
THEORIE DER ELEKTROTECHNIK, UE

Hausübung

Autor:
Datum: Graz, 26. Februar 2020

1 Analytische Lösung Aufgabe 1

Aufgrund der vorteilhaften Struktur des Problems der ersten Aufgabenstellung (elektrostatische Simulation) ist eine analytische Lösung möglich. Mit dieser kann darauffolgend das Ergebnis der numerischen Simulation überprüft und plausibilisiert werden.

Wie die folgende Rechnung zeigen wird, kann das Ergebnis der analytischen Rechnung ebenso wieder nur approximiert dargestellt werden, da im Resultat eine unendliche Summe auftaucht. Nichtsdestotrotz ist aufgrund moderner numerischer Rechenprogramme eine Auswertung des Ergebnisses mit hinreichender Genauigkeit möglich.

1.1 Formulierung des Problems

Für die analytische Rechnung wird die sogenannte Separationsmethode zur Lösung der Laplaceschen Gleichung herangezogen.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

Aufgrund der Ausdehnung des Problems in z-Richtung ($L \ll L_A$) kann die ursprüngliche dreidimensionale Aufgabenstellung in zwei Dimensionen betrachtet werden, da näherungsweise keine Änderung des Potentials in z-Richtung auftritt.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

Damit ergibt sich folgendes zu lösendes Randwertproblem, wie auch bereits in Gleichung 2.3 angeführt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \text{ mit} \quad (1.3)$$

$$V = V_D \text{ auf } \Gamma_D$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N$$

Eine Neumann'sche Randbedingung (auf Γ_N) ist laut Aufgabenstellung nicht gegeben. Die Dirichlet'schen Randbedingungen (auf Γ_D) ergeben sich durch die Vorgabe der Potentiale der vier Metallplatten.

1.2 Separationsmethode

Bei dieser Methode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen wird versucht, die Laplace'sche Gleichung für V auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Hierbei wählt man als Ansatz für die Potentialfunktion ein Produkt der Lösungen dieser gewöhnlichen Diffe-

rentialgleichungen, welche ausschließlich von einer Ortskoordinate abhängen.

$$V_{(x,y,z)} = X_{(x)} \cdot Y_{(y)} \cdot Z_{(z)} \quad (1.4)$$

Aufgrund der räumlichen Ausdehnung in z-Richtung ergibt sich, wie in Gleichung 1.3 angeführt:

$$V_{(x,y)} = X_{(x)} \cdot Y_{(y)} \quad (1.5)$$

Damit die Separationsmethode angewandt werden kann, müssen die Randbedingungen entlang Oberflächen mit $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ gegeben sein. Dies ist hier der Fall, denn die erwähnten Oberflächen entsprechen genau den Metallplatten, auf welchen die Dirichlet'schen Randbedingungen gegeben sind.

1.3 Ableitung der Potentialfunktion

Einsetzen von Gleichung 1.5 in die Laplace'sche Gleichung 1.1 und anschließendem Umformen führt zu:

$$Y_{(y)} \frac{d^2 X_{(x)}}{dx^2} + X_{(x)} \frac{d^2 Y_{(y)}}{dy^2} = 0 \quad | : X_{(x)} Y_{(y)} \quad (1.6)$$

$$\underbrace{\frac{1}{X_{(x)}} \frac{d^2 X_{(x)}}{dx^2}}_{\begin{array}{c} f(x) \\ k^2 \end{array}} + \underbrace{\frac{1}{Y_{(y)}} \frac{d^2 Y_{(y)}}{dy^2}}_{\begin{array}{c} g(y) \\ -k^2 \end{array}} = 0 \quad (1.7)$$

Die beiden Summanden aus Gleichung 1.7 hängen also nur mehr von jeweils einer Variable ab und werden zu einer Konstanten mit jeweils einmal positivem und einmal negativem Vorzeichen gesetzt, womit die Forderung $= 0$ erfüllt wird. Damit hat sich das Problem auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert, welche mit der Ansatzmethode gelöst werden können.

$$\frac{d^2 X_{(x)}}{dx^2} = k^2 X_{(x)} \quad (1.8)$$

$$\text{Ansatz : } X_{(x)} = e^{\lambda x} \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} = k^2 e^{\lambda x} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - k^2 = 0 \quad (1.11)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{k^2} = \pm k \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow X_{(x)} = \tilde{A} e^{kx} + \tilde{B} e^{-kx} \quad (1.13)$$

Der Ausdruck für $X_{(x)}$ kann mit Hilfe der Hyperbelfunktionen umgeschrieben werden:

$$X_{(x)} = A \cosh(kx) + B \sinh(kx) \quad (1.14)$$

Das selbe Vorgehen wendet man nun für $g_{(y)}$ an.

$$\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2} = -k^2 Y_{(y)} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz : } Y_{(y)} &= e^{\lambda y} \\ \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda y} &= -k^2 e^{\lambda y} \\ \Rightarrow \lambda^2 + k^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-k^2} = \pm jk \\ \Rightarrow Y_{(y)} &= \tilde{C} e^{jky} + \tilde{D} e^{-jky} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Der Ausdruck für $Y_{(y)}$ kann mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen umgeschrieben werden:

$$Y_{(y)} = C \cos(ky) + D \sin(ky) \quad (1.17)$$

Setzt man nun beide Ausdrücke gemäß Gleichung 1.5 zusammen, erhält man:

$$V_{(x,y)} = [A \cosh(kx) + B \sinh(kx)] \cdot [C \cos(ky) + D \sin(ky)] \quad (1.18)$$

Vertauscht man in Gleichung 1.7 die beiden Vorzeichen der Konstante k , also $f_{(x)} = -k^2$ und $g_{(y)} = k^2$, anstatt $f_{(x)} = k^2$ und $g_{(y)} = -k^2$, so kann man mit selben Vorgehen wie oben folgenden Ausdruck für V ableiten:

$$V_{(x,y)} = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot [C \cosh(ky) + D \sinh(ky)] \quad (1.19)$$

Hier sind also \cos mit \cosh und \sin mit \sinh vertauscht. Im folgenden werden beide Ansätze notwendig sein, damit der sogenannte „Fouriertrick“ korrekt angewandt werden kann. Hierzu ist es nämlich notwendig, dass jene Variable, welche im „Fouriertrick“ als Integrationsvariable dient, in den trigonometrischen Funktionen vorkommt, da nur diese bei der Integration wegfallen.

1.4 Superpositionsprinzip

Aufgrund der Linearität der Laplace'schen Gleichung kann das Superpositionsprinzip angewandt werden. In der Aufgabenstellung ist das Potential von vier Metallplatten vorgegeben, ergo ergeben sich vier Dirichlet'sche Ränder bzw. Randbedingungen. Das Superpositionsprinzip erlaubt es nun, das Problem in vier Teilprobleme zu zerlegen, in welchen jeweils nur eine Dirichlet'sche Randbedingung aktiv ist und die restlichen sozusagen „ausgeschalten“ beziehungsweise zu 0 gesetzt sind. Die Betrachtung in Teilproblemen vereinfacht die Berechnung der jeweiligen Teillösungen, welche gemäß des Superpositionsprinzips anschließend additiv überlagert werden müssen, um die Gesamtlösung der Potentialverteilung zu erhalten, welche gilt, wenn alle Randbedingungen aktiv sind.

1.5 Berechnung der Teillösungen

1.5.1 Potential A aktiv

Da das Potential V_A über einen Bereich mit $y = 0 = \text{konstant}$ wirkt, muss der Ansatz aus Gleichung 1.19 verwendet werden.

$$V_{(x,y)} = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot [C \cosh(ky) + D \sinh(ky)] \quad (1.20)$$

Mit den Randbedingungen können nun die jeweiligen Koeffizienten der Teillösung berechnet werden.

1.

$$\begin{aligned} V_{(0,y)} &= V_D = 0 = A \cdot [C \cosh(ky) + D \sinh(ky)] \\ \Rightarrow A &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$V_{(x,y)} = [\bar{C} \cosh(ky) + \bar{D} \sinh(ky)] \cdot \sin(kx) \quad (1.22)$$

2.

$$\begin{aligned} V_{(L,y)} &= V_B = 0 = [\bar{C} \cosh(ky) + \bar{D} \sinh(ky)] \cdot \sin(kL) \\ \Rightarrow kL &= n\pi \\ \Rightarrow k &= n\frac{\pi}{L} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Da diese Bedingung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, müssen diese in der Teillösung auch berücksichtigt werden.

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{C}_n \cosh(n\frac{\pi}{L}y) + \bar{D}_n \sinh(n\frac{\pi}{L}y)] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.24)$$

3.

$$V_{(x,0)} = V_A = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.25)$$

Die Koeffizienten \bar{C}_n können nun mittels „Fouriertrick“ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \bar{C}_n &= \frac{2}{L} \int_0^L V_A \sin(n\frac{\pi}{L}x) dx \\ &= -\frac{2V_A}{L} \frac{L}{n\pi} \cos(n\frac{\pi}{L}x)|_0^L \\ &= \frac{2V_A}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \\ &= \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{4V_A}{n\pi} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{4V_A}{n\pi} \cosh(n\frac{\pi}{L}y) + \bar{D}_n \sinh(n\frac{\pi}{L}y) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.27)$$

4.

$$V_{(x,L)} = V_C = 0 = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{4V_A}{n\pi} \cosh(n\pi) + \bar{D}_n \sinh(n\pi) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.28)$$

$$\iff \bar{D}_n = -\frac{4V_A}{n\pi} \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)}$$

Da nun alle Koeffizienten bestimmt sind, kann folgender Ausdruck angegeben werden:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_A}{n\pi} \left[\cosh(n\frac{\pi}{L}y) - \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} \sinh(n\frac{\pi}{L}y) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.29)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_A}{n\pi} \left[\cosh(n\frac{\pi}{L}y) \sinh(n\pi) - \sinh(n\frac{\pi}{L}y) \cosh(n\pi) \right] \cdot \frac{\sin(n\frac{\pi}{L}x)}{\sinh(n\pi)}$$

Um den Ausdruck in Gleichung 1.32 weiter zu vereinfachen, wird folgendes Additionstheorem verwendet:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \quad (1.30)$$

Damit lässt sich nun die erste Teillösung für den Fall Potential V_A aktiv anschreiben:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_A}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi - n\frac{\pi}{L}y)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.31)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_A}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi(1 - \frac{y}{L}))}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_A}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi \frac{L-y}{L})}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

1.5.2 Potential B aktiv

Da das Potential V_B über einen Bereich mit $x = L = \text{konstant}$ wirkt, muss der Ansatz aus Gleichung 1.18 verwendet werden.

$$V_{(x,y)} = [A \cosh(kx) + B \sinh(kx)] \cdot [C \cos(ky) + D \sin(ky)] \quad (1.32)$$

Mit den Randbedingungen können nun die jeweiligen Koeffizienten der Teillösung berechnet werden.

1.

$$V_{(x,0)} = V_A = 0 = [A \cosh(kx) + B \sinh(kx)] \cdot C \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$V_{(x,y)} = [\bar{A} \cosh(kx) + \bar{B} \sinh(kx)] \cdot \sin(ky) \quad (1.34)$$

2.

$$\begin{aligned} V_{(0,y)} &= V_D = 0 = \bar{A} \sin(ky) \\ \Rightarrow \bar{A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$V_{(x,y)} = \bar{B} \sinh(kx) \sin(ky) \quad (1.36)$$

3.

$$\begin{aligned} V_{(x,L)} &= V_C = 0 = \bar{B} \sinh(kx) \sin(kL) \\ \Rightarrow kL &= n\pi \\ \Rightarrow k &= n \frac{\pi}{L} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Da diese Bedingung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, müssen diese in der Teillösung auch berücksichtigt werden.

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sinh(n \frac{\pi}{L} x) \sin(n \frac{\pi}{L} y) \quad (1.38)$$

4.

$$V_{(L,y)} = V_B = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sinh(n\pi) \sin(n \frac{\pi}{L} y) \quad (1.39)$$

Die Koeffizienten \bar{B}_n können nun mittels „Fouriertrick“ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \bar{B}_n &= \frac{2}{L \sinh(n\pi)} \int_0^L V_B \sin(n \frac{\pi}{L} y) dy \\ &= -\frac{2}{L \sinh(n\pi)} \frac{1}{n\pi} V_B \cos(n \frac{\pi}{L} y) \Big|_0^L \\ &= \frac{2V_B}{n\pi} \frac{1}{\sinh(n\pi)} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{4V_B}{n\pi} \frac{1}{\sinh(n\pi)} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Da damit alle Koeffizienten bestimmt sind, lässt sich nun die zweite Teillösung für den Fall Potential V_B aktiv anschreiben:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_B}{n\pi} \frac{\sinh(n \frac{\pi}{L} x)}{\sinh(n\pi)} \sin(n \frac{\pi}{L} y) \quad (1.41)$$

1.5.3 Potential C aktiv

Da das Potential V_C über einen Bereich mit $y = L = \text{konstant}$ wirkt, muss der Ansatz aus Gleichung 1.19 verwendet werden.

$$V_{(x,y)} = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot [C \cosh(ky) + D \sinh(ky)] \quad (1.42)$$

Mit den Randbedingungen können nun die jeweiligen Koeffizienten der Teillösung berechnet

werden.

1.

$$\begin{aligned} V_{(x,0)} &= V_A = 0 = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot C \\ \Rightarrow C &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$V_{(x,y)} = [\bar{A} \cos(kx) + \bar{B} \sin(kx)] \cdot \sinh(ky) \quad (1.44)$$

2.

$$\begin{aligned} V_{(0,y)} &= V_D = 0 = \bar{A} \sinh(ky) \\ \Rightarrow \bar{A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$V_{(x,y)} = \bar{B} \sin(kx) \sinh(ky) \quad (1.46)$$

3.

$$\begin{aligned} V_{(L,y)} &= V_B = 0 = \bar{B} \sin(kL) \sinh(ky) \\ \Rightarrow kL &= n\pi \\ \Rightarrow k &= n \frac{\pi}{L} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Da diese Bedingung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, müssen diese in der Teillösung auch berücksichtigt werden.

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin(n \frac{\pi}{L} x) \sinh(n \frac{\pi}{L} y) \quad (1.48)$$

4.

$$V_{(x,L)} = V_C = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin(n \frac{\pi}{L} x) \sinh(n\pi) \quad (1.49)$$

Die Koeffizienten \bar{B}_n können nun mittels „Fouriertrick“ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \bar{B}_n &= \frac{2}{L \sinh(n\pi)} \int_0^L V_C \sin(n \frac{\pi}{L} x) dx \\ &= -\frac{2}{L \sinh(n\pi)} \frac{L}{n\pi} V_C \cos(n \frac{\pi}{L} x) \Big|_0^L \\ &= \frac{2V_C}{n\pi} \frac{1}{\sinh(n\pi)} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{4V_C}{n\pi} \frac{1}{\sinh(n\pi)} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Da damit alle Koeffizienten bestimmt sind, lässt sich nun die dritte Teillösung für den Fall Potential V_C aktiv anschreiben:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_C}{n\pi} \frac{\sinh(n \frac{\pi}{L} y)}{\sinh(n\pi)} \sin(n \frac{\pi}{L} x) \quad (1.51)$$

1.5.4 Potential D aktiv

Da das Potential V_D über einen Bereich mit $x = 0 = \text{konstant}$ wirkt, muss der Ansatz aus Gleichung 1.18 verwendet werden.

$$V_{(x,y)} = [A \cosh(kx) + B \sinh(kx)] \cdot [C \cos(ky) + D \sin(ky)] \quad (1.52)$$

Mit den Randbedingungen können nun die jeweiligen Koeffizienten der Teillösung berechnet werden.

1.

$$\begin{aligned} V_{(x,0)} &= V_A = 0 = C \cdot [A \cosh(kx) + B \sinh(kx)] \\ &\Rightarrow C = 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$V_{(x,y)} = [\bar{A} \cosh(kx) + \bar{B} \sinh(kx)] \cdot \sin(ky) \quad (1.54)$$

2.

$$\begin{aligned} V_{(x,L)} &= V_C = 0 = [\bar{A} \cosh(kx) + \bar{B} \sinh(kx)] \cdot \sin(kL) \\ &\Rightarrow kL = n\pi \\ &\Rightarrow k = n\frac{\pi}{L} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Da diese Bedingung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, müssen diese in der Teillösung auch berücksichtigt werden.

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{A}_n \cosh(n\frac{\pi}{L}x) + \bar{B}_n \sinh(n\frac{\pi}{L}x)] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.56)$$

3.

$$V_{(0,y)} = V_D = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.57)$$

Die Koeffizienten \bar{A}_n können nun mittels „Fouriertrick“ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \frac{2}{L} \int_0^L V_D \sin(n\frac{\pi}{L}y) dy \\ &= -\frac{2V_D}{L} \frac{L}{n\pi} \cos(n\frac{\pi}{L}y)|_0^L \\ &= \frac{2V_D}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \\ &= \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{4V_D}{n\pi} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{4V_D}{n\pi} \cosh(n\frac{\pi}{L}x) + \bar{B}_n \sinh(n\frac{\pi}{L}x) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.59)$$

4.

$$V_{(L,y)} = V_B = 0 = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{4V_D}{n\pi} \cosh(n\pi) + \bar{B}_n \sinh(n\pi) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.60)$$

$$\iff \bar{B}_n = -\frac{4V_D}{n\pi} \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)}$$

Da nun alle Koeffizienten bestimmt sind, kann folgender Ausdruck angegeben werden:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_D}{n\pi} \left[\cosh(n\frac{\pi}{L}x) - \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} \sinh(n\frac{\pi}{L}x) \right] \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.61)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_D}{n\pi} \left[\cosh(n\frac{\pi}{L}x) \sinh(n\pi) - \sinh(n\frac{\pi}{L}x) \cosh(n\pi) \right] \cdot \frac{\sin(n\frac{\pi}{L}y)}{\sinh(n\pi)}$$

Um den Ausdruck in Gleichung 1.62 weiter zu vereinfachen, wird folgendes Additionstheorem verwendet:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \quad (1.62)$$

Damit lässt sich nun die vierte Teillösung für den Fall Potential V_D aktiv anschreiben:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_D}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi - n\frac{\pi}{L}x)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}y) \quad (1.63)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_D}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi(1 - \frac{x}{L}))}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}y)$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_D}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi \frac{L-x}{L})}{\sinh(n\pi)} \sin(n\frac{\pi}{L}y)$$

1.6 Gesamtlösung

Mit des Ausnutzen des Superpositionsprinzips kann aus den errechneten Teillösungen nun die Gesamtlösung der Potentialverteilung angegeben werden:

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4}{n\pi} \frac{1}{\sinh(n\pi)} \left[V_A \cdot \sinh(n\pi \frac{L-y}{L}) \sin(n\frac{\pi}{L}x) \right. \\ \left. + V_B \cdot \sinh(n\frac{\pi}{L}x) \sin(n\frac{\pi}{L}y) \right. \\ \left. + V_C \cdot \sinh(n\frac{\pi}{L}y) \sin(n\frac{\pi}{L}x) \right. \\ \left. + V_D \cdot \sinh(n\pi \frac{L-x}{L}) \sin(n\frac{\pi}{L}y) \right] \quad (1.64)$$

1.7 Grafische Darstellung

Zur besseren Visualisierung der Gesamt- und der einzelnen Teillösungen wurden in MATLAB entsprechende Surface plots erstellt. Zudem ist es damit einfach möglich einen Vergleich zwischen analytischer und numerischer Lösung des Problems zu erhalten.

Aufgrund der zulässigen Reduzierung auf ein 2D-Problem ist nur die Potentialverteilung in der xy-Ebene von Relevanz. Hierbei werden zwei Darstellungen geplottet. Einmal ist das Potential auf der z-Achse aufgetragen, einmal wird direkt nur die xy-Ebene dargestellt und das Potential farblich hervorgehoben.

Es ist darauf hinzuweisen, dass auch die analytische Lösung aufgrund der numerischen Auswertung in MATLAB nur eine Approximation ist. Vor allem die Randbedingungen an den Metallplatten, welche auf einem bestimmten Potential > 0 liegen, ist nicht sehr genau. Dies liegt an dem Ausdruck $\frac{\sinh(\dots)}{\sinh(\dots)}$ und der unendlichen Summe im analytischen Ergebnis. An den jeweiligen Metallplatten mit Potential > 0 in den einzelnen Teillösungen wird hier das Potential per unendlicher Summe approximiert. Der Bruch $\frac{\sinh(\dots)}{\sinh(\dots)}$ wird hierbei zu 1, die Approximation erfolgt dann mit dem verbliebenen $\sin()$ Term („Fouriertrick“). Je höher jedoch die Laufvariable der Summe wird, desto größer werden auch die \sinh Terme, was ab einem gewissen Punkt dazu führt, dass die Kürzung nicht mehr 1 ergibt. Die Summe muss an diesem Punkt sogar abgebrochen werden, da ansonsten das Ergebnis fehlerhaft ist („NaN“). Dies ist der Grund, weshalb die Approximation der analytischen Rechnung vor allem an den Rändern ungenau ist.

Obiges Problem ist vor allem im Feldbild an besagten Rändern sichtbar, da $E = -\text{grad}V$ gilt und somit ein ungenaues beziehungsweise flatterndes Potential V stark durchschlägt.

Sowohl in den Surface plots für das Potential als auch in den Feldbildern zur elektrischen Feldstärke wurden Äquipotentiallinien eingezeichnet.

1.7.1 Fall I

Hier gilt für die einzelnen Potentiale der Metallplatten:

$$V_A = 200 \text{ V}$$

$$V_B = 0 \text{ V}$$

$$V_C = 0 \text{ V}$$

$$V_D = 0 \text{ V}$$

Gesamtlösung

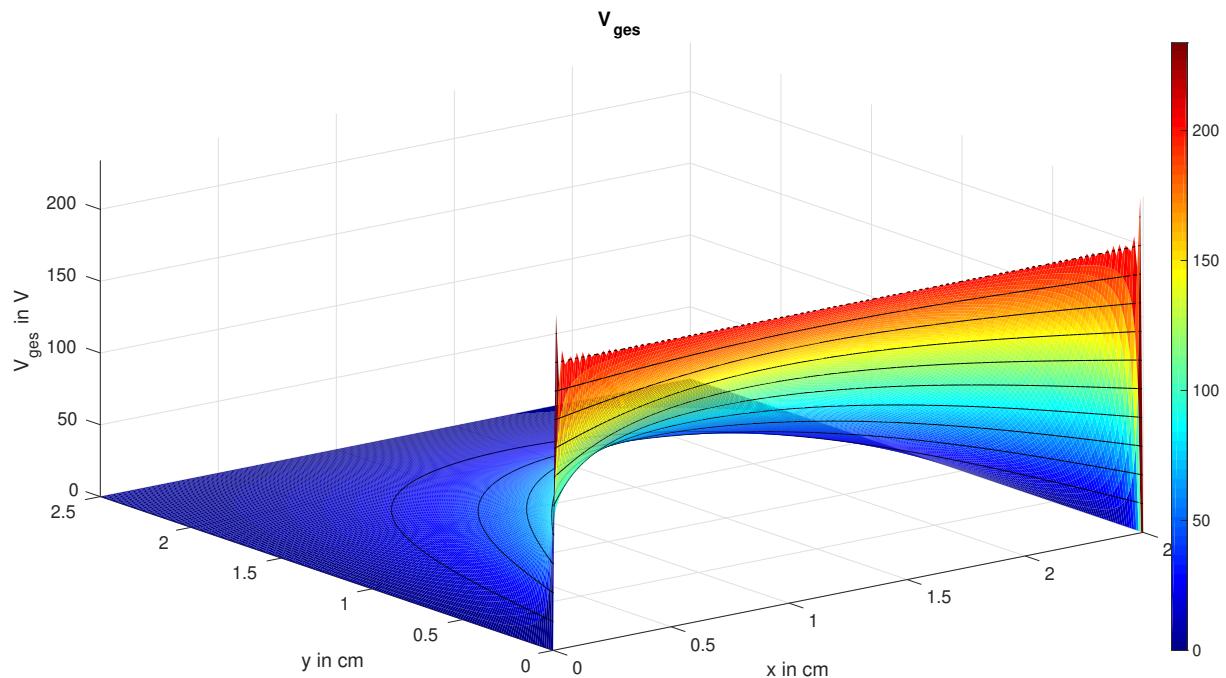


Abbildung 1.1: Potentialverteilung der Gesamtlösung

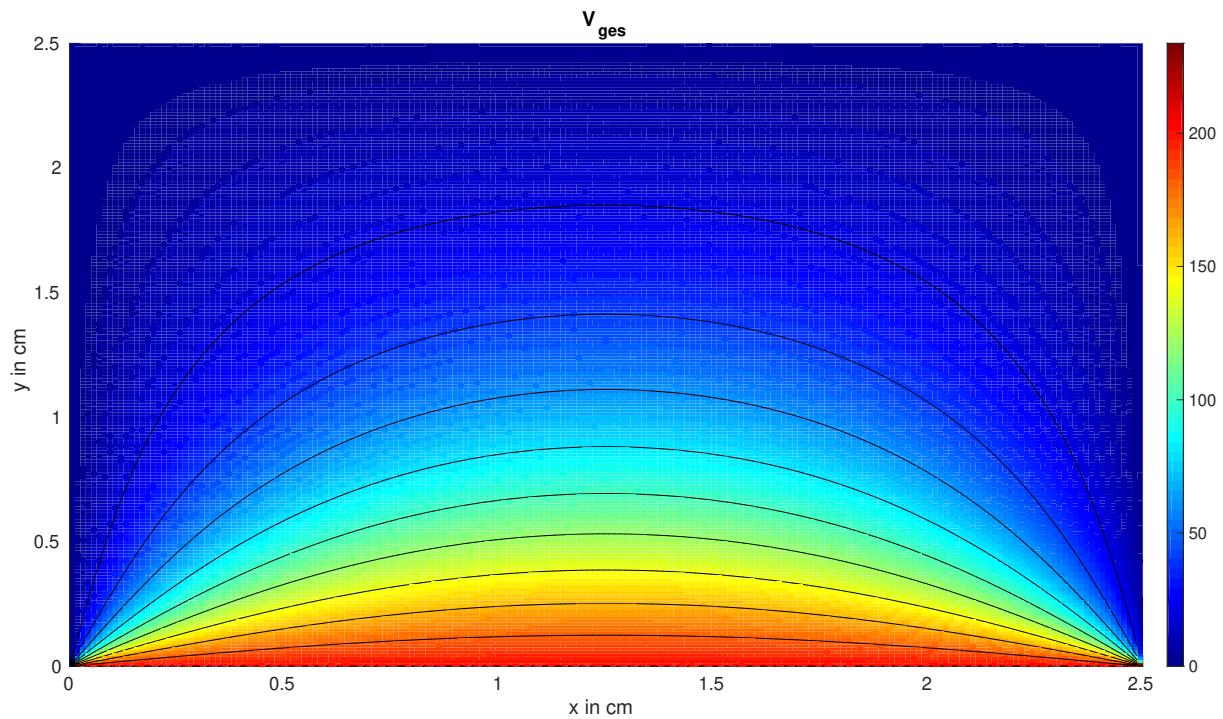


Abbildung 1.2: Potentialverteilung der Gesamtlösung - Draufsicht

Feldbild

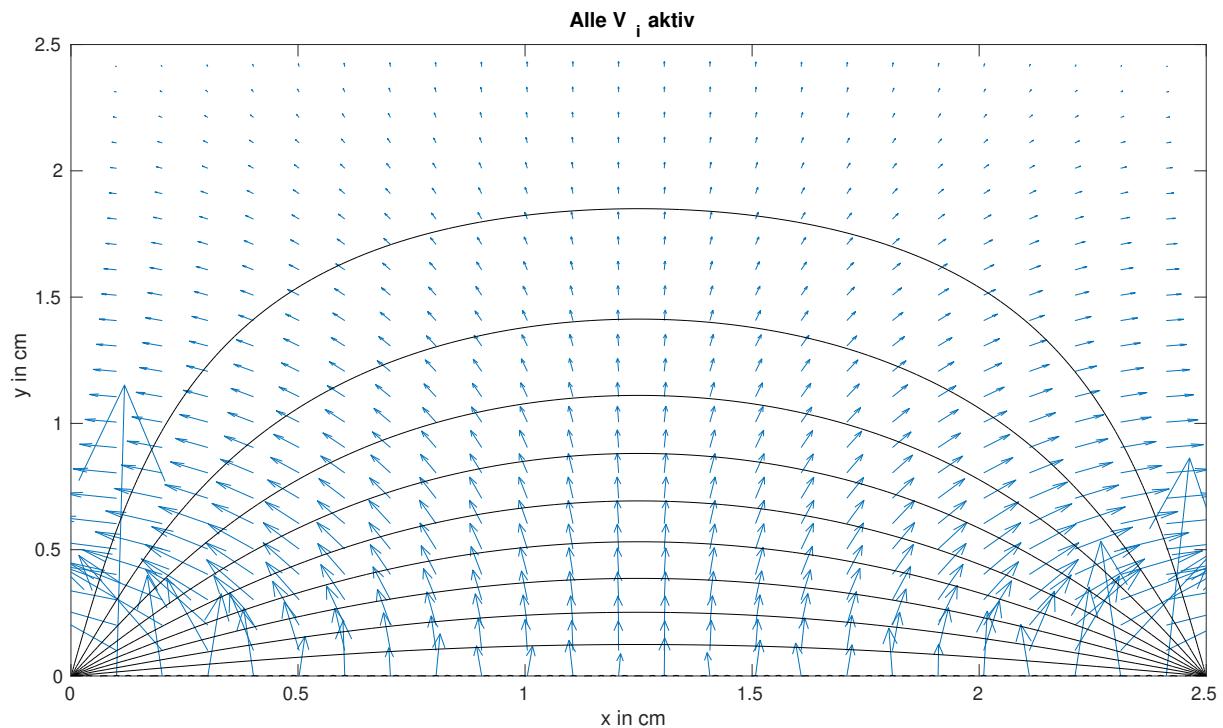


Abbildung 1.3: Feldbild der Gesamtlösung mit Äquipotentiallinien

1.7.2 Fall II

Hier gilt für die einzelnen Potentiale der Metallplatten:

$$V_A = 500 \text{ V}$$

$$V_B = 100 \text{ V}$$

$$V_C = 0 \text{ V}$$

$$V_D = 0 \text{ V}$$

Teillösungen

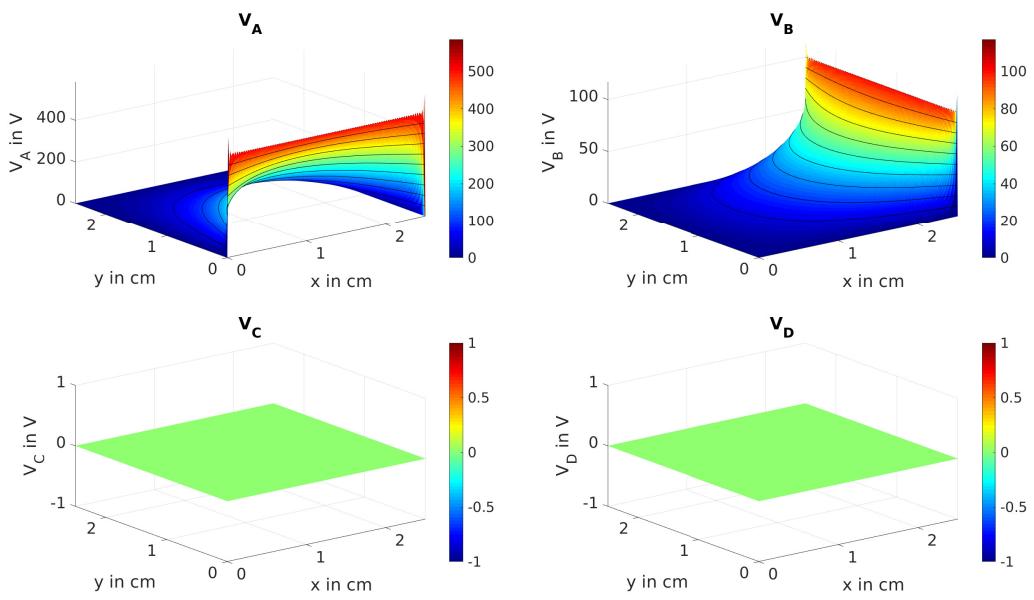


Abbildung 1.4: Potentialverteilung der einzelnen Teillösungen

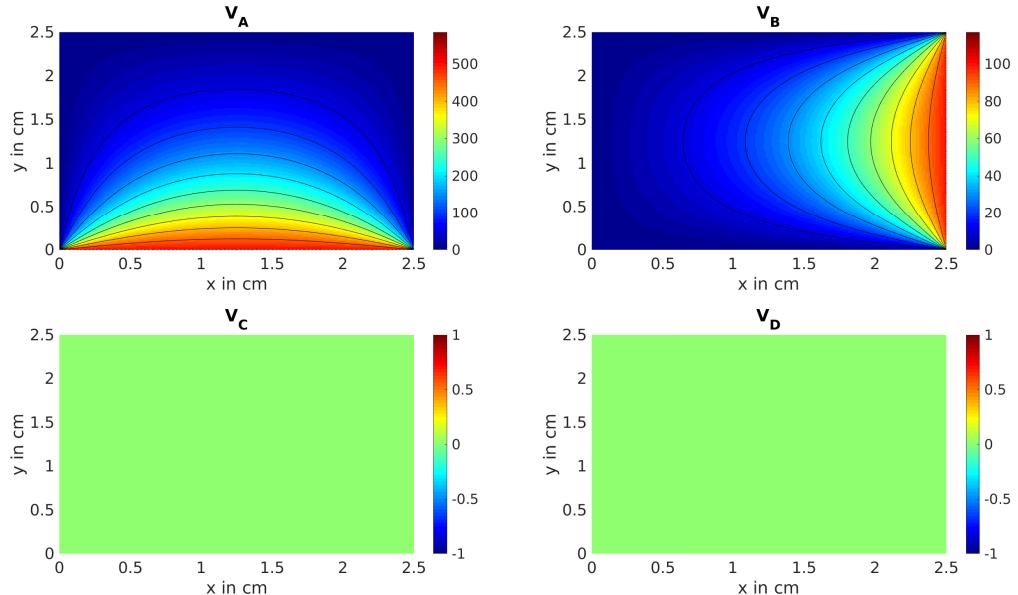


Abbildung 1.5: Potentialverteilung der einzelnen Teillösungen - Draufsicht

Gesamtlösung

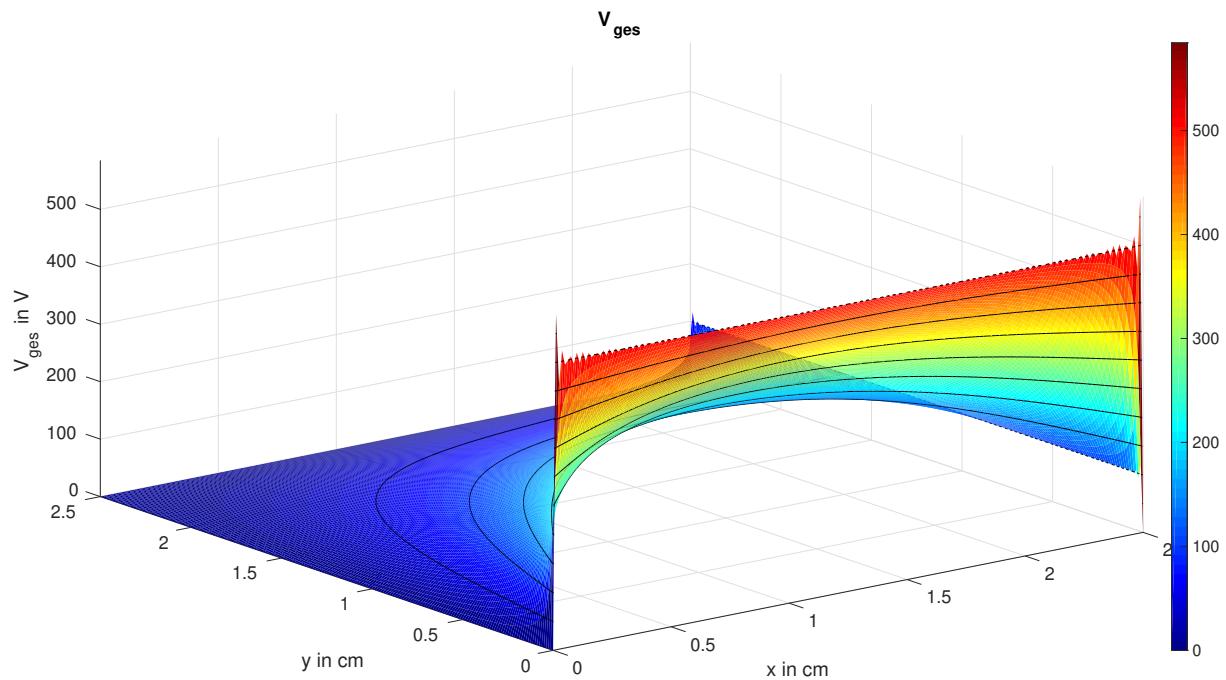


Abbildung 1.6: Potentialverteilung der Gesamtlösung

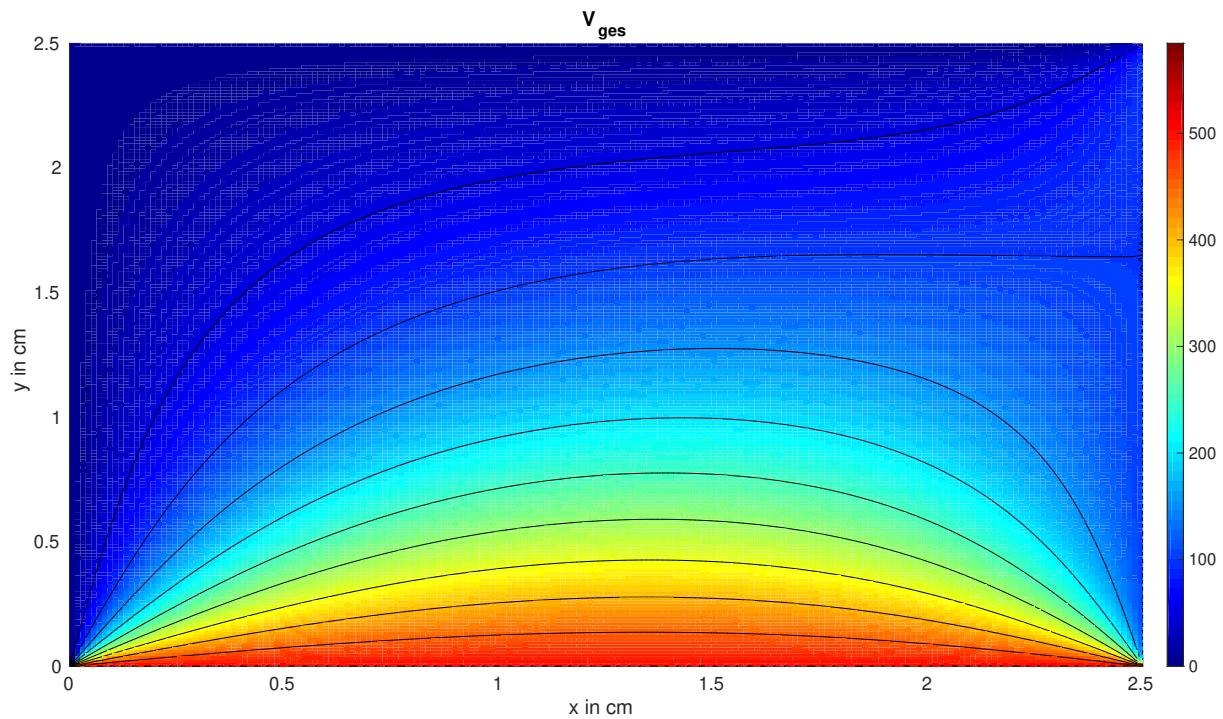


Abbildung 1.7: Potentialverteilung der Gesamtlösung - Draufsicht

Feldbild

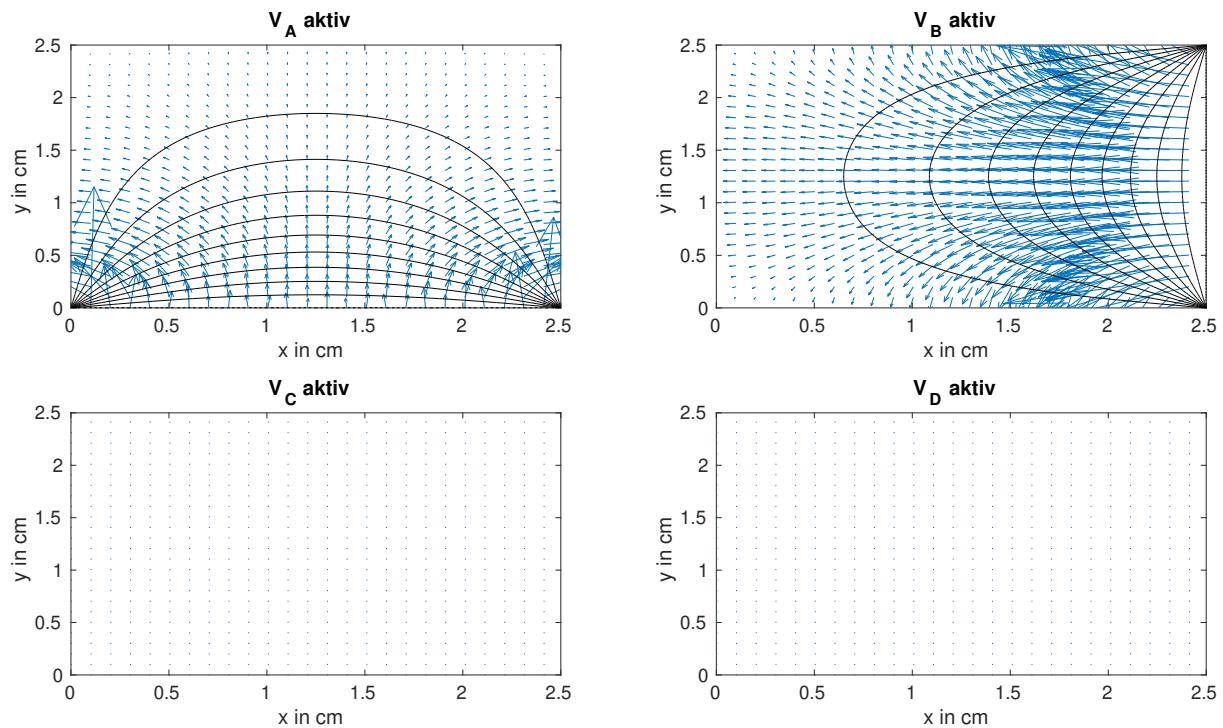


Abbildung 1.8: Feldbild der einzelnen Teillösungen mit Äquipotentiallinien

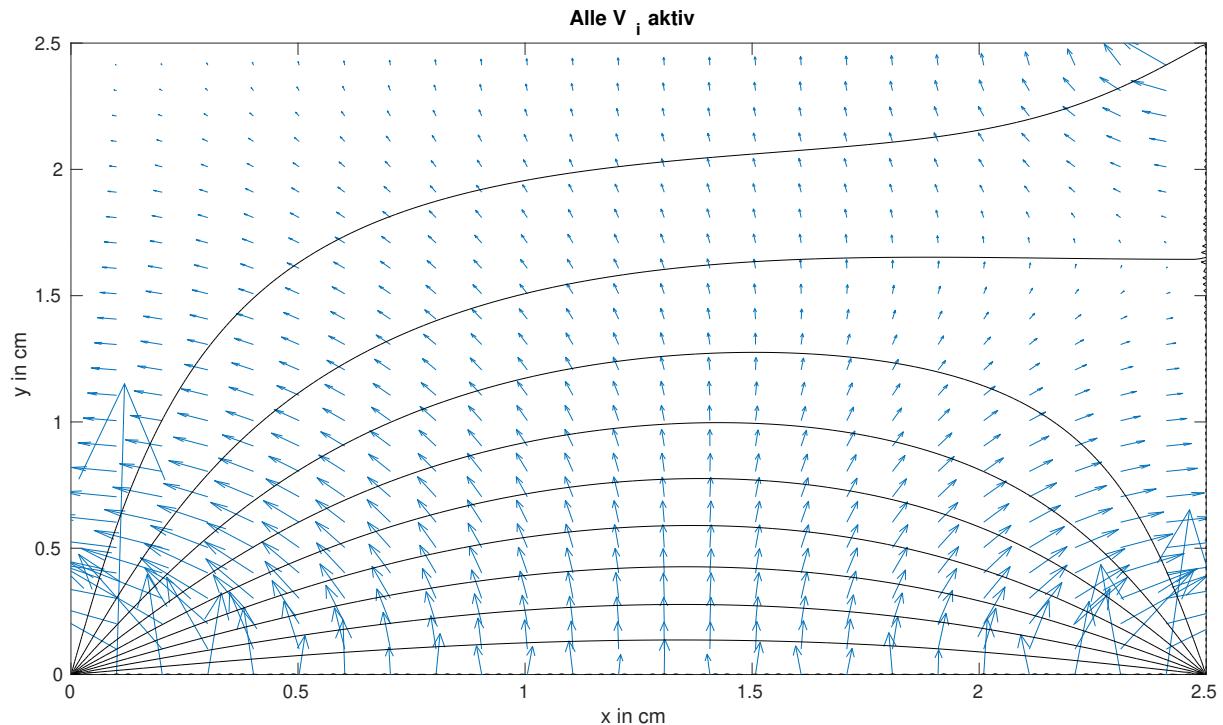


Abbildung 1.9: Feldbild der Gesamtlösung mit Äquipotentiallinien

1.7.3 Fall III

Hier gilt für die einzelnen Potentiale der Metallplatten:

$$V_A = 500 \text{ V}$$

$$V_B = 100 \text{ V}$$

$$V_C = 300 \text{ V}$$

$$V_D = 400 \text{ V}$$

Teillösungen

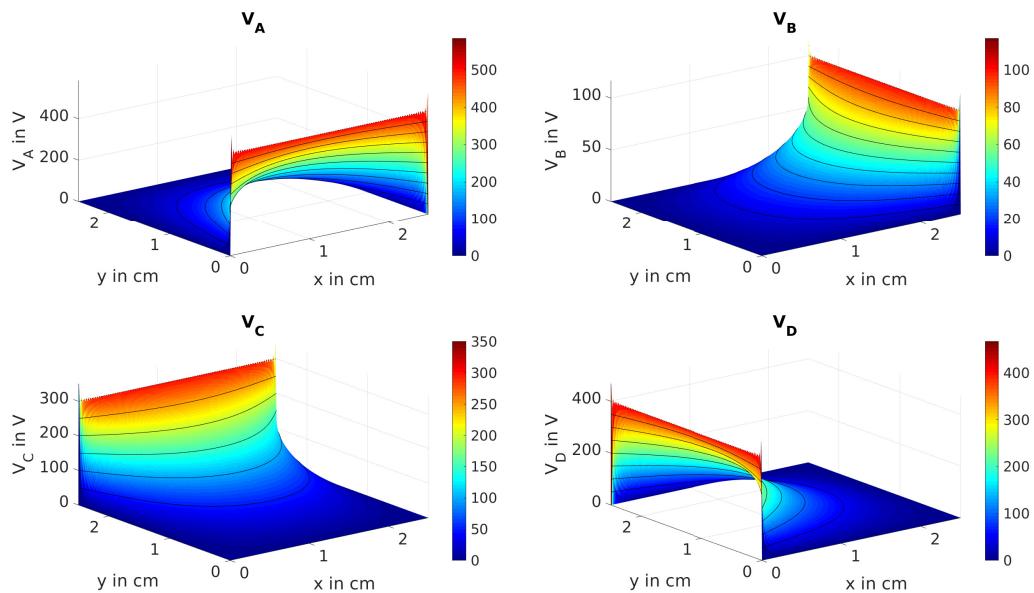


Abbildung 1.10: Potentialverteilung der einzelnen Teillösungen

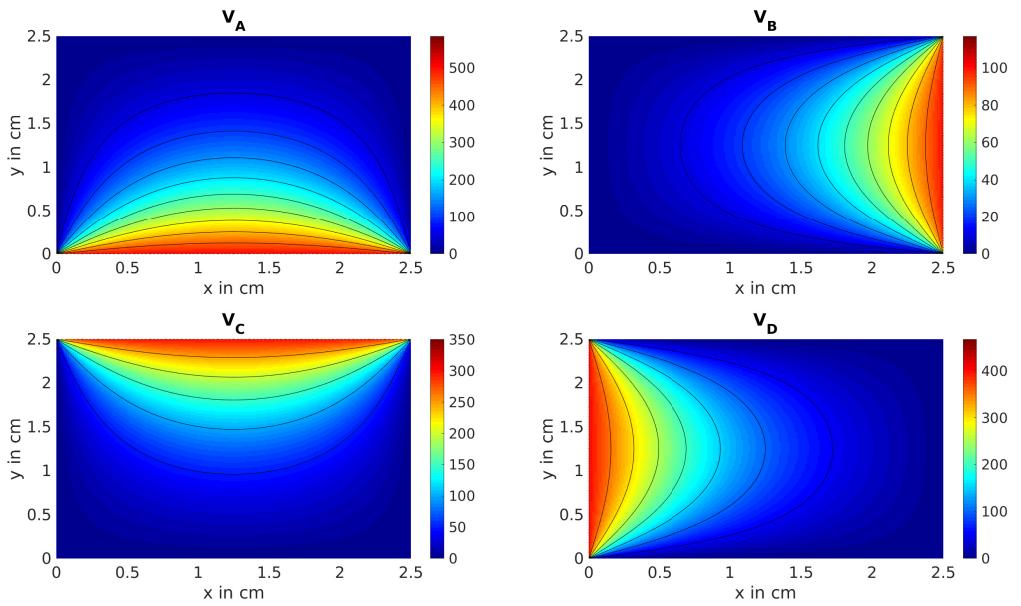


Abbildung 1.11: Potentialverteilung der einzelnen Teillösungen - Draufsicht

Gesamtlösung

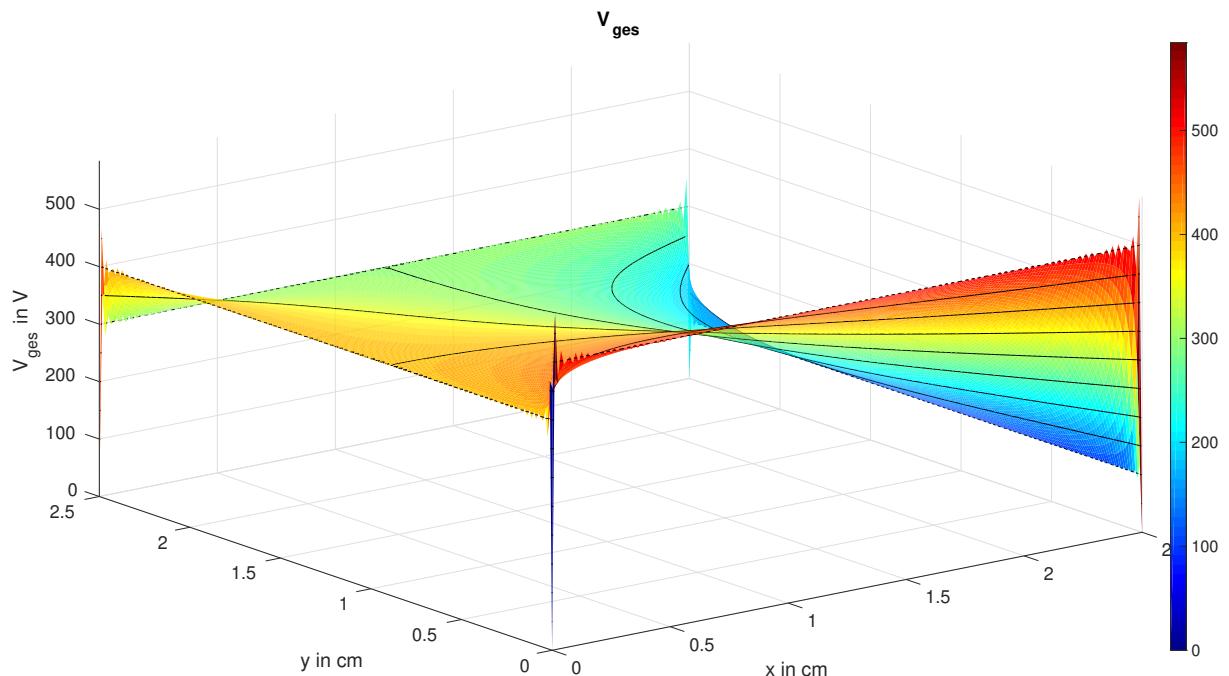


Abbildung 1.12: Potentialverteilung der Gesamtlösung

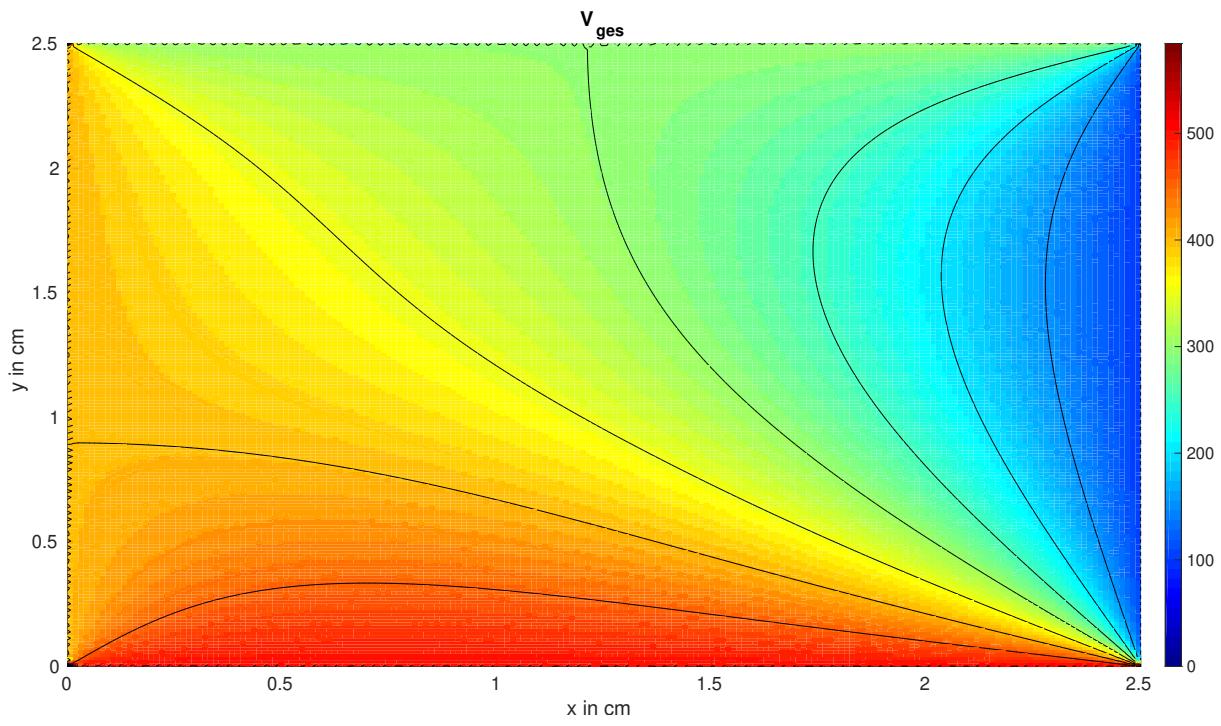


Abbildung 1.13: Potentialverteilung der Gesamtlösung - Draufsicht

Feldbild

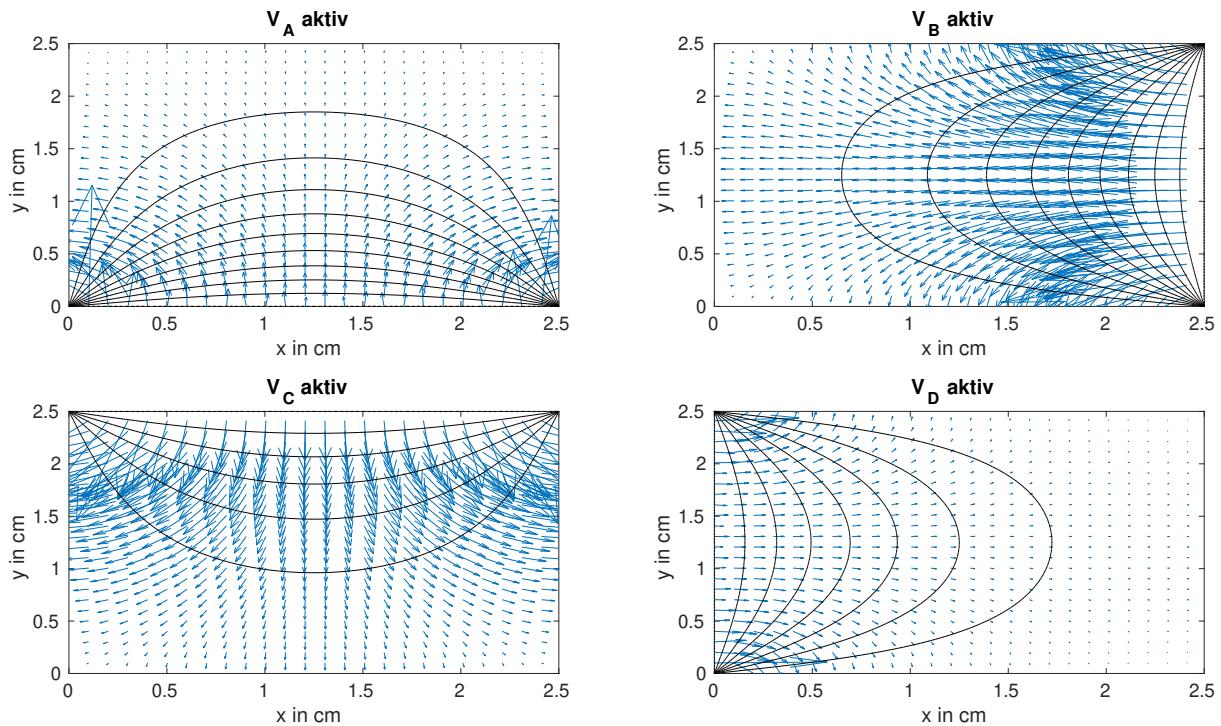


Abbildung 1.14: Feldbild der einzelnen Teillösungen mit Äquipotentiallinien

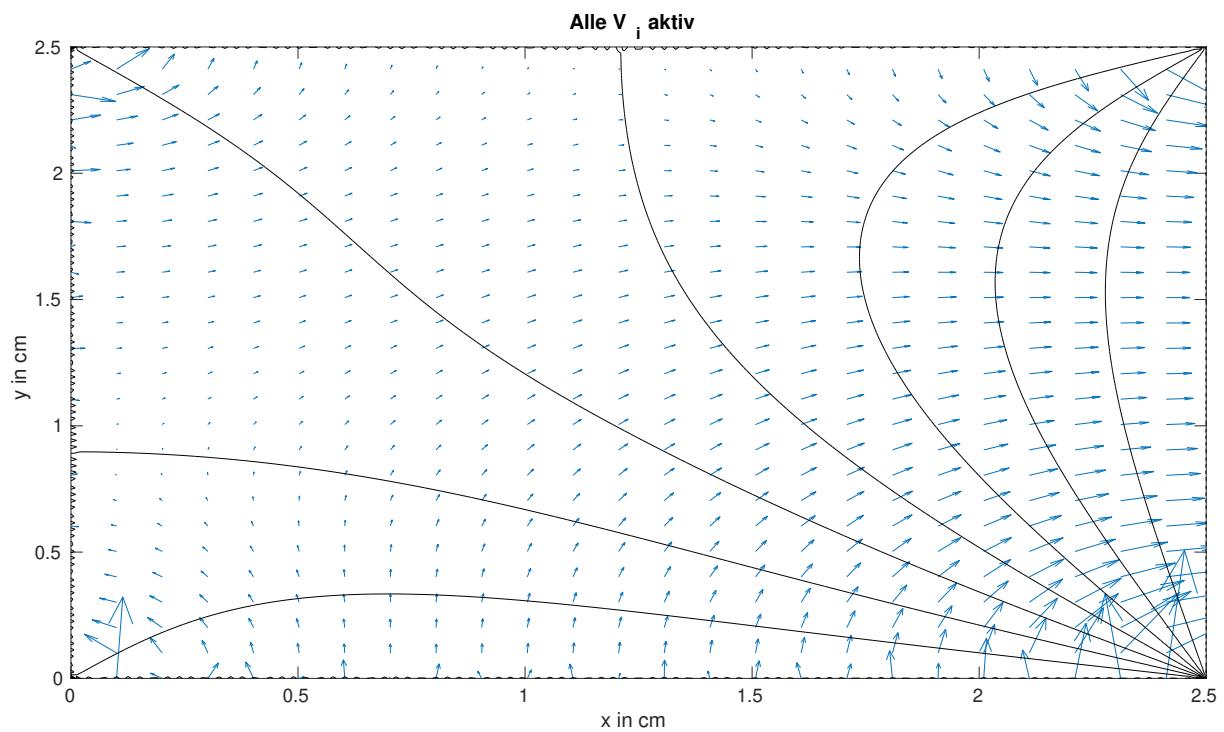


Abbildung 1.15: Feldbild der Gesamtlösung mit Äquipotentiallinien

2 Finite Differenzen Methode

2.1 Theoretische Grundlagen

Das zu lösende Randwertproblem ist wie folg definiert:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta V &= \rho \text{ mit} \\ V &= V_D \text{ auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= V_N \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{2.2}$$

In den gegebenen Beispielen ist ε konstant und $\neq 0$, $\rho = 0$ und $V_N = 0$. Des Weiteren gilt aufgrund der Ausdehnung des Problems $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, womit sich das Randwertproblem (2.1) wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \text{ mit} \\ V &= V_D \text{ auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.3}$$

Man nehme nun eine konstante *Schrittweite* h an und führe folgende Notation ein:

$$V_{i,j} = V(ih, jh), \quad i, j \geq 0$$

Die Linearisierung der Differentialgleichung in (2.3) liefert somit

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

bzw. unter Berücksichtigung der Konstanz von h

$$-4V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} = 0. \tag{2.4}$$

Das Problemgebiet wird somit in Quadrate der Seitenlänge h diskretisiert wobei die *Knotenpotentiale* an den Gitterknotenpunkten durch Lösen des aus (2.4) entstehenden linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Die vorgegebenen Potentiale am dirichletschen Rand Γ_D fließen als bekannte Größen in das Gleichungssystem ein.

Ferner sei ohne weitere Herleitung gesagt, dass die Behandlung der **homogenen** neumannschen Randbedingungen keiner weiteren Aufmerksamkeit bedarf. Hier sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

Die genaue Vorgehensweise zur Lösung des Problems mit der oben genannten Methode wird im folgenden Kapitel anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

2.2 Funktion des FDM-Algorithmus

Abbildung 1 zeigt ein Problem äquivalent jenem aus Beispiel 1 der Hausübung, allerdings mit weitaus geringerer Auflösung.

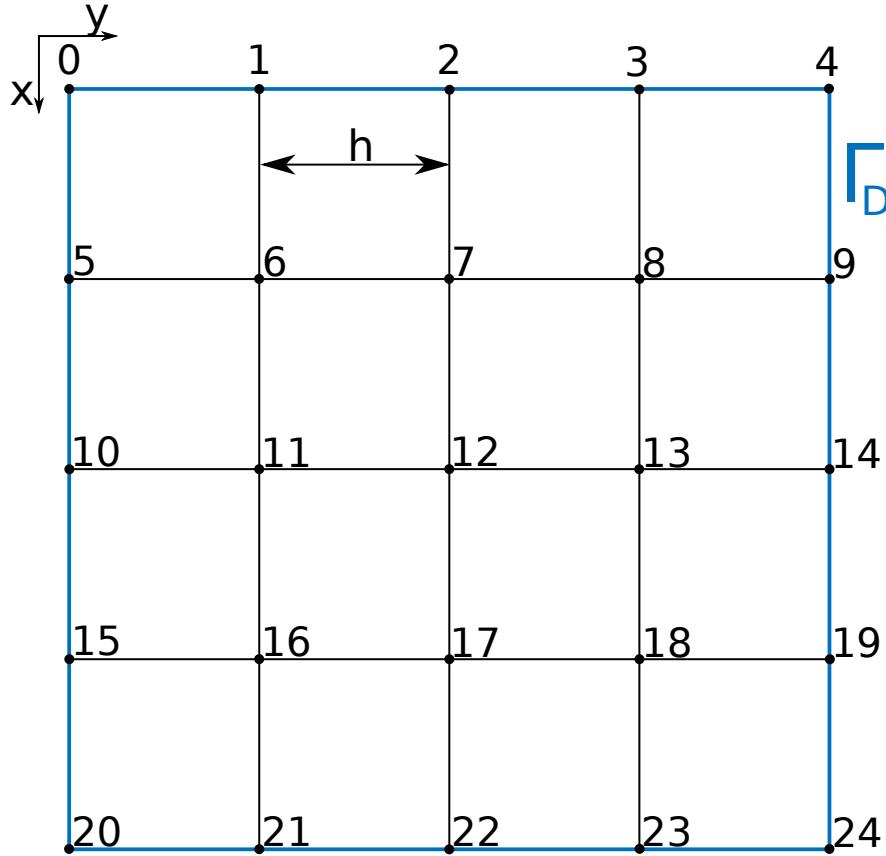


Abbildung 2.1: Problemgebiet

In einem ersten Schritt wird jedem Knoten eine eindeutige Nummer n zugewiesen welche mittels einer Tabelle den Positionsindizes i und j zugewiesen wird:

i	j	n
0	0	0
0	1	1
0	2	2
.	.	.
.	.	.
4	4	24

Tabelle 2.1: Zuordnung der Knotennummer zu den Koordinatenindizes

Im Weiteren sei N_{Knoten} die Gesamtanzahl der Knoten.

In einem weiteren Schritt werden zwei weitere Tabellen erstellt von denen die Erste die Knoten am dirichletschen Rand Γ_D und die entsprechenden Knotenpotentiale enthält. Im Weiteren sei N_D die Anzahl der Knoten auf Γ_D .

n	V
0	100
2	100
.	
.	

Tabelle 2.2: Zuordnung der Randknoten zu den entsprechenden Randwerten

Das zu Problem und somit auch das zu lösende Gleichungssystem besitzt nun somit $N_{Unbek} = N_{Knoten} - N_D$.

\vec{A} sei die $(N_{Unbek} \times N_{Unbek})$ -Matrix mit den aus (2.4) berechneten Koeffizienten. Weiters sei \vec{x} der $(N_{Unbek} \times 1)$ -Vektor der unbekannten Knotenpotentiale sowie \vec{b} der $(N_{Unbek} \times 1)$ -Vektor der bekannten Werte.

Das zu lösende Gleichungssystem lautet somit

$$\vec{A}\vec{x} = \vec{b}. \quad (2.5)$$

Die oben erwähnte zweite Tabelle ordnet die Knotennummern der unbekannten Knotenpotentiale ihrer Position im Gleichungssystem zu. So stellt zum Beispiel der Knoten 6 das erste Unbekannte Element im Gleichungssystem dar. Der Knoten 7 das Zweite usw.

n	Position in \vec{x}
6	1
7	2
8	3
11	4
12	5
.	
.	

Tabelle 2.3: Zuordnung der unbekannten Knotenpotentiale zu ihrer Position in \vec{x}

Im nächsten Schritt wird das Gleichungssystem (2.5) durch iteratives Anwenden von (2.4) über alle unbekannten Knoten assembliert. Die Iteration erfolgt dabei nach steigender Knotennummer. Abbildung 2.2 zeigt exemplarisch die Vorgehensweise für Knoten 6.

Die entsprechende Gleichung des Gleichungssystems lautet

$$-4V_{1,1} + V_{2,1} + V_{0,1} + V_{1,2} + V_{1,0} = 0,$$

wobei

- $V_{1,1} = V_6$, unbekannt,
- $V_{2,1} = V_{11}$, unbekannt,
- $V_{0,1} = V_1$, bekannt,
- $V_{1,2} = V_7$, unbekannt und

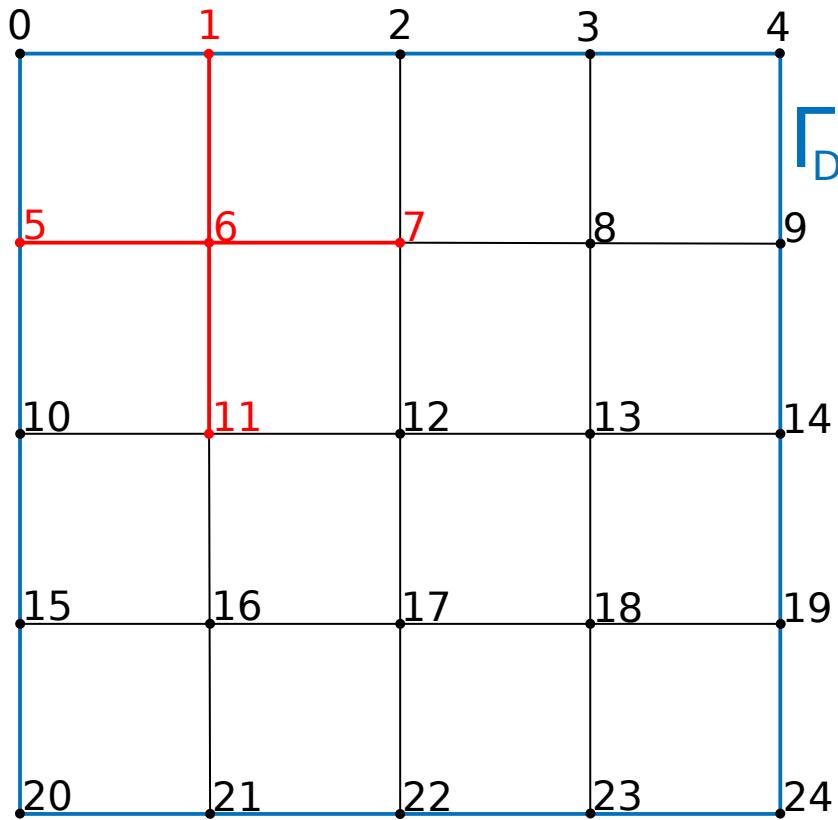


Abbildung 2.2: FDM-'Stern' für Knoten 6

- $V_{1,0} = V_5$, bekannt

gilt. Somit lautet die erste Gleichung des Gleichungssystems

$$-4V_{1,1} + V_{2,1} + V_{1,2} = -V_{0,1} - V_{1,0}. \quad (2.6)$$

Analog dazu kann für alle weiteren Knoten vorgegangen werden. Das Ergebnis ist eine symmetrische und quadratische Matrix \vec{A} . Das Lösen besagten Gleichungssystems liefert die unbekannten Knotenpotentiale.

2.3 Weiterverarbeitung der Lösung

Aus der im vorherigen Kapitel ermittelten Lösung für die Knotenpotentiale soll nun in einem letzten Schritt das elektrische Feld bzw. das stationäre Strömungsfeld berechnet werden.

Die Linearisierung des Zusammenhangs

$$\vec{E} = -\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$$

liefert mit $\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\vec{E} \approx \begin{bmatrix} \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h} \\ \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Die Berechnung des elektrischen Feldes an den Knotenpunkten erfolgt 'links oben' im Problemgebiet bei $i = 0$ und $j = 0$ und wird iterativ fortgesetzt, wobei zu beachten ist dass am rechten und unteren Rand keine Feldberechnung durchgeführt werden kann da dort die Indizes $i + 1$ und $j + 1$ aus dem Problemgebiet herausragen.

3 Aufgabe 1

3.1 Numerische Berechnung

Gewählte Diskretisierung: $\frac{L}{100}$

Diskussion der Ergebnisse: Durch die bündig anschließenden Flächen des dirichletschen Randes kommt es zu Singularitäten der Magnitude des elektrischen Feldes in den Ecken des Problemgebiets. Siehe hierzu die Abbildungen 3.4, 3.8 und 3.12

3.1.1 Fall a)

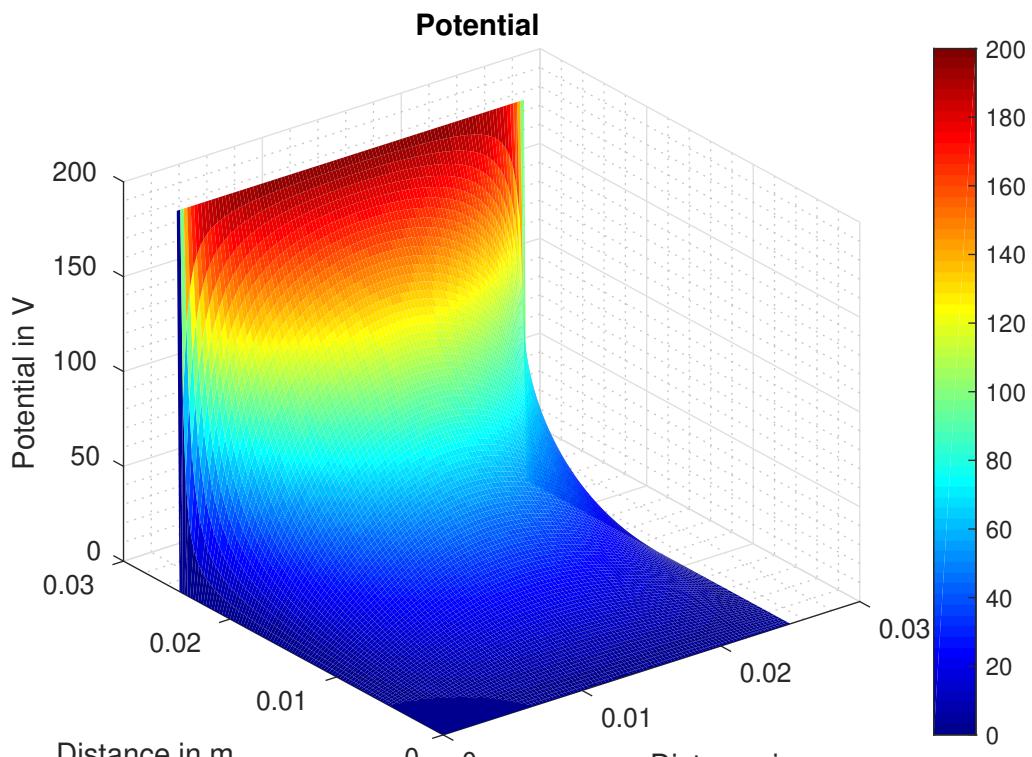


Abbildung 3.1: Potentialverlauf

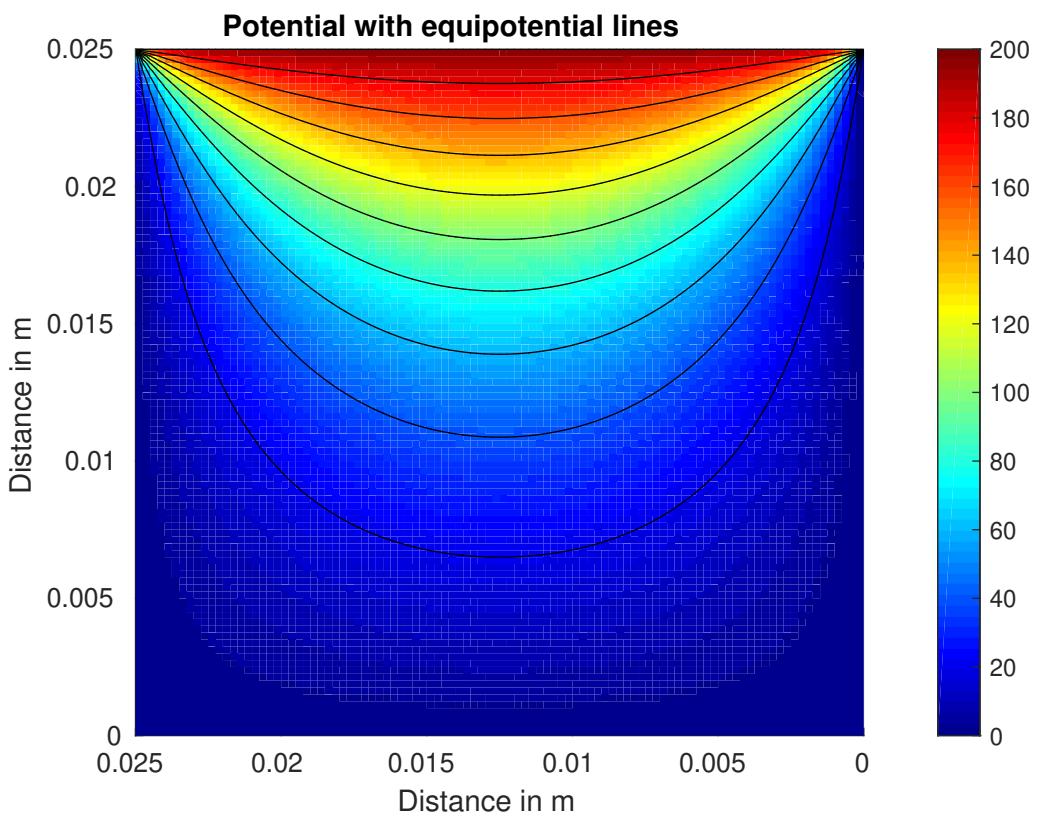


Abbildung 3.2: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

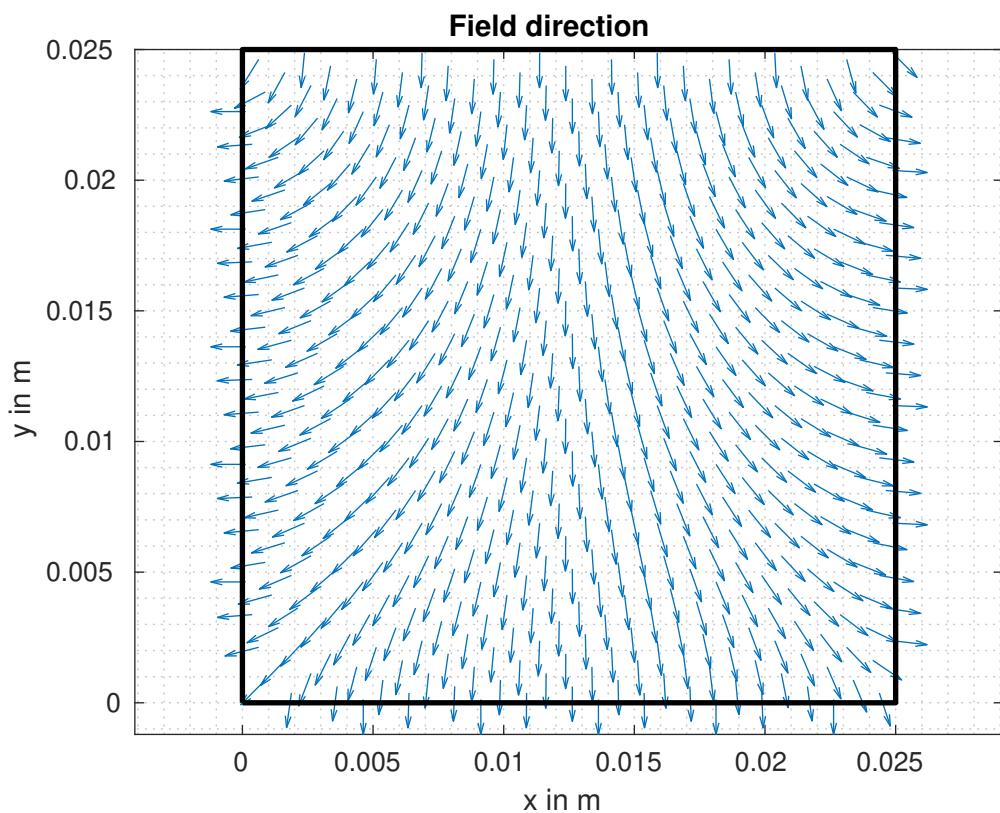


Abbildung 3.3: Richtung des elektrischen Feldes

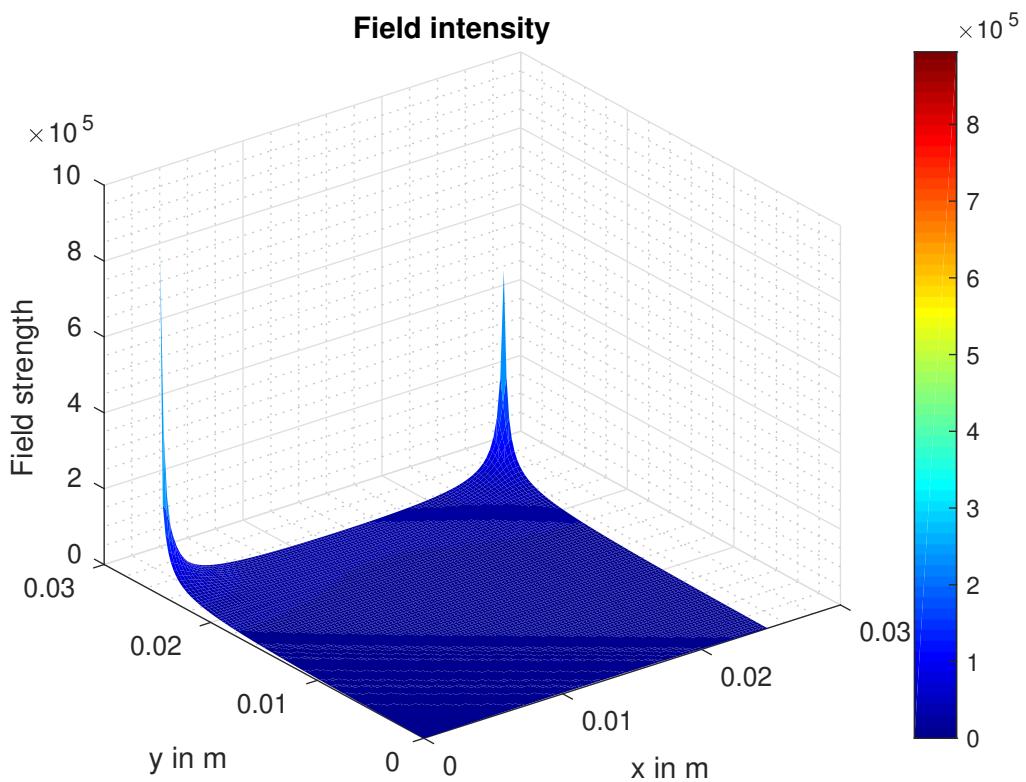


Abbildung 3.4: Magnitude des elektrischen Feldes

3.1.2 Fall b)

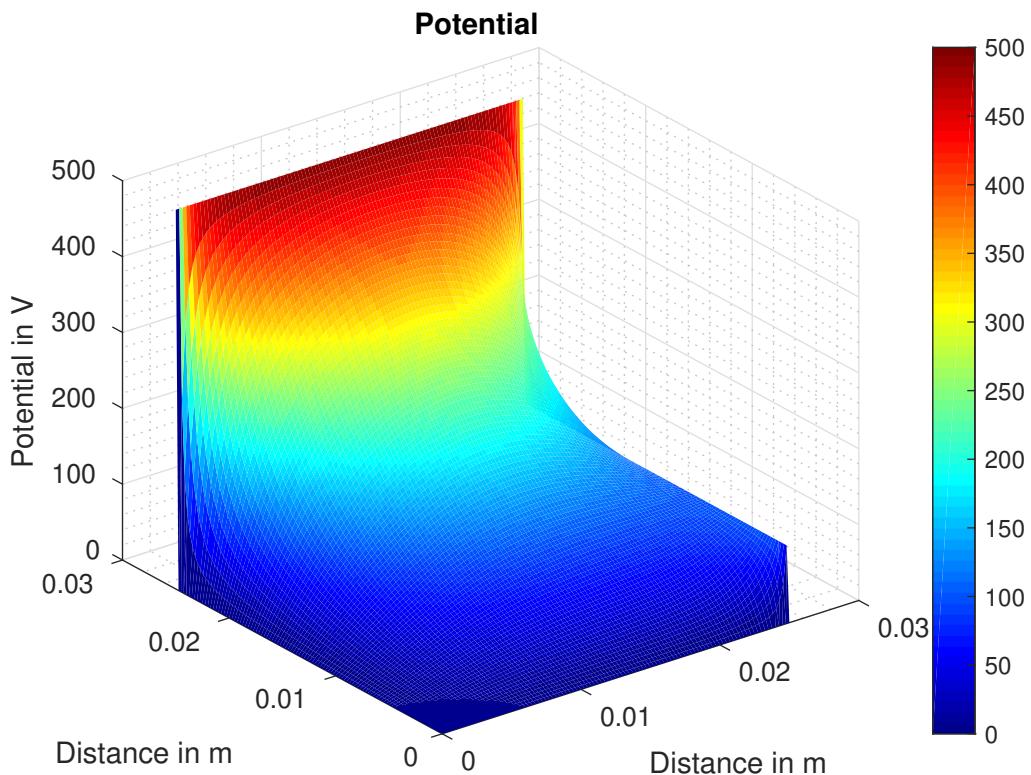


Abbildung 3.5: Potentialverlauf

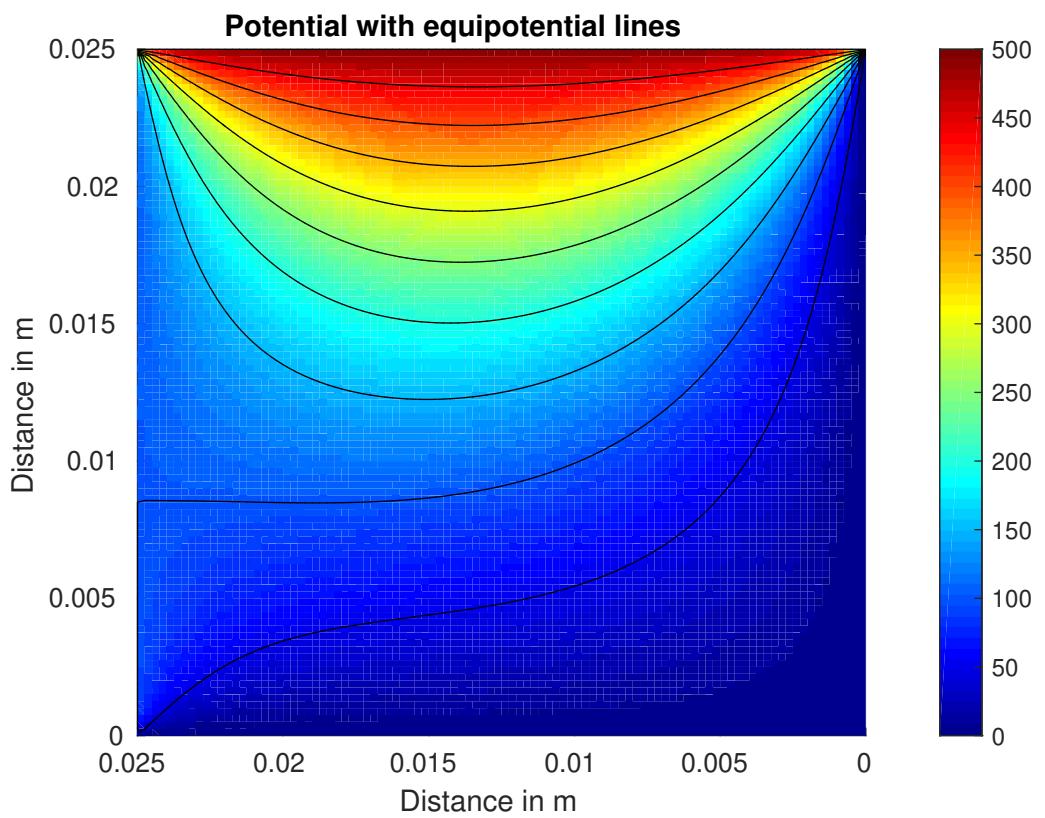


Abbildung 3.6: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

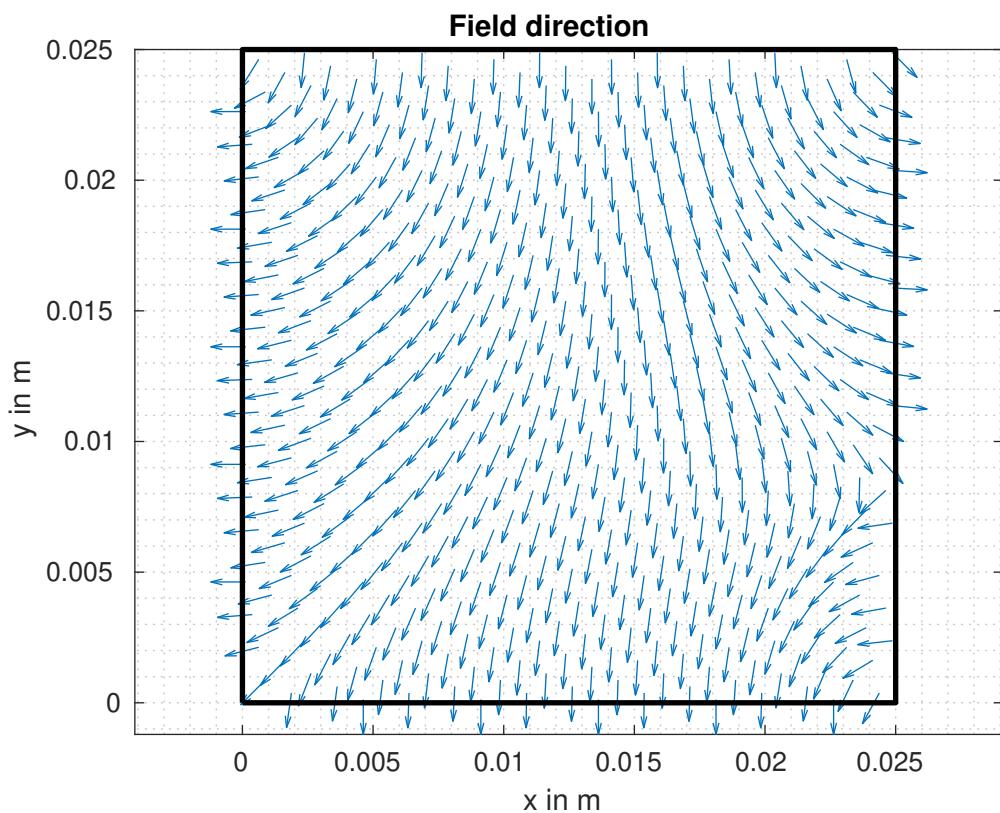


Abbildung 3.7: Richtung des elektrischen Feldes

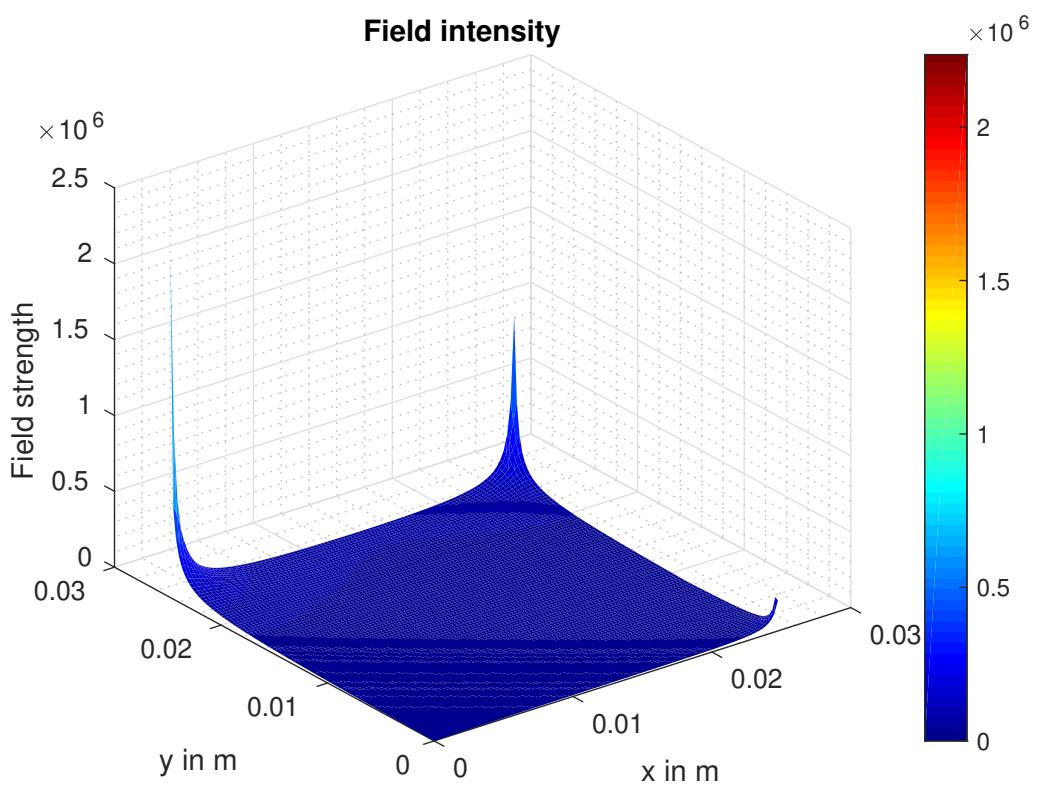


Abbildung 3.8: Magnitude des elektrischen Feldes

3.1.3 Fall c)

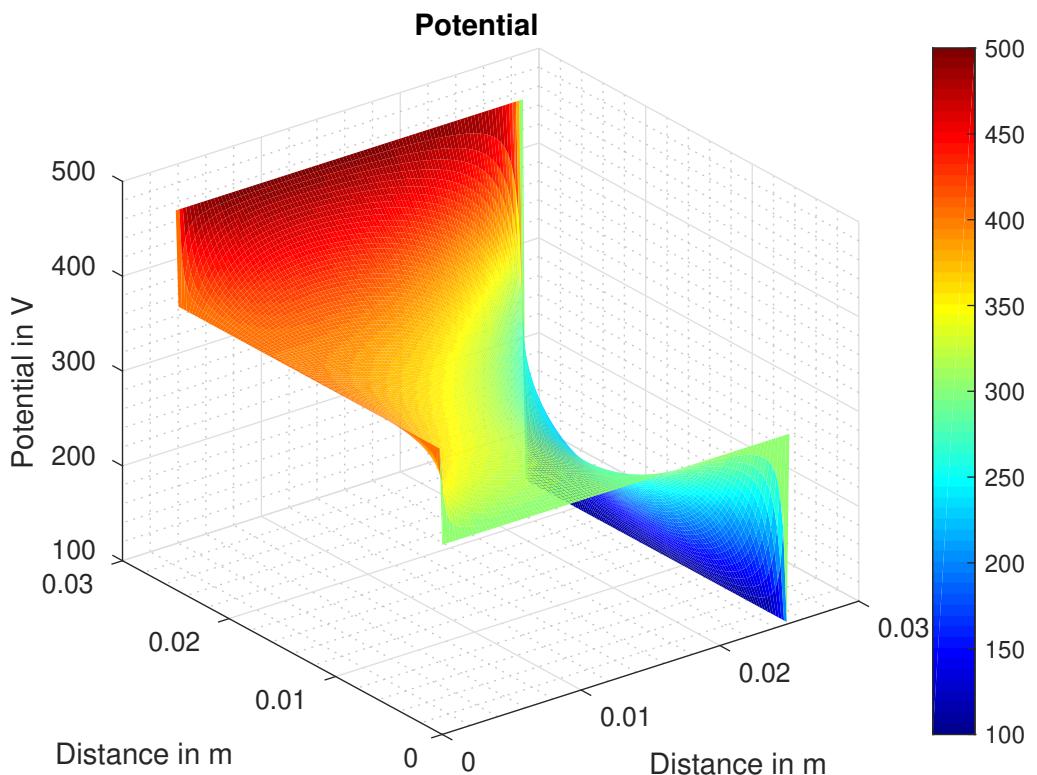


Abbildung 3.9: Potentialverlauf

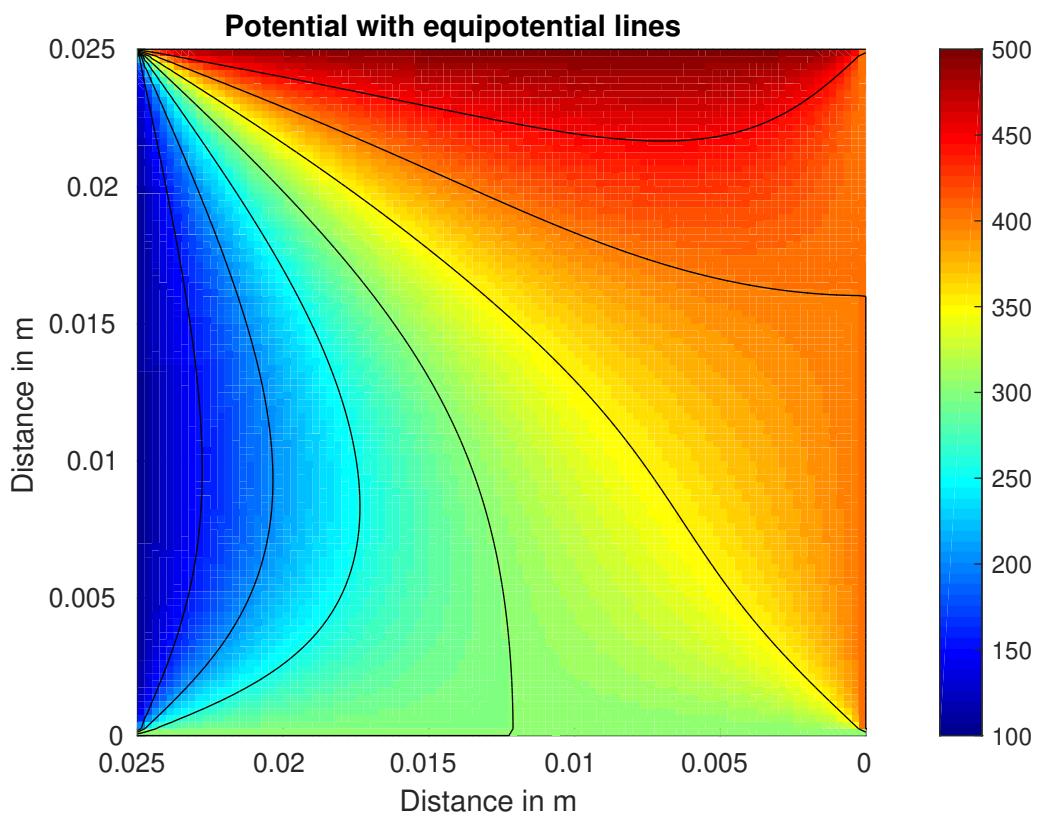


Abbildung 3.10: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

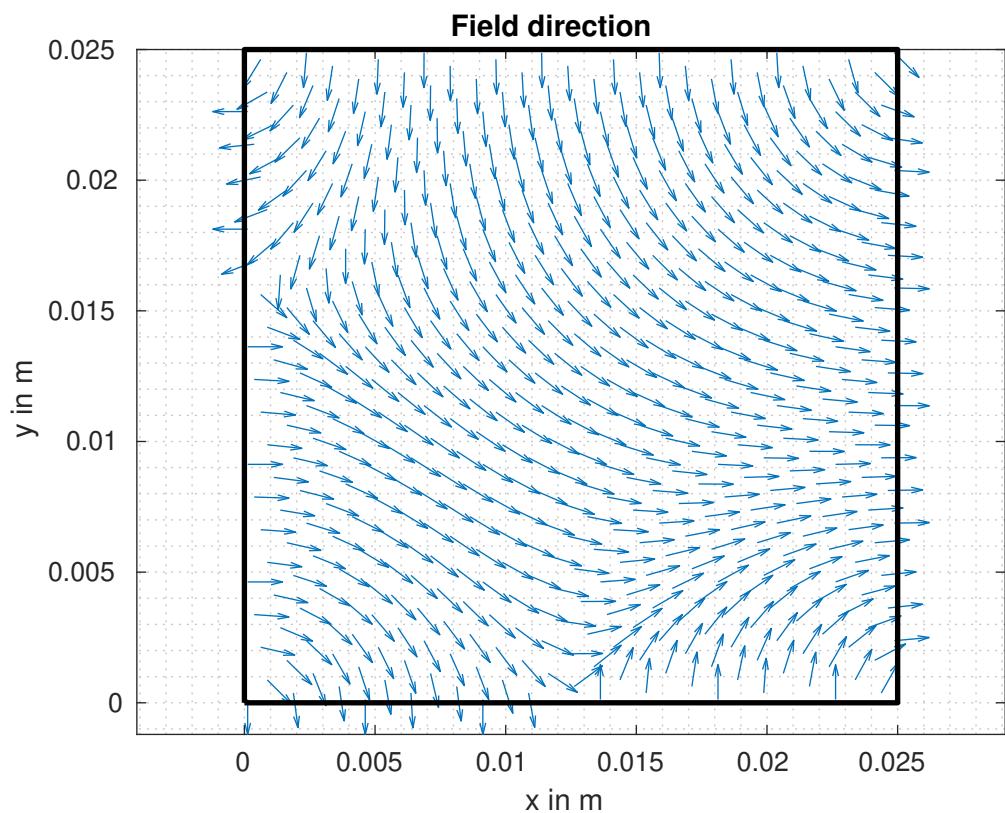


Abbildung 3.11: Richtung des elektrischen Feldes

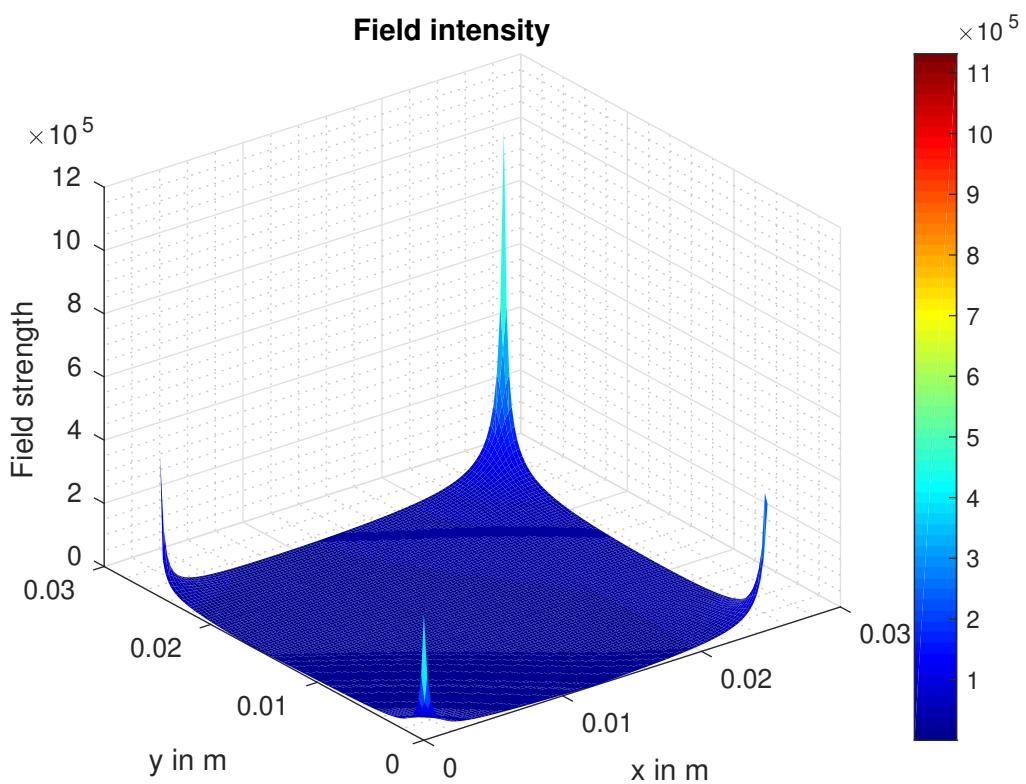


Abbildung 3.12: Magnitude des elektrischen Feldes

3.2 Aufgabe 2

Gewählte Diskretisierung: 1mm

Diskussion der Ergebnisse: Man beachte die Singularität der Magnitude des stationären Strömungsfeldes in Abbildung 3.16.

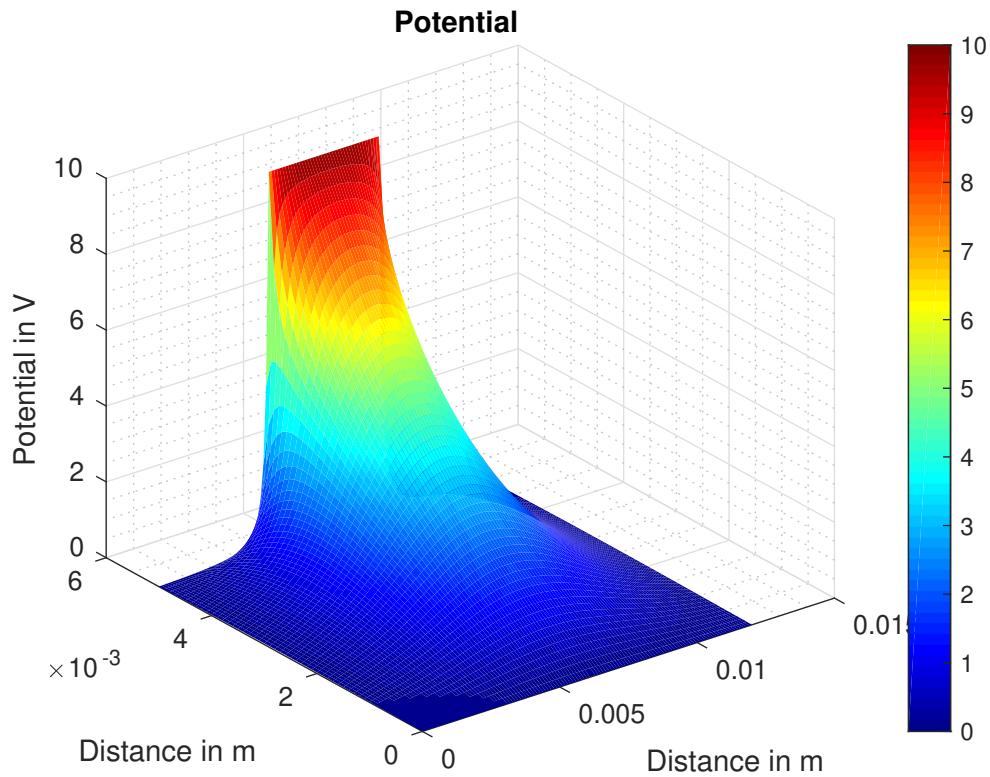


Abbildung 3.13: Potentialverlauf

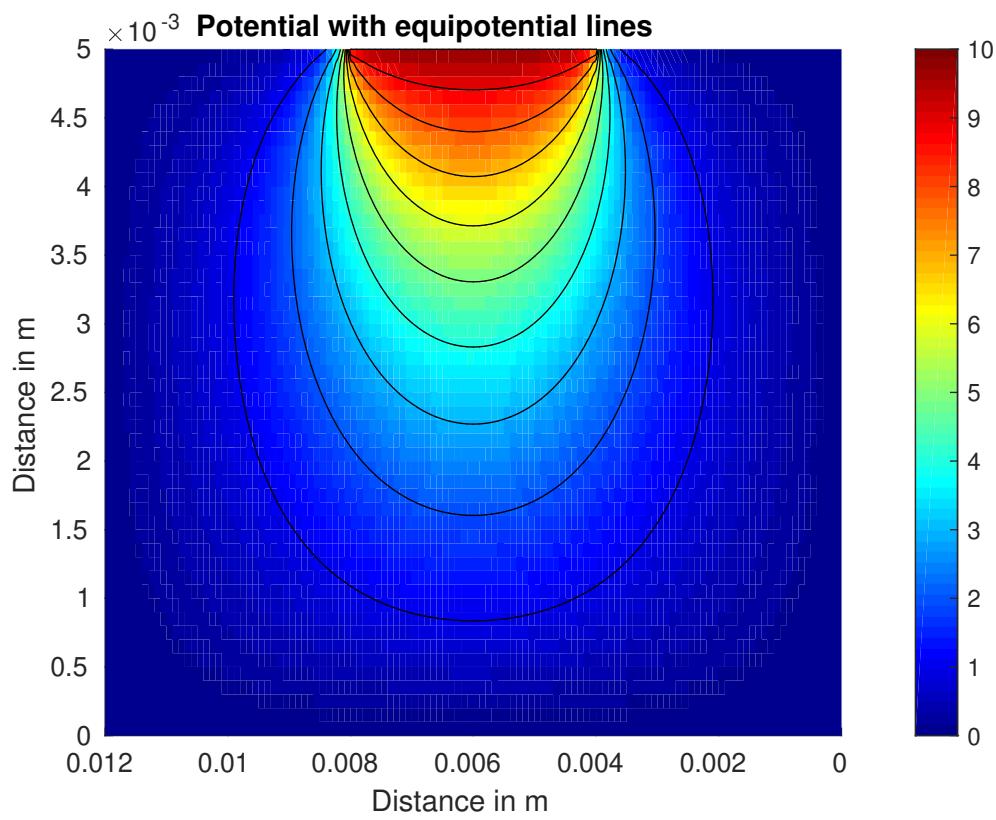


Abbildung 3.14: Potentialverlauf mit Equipotentiallinien

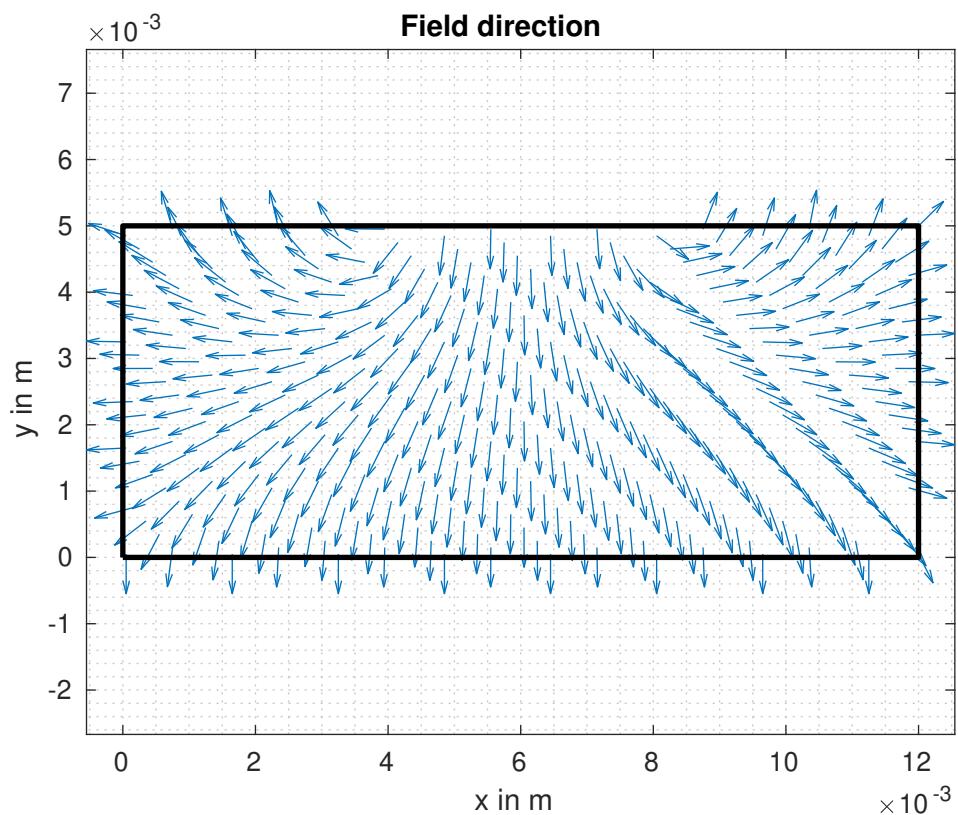


Abbildung 3.15: Richtung des stationären Strömungsfeldes

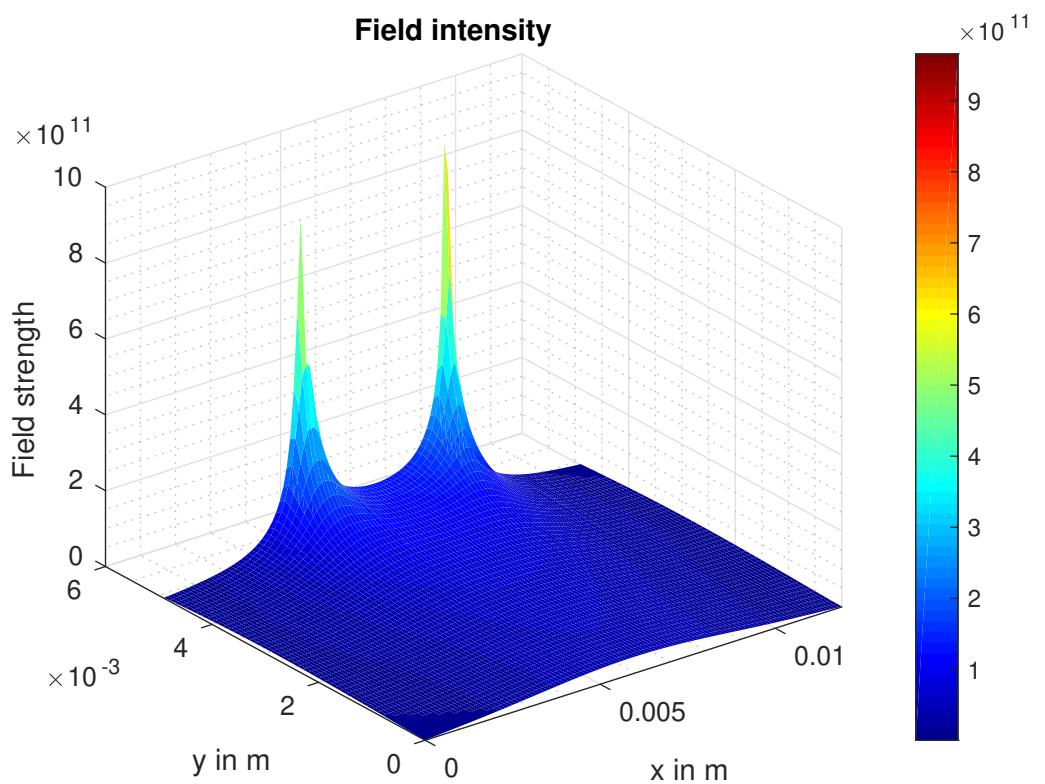


Abbildung 3.16: Magnitude des stationären Strömungsfeldes