tensor der spezifischen Leitfähigkeit.

Stationäre Strömungsfeldprobleme können somit analog zu elektrostatischen Problemen mittels folgender Differentialgleichung ermittelt werden:

$$\text{div}[\gamma] \text{grad} V = 0 \quad (36)$$

Als Randbedingungen ergeben sich:

$$V = \bar{V} \quad (37)$$

am dirichletschen Rand Γ_D und

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} V = J_e \quad (38)$$

wobei J_e die eingeprägte Flächenstromdichte am neumannschen Rand darstellt.

2 Implementierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit diversen Details der Implementierung des finite Elemente Algorithmus in der Software. Es wird beschrieben wie mittels der Software Gmsh die Problemgeometrie erstellt, sowie ein finite Elemente Gitter generiert und exportiert wird. Anschließend erfolgt ein kurzer Umriss des Imports und Verarbeitung des Gitters zur Verwendung im eigentlichen Lösungsalgorithmus auf den detaillierter am Ende dieses Kapitels eingegangen wird.

- 2.1 Formulierung der finiten Elemente (gesamt: 3 Seiten)**
 - 2.1.1 3-Punkte linear (1 Seite)
 - 2.1.2 6-Punkte quadratisch (1 Seite)
 - 2.1.3 10-Punkte kubisch (1 Seite)
- 2.2 Erstellung der Geometrie und Generierung des Gitters mit Gmsh (gesamt: 3 Seiten)**
 - 2.2.1 Erstellen der Geometrie (2 Seiten)
 - 2.2.2 Generierung und Export des FEM-Gitters (1 Seiten)
- 2.3 Import und Verarbeitung des FEM-Gitters (gesamt: 4 Seiten)**
 - 2.3.1 Import (1 Seiten)
 - 2.3.2 Ermitteln der Knoten am dirichletschen Rand (1 Seiten)
 - 2.3.3 Ermitteln der Element-Seiten am neumannschen Rand (2 Seite)
- 2.4 Berechnung der Elementgleichungssysteme (gesamt: 3 Seiten)**
 - 2.4.1 Berechnung der Element-Matrix (2 Seite)
 - 2.4.2 Berechnung des Rechtsseiten-Vektors (1 Seite)
- 2.5 Assemblierung und Lösung des globalen Gleichungssystems (gesamt: 1 Seite)**
- 3 Simulationen**
 - 3.1 Simulation 1 (2 Seiten)
 - 3.2 Simulation 2 (2 Seiten)
 - 3.3 Simulation 3 (2 Seiten)

Literatur

- [1] K. Preis. Simulation mechatronischer Systeme, Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung 437.123. Sommersemester 2016/2017.