

Relaksacja wielosiatkowa dla równania Laplace'a *

Rozwiązywać będziemy dwuwymiarowe równanie Laplace'a. Układ równań liniowych produkowany przez dyskretyzację pochodnych najwygodniej jest rozwiązać metodą iteracyjną. Niestety, zbieżność procesu iteracyjnego jest tym wolniejsza im gęstsza jest siatka. Szybkie rozwiązanie na gęstej siatce uzyskać można stosując strategię relaksacji wielosiatkowej. Najpierw rozwiązujemy równanie na rzadszej siatce, a następnie rozwiązanie przepisujemy na siatkę gęstszą jako punkt startowy do nowej iteracji. Procedurę powtarzamy, aż uzyskamy rozwiązanie na siatce docelowej.

Relaksację wielosiatkową przećwiczymy dla równania Laplace'a w dwóch wymiarach ($\nabla^2\Phi = 0$). Przyjmijmy warunki brzegowe dla potencjału $\Phi = x^2 - y^2$. Chcemy uzyskać rozwiązanie dla $(x, y) \in [-3.2, 3.2]$ z krokiem przestrzennym $\Delta x = \Delta y = 0.05$, na siatce 129×129 punktów.

Zadanie 1. Proszę rozwiązać równanie Laplace'a od razu na siatce docelowej. Używamy relaksacji punktowej (Seidla) [metoda Jakobiego to relaksacja globalna]. W każdej iteracji przemiatamy tablicę $\Phi(i, j)$ po i oraz j zmieniając potencjał wg. wzoru

$$\Phi(i, j) := [\Phi(i-1, j) + \Phi(i, j-1) + \Phi(i+1, j) + \Phi(i, j+1)]/4. \quad (1)$$

Gdy uzyskamy zbieżność energia pola elektrycznego związanego z potencjałem Φ

$$a = \frac{1}{2} \int_{-3.2}^{3.2} dx \int_{-3.2}^{3.2} dy \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2)$$

jest minimalna. Przepis siatkowy na tę energię jest następujący:

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2009/2010. bszafran@agh.edu.pl

$$a_k = \frac{1}{8} \sum_{i=1, j=1}^{129-k} \left[(\Phi(i+k, j) + \Phi(i+k, j+k) - \Phi(i, j) - \Phi(i, j+k))^2 + (\Phi(i, j+k) + \Phi(i+k, j+k) - \Phi(i, j) - \Phi(i+k, j))^2 \right]$$

z $k = 1$. Potencjał na starcie wstawiamy $\Phi = 0$. Narysować a w funkcji numeru iteracji (**25 pkt**) (dokładna wartość a wynosi około 559.24). Narysować rozkład potencjału po osiągnięciu zbieżności. (**25 pkt**)

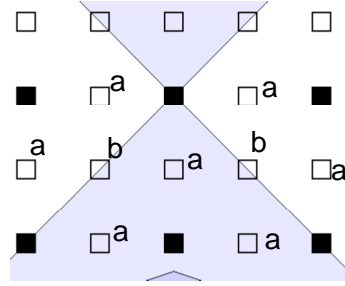


Fig. 1: Zagęszczanie siatki. Czarne kwadraty - punkty rzadkiej siatki, w których już wyliczono potencjał. Puste kwadraty - nowe punkty, w których należy wyznaczyć wartość potencjału dla wystartowania nowej iteracji. W punktach typu 'a' położonych między parą punktów siatki rzadkiej bierzemy średnią arytmetyczną z potencjału w dwóch sąsiednich **czarnych** punktach. W pozostałych nowych punktach (oznaczonych przez 'b') bierzemy średnią arytmetyczną z czterech najbliższych **czarnych** sąsiadów.

Zadanie 2 Relaksacja punktowa szybko wygładza szybkozmienne błędy, natomiast z błędami o wolnej modulacji przestrzennej radzi sobie najgorzej (jest najwolniej zbieżna). Wolnozmienny błąd wykluczamy rozwiązując równania najpierw na siatce rzadkiej. Wygodnie jest pracować od razu na macierzy $\Phi[129][129]$. Zaczniemy od rozwiązania przybliżonego na siatce 9×9 . Relaksację poprowadzimy wg. wzoru

$$\Phi(i, j) := (\Phi(i-k, j) + \Phi(i, j-k) + \Phi(i+k, j) + \Phi(i, j+k))/4, \quad (3)$$

gdzie przyjmiemy skok $k = 16$. Dla skoku siatki k wzór na energię pola dany jest przez wyrażenie na a_k dane powyżej (uwaga: gdy k jest większe od 1, w

sumowaniu po i oraz j wykonujemy kroki co k). Po osiągnięciu zbieżności zmniejszamy skok siatki dwukrotnie $k = k/2$. Zanim zaczniemy iterację z mniejszym skokiem musimy wyliczyć wartości początkowe Φ w nowych punktach siatki. W nowych punktach, które leżą między parą starych (patrz rysunek 1 - puste kwadraty między pełnymi) przyjmujemy średnią arytmetyczną z potencjału wyliczonego w tych punktach. Pozostałe nowe punkty leżą na środku kwadratów, w których narożnikach są punkty siatki rzadkiej. Dla tych nowych punktów na starcie bierzemy średnią arytmetyczną z narożników kwadratu (z czterech starych punktów sąsiadnych).

Procedurę powtarzamy aż do wyliczenia potencjału ze skokiem $k = 1$. Dla każdego k : narysować potencjał dla którego uzyskano zbieżność (**25 pkt**). Narysować energie pola w w funkcji numeru iteracji dla wszystkich k (**25 pkt**).