# Отчет по лабораторной работе 2
# По предмету “Анализ алгоритмов”
# По теме “Умножение матриц”

Фирсова Дарья ИУ7-56

2018

# Введение

В лабораторной работе изучаются алгоритмы умножения матриц. Рассмотрены алгоритмы: стандартный, алгоритм Винограда и улучшенный алгоритм Винограда.

**Цель лабораторной работы:** анализ, реализация и сравнительный анализ времени работы алгоритмов для различных размеров исходных матриц.

**Задачи для лабораторной работы:**

1. Ввести модель оценки трудоемкости
2. Реализовать стандартный алгоритм умножения матриц
3. Реализовать алгоритм Винограда
4. Релизовать улучшенный алгоритм Винограда, при этом произвести не менее 3 улучшений).
5. Провести временные замеры
6. Произвести расчет трудоемкости для реализованных алгоритмов.
7. Сравнительный анализ времени работы алгоритма для разных исходных матриц.

# 1 Аналитеская часть

В данном разделе приведены алгоритмы и составлена модель для вычисления трудоемкости.

## 1.1 Описание алгоритмов

### 1.1.1 Стандартный алгоритм умножения.

Имеем две матрицы A и B размерностями M x N и N x Q соответственно. Тогда результирующей матрицей будет матрица C размером M x Q, где $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}, (i = 0, 1, 2...m, j = 0, 1, 2...q)$.

### 1.1.2 Алгоритм Винограда.

Пусть $i$-я строка матрицы A - вектор $\vec{U}$, а $j$-й столбец матрицы B - вектор $\vec{V}$.

Тогда $C_{ij} = \boxed{u_1\ u_2\ u_3\ u_4} \cdot \boxed{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 =$ $(u_1{+}v_2)(u_2v_1) + (u_3{+}v_4)(u_4{+}v_3)$ - $u_1u_2$ - $u_3u_4$ - $v_1v_2$ - $v_3v_4$.

"Хвост"для $\vec{U}$ вычисляется заранее и используется повтороно при умножении на каждый столбец матрицы B. Аналогично для вектора $\vec{V}$

Если вектора $\vec{U}$ и $\vec{V}$ нечетной длины, то к приведенным выше вычислениям, добавляем $C_{ij} += U_{N-1} \cdot V_{N-1}, \forall i, j$

## 1.2 Модель вычислений

Введем следующую модель вычислений: операции $+ - * / < > == != += = []$ имеют стоимость 1.

### 1.2.1 Оценка трудоемкости цикла for

Инициализация до цикла стоит 2, после выполнения тела цикла, инкрементируется итератор цикла, проверяется условие.Если в условии содержится выражение, то оно считается как сумма стоимости простых операций выше.
$F = 2 + N * (F_{body} + Check_{body})$

### 1.2.2 Оценка трудоемкости оператора if

Переход по условию имеет стоимость 0, проверка условия зависит от выражения самой провеки согласно модели выше.
Для оператора без проверки условия: $F = 0$
Для оператора с проверкой условия: $F = 0 + body$

# 2 Конструкторская часть

В данном разделе представлены схемы алгоритмов

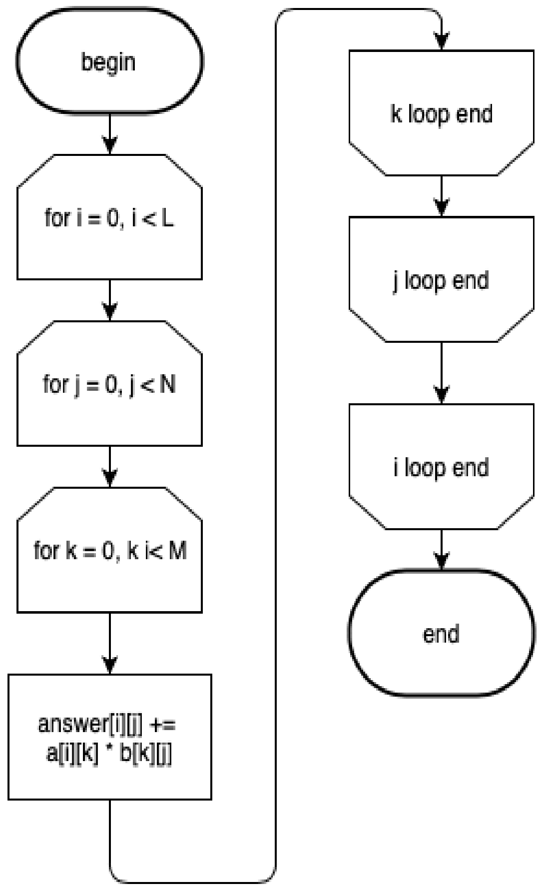



Рис. 1: Схема стандартного алгоритма

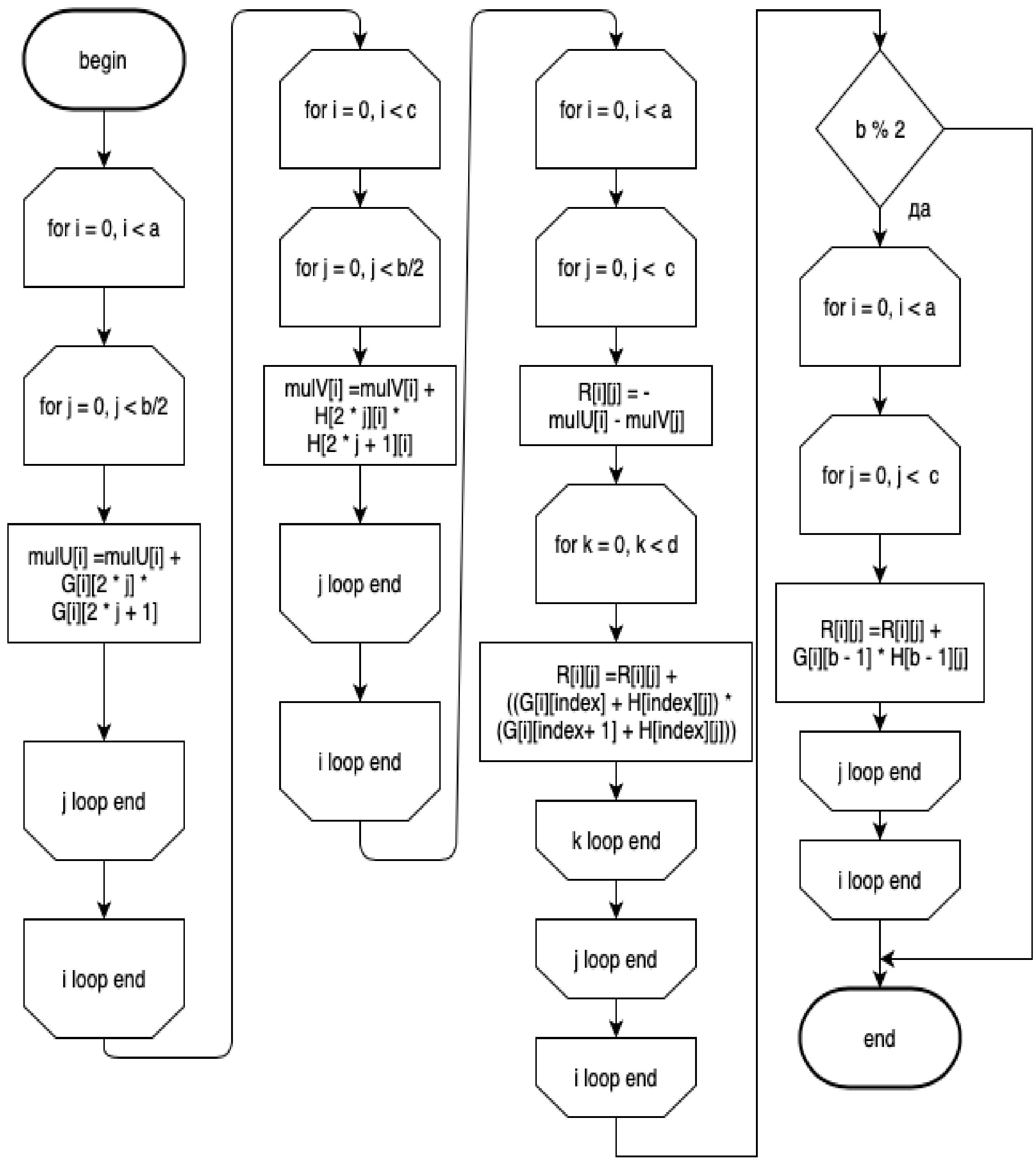



Рис. 2: Схема алгоритма Винограда

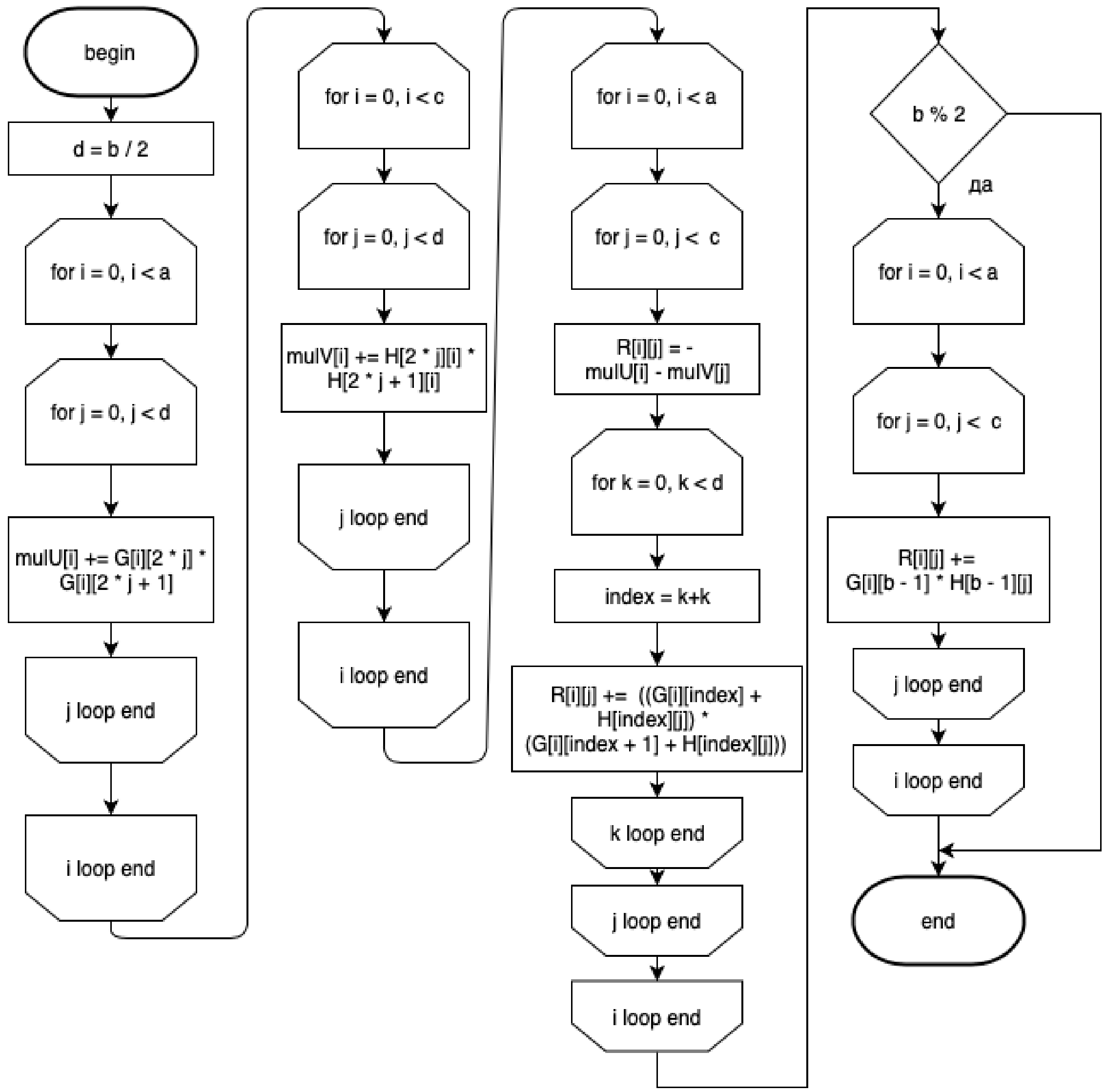



Рис. 3: Схема алгоритма улучшенного Винограда

# 3 Технологическая часть

В этом разделе приведена реализация функций, указан язык программирования и необходимые модули.

## 3.1 Средства реализации

В данной работе использовался язык Python 3.6, в среде Pycharm. Для измерения времени использовался модуль time, измерения проищводились в секундах.

## 3.2 Листинг кода

```python
def multiply(a, b, l, m, n):
    answer = [[0 for i in range(n)] for j in range(l)]
    for i in range(l):
        for j in range(n):
            for k in range(m):
                answer[i][j] += a[i][k] * b[k][j]
    return answer

def winograd(G, H):
    a = len(G)
    b = len(H)
    c = len(H[0])
    mulU = [0 for i in range(a)]
    mulV = [0 for i in range(c)]
    R = [[0 for i in range(c)] for j in range(a)]

    for i in range(a):
        for j in range(0, b // 2, 1):
            mulU[i] = mulU[i] + G[i][2 * j] * G[i][2 * j + 1]

    for i in range(c):
        for j in range(0, b // 2, 1):
            mulV[i] = mulV[i] + H[2 * j][i] * H[2 * j + 1][i]

    for i in range(a):
        for j in range(c):
            R[i][j] = - mulU[i] - mulV[j]
            for k in range(0, b // 2, 1):
                R[i][j] = R[i][j] + ((G[i][2 * k] + H[2 * k + 1][
    j]) * (G[i][2 * k + 1] + H[2 * k][j]))
```

```
    if b % 2:
        for i in range(a):
            for j in range(c):
                R[i][j] = R[i][j] + G[i][b - 1] * H[b - 1][j]

    return R

def opt_winograd(G, H):
    a = len(G)
    b = len(H)
    c = len(H[0])
    d = b // 2
    mulU = [0 for i in range(a)]
    mulV = [0 for i in range(c)]
    R = [[0 for i in range(c)] for j in range(a)]

    for i in range(a):
        for j in range(d):
            mulU[i] += G[i][2 * j] * G[i][2 * j + 1]

    for i in range(c):
        for j in range(d):
            mulV[i] += H[2 * j][i] * H[2 * j + 1][i]

    for i in range(a):
        for j in range(c):
            R[i][j] = - mulU[i] - mulV[j]
            for k in range(d):
                index = k + k
                R[i][j] += ((G[i][index] + H[index + 1][j]) * (G[i][index + 1] + H[index][j]))
    if b % 2:
        for i in range(a):
            for j in range(c):
                R[i][j] += G[i][b - 1] * H[b - 1][j]

    return R
```

Листинг 1. Реализация алгоритмов.

## 3.3 Вычисление трудоемкости алгоритмов

Расчет производился по исходному коду, указанному на листинге 1. Разделение на части проводилось согласно логическим сегментам программы. Для сокращения времени работы алгоритма были сделаны следующие улучшения:

1. В цикле не вычисляется значение границы цикла. До начала работы алгоритма введена новая переменная.
2. Введен оператор $+=$ для сокращения количества операций.
3. Изменены общие индексы для взятия адреса.

**Оценка трудоемкости стандартного алгоритма:**
$10MNQ + 4MQ + 4M + 2$

**Оценка трудоемкости алгоритма Винограда:**
Первая часть: $\frac{13MN}{2} + 5M + 2$
Вторая часть: $\frac{13QN}{2} + 5M + 2$
Третья часть: $13MNQ + 9MQ + 2M + 2$
Четвертая часть: $15QM + 2M + 1$

**Оценка трудоемкости улучшенного алгоритма Винограда:**
Первая часть: $6MN + 2M + 2$
Вторая часть: $6QN + 2M + 2$
Третья часть: $10MNQ + 9QM + 2M + 2$
Четвертая часть: $12MQ + 2M + 1$

# 4 Экспериментальная часть

В данном разделе будут приведены примеры работы алгоритмов и произведены замеры времени. Тестирование производилось на компьютере с процессором Intel Core i5 (I5-6267U) и оперативной памятью 8 Гб.

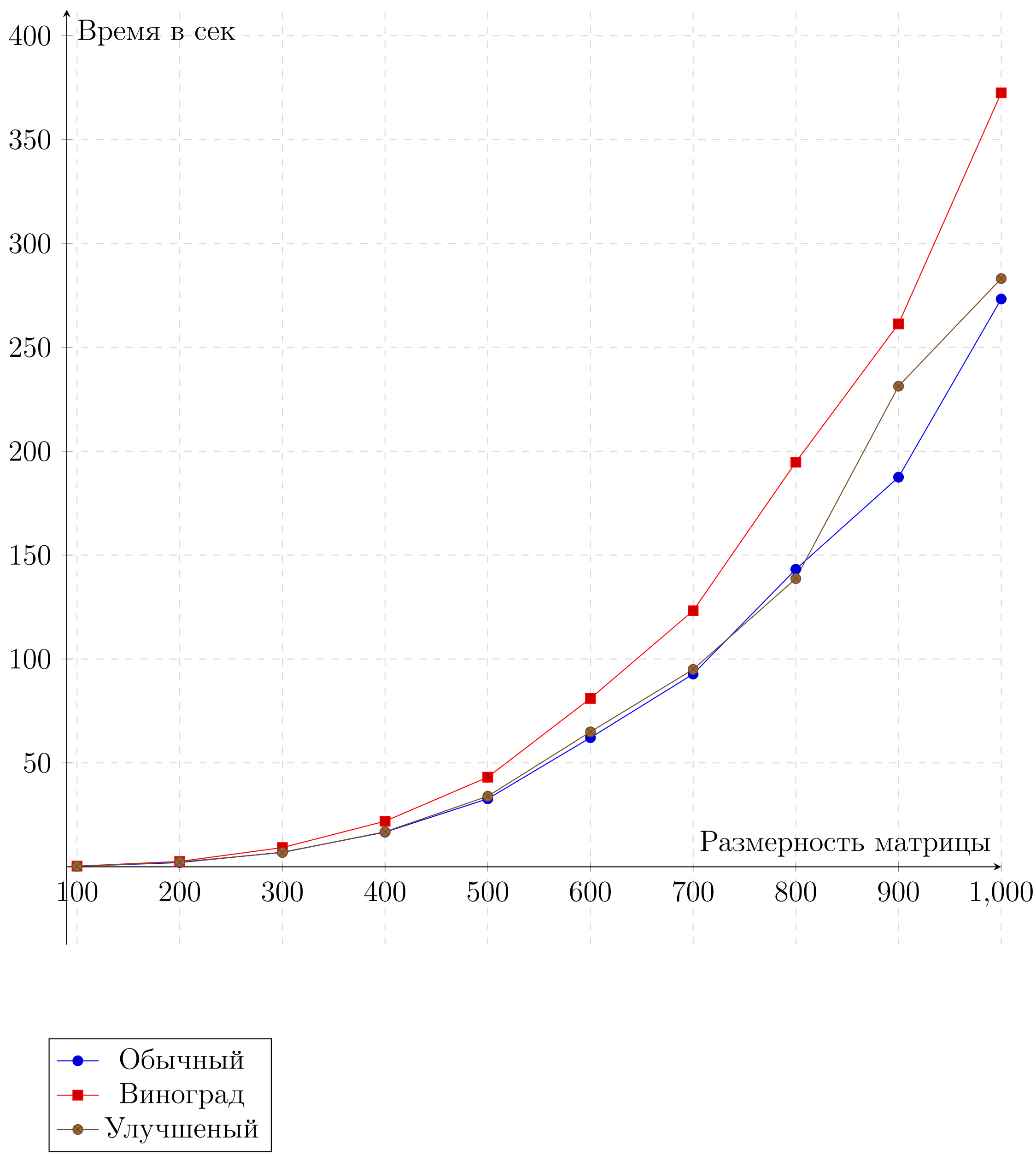
## 4.1 Примеры работы

Пример результата работы умножения матриц. Так как в данной реализации генерируются случайные значения, то для проверки результата использовалась библиотека Numpy. При одинаковых входных данных алгоритмы выдают одинаковый результат, который сравнивается с результатом умножния с помощью функции numpy.matmul(). Для вычисления используются матрицы с размерностью $A = N * N + 1$ и $B = N + 1 * N$

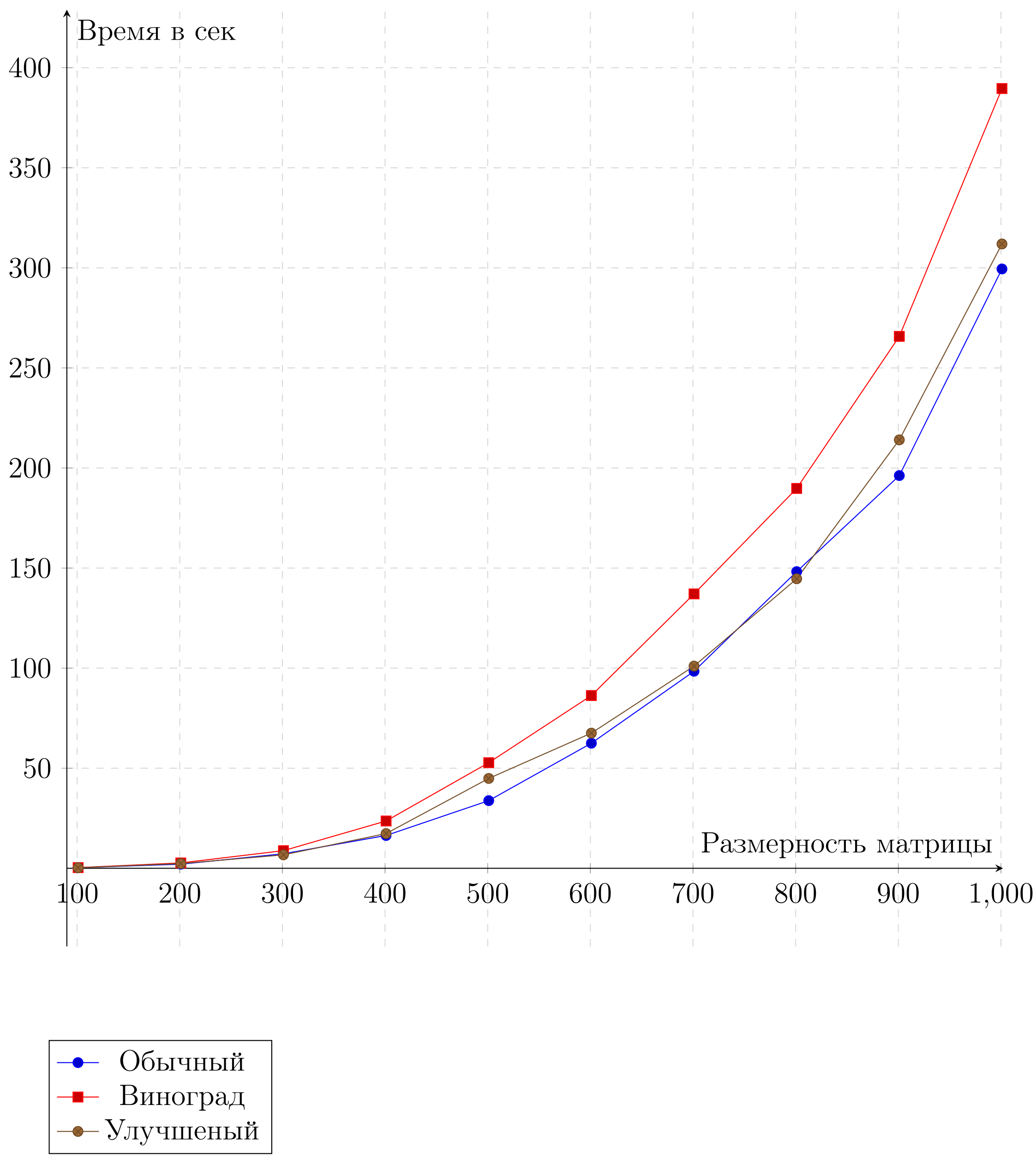
$$\begin{bmatrix} 12 & 14 & 20 \\ 24 & 14 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 8 & 15 \\ 14 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524 & 690 \\ 600 & 810 \end{bmatrix}$$

## 4.2 Сравнительный анализ

Сравнение алгоритмов стандартного умножения, алгоритма Винограда и улучшенного алгоритма Винограда. На графиках приведены замеры времени работы для матрицы четной и нечетной размерности. Первый график для лучшго случая - нечетной размерности, второй график для четной размерности. Каждый экперимент проводился два раза из-за большого времени работы алгоритма, результат - среднее арифметическое двух замеров времени.



Время в сек
400
350
300
250
200
150
100
50
Размерность матрицы
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1,000
Обычный
Виноград
Улучшеный



Время в сек
400
350
300
250
200
150
100
50
Размерность матрицы
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1,000
Обычный
Виноград
Улучшеный

## 4.3 Вывод

На малых размерностях исходной матрицы время работы стандартного и улучшенного алгоритма Винограда различаюся незначительно. Тогда как алгоритм Винограда всегда работает медленнее. На больших размерностях стандартный алгоритм умножения матриц работает быстрее. При размерности в 1000, разница между стандартным алгоритмом и улучшенным Винограда составляет 10 секунд, а обычный алгоритм Винограда работает на 100 секунд дольше.

# 5 Заключение

В данной лабораторной работе вычислены сложности алгоритмов для умножения матриц. Разработаны программы по этим алгоритмам, проведены тесты по времени, произведен сравнительный анализ алгоритмов. Для составления отчета использован Latex.