補足資料

富島諒

2021 年 7 月 15 日

回帰の変動は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left\{(\hat{a}_0+\hat{a}_1x_{1i}+\cdots+\hat{a}_px_{pi})-(\hat{a}_0+\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p)\right\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)+\cdots+\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\right\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j^2(x_{ji}-\bar{x}_j)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j\hat{a}_l(x_{ji}-\bar{x}_j)(x_{li}-\bar{x}_l) \qquad (j\neq l) \\
&= n\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j^2s_{jj}+n\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j\hat{a}_ls_{jl}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{V}(\hat{a}_j)=\frac{\sigma^2}{ns_{jj}}$, かつ, 説明変数 x_j, x_l は互いに独立であることを用いると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 &= \sum_{j=1}^{p}\frac{\hat{a}_j^2\sigma^2}{\mathrm{V}(\hat{a}_j)} \\
\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 &= \sum_{j=1}^{p}\frac{\hat{a}_j^2}{\mathrm{V}(\hat{a}_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\hat{a}_j}{\sqrt{\mathrm{V}(\hat{a}_j)}}\right)^2
\end{aligned}
$$

$u=\frac{\hat{a}_j-a_j}{\sqrt{\mathrm{V}(a_j)}}\sim \mathrm{N}(0,1)$ において, $a_j=0, j=1,\cdots,p$ と仮定すると,

$$
u=\frac{\hat{a}_j}{\sqrt{\mathrm{V}(a_j)}}\sim \mathrm{N}(0,1)
$$

なので,

$$
\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\hat{a}_j}{\sqrt{\mathrm{V}(\hat{a}_j)}}\right)^2
$$

は自由度 p の χ^2 分布に従う. すなわち,

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma^2}
$$

は自由度 p の χ^2 分布に従う.