多変量ゼミ §1.11 回帰係数の推定と検定(重回帰の場合)

高見澤 真央

ここでは，単回帰の流れをもとに，重回帰における回帰係数$\hat{a}_j$や定数項$\hat{a}_0$の確率分布，母集団での$\hat{a}_0, \hat{a}_j$の信頼区間，検定について考える．

おおまかな流れとして，

(1)重回帰モデルの回帰係数$\hat{a}_j$と定数項$\hat{a}_0$の推定値から，期待値や分散を計算する

(2) (1)で得られた結果から，信頼区間を求め，検定を行う

(3)回帰の有意性の検定問題を考える

このように進めていく．

1.回帰係数の推定と検定(重回帰の場合)

1.1. 回帰係数$\hat{a}_j$および定数項$\hat{a}_0$の推定値とその期待値，分散

説明変数の数を p として，母集団において次のような回帰モデルが成り立つと仮定する．

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi} + e_i \,, \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

ここで，$(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi})$は調査により指定される指定変数，$e_i$は独立な確率変数で，正規分布$N(0,\sigma^2)$に従うものとする．標本のデータ$(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi})$，$i = 1,2,\cdots,n$（$i$は標本の個数を表す）を得たとき，これにもとづく回帰係数$\hat{a}_j$ は，次のように表される．（§1.5 線形重回帰の範囲より）

$$\hat{a}_j = \frac{\begin{array}{c} j\text{列} \\ \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{y1} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{y2} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{yp} & \cdots & s_{pp} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots\cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots\cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots\cdots & s_{pp} \end{vmatrix}} \,, \quad (j = 1,2,\cdots p) \tag{2}$$

式(2)の分母は，分散共分散行列の行列式で，分子は，分母の行列式のj列をs_{yj} で置き換えたもの．

$x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}$の分散共分散行列を次のように定義できる

$$V = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1l} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2l} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & s_{j2} & \cdots & s_{jl} & \cdots & s_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pl} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし，

$$s_{jl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{li} - \bar{x}_l) \,, \quad j, l = 1,2,\cdots,p$$

式(2)の分子の行列式に対しj列目に関して余因子展開を行い，式(2)を変換する．

余因子展開とは・・・

$n \geq 2$とする．n次正方行列$V = [s_{jl}]$の第 j 行と第 l 列を取り除いてできる$n-1$次正方行列の行列式を$(-1)^{j+l}$倍した数

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c}\text{第}l\text{列を除く}\\ \downarrow\end{array} \\ (-1)^{j+l}\begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1l} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & \cdots & s_{jl} & \cdots & s_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nl} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} & \leftarrow \text{第}j\text{行を除く} \end{array}$$

これを，Vの (j,l) の余因子といい，V_{jl}で表す．

さらに，n次正方行列$V = [s_{jl}]$に対して，行列式は次のような展開が可能である．

余因子展開

(1) $|V| = s_{j1}V_{j1} + s_{j2}V_{j2} + \cdots + s_{jn}V_{jn}$ (第 j 行に関する展開)

(2) $|V| = s_{1l}V_{1l} + s_{2l}V_{2l} + \cdots + s_{nl}V_{nl}$ （第 l 行に関する展開）

この変換を余因子展開という．

(3)の分散共分散行列の行列式を$|V|$，その j 行と l 列の余因子をV_{jl}とする．V_{jl}は次のようになる．

$$V_{jl} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1(l-1)} & s_{1(l+1)} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & s_{2p} \\ s_{(j-1)1} & \cdots & s_{(j-1)(l-1)} & s_{(j-1)(l+1)} & & \vdots \\ s_{(j+1)1} & \cdots & s_{(j+1)(l-1)} & s_{(j+1)(l+1)} & \cdots & s_{jp} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{p2} & s_{p(l+1)} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} (-1)^{i+j}$$

式(2)の分子の行列式は，第 j 列に関して次のように余因子展開できる．

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad j\text{列} \\ \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{y1} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{y2} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{yp} & \cdots & s_{pp} \end{vmatrix} = s_{y1}V_{1j} + s_{y2}V_{2j} + \cdots + s_{yp}V_{pj} \end{array}$$

よって，式(2)は次のように表せる．

$$\hat{a}_j = \frac{s_{y1}V_{1j} + s_{y2}V_{2j} + \cdots + s_{yp}V_{pj}}{|V|} \tag{4}$$

ここで，Vの逆行列の(j,l)要素をs^{jl}と表せば，逆転公式より，次の関係が成り立つ．

$$\frac{V_{lj}}{|V|} = s^{jl} \tag{5}$$

逆転公式とは・・・

n次正方行列$V=[s_{jl}]$における(j,l)の余因子V_{jl}を(j,l)成分にもつn次正方行列の転置行列を，Vの余因子行列といい，$\tilde{V}$で表す．すなわち，

$$\tilde{V}={}^{t}\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} & \cdots & V_{n1} \\ V_{12} & V_{22} & \cdots & V_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{1n} & V_{2n} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix}$$

このとき，Vが正則ならば，次の関係が成り立つ．

逆転公式

$$V^{-1}=\frac{1}{|V|}\tilde{V}$$

これを，逆転公式という．V^{-1}は，正方行列Vの逆行列．

なお，両辺の行列の要素ごとの関係は次のようになる．

$$s^{jl}=\frac{1}{|V|}V_{lj}$$

ここで，s^{jl}は逆行列V^{-1}の(j,l)成分である．余因子行列を求める過程で，行列を転置させるため，対応する要素の行と列が反転する．

(5)の関係から，式(4)は次のように変換できる．

$$\begin{aligned}\hat{a}_j &= \frac{s_{y1}V_{1j}+s_{y2}V_{2j}+\cdots+s_{yp}V_{pj}}{|V|} \\ &= s^{j1}s_{y1}+s^{j2}s_{y2}+\cdots+s^{jp}s_{yp} \\ &= \sum_{l=1}^{p} s^{jl}s_{yl} \\ &= \sum_{l=1}^{p} s^{jl}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_{li}-\bar{x}_l) \\ &= \sum_{l=1}^{p} s^{jl}\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}(x_{li}-\bar{x}_l)\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i \qquad (6)\end{aligned}$$

また，定数項$\hat{a}_0$は，次のように変換できる．

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= \bar{y}-(\hat{a}_1\bar{x}_1+\hat{a}_2\bar{x}_2+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p) \qquad \text{（§1.5 線形重回帰の範囲より）} \\ &= \bar{y}-\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\bar{x}_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i\bar{x}_j \qquad \text{（式(6)より）} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)\bar{x}_j\right\}y_i \qquad (7)\end{aligned}$$

したがって，$\hat{a}_j, \hat{a}_0$ は正規分布に従う変数y_i，$i = 1,2,\cdots,n$ の 1 次式で表されることがわかる．
これより，回帰係数$\hat{a}_j$および定数項$\hat{a}_0$の期待値と分散，共分散を求めると次のようになる．

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_j\right) = a_j \quad , \qquad (j = 1,2,\cdots,p) \tag{8}$$

$$\mathrm{V}\left(\hat{a}_j\right) = \frac{s^{jj}\sigma^2}{n} \quad , \qquad (j = 1,2,\cdots,p) \tag{9}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_j, \hat{a}_l\right) = \frac{s^{jl}\sigma^2}{n} \quad , \qquad (j \neq l \ , j = 1,2,\cdots,p) \tag{10}$$

$$\mathrm{E}(\hat{a}_0) = a_0 \tag{11}$$

$$\mathrm{V}(\hat{a}_0) = \left(\frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}}{n}\right)\sigma^2 \tag{12}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_0, \hat{a}_j\right) = -\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{x}_l s^{jl}\sigma^2}{n} \quad , \qquad (j = 1,2,\cdots,p) \tag{13}$$

式(8)，式(11)より，$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p$は母集団における値$a_0, a_1, \cdots, a_p$に対して不偏推定値になっていることがいえる．

期待値と分散，共分散を求める過程は，長くなるため 2.1.にまとめて示す．

1.2. 回帰係数および定数項の信頼区間と検定

単回帰のときと同様に

$$u \quad = \frac{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)}{\sqrt{\mathrm{V}(\hat{a}_j)}} , \qquad (j = 0,1,2,\cdots,p)$$

このように標準化することで，uは標準正規分布$N(0,1)$に従う．
このとき，分母に含まれる未知の誤差分散σ^2を不偏推定値

$$V_e = \frac{F\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p\right)}{n-p-1} \tag{14}$$

で置き換えて得られる統計量は，1.1.で求めた期待値と分散(式(8),(9),(11),(12))を用いて，

$$t = \frac{\hat{a}_j - a_j}{\sqrt{\frac{s^{jj}V_e}{n}}} , \qquad (j = 1,2,\cdots,p) \tag{15}$$

$$t = \frac{\hat{a}_0 - a_0}{\sqrt{\left(1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\right)\frac{V_e}{n}}} \tag{16}$$

となる．これらは，いずれも自由度$n-p-1$のt分布に従う．

式(14)のV_eが，誤差分散σ^2の不偏推定値であることの証明は，2.3.で行う．

また，式(14)右辺の分子の$F\left(\hat{a}_0,\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_p\right)$は，次のような変換できる．

$$F\left(\hat{a}_0,\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_p\right) = \sum_{i=1}^{n}\{y_i-(\hat{a}_0+\hat{a}_1x_{1i}+\cdots+\hat{a}_1x_{1i})\}^2 \quad \text{（§1.5 線形重回帰の範囲より）}$$

$$= n\left(s_{yy}-\sum_{j=1}^{p}s_{yj}\hat{a}_j\right) \tag{17}$$

※この変換によって，式(17)の簡潔な表現になるが，導出まではそこそこ複雑．導出過程は 2.2.に示す．

ここから，$\hat{a}_j,\hat{a}_0$の信頼区間および仮説$H_0: a_j = a_j^{(0)}$あるいは$H_0: a_0 = a_0^{(0)}$ の検定($a_j^{(0)}, a_0^{(0)}$は与えられた値)は次のようになる．

信頼区間は，平均して 100 回中 100$(1-\alpha)$回 母集団のa_0, a_j を含むことが保証された範囲のこと．

- **$\boldsymbol{a_j}$，$\boldsymbol{j=1,2,\cdots,p}$ の信頼率$\boldsymbol{1-\alpha}$の信頼区間：**

$$\hat{a}_j-t_\alpha(n-p-1)\sqrt{\frac{s^{jj}V_e}{n}} \le a_j \le \hat{a}_j+t_\alpha(n-p-1)\sqrt{\frac{s^{jj}V_e}{n}} \tag{18}$$

- **$\boldsymbol{a_0}$の信頼率$\boldsymbol{1-\alpha}$の信頼区間：**

$$\hat{a}_0-t_\alpha(n-p-1)\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\right)\frac{V_e}{n}} \le a_0 \le \hat{a}_0+t_\alpha(n-p-1)\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\right)\frac{V_e}{n}} \tag{19}$$

- **仮説$\boldsymbol{H_0: a_j = a_j^{(0)}}$の検定($\boldsymbol{j=1,2,\cdots,p}$)：**

$$|t| = \frac{\left|\hat{a}_j-a_j^{(0)}\right|}{\sqrt{\frac{s^{jj}V_e}{n}}} \ge t_\alpha(n-p-1) \tag{20}$$

ならば，危険率αで仮説を棄却し，不等号の向きが逆ならば，仮説を採択する．

- **仮説$\boldsymbol{H_0: a_0 = a_0^{(0)}}$の検定：**

$$|t| = \frac{\left|\hat{a}_0-a_0^{(0)}\right|}{\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\right)\frac{V_e}{n}}} \ge t_\alpha(n-p-1) \tag{21}$$

ならば，危険率αで仮説を棄却し，不等号の向きが逆ならば，仮説を採択する．

1.3. 回帰の有意性の検定

ここでは，回帰の有意性，言いかえると，とりあげた説明変数$x_1,\cdots,x_p$が全体としてyの予測に役立つのかについて検定を考える．そのため，観測値y_iの変動(平方和)を回帰による変動とそれ以外に分解していく．

まず，予測値 Y_iは指定変数の組$\left(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{pi}\right)$に対して，

$$Y_i = \hat{a}_0+\hat{a}_1x_{1i}+\cdots+\hat{a}_px_{pi} \tag{22}$$

このように計算される．

観測値y_iの変動(平方和)は,

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

で表され，次のように分解される.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{Y}\right)^2 \\
&\quad \left(\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i+\sum_{i=1}^{n}e_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\bar{Y}\quad \text{より}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-Y_i+Y_i-\bar{Y}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-Y_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-Y_i\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

式(23)の第3項について,

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)(Y_i-\bar{Y}) &= 2\sum_{i=1}^{n}[\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\} \\
&\qquad \{\hat{a}_0+\hat{a}_1x_{1i}+\cdots+\hat{a}_px_{pi}-\bar{Y}\}] \\
&= 2\hat{a}_0\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\} \\
&\quad +2\hat{a}_1\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}x_{1i} \\
&\quad +\ \cdots \\
&\quad +2\hat{a}_p\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}x_{pi} \\
&\quad -2\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}
\end{aligned} \tag{24}$$

§1.5 線形重回帰の範囲で，次の関係が成り立つことがわかっている.

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(0) & \sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}=0 \\
(1) & \sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}x_{1i}=0 \\
\vdots & \\
(j) & \sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}x_{ji}=0 \\
\vdots & \\
(p) & \sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})-\hat{a}_1(x_{1i}-\bar{x}_1)-\cdots-\hat{a}_p(x_{pi}-\bar{x}_p)\}x_{pi}=0
\end{array}} \tag{25}$$

これによって，式(24)は,

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)(Y_i - \bar{Y}) \quad = 0 \tag{26}$$

これより，式(23)は,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}_{\text{全変動}(S_T)} \quad = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}_{\text{回帰による変動}(S_R)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - Y_i\right)^2}_{\text{回帰からの残差変動}(S_e)} \tag{27}$$

このとき，左辺と全変動(S_T)する．右辺の第 1 項S_Rは回帰式にもとづく予測値Y_iの変動，第 2 項S_eは残差(残差=観測値−予測値)の変動である．前者は，全変動うち回帰によって説明される部分で，後者は説明されない部分にあたる．

とりあげた説明変数$x_1, \cdots, x_p$がy の予測に有効であるとすれば，S_Rが大きく(全変動(S_T)は説明変数のとりかたに依存せず一定であるから，S_eは小さく)，逆に無効であるとすれば，S_Rは小さく(S_eは大きく)なると期待される．

ここで,

$$R^2 = \frac{S_R}{S_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{28}$$

とおけば，R^2は全体の変動のうち回帰によって説明される部分の大きさの割合を表し，その意味から決定係数(coefficient of determination)あるいは寄与率と呼ばれる．また，S_eは最小化された予測誤差の平方和$F\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p\right)$に等しい.

§1.7 重相関係数の範囲より，重相関係数は，次のように表せる．

$$r_{y\cdot 12\cdots p} = \frac{s_{yY}}{\sqrt{s_{yy}s_{YY}}}$$

重相関係数を 2 乗すると,

$$r_{y\cdot 12\cdots p}^2 \quad = \frac{\left(s_{yY}\right)^2}{s_{yy}s_{YY}} \tag{29}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
s_{yY} \quad &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i + Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i + Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i(Y_i - \bar{Y}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2
\end{aligned} \tag{30}$$

式(30)の第 1 項について

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i(Y_i-\bar{Y}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i Y_i - \frac{\bar{Y}}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \qquad \left(\text{ここで}\sum_{i=1}^{n} e_i = 0\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i(\hat{a}_0+\hat{a}_1 x_{1i}+\cdots+\hat{a}_p x_{pi}) \\
&= \frac{\hat{a}_0}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i + \frac{\hat{a}_1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i x_{1i} + \cdots + \frac{\hat{a}_p}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i x_{pi} \\
&= 0 \qquad (\text{式(25)より})
\end{aligned}$$

よって，式(30)は，

$$\begin{aligned}
s_{yY} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 \\
&= s_{YY}
\end{aligned} \tag{31}$$

このような関係が成り立つ．

式(31)を用いて，式(29)を変換すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}
r_{y\cdot 12\cdots p}^2 &= \frac{\left(s_{yY}\right)^2}{s_{yy}s_{YY}} \qquad \text{(29) 再掲} \\
&= \frac{(s_{YY})^2}{s_{yy}s_{YY}} \\
&= \frac{s_{YY}}{s_{yy}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} \\
&= R^2
\end{aligned} \tag{32}$$

式(30)より，寄与率R^2は，重相関係数$r_{y\cdot 12\cdots p}$の 2 乗に等しいことがわかる．

モデルが適合しているとき，$\sum_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)^2/\sigma^2$は自由度$n-p-1$のカイ 2 乗分布に従う．また，とくに説明変数$x_1,\cdots,x_p$が$y$ の予測に寄与しない，すなわち母集団における回帰係数の値が$a_1=\cdots=a_p=0$ のときには，$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/\sigma^2$も$\sum_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)^2/\sigma^2$とは独立に自由度$p$のカイ 2 乗分布に従うことが知られている．これより，次のような分散分析表が構成される．

分散分析表

変動要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰による	$S_R=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$	p	$V_R=\frac{S_R}{p}$	$F_0=\frac{V_R}{V_e}$
回帰からの	$S_e=\sum_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)^2$	$n-p-1$	$V_e=\frac{S_e}{n-p-1}$	
全体	$S_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$	$n-1$		

F_0が普通より大きい，つまり回帰による変動が残差の変動を凌駕していれば，重回帰式は無意味ではない．
この分散分析表において，分散比F_0が

$$F_0 \geq F^p_{n-p-1}(\alpha) \tag{33}$$

ならば，仮説$H_0: a_1 = \cdots = a_p = 0$は危険率$\alpha$で棄却され，とりあげた説明変数は全体として$y$の予測に役立つと結論付けられる．このとき，回帰は有意であるという．

ここで，$F^p_{n-p-1}(\alpha)$は自由度$(p, n-p-1)$のF分布の上限$100\alpha\%$点である．複数の係数についての仮説を検定したいときに，F検定がよく用いられる．

F分布とは・・・

2つの確率分布U, Vが次の条件を満たすとする．

(a) Uは自由度k_1のカイ2乗分布$\chi^2(k_1)$に従う

(b) Vは自由度k_2のカイ2乗分布$\chi^2(k_2)$に従う

(c) U，Vは独立である．

ここで，UとVをそれぞれの自由度で割って調整した後にとった比，すなわちフィッシャー分散比を

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

と定義すると，Fが従う確率分布を自由度(k_1, k_2)のF分布といい，$F^{k_1}_n$または$F(k_1, k_2)$と表す．

2. 式変換の補足

2.0. 式変換に用いるδ関数および統計量

式変換を行うにあたり，δ関数を定義し，そこから導ける様々な関係を示す．

$$\delta(j,l) = \begin{cases} 1 & (j = l) \\ 0 & (j \neq l) \end{cases} \tag{34}$$

これを，δ関数として定義する．

ここで，$V = [s_{jl}]$ と $V^{-1} = [s^{jl}]$と p次単位行列Iについて

$$V^{-1}V = VV^{-1} = I$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1l} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2l} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & s_{j2} & \cdots & s_{jl} & \cdots & s_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pl} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{11} & s^{12} & \cdots & s^{1l} & \cdots & s^{1p} \\ s^{21} & s^{22} & \cdots & s^{2l} & \cdots & s^{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s^{j1} & s^{j2} & \cdots & s^{jl} & \cdots & s^{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s^{p1} & s^{p2} & \cdots & s^{pl} & \cdots & s^{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

行番号と列番号が一致するときにのみ1をとることから，

$$\sum_{m=1}^{p} s^{jm} s_{ml} = \sum_{m=1}^{p} s_{ml} s^{jm} = \delta(j,l) \tag{35}$$

が成り立つ．また，δ関数は，定数b_j，$j = 1,2,\cdots,p$について，

$$\sum_{l=1}^{p} b_l \, \delta(j,l) = b_j \tag{36}$$

が成り立つ．

続いて，y_iに関する統計量を計算していく．期待値$\mathrm{E}(y_i)$は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_i) &= \mathrm{E}\left(a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi} + e_i\right) && \text{（式(1)より）} \\
&= a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi} + \mathrm{E}(e_i) && \text{（なお } \mathrm{E}(e_i) = 0\text{）} \\
&= a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi}
\end{aligned} \tag{37}$$

y_i, y_kの共分散$\mathrm{Cov}(y_i, y_k)$は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(y_i, y_k) &= \mathrm{E}[\{y_i - \mathrm{E}(y_i)\}\{y_k - \mathrm{E}(y_k)\}] \\
&= \mathrm{E}\left[\{y_i - (a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi})\}\{y_k - (a_0 + a_1 x_{1k} + \cdots + a_p x_{pk})\}\right] \\
&\quad \text{（式(37)より）} \\
&= \mathrm{E}[(e_i)(e_k)] \\
&= \mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{e_k - \mathrm{E}(e_k)\}] && \text{（}\mathrm{E}(e_i) = 0 \text{ より）} \\
&= \mathrm{Cov}(e_i, e_k)
\end{aligned} \tag{38}$$

$\mathrm{Cov}(e_i, e_k)$について，e_i, e_kは互いに独立で無相関であるため，

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(e_i, e_k) = 0 & (i \neq k) \\ \mathrm{Cov}(e_i, e_k) = \mathrm{V}(e_i) & (i = k) \end{cases}$$

定数c_i，$i = 1,2,\cdots,n$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{Cov}(e_i, e_k) = c_i \mathrm{V}(e_i) = c_i \sigma^2 \tag{39}$$

が成り立つ．共分散s_{jl}，$j, l = 1,2,\cdots,p$ について，

$$s_{jl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji} - \bar{x}_j\right)(x_{li} - \bar{x}_l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ji} x_{li} - \bar{x}_j \bar{x}_l \tag{40}$$

が成り立つ．

これらの式を用いて，変換を行っていく

2.1. 期待値と分散，共分散の計算

式(8) $\mathrm{E}(\hat{a}_j) = a_j$ の導出

$$\mathrm{E}(\hat{a}_j) = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i\right\} \qquad \left(式(6)\ \hat{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i \ より\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)\, E(y_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)\,(a_0 + a_1x_{1i} + \cdots + a_px_{pi})$$

（式(37) $\mathrm{E}(y_i) = a_0 + a_1x_{1i} + \cdots + a_px_{pi}$ より）

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)\,(a_0 + \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}x_{j'i})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} s^{jl}\left\{a_0\sum_{i=1}^{p}(x_{li}-\bar{x}_l) + \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\sum_{i=1}^{p}(x_{li}-\bar{x}_l)\,x_{j'i}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} s^{jl}\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\sum_{i=1}^{p}(x_{li}x_{j'i}-\bar{x}_lx_{j'i})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} s^{jl}\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\left(\sum_{i=1}^{p} x_{li}x_{j'i}-\bar{x}_l\sum_{i=1}^{p} x_{j'i}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} s^{jl}\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} x_{li}x_{j'i}-\bar{x}_l\bar{x}_{j'}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} s^{jl}\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\,s_{lj'} \qquad \left(式(40)\ s_{jl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}x_{li}-\bar{x}_j\bar{x}_l \ より\right)$$

$$= \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\sum_{l=1}^{n} s^{jl}\,s_{lj'}$$

$$= \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}\,\delta(j,j') \qquad \left(式(35)\ \sum_{m=1}^{p} s^{jm}s_{ml} = \delta(j,l) \ より\right)$$

$$= a_j$$

式(10) $\mathrm{Cov}(\hat{a}_j,\hat{a}_l) = \frac{s^{jl}\sigma^2}{n}$ の導出

$$\mathrm{Cov}(\hat{a}_j,\hat{a}_l) = \mathrm{E}[\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}\{\hat{a}_l - \mathrm{E}(\hat{a}_l)\}]$$

$$= \mathrm{E}[\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'=1}^{p} s^{jj'}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})y_i - \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'=1}^{p} s^{jj'}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})y_i\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p} s^{ll'}(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})y_k - \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p} s^{ll'}(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})y_k\right)\right\}]$$

$\left(式(6)\ \hat{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i \ より\right)$

$$= \mathrm{E}\left[\left\{\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'=1}^{p} s^{jj'}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(y_i-\mathrm{E}(y_i))\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p} s^{ll'}(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})(y_k-\mathrm{E}(y_k))\right\}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})(y_i-\mathrm{E}(y_i))(y_k-\mathrm{E}(y_k))\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'=1}^{p}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})\,\mathrm{E}\left[(y_i-\mathrm{E}(y_i))(y_k-\mathrm{E}(y_k))\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})\,\mathrm{Cov}(y_i,y_k)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(x_{l'k}-\bar{x}_{l'})\,\mathrm{Cov}(e_i,e_k)$$

（式(38) $\mathrm{Cov}(y_i,y_k)=\mathrm{Cov}(e_i,e_k)$ より）

$$= \frac{1}{n}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{j'i}-\bar{x}_{j'})(x_{l'i}-\bar{x}_{l'})\sigma^2$$

（式(39) $\sum_{k=1}^{n} c_k\mathrm{Cov}(e_i,e_k)=c_i\sigma^2$ より）

$$= \frac{1}{n}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{l'=1}^{p} s^{jj'}s^{ll'}\,s_{j'l'}\,\sigma^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j'=1}^{p} s^{jj'}\sigma^2\sum_{l'=1}^{p} s^{ll'}\,s_{l'j'}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j'=1}^{p} s^{jj'}\sigma^2\,\delta(l,j') \qquad \left(\text{式(35)}\ \sum_{m=1}^{p} s^{jm}s_{ml}=\delta(j,l)\ \text{より}\right)$$

$$= \frac{s^{jl}\sigma^2}{n} \qquad \left(\text{式(36)}\ \sum_{l=1}^{p} b_l\,\delta(j,l)=b_j\ \text{より}\right)$$

式(9) $\mathrm{V}(\hat{a}_j)=\frac{s^{jj}\sigma^2}{n}$ の導出

式(10)において j,l が $j=l$ のとき，式(9)となるため，

$$\mathrm{V}(\hat{a}_j) = \mathrm{Cov}(\hat{a}_j,\hat{a}_j)$$

$$= \frac{s^{jj}\sigma^2}{n}$$

式(10) $\mathrm{E}(\hat{a}_0) = a_0$ の導出

$$\mathrm{E}(\hat{a}_0) = \mathrm{E}(\bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}_1 - \cdots - \hat{a}_p\bar{x}_p) \qquad (\bar{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\bar{x}_1 + \cdots + \hat{a}_1\bar{x}_1 \text{ より})$$

$$= \mathrm{E}\left(\bar{y} - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j\bar{x}_j\right)$$

$$= \mathrm{E}(\bar{y}) - \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j\bar{x}_j\right)$$

$$= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{j=1}^{p} \mathrm{E}(\hat{a}_j)\bar{x}_j$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(y_i) - \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j \qquad \left(\text{式}(8)\ \mathrm{E}(\hat{a}_j) = a_j \text{ より}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1x_{1i} + \cdots + a_px_{pi}) - \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j$$

(式(37) $\mathrm{E}(y_i) = a_0 + a_1x_{1i} + \cdots + a_px_{pi}$ より)

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_jx_{ji}\right) - \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j$$

$$= a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j - \sum_{j=1}^{p} a_j\bar{x}_j$$

$$= a_0$$

式(12) $\mathrm{V}(\hat{a}_0)=\left(\frac{1}{n}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}}{n}\right)\sigma^2$ の導出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{a}_0) &= \mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_0-\mathrm{E}(\hat{a}_0)\right)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left\{\bar{y}-(\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p)-\mathrm{E}\left(\bar{y}-(\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p)\right)\right\}^2\right]
\end{aligned}
$$

$(\bar{y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_1\bar{x}_1$ より)

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}\left[\left\{\bar{y}-(\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p)-\left(\mathrm{E}(\bar{y})-\mathrm{E}(\hat{a}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{a}_p\bar{x}_p)\right)\right\}^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left\{\left(\bar{y}-\mathrm{E}(\bar{y})\right)-\left(\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\bar{x}_j-\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}(\hat{a}_j\bar{x}_j)\right)\right\}^2\right] \\
&= \mathrm{E}[\{\bar{y}-\mathrm{E}(\bar{y})\}^2]-2\mathrm{E}\left[\{\bar{y}-\mathrm{E}(\bar{y})\}\left\{\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\bar{x}_j-\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}(\hat{a}_j\bar{x}_j)\right\}\right] \\
&\quad +\mathrm{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\bar{x}_j-\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}(\hat{a}_j\bar{x}_j)\right\}^2\right] \\
&= \mathrm{V}(\bar{y})-2\mathrm{E}\left[\{\bar{y}-\mathrm{E}(\bar{y})\}\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\{(\hat{a}_j-\mathrm{E}(\hat{a}_j)\}\right]+\mathrm{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\,(\hat{a}_j-\mathrm{E}(\hat{a}_j)\right\}^2\right] \\
&= \mathrm{V}(\bar{y})-2\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\,\mathrm{E}[\{\bar{y}-\mathrm{E}(\bar{y})\}\{\hat{a}_j-\mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] \\
&\quad +\mathrm{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\left(\hat{a}_j-\mathrm{E}(\hat{a}_j)\right)\right\}\left\{\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_l\,(\hat{a}_l-\mathrm{E}(\hat{a}_l))\right\}\right] \\
&= \mathrm{V}(\bar{y})-2\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\,\mathrm{Cov}(\bar{y},\hat{a}_j)+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l\,\mathrm{E}[\{\hat{a}_j-\mathrm{E}(\hat{a}_j)\}\{\hat{a}_l-\mathrm{E}(\hat{a}_l)\}] \\
&= \mathrm{V}(\bar{y})-2\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_j\,\mathrm{Cov}(\bar{y},\hat{a}_j)+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l\,\mathrm{Cov}(\hat{a}_j,\hat{a}_l) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

式(41)の第 1 項について

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\bar{y}) &= \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right) \\
&= \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_{1i}+\cdots+a_px_{pi}+e_i)\right)
\end{aligned}
$$

(式(1) $y_i=a_0+a_1x_{1i}+\cdots+a_px_{pi}+e_i$ より)

$$
= \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i\right)
$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{V}(e_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n^2} n\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \tag{42}$$

また，式(41)の第 2 項について

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{a}_j) &= \mathrm{E}\left[\{\bar{y} - \mathrm{E}(\bar{y})\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}\right] \\
&= \mathrm{E}[\left\{\left(na_0 + a_1\bar{x}_1 + \cdots + a_p\bar{x}_p + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\right) - \mathrm{E}\left(na_0 + a_1\bar{x}_1 + \cdots + a_p\bar{x}_p + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\right\} \\
&\quad \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)y_k - \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)y_k\right)\right\}]
\end{aligned}$$

（式(1) $y_i = a_0 + a_1x_{1i} + \cdots + a_px_{pi} + e_i$ より）

（式(6) $\hat{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)y_i$ より）

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{E}\left[\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i - \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\mathrm{E}(y_k)\right\}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\{y_k - \mathrm{E}(y_k)\}\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\,\mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{e_k - \mathrm{E}(e_k)\}]
\end{aligned}$$

（式(38) $\mathrm{Cov}(y_i, y_k) = \mathrm{Cov}(e_i, e_k)$ より）

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\,\mathrm{Cov}(e_i, e_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)\sigma^2 \qquad \text{（式(39)} \sum_{k=1}^{n} c_k\mathrm{Cov}(e_i, e_k) = c_i\sigma^2 \text{ より）} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}\sigma^2 \sum_{i=1}^{n}(x_{li} - \bar{x}_l) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{43}$$

式(41)に式(42)と式(43)を代入して

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{a}_0) &= \mathrm{V}(\bar{y}) - 2\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}} \bar{x}_j\,\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{a}_j) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{p}} \bar{x}_j\bar{x}_l\,\mathrm{Cov}(\hat{a}_j, \hat{a}_l) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{p}} \bar{x}_j\bar{x}_l\left(\frac{s^{jl}\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{\left(1 + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{p}} \bar{x}_j\bar{x}_l\, s^{jl}\right)\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

式(13) $\mathrm{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_j) = -\sum_{l=1}^{p} \frac{\bar{x}_l s^{jl} \sigma^2}{n}$ の導出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_j) &= \mathrm{E}[\{\hat{a}_0 - \mathrm{E}(\hat{a}_0)\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] \\
&= \mathrm{E}[\{(\bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}_1 - \cdots - \hat{a}_p\bar{x}_p) - \mathrm{E}(\bar{y}) + \mathrm{E}(\hat{a}_1\bar{x}_1) + \cdots + \mathrm{E}(\hat{a}_p\bar{x}_p)\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] \\
&\quad (\bar{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\bar{x}_1 + \cdots + \hat{a}_1\bar{x}_1 \text{ より}) \\
&= \mathrm{E}[\{\bar{y} - \mathrm{E}(\bar{y})\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] - \mathrm{E}[\overline{x_1}\{\hat{a}_1 - \mathrm{E}(\hat{a}_1)\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] \\
&\quad - \cdots - \mathrm{E}[\overline{x_p}\{\hat{a}_p - \mathrm{E}(\hat{a}_p)\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}] \\
&= \mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{a}_j) - \overline{x_1}\mathrm{Cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_j) - \cdots - \overline{x_p}\mathrm{Cov}(\hat{a}_p, \hat{a}_j) \\
&= \mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{a}_j) - \sum_{l=1}^{p} \overline{x_l}\mathrm{Cov}(\hat{a}_j, \hat{a}_l) \\
&= -\frac{\sum_{l=1}^{p} \bar{x}_l\, s^{jl} \sigma^2}{n} \\
&\quad (\text{式(43)}\ \mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{a}_j) = 0 \text{ より}) \quad (\text{式(10)}\ \mathrm{Cov}(\hat{a}_j, \hat{a}_l) = \frac{s^{jl}\sigma^2}{n} \text{ より})
\end{aligned}
$$

2.2. 式(17) $F(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p) = n(s_{yy} - \sum_{j=1}^{p} s_{yj}\hat{a}_j)$ の証明

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p) &= \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{a}_p x_{pi})\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{(y_i - \bar{y}) - \hat{a}_1(x_{1i} - \overline{x_1}) - \cdots - -\hat{a}_p(x_{pi} - \bar{x}_p)\}^2 \\
&\quad (\bar{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\bar{x}_1 + \cdots + \hat{a}_1\bar{x}_1 \text{ より}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j (x_{ji} - \bar{x}_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \hat{a}_j (x_{ji} - \bar{x}_j) \hat{a}_l (x_{li} - \bar{x}_l)
\end{aligned} \tag{44}
$$

このとき，式(44)の第 1 項は,

$$
\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = n s_{yy} \tag{45}
$$

式(44)の第 2 項は,

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j (x_{ji} - \bar{x}_j) &= -2\sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_{ji} - \bar{x}_j) \\
&= -2\sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j n s_{yj}
\end{aligned} \tag{46}
$$

式(44)の第3項は,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j(x_{ji}-\bar{x}_j)\hat{a}_l(x_{li}-\bar{x}_l) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j\hat{a}_l\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)(x_{li}-\bar{x}_l)\\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j\hat{a}_l\, ns_{jl}\\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_j\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p}s^{ll'}(x_{l'i}-\bar{x}_{l'})y_i\right\}ns_{jl}
\end{aligned}$$

(式(6) $\hat{a}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)y_i$ より)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p}(x_{l'i}-\bar{x}_{l'})y_i\sum_{l=1}^{p}s_{jl}s^{ll'}\\
&= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{l'=1}^{p}(x_{l'i}-\bar{x}_{l'})y_i\,\delta(j,l')
\end{aligned}$$

(式(35) $\sum_{m=1}^{p}s_{ml}s^{jm}=\delta(j,l)$ より)

$$= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)y_i$$

(式(36) $\sum_{l=1}^{p}b_l\,\delta(j,l)=b_j$ より)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)\{y_i-(\bar{y}-\bar{y})\}\\
&= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\left\{\bar{y}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)+\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)(y_i-\bar{y})\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j ns_{yj} \qquad (47)
\end{aligned}$$

よって,式(44)に,式(45),式(46),式(47)を代入して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\hat{a}_0,\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_p) &= ns_{yy}-2\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j ns_{yj}+\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j ns_{yj}\\
&= n\left(s_{yy}-\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j s_{yj}\right)
\end{aligned}$$

以上で,式(17)が示された.

2.3. V_eが誤差分散σ^2の不偏推定値であることの証明

式(14) $V_e = \frac{F(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p)}{n-p-1}$ が誤差分散σ^2の不偏推定値であることを示すため，$F(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p)$の期待値を求める．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{F}(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p)] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\{y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{a}_p x_{pi})\}^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\{(a_0 - \hat{a}_0) + (a_1 - \hat{a}_1)x_{1i} + \cdots + (a_p - \hat{a}_p)x_{pi} + e_i\}^2\right] \\
&\quad \text{（式(1)} \ y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi} + e_i \ \text{より）} \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\{(a_0 - \hat{a}_0) + (a_1 - \hat{a}_1)x_{1i} + \cdots + (a_p - \hat{a}_p)x_{pi}\}^2\right] \\
&\quad +2\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} e_i\{(a_0 - \hat{a}_0) + (a_1 - \hat{a}_1)x_{1i} + \cdots + (a_p - \hat{a}_p)x_{pi}\}\right] + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{(a_0 - \hat{a}_0)^2 + 2(a_0 - \hat{a}_0)\sum_{j=1}^{p}(a_j - \hat{a}_j)x_{ji} + \sum_{j=1}^{p}(a_j - \hat{a}_j)x_{ji}\sum_{l=1}^{p}(a_l - \hat{a}_l)x_{li}\right\}\right] \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[e_i(a_0 - \hat{a}_0) + e_i\sum_{j=1}^{p}(a_j - \hat{a}_j)x_{ji}\right] + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\{\hat{a}_0 - \mathrm{E}(\hat{a}_0)\}^2] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}[\{\hat{a}_0 - \mathrm{E}(\hat{a}_0)\}]\,\mathrm{E}[\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}x_{ji}] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\mathrm{E}[\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}\{\hat{a}_l - \mathrm{E}(\hat{a}_l)\}x_{ji}x_{li}] \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{\hat{a}_0 - \mathrm{E}(\hat{a}_0)\}] \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{\hat{a}_j - \mathrm{E}(\hat{a}_j)\}x_{ji}] + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2\right) \\
&\quad \text{（式(8)} \ \mathrm{E}(\hat{a}_j) = a_j \ \text{より）} \quad \text{（式(10)} \ \mathrm{E}(\hat{a}_0) = a_0 \ \text{より）} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\hat{a}_0) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_j)\,x_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\mathrm{Cov}(\hat{a}_j, \hat{a}_l)x_{ji}x_{li} \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_0) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_j)x_{ji} + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2\right) \qquad (48)
\end{aligned}
$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_0) &= \mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{\hat{a}_0 - \mathrm{E}(\hat{a}_0)\}] \\
&= \mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\} \\
&\quad \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} y_k - \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} y_k\right)\right\}] \\
&\quad \left(\text{式}(7)\ \hat{a}_0 = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)\bar{x}_j\}y_i\ \text{より}\right) \\
&= \mathrm{E}\left[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n}\{y_k - \mathrm{E}(y_k)\}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} \mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{y_k - \mathrm{E}(y_k)\}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} \mathrm{E}[\{e_i - \mathrm{E}(e_i)\}\{e_k - \mathrm{E}(e_k)\}] \\
&\quad \left(\text{式}(37)\ \mathrm{E}(y_i) = a_0 + a_1 x_{1i} + \cdots + a_p x_{pi}\ \text{より}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} \mathrm{Cov}(e_i, e_k) \\
&= \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} \sigma^2 \qquad (49)
\end{aligned}
$$

$$\left(\text{式}(39)\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{Cov}(e_i, e_k) = c_i \sigma^2\ \text{より}\right)$$

式(49)より，式(48)の第 4 項は，

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_0) &= -2\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)\bar{x}_j}{n} \sigma^2 \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n} + 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \frac{s^{jl}\bar{x}_j\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n}(x_{li} - \bar{x}_l) \\
&= -2n\frac{\sigma^2}{n} \\
&= -2\sigma^2 \qquad (50)
\end{aligned}
$$

式(49)と同様に，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_j) &= \mathrm{Cov}\left\{e_i, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{lk} - \bar{x}_l)y_k\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}(x_{li} - \bar{x}_l)\sigma^2 \qquad (51)
\end{aligned}
$$

ここでの導出過程は，式(49)の繰り返しになる部分が多いため，省略する．

式(51)より，式(48)の第 5 項は，

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Cov}(e_i,\hat{a}_j)x_{ji} &= -\frac{2\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)x_{ji} \\
&= -\frac{2\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}(x_{li}-\bar{x}_l)\{x_{ji}-(\bar{x}_j-\bar{x}_j)\} \\
&= -\frac{2\sigma^2}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}\sum_{i=1}^{n}(x_{li}-\bar{x}_l)(x_{ji}-\bar{x}_j)-\frac{2\sigma^2}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}\,\bar{x}_j\sum_{i=1}^{n}(x_{li}-\bar{x}_l) \\
&= -\frac{2\sigma^2}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}s^{jl}\,ns_{lj} \\
&= -2\sigma^2\sum_{j=1}^{p}\delta(j,j) \qquad \left(\text{式(35)}\ \sum_{m=1}^{p}s_{ml}s^{jm}=\delta(j,l)\ \text{より}\right) \\
&= -2\sigma^2 p
\end{aligned}
\tag{52}
$$

式(48)の第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\hat{a}_0) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1+\sum_{j=1}^{\mathrm{p}}\sum_{l=1}^{\mathrm{p}}\bar{x}_j\bar{x}_l\,s^{jl}\right)\sigma^2}{n} \\
&\quad \left(\text{式(14)}\ \mathrm{V}(\hat{a}_0)=\left(\frac{1}{n}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}}{n}\right)\sigma^2\ \text{より}\right) \\
&= \sigma^2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\sigma^2
\end{aligned}
\tag{53}
$$

式(48)の第 2 項は，

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\hat{a}_j)\,x_{ji} &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(-\frac{\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_l\,s^{jl}\sigma^2}{n}x_{ji}\right) \\
&\quad \left(\text{式(14)}\ \mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\hat{a}_j)=-\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{x}_l s^{jl}\sigma^2}{n}\ \text{より}\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{p}\left(-\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_l s^{jl}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}}{n} \\
&= -2\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\bar{x}_j\bar{x}_l s^{jl}\sigma^2
\end{aligned}
\tag{54}
$$

式(48)の第 3 項は，

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\mathrm{Cov}(\hat{a}_j,\hat{a}_l)x_{ji}x_{li} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{s^{jl}\sigma^2}{n}x_{ji}x_{li}
\tag{55}
$$

式(48)の第 6 項は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\{e_i-\mathrm{E}(e_i)\}^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(e_i) \\
&= n\sigma^2
\end{aligned}
\tag{56}
$$

最後に，式(48)に式(50)，式(52)，式(53)，式(54)，式(55)，式(56)を代入して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{F}\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p\right)\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(\hat{a}_0) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_j)\, x_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \mathrm{Cov}(\hat{a}_j, \hat{a}_l) x_{ji} x_{li} \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_0) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Cov}(e_i, \hat{a}_j) x_{ji} + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2\right) \\
&= \left(\sigma^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \bar{x}_j \bar{x}_l s^{jl} \sigma^2\right) + \left(-2\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \bar{x}_j \bar{x}_l s^{jl} \sigma^2\right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \frac{s^{jl}\sigma^2}{n} x_{ji} x_{li}\right) + (-2\sigma^2) + (-2\sigma^2 p) + (n\sigma^2) \\
&= \left\{n - 2p - 1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji} x_{li} - \bar{x}_j \bar{x}_l\right)\right\}\sigma^2 \\
&= \left(n - 2p - 1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} s^{jl} s_{lj}\right)\sigma^2 \quad \left(\text{式(40)}\ s_{jl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji} x_{li} - \bar{x}_j \bar{x}_l\ \text{より}\right) \\
&= \left(n - 2p - 1 + \sum_{j=1}^{p} \delta(j, j)\right)\sigma^2 \qquad \left(\text{式(35)}\ \sum_{m=1}^{p} s_{ml} s^{jm} = \delta(j, l)\ \text{より}\right) \\
&= (n - 2p - 1 + p)\sigma^2 \\
&= (n - p - 1)\sigma^2
\end{aligned}
\tag{57}
$$

したがって，

$$
\mathrm{E}(\mathrm{V_e}) = \frac{\mathrm{E}\left[\mathrm{F}\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p\right)\right]}{n - p - 1} = \frac{(n - p - 1)\sigma^2}{n - p - 1} = \sigma^2 \tag{58}
$$

これより，

$$
V_e = \frac{F\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p\right)}{n - p - 1}
$$

が誤差分散σ^2の不偏推定値であることがわかる．