
THEORIE DER ELEKTROTECHNIK, UE

Hausübung

Autor:

Datum: Graz, 23. Februar 2020

1 Finite Differenzen Methode

1.1 Theoretische Grundlagen

Das zu lösende Randwertproblem ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta V &= \rho \text{ mit} \\ V &= V_D \text{ auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= V_N \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

In den gegebenen Beispielen ist ε konstant und $\neq 0$, $\rho = 0$ und $V_N = 0$. Des Weiteren gilt aufgrund der Ausdehnung des Problems $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, womit sich das Randwertproblem (1.1) wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \text{ mit} \\ V &= V_D \text{ auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1.3}$$

Man nehme nun eine konstante *Schrittweite* h an und führe folgende Notation ein:

$$V_{i,j} = V(ih, jh), \quad i, j \geq 0$$

Die Linearisierung der Differentialgleichung in (1.3) liefert somit

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

bzw. unter Berücksichtigung der Konstanz von h

$$-4V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} = 0. \tag{1.4}$$

Das Problemgebiet wird somit in Quadrate der Seitenlänge h diskretisiert wobei die *Knoten-potentiale* an den Gitterknotenpunkten durch Lösen des aus (1.4) entstehenden linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Die vorgegebenen Potentiale am dirichletschen Rand Γ_D fließen als bekannte Größen in das Gleichungssystem ein.

Ferner sei ohne weitere Herleitung gesagt, dass die Behandlung der **homogenen** neumannschen Randbedingungen keiner weiteren Aufmerksamkeit bedarf. Hier sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

Die genaue Vorgehensweise zur Lösung des Problems mit der oben genannten Methode wird im folgenden Kapitel anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

1.2 Funktion des FDM-Algorithmus

Abbildung 1 zeigt ein Problem äquivalent jenem aus Beispiel 1 der Hausübung, allerdings mit weitaus geringerer Auflösung.

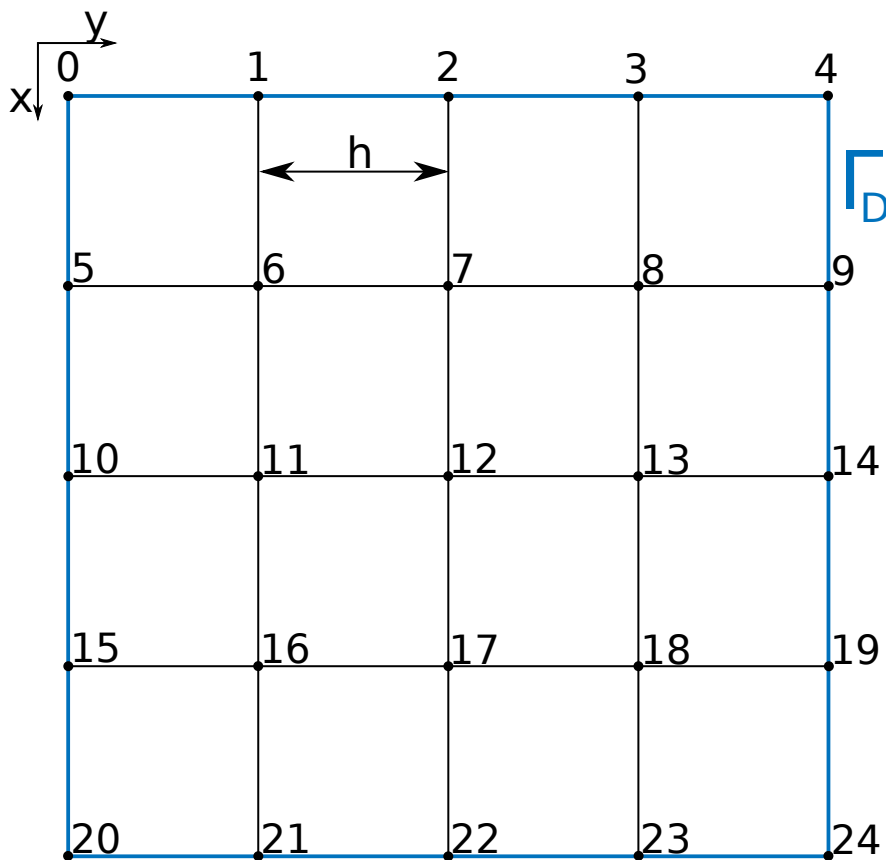


Abbildung 1.1: Problemgebiet

In einem ersten Schritt wird jedem Knoten eine eindeutige Nummer n zugewiesen welche mittels einer Tabelle den Positionsindizes i und j zugewiesen wird:

i	j	n
0	0	0
0	1	1
0	2	2
.		
.		
.		
4	4	24

Tabelle 1.1: Zuordnung der Knotennummer zu den Koordinatenindizes

Im Weiteren sei N_{Knoten} die Gesamtanzahl der Knoten.

In einem weiteren Schritt werden zwei weitere Tabellen erstellt von denen die Erste die Knoten am dirichletschen Rand Γ_D und die entsprechenden Knotenpotentiale enthält. Im Weiteren sei N_D die Anzahl der Knoten auf Γ_D .

n	V
0	100
2	100
.	
.	
.	

Tabelle 1.2: Zuordnung der Randknoten zu den entsprechenden Randwerten

Das zu Problem und somit auch das zu lösende Gleichungssystem besitzt nun somit $N_{Unbek} = N_{Knoten} - N_D$.

\vec{A} sei die $(N_{Unbek} \times N_{Unbek})$ -Matrix mit den aus (1.4) berechneten Koeffizienten. Weiters sei \vec{x} der $(N_{Unbek} \times 1)$ -Vektor der unbekannten Knotenpotentiale sowie \vec{b} der $(N_{Unbek} \times 1)$ -Vektor der bekannten Werte.

Das zu lösende Gleichungssystem lautet somit

$$\vec{A}\vec{x} = \vec{b}. \quad (1.5)$$

Die oben erwähnte zweite Tabelle ordnet die Knotennummern der unbekannten Knotenpotentiale ihrer Position im Gleichungssystem zu. So stellt zum Beispiel der Knoten 6 das erste Unbekannte Element im Gleichungssystem dar. Der Knoten 7 das Zweite usw.

n	Position in \vec{x}
6	1
7	2
8	3
11	4
12	5
.	
.	
.	

Tabelle 1.3: Zuordnung der unbekannten Knotenpotentiale zu ihrer Position in \vec{x}

Im nächsten Schritt wird das Gleichungssystem (1.5) durch iteratives Anwenden von (1.4) über alle unbekannten Knoten assembliert. Die Iteration erfolgt dabei nach steigender Knotennummer. Abbildung 1.2 zeigt exemplarisch die Vorgehensweise für Knoten 6.

Die entsprechende Gleichung des Gleichungssystems lautet

$$-4V_{1,1} + V_{2,1} + V_{0,1} + V_{1,2} + V_{1,0} = 0,$$

wobei

- $V_{1,1} = V_6$, unbekannt,
- $V_{2,1} = V_{11}$, unbekannt,
- $V_{0,1} = V_1$, bekannt,
- $V_{1,2} = V_7$, unbekannt und

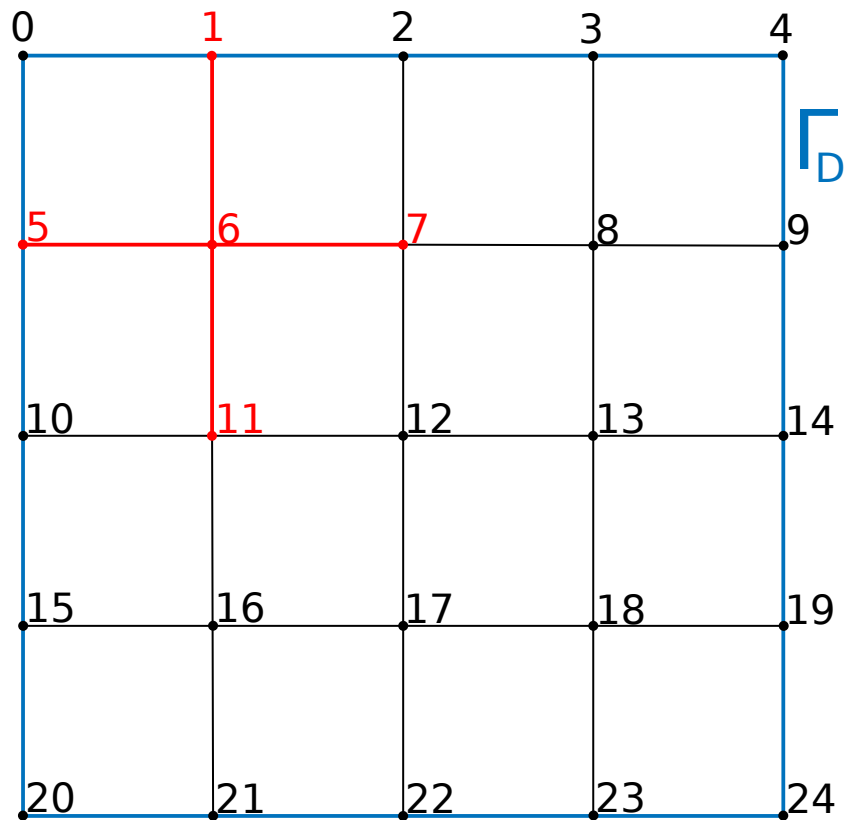


Abbildung 1.2: FDM- 'Stern' für Knoten 6

- $V_{1,0} = V_5$, bekannt

gilt. Somit lautet die erste Gleichung des Gleichungssystems

$$-4V_{1,1} + V_{2,1} + V_{1,2} = -V_{0,1} - V_{1,0}. \quad (1.6)$$

Analog dazu kann für alle weiteren Knoten vorgegangen werden. Das Ergebnis ist eine symmetrische und quadratische Matrix \vec{A} . Das Lösen besagten Gleichungssystems liefert die unbekannten Knotenpotentiale.

1.3 Weiterverarbeitung der Lösung

Aus der im vorherigen Kapitel ermittelten Lösung für die Knotenpotentiale soll nun in einem letzten Schritt das elektrische Feld bzw. das stationäre Strömungsfeld berechnet werden.

Die Linearisierung des Zusammenhangs

$$\vec{E} = -\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$$

liefert mit $\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\vec{E} \approx \begin{bmatrix} \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h} \\ \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Die Berechnung des elektrischen Feldes an den Knotenpunkten erfolgt 'links oben' im Problemgebiet bei $i = 0$ und $j = 0$ und wird iterativ fortgesetzt, wobei zu beachten ist dass am rechten und unteren Rand keine Feldberechnung durchgeführt werden kann da dort die Indizes $i + 1$ und $j + 1$ aus dem Problemgebiet herausragen.

2 Aufgabe 1

2.1 Numerische Berechnung

Gewählte Diskretisierung: $\frac{L}{100}$

Diskussion der Ergebnisse: Durch die bündig anschließenden Flächen des dirichletschen Randes kommt es zu Singularitäten der Magnitude des elektrischen Feldes in den Ecken des Problemgebiets. Siehe hierzu die Abbildungen 2.4, 2.8 und 2.12

2.1.1 Fall a)

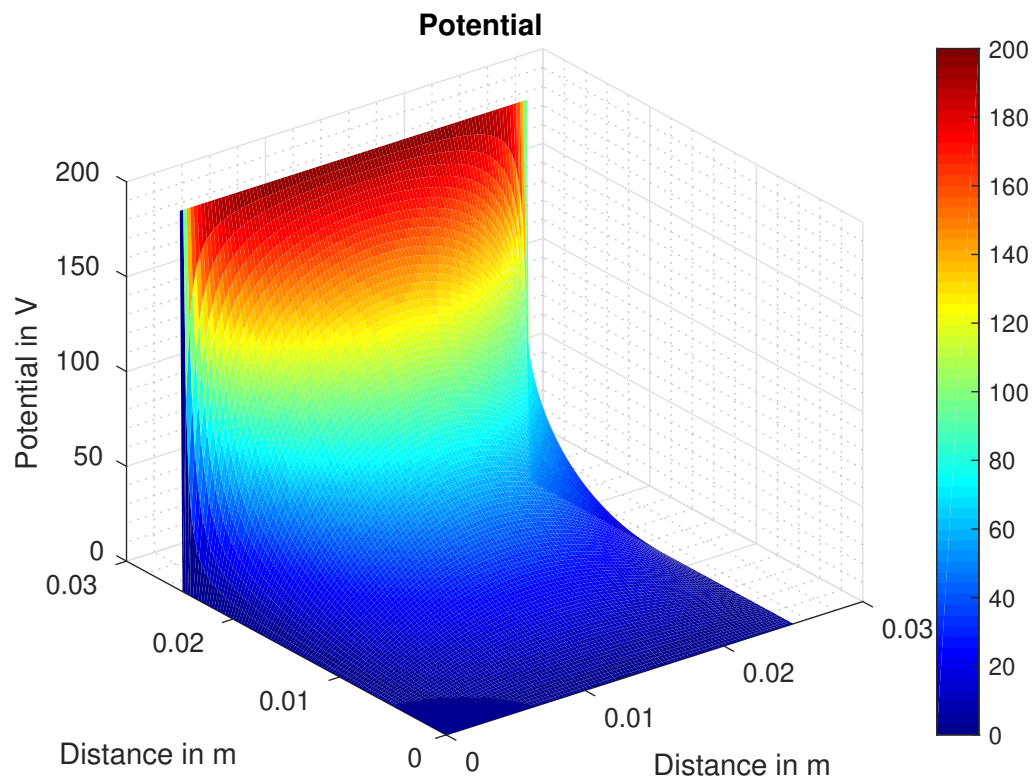


Abbildung 2.1: Potentialverlauf

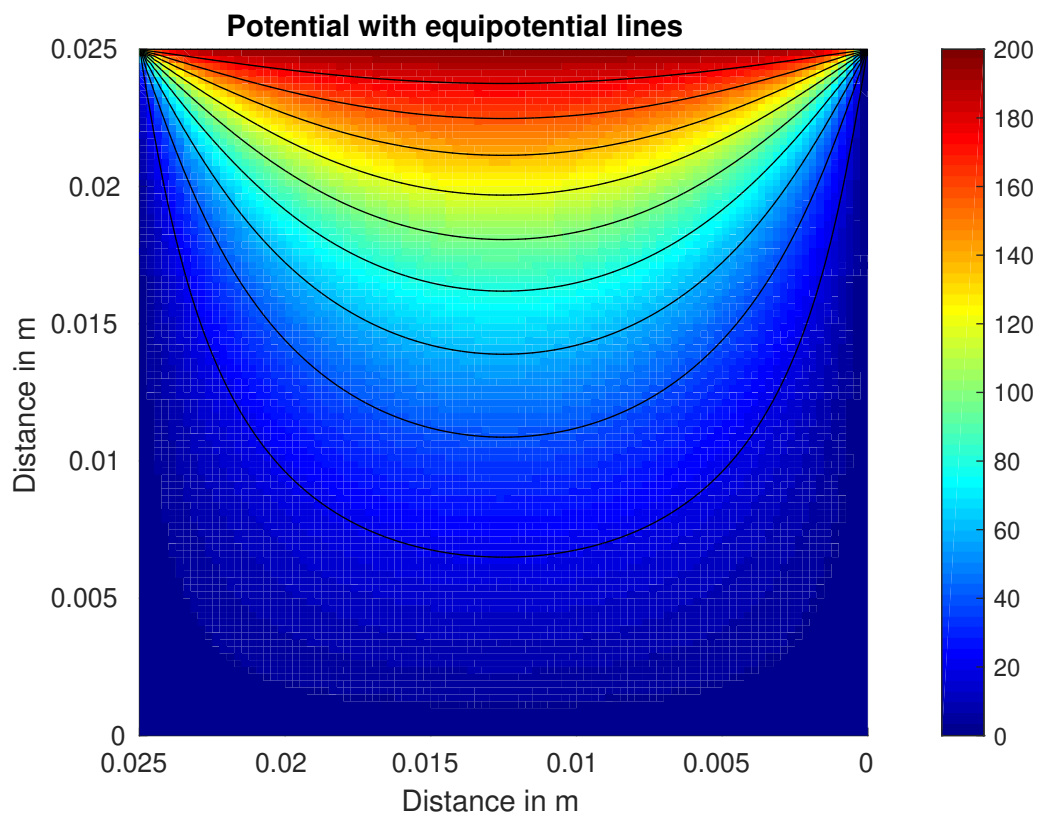


Abbildung 2.2: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

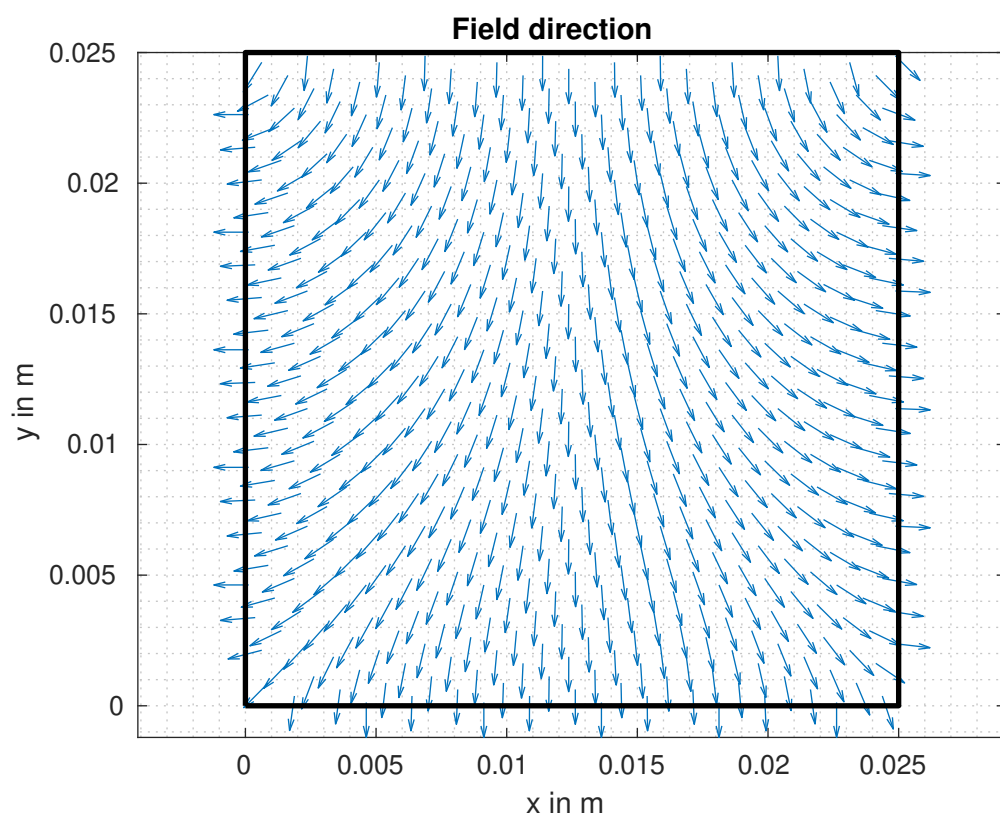


Abbildung 2.3: Richtung des elektrischen Feldes

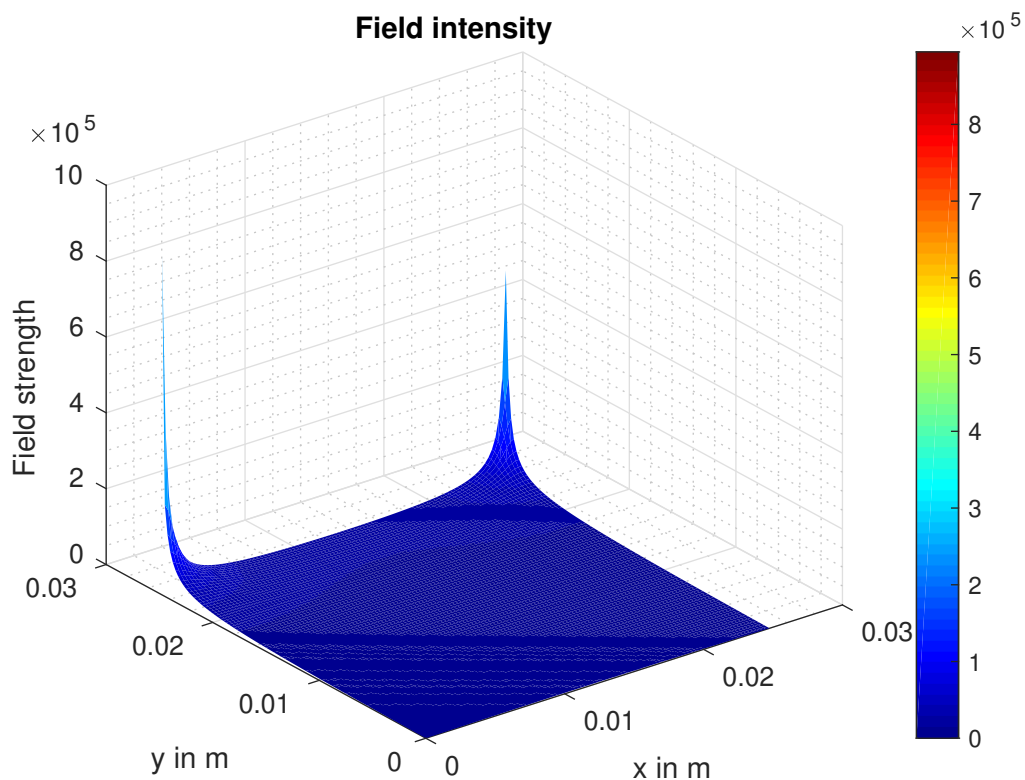


Abbildung 2.4: Magnitude des elektrischen Feldes

2.1.2 Fall b)

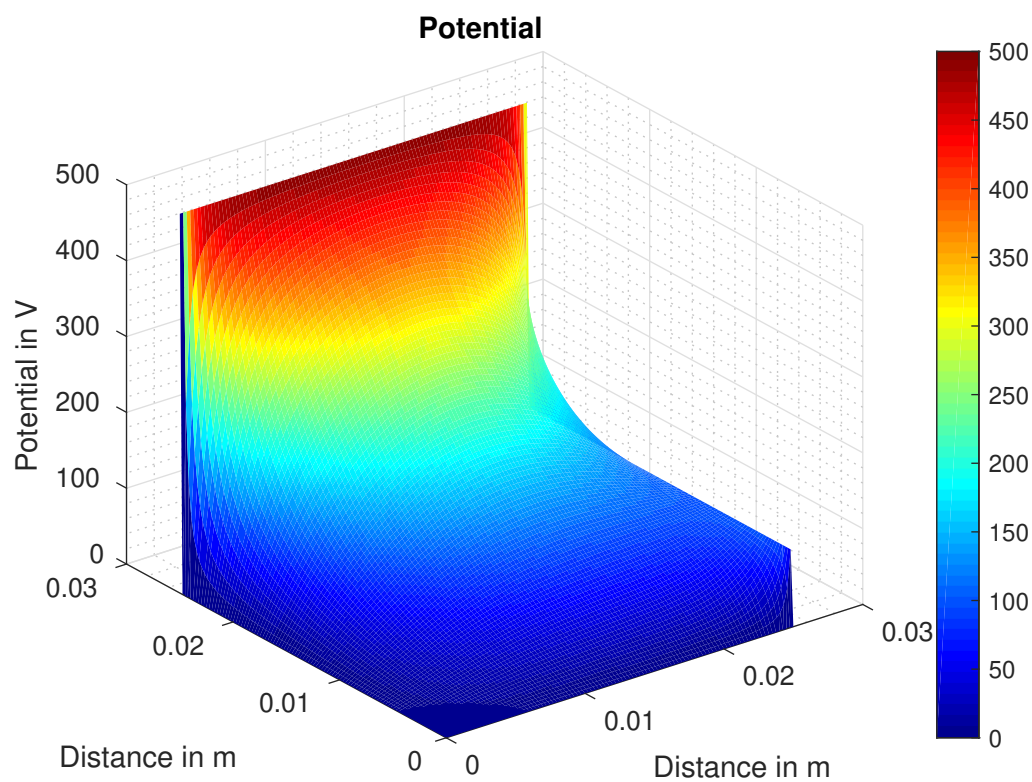


Abbildung 2.5: Potentialverlauf

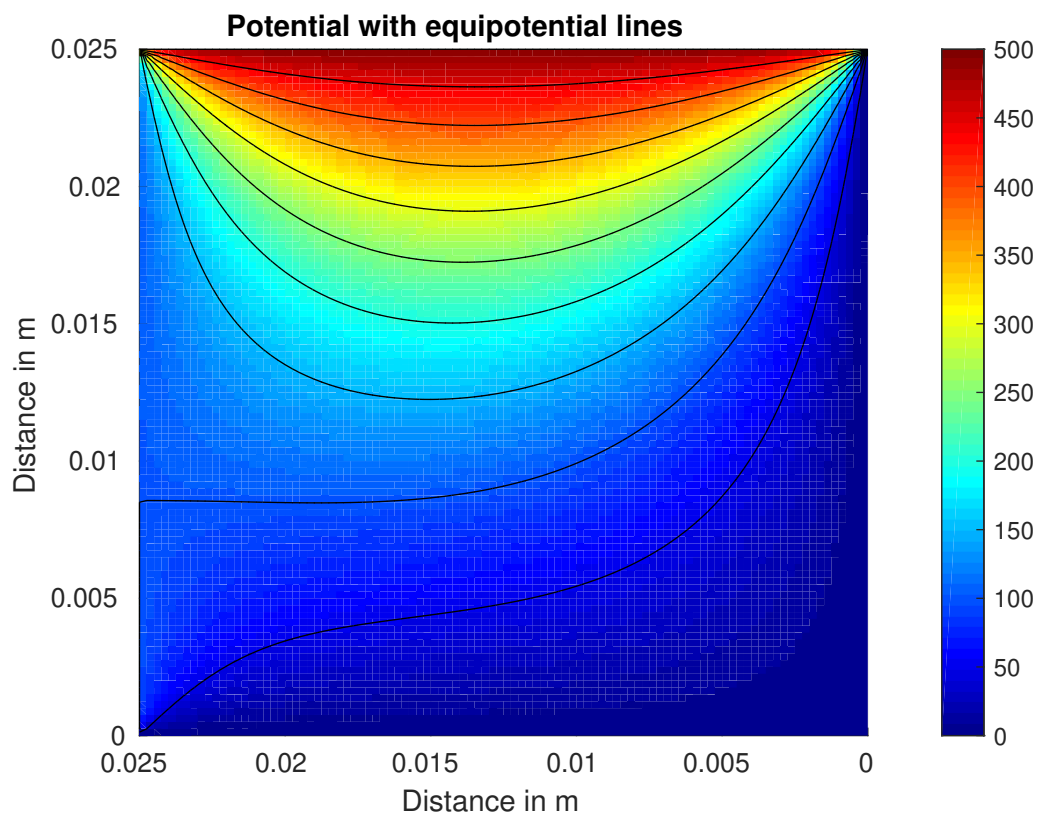


Abbildung 2.6: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

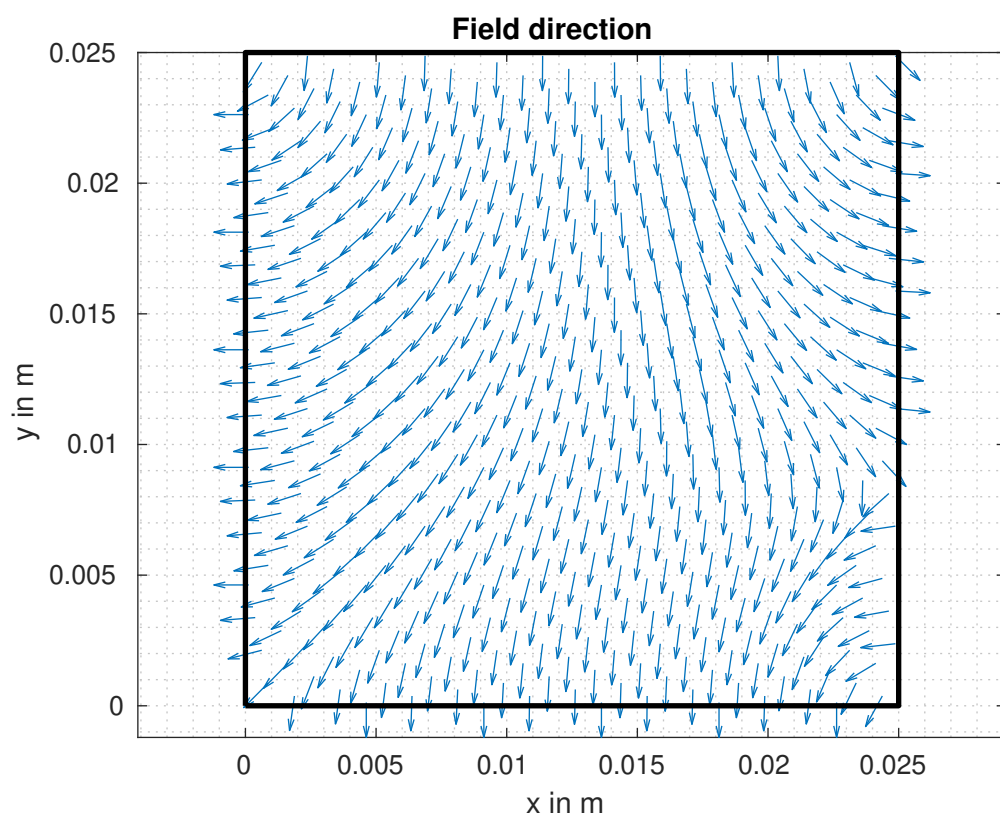


Abbildung 2.7: Richtung des elektrischen Feldes

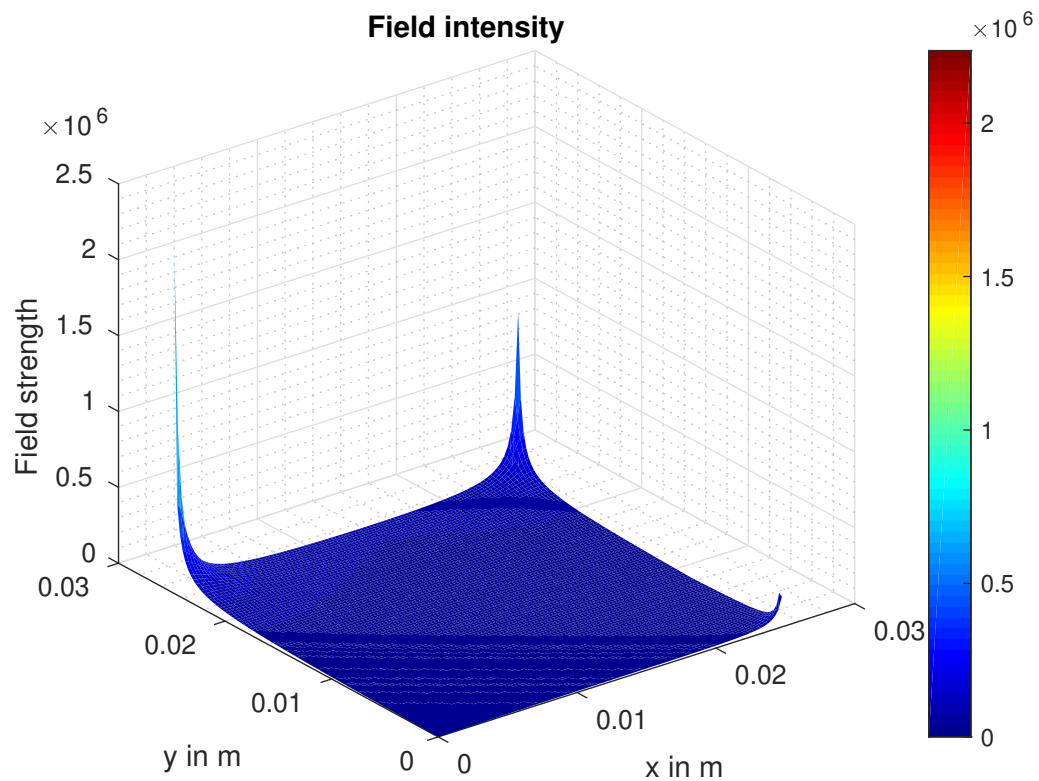


Abbildung 2.8: Magnitude des elektrischen Feldes

2.1.3 Fall c)

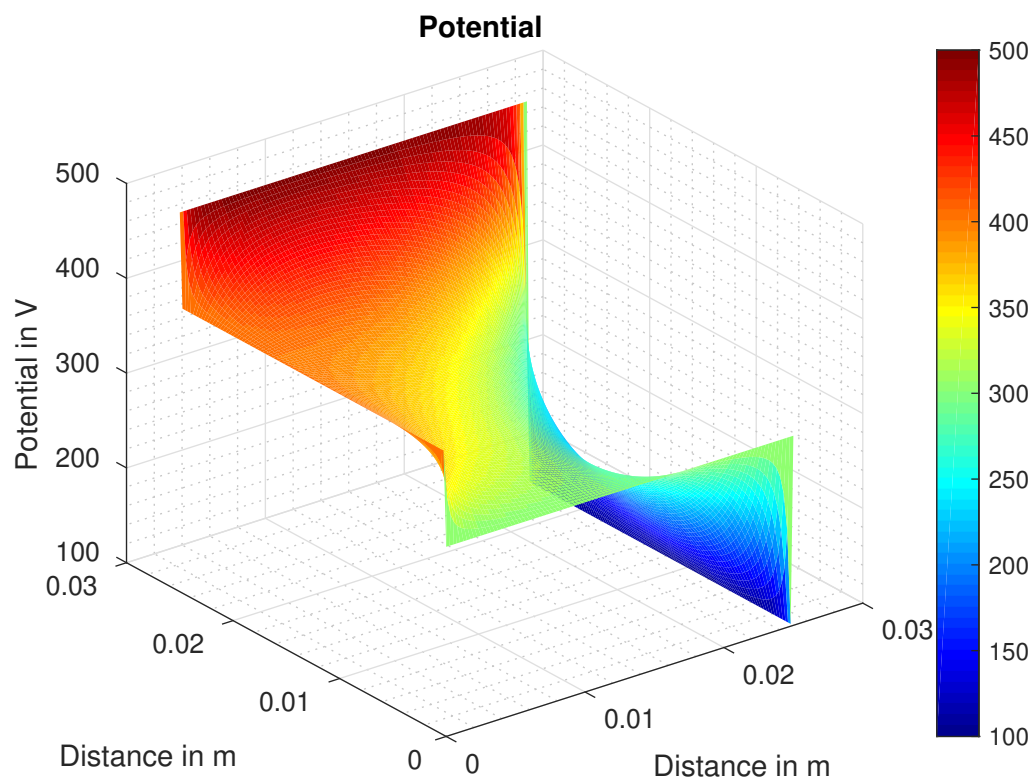


Abbildung 2.9: Potentialverlauf

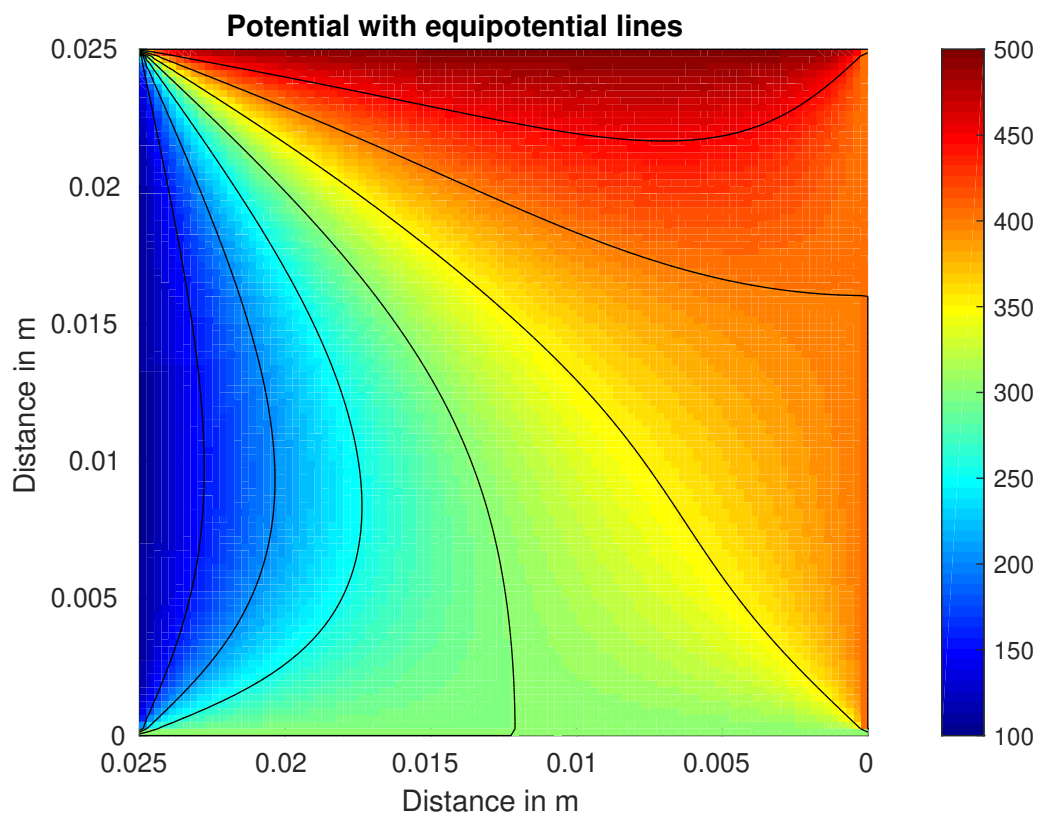


Abbildung 2.10: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

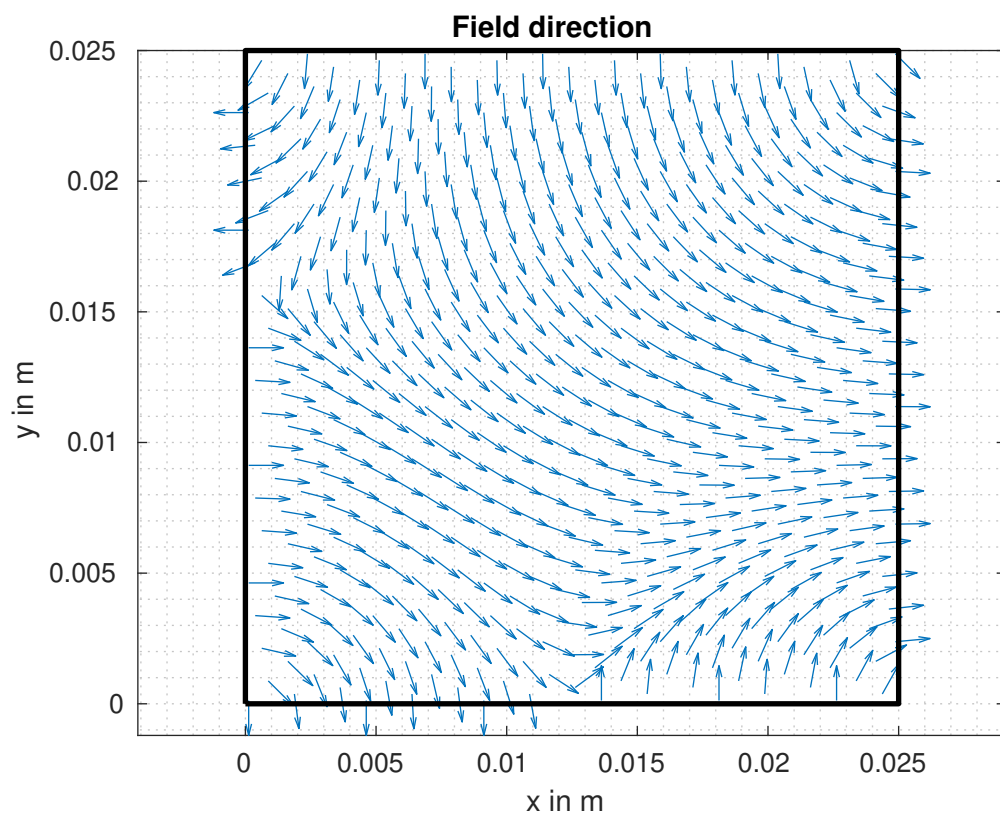


Abbildung 2.11: Richtung des elektrischen Feldes

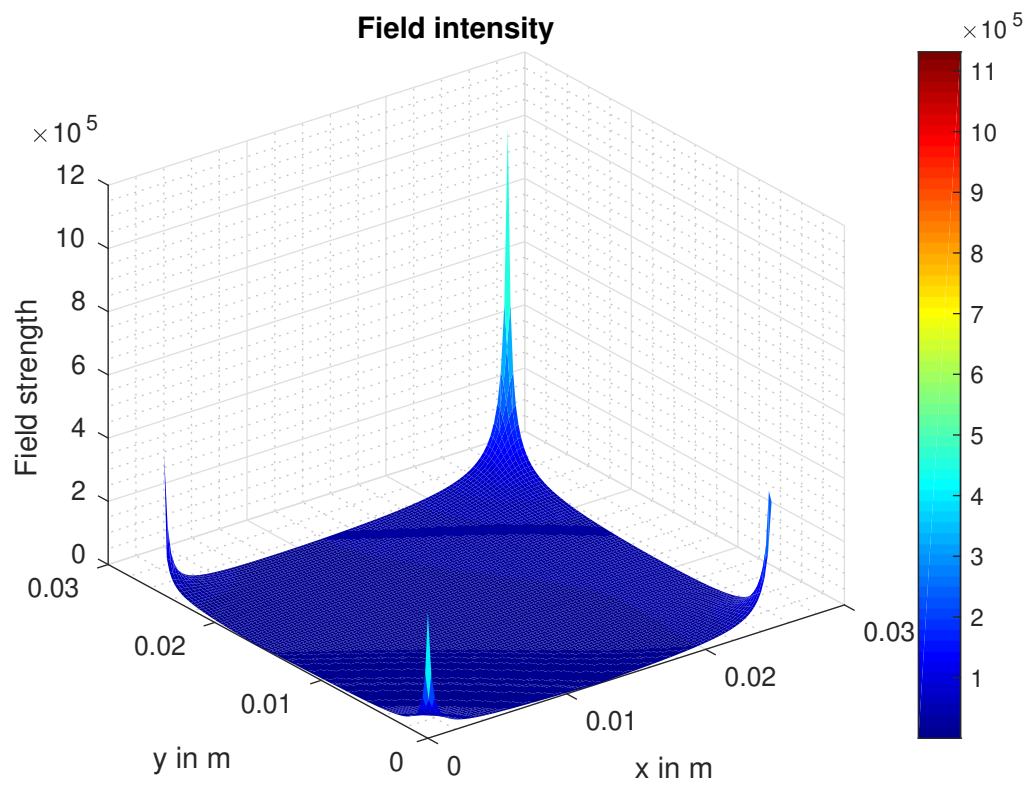


Abbildung 2.12: Magnitude des elektrischen Feldes

2.2 Aufgabe 2

Gewählte Diskretisierung: 1mm

Diskussion der Ergebnisse: Man beachte die Singularität der Magnitude des stationären Strömungsfeldes in Abbildung 2.16.

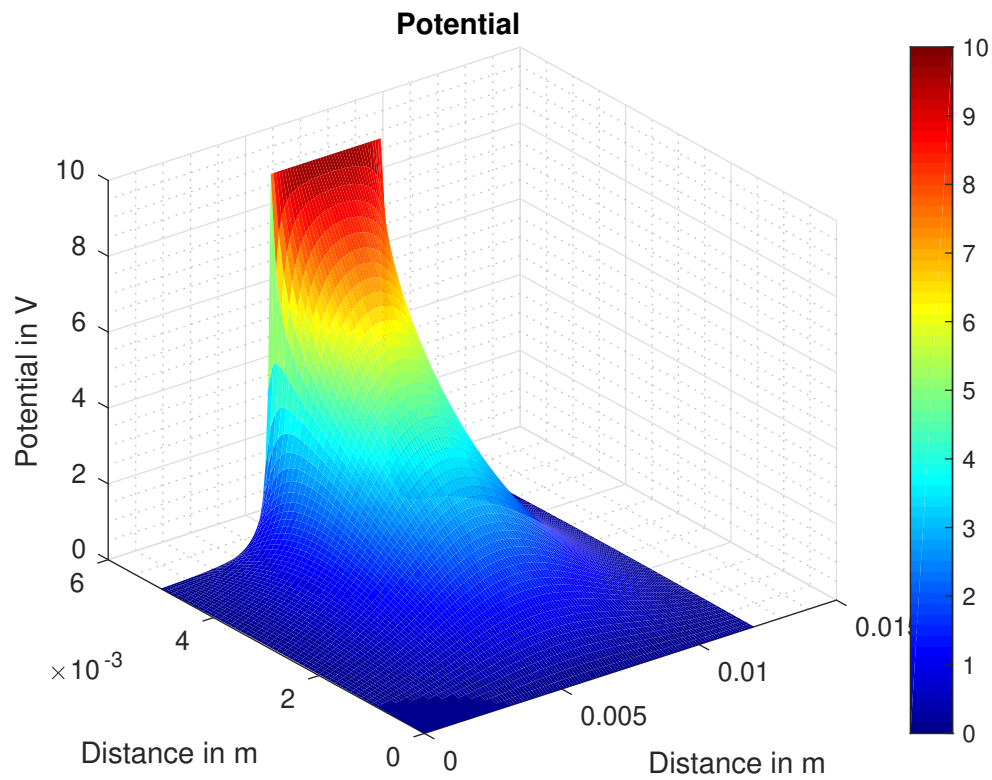


Abbildung 2.13: Potentialverlauf

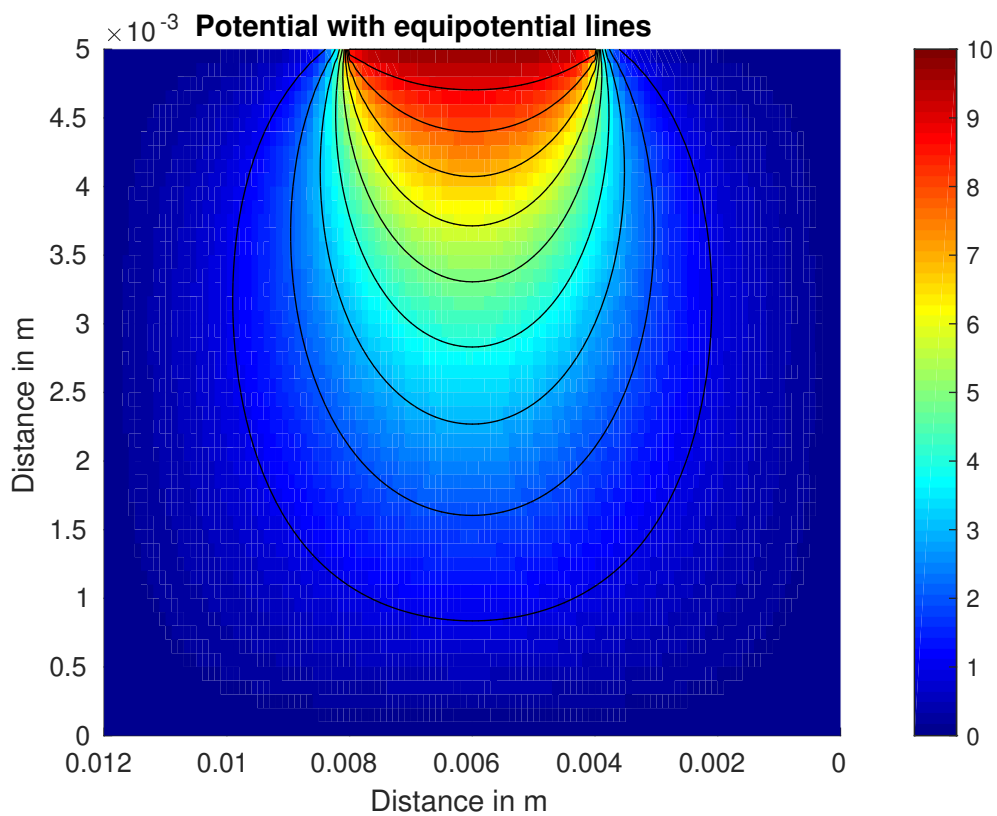


Abbildung 2.14: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

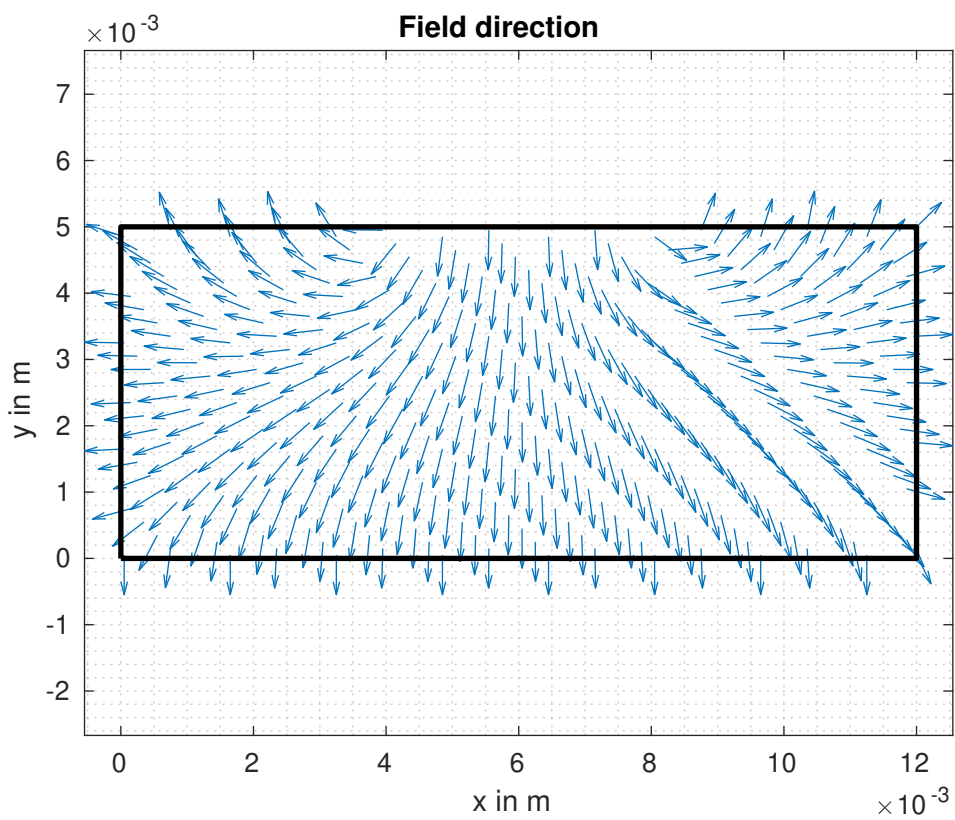


Abbildung 2.15: Richtung des stationären Strömungsfeldes

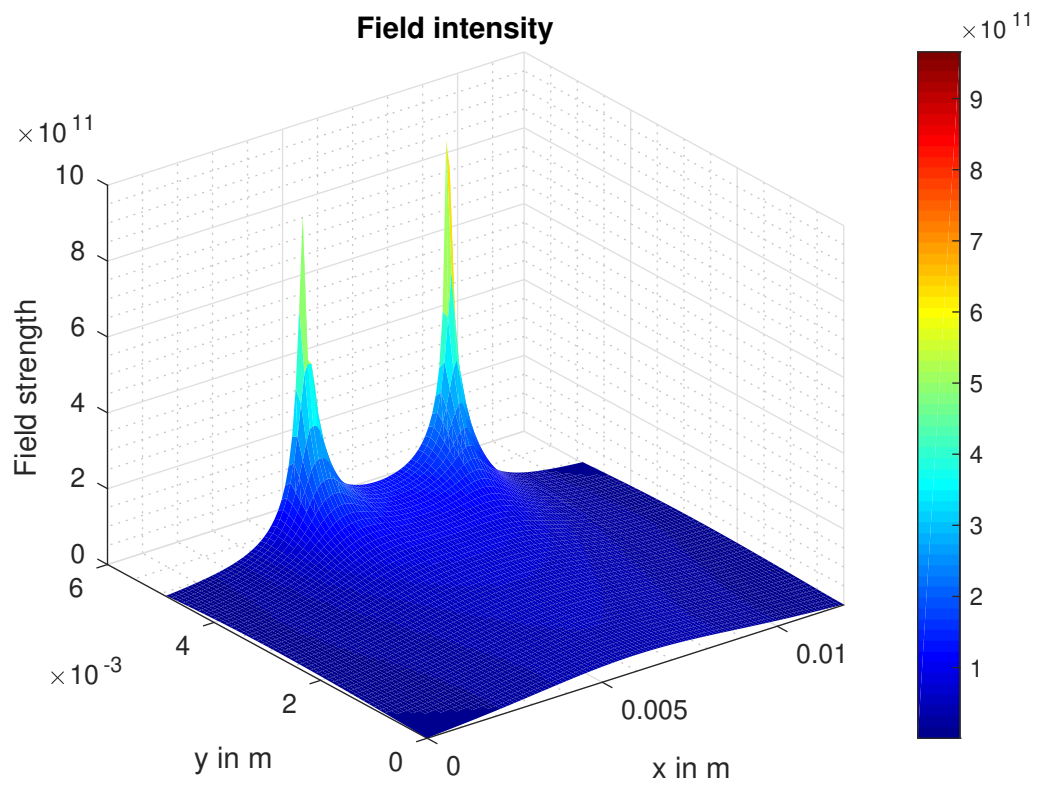


Abbildung 2.16: Magnitude des stationären Strömungsfeldes