Relaksacja punktowa i globalna, nadrelaksacja *

Rozwiążemy równanie Poissona

$$\nabla^2 \phi = -\rho \tag{1}$$

w dwóch wymiarach na pudle $(i,j) \in [-50,50] \times [-50,50]$ z krokiem $\Delta x = \Delta y = 1$. Na brzegu kładziemy potencjał równy 0 (uziemione metalowe pudło). Gęstość ładunku jest równa : $\rho_{ij} = 1$ dla $(i,j) \in [-10,10] \times [-10:10]$ i 0 w pozostałych punktach siatki.

Na starcie iteracji przyjmiemy zerowy potencjał wszędzie. Zastosujemy przepis iteracyjny: w pętli po i oraz j wyliczymy nową wartość potencjału w punkcie (i,j)

$$\phi_{ij} := (1-\omega)\phi_{ij} + \omega \frac{\phi_{(i+1)j} + \phi_{(i-1)j} + \phi_{i(j+1)} + \phi_{i(j-1)} + \rho_{ij} dx^2}{4}. \tag{2}$$

Poniżej, przez 'jedną iterację' rozumieć będziemy pełen obieg pętli po i oraz j.

(**I**.) Wzór (2) odpowiada punktowej podrelaksacji, relaksacji (metoda Gaussa-Seidla) i nadrelaksacji dla odpowiednio $\omega < 1$, $\omega = 1$ oraz $\omega > 1$.

Przedyskutować *zbieżność funkcjonału*

$$a = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2 \right] - \rho \phi \right\} dx dy \tag{3}$$

w funkcji ω. Przy dyskretyzacji gradientu pod całką działania użyć symetrycznego ilorazu różnicowego pochodnej. Uznajemy że zbieżność została uzyskana jeśli a z iteracji na iterację przestaje się zmieniać w znaczący sposób. *Znaleźć optymalną wartość* ω, dla której zbieżność osiągana jest po najmniejszej liczbie

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2009/2010. bszafran@agh.edu.pl iteracji (30 punktów za udokumentowany rysunkami wybór parametu ω). Narysować wykres konturowy potencjału (20 punktów).

(**II.**) *Odwracamy równanie Poissona*: znamy potencjał i chcemy z niego wydobyć gęstość ładunku. Wyliczyć $\rho = -\nabla^2\phi$ wzdłuż osi y. Porównać z gęstością wprowadzoną do równania (2) (20 punktów).

(**III.**) Zbadać zbieżność *relaksacji globalnej*. Operujemy na dwóch tablicach (nowy i stary potencjał) i wykonujemy dwie pełne podwójne pętle po i oraz j. W pierwszej robimy

$$\phi'_{ij} := (1-\omega)\phi_{ij} + \omega\frac{\phi_{(i+1)j} + \phi_{(i-1)j} + \phi_{i(j+1)} + \phi_{i(j-1)} + \rho_{ij}dx^2}{4}, \tag{4}$$

a w drugiej

$$\phi_{ij} := \phi'_{ij}. \tag{5}$$

Dla $\omega = 1$ powyższy przepis to relaksacja Jakobiego. Przedyskutować zbieżność procesu iteracji globalnej w funkcji ω (dla jakich ω relaksacja globalna jest zbieżna? - za udokumentowany wykresem wniosek 20 pkt.). Znaleźć optymalne ω. Porównać tempo zbieżności relaksacji globalnej z relaksacją punktową (dla każdej z metod przyjąć optymalne ω (10 pkt)) .