14.3 Using the relation $\frac{dt}{dt'} = 1-\vec{\beta}(t')\cdot\vec{n}(t')$, we know $\frac{d}{dt} = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\frac{d}{dt'}$. From now on, we will drop the explicit t'-dependence in $\vec{\beta}$ and $\vec{n}$. First,

$$\frac{d}{dt'}\vec{n} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) = -\frac{\vec{v}}{R} + \frac{\vec{R}(\vec{R}\cdot\vec{v})}{R^3} = \frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}}{R}, \quad \text{since } \frac{d}{dt'}R = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}.$$

Then
$$\frac{d^2}{dt'^2}\vec{n} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}}{R}\right) = \frac{\dot{\vec{n}}(\vec{n}\cdot\vec{v}) + \vec{n}(\dot{\vec{n}}\cdot\vec{v}) + \vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}}) - \dot{\vec{v}}}{R} + \left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}\right]\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{R^2}.$$

Here,
$$\dot{\vec{n}}(\vec{n}\cdot\vec{v}) + \vec{n}(\dot{\vec{n}}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{R}\left[\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}\right)(\vec{n}\cdot\vec{v}) + \vec{n}\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}\right)\cdot\vec{v}\right]$$
$$= \frac{1}{R}\left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v}) + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - v^2\vec{n}\right]$$
$$= \frac{1}{R}\left[2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v}) - v^2\vec{n}\right],$$

thus,
$$\frac{d^2}{dt'^2}\vec{n} = \frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}})}{R} + \frac{1}{R^2}\left[2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v}) - v^2\vec{n} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v})\right]$$
$$= \frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}})}{R} + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - 2\vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v}) - v^2\vec{n}}{R^2}$$

Therefore,
$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}[\vec{n}]_{ret} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\frac{d}{dt'}\vec{n}\right)$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n} + \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{n}}\right)\frac{d}{dt'}\vec{n} + \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\frac{d^2}{dt'^2}\vec{n}\right)$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}}{R}\cdot\vec{\beta}\right)\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}}{R}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\left(\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}})}{R} + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 - 2\vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{v}) - v^2\vec{n}}{R^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{cR}\left(\frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})-\vec{\beta}\right] + \frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\right) \qquad (\mathrm{I})$$
$$+ \frac{1}{R^2}\left(\frac{\left[\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})-\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}\right]\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})-\vec{\beta}\right)}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3} + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\right) \qquad (\mathrm{II})$$

By direct calculation,

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R}\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \dot{\vec{\beta}}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) \right)$$

$$= \frac{1}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R}\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} - \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \dot{\vec{\beta}}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) \right)$$

$$= \frac{1}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R}\left[\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) - \vec{n}\times(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}) \right] = \frac{\vec{n}\times(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R},$$

and

$$(\mathrm{II}) = \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\left[\left((\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - \beta^2\right)\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}\right) + \left(3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n}\right)(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}) \right]$$

$$= \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\Big[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 - \beta^2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{\beta} + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n}$$
$$- 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) \Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\left[-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{\beta} + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n} \right]$$

For the second term in the Feynman expression,

$$\left[\frac{R}{c}\right]_{ret}\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{n}}{R^2}\right]_{ret} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\,\frac{R}{c}\left(\frac{1}{R^2}\frac{d\vec{n}}{dt'} + \vec{n}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{R^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\,\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}) - \vec{v}}{R^2} + \frac{2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})}{R^2} \right) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R^2}$$

Put terms proportional to $1/R^2$ together, we will get

$$\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R^2} + \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\left[-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{\beta} + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n} \right]$$

$$= \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\Big[\vec{n}(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + \left(3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}\right)(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2$$
$$- 2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{\beta} + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n} \Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\Big[\ \vec{n} - 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3$$

$$+ 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - 6\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 - \vec{\beta} + 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2$$

$$- 2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 + \vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + \beta^2\vec{\beta} + 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 - 2\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \beta^2\vec{n}\ \Big]$$

$$= \frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2} = \frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2 R^2}$$

Finally, we get Eq. (14.14).

$$\vec{E}(\vec{x},t) = e\left[\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R}\right]_{ret}$$