

# Aproksymacja

Plan wykładu

1. Problem aproksymacji, normy, rodzaje aproksymacji
2. Aproksymacja średniokwadratowa
  - a) w bazie jednomianów
  - b) w bazie wielomianów ortogonalnych
  - c) w bazie funkcji trygonometrycznych
  - d) w bazie funkcji sklepanych
3. Przybliżenia Padego

## Założenia

$f(x)$  – funkcja którą aproksymujemy  
 $f \in X$ ;  $X$  jest przestrzenią liniową

**Aproksymacja liniowa** funkcji  $f(x)$  (aproksymowanej - przybliżanej) polega na wyznaczeniu współczynników  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$$

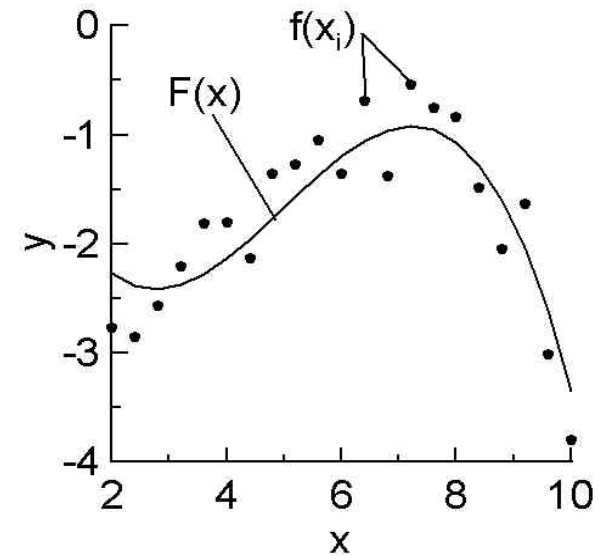
gdzie:  $\varphi_i(x)$  – są funkcjami bazowymi ( $m+1$ ) wymiarowej podprzestrzeni liniowej  $X_{m+1}$  ( $X_{m+1} \in X$ )

Żądamy aby funkcja  $F(x)$  spełniała warunek

$$\|f(x) - F(x)\| = \text{minimum}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

- 1) podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą –  $1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(kx), \cos(kx)$
- 2) podprzestrzeń wielomianów stopnia  $m$  z bazą –  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^m$  (lub wielomiany ortogonalne)
- 3) podprzestrzeń funkcji, których o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu – np.  $\exp(-ax^2+bx+c)$



Przykłady norm stosowanych w aproksymacji:

a) norma Czebyszewa

$$\|f(x) - F(x)\| = \sup_{[a,b]} |f(x) - F(x)|$$

b) norma  $L_2$

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

c) norma  $L_2$  z wagą

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gdzie:  $w(x)$  jest nieujemną ciągłą funkcją wagową

Jeśli funkcja  $f(x)$  jest określona na dyskretnym zbiorze punktów wówczas norma  $L_2$  z wagą przyjmuje postać:

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \sum_{i=0}^n w(x_i) [f(x_i) - F(x_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Aproksymacja średniokwadratowa.

Dla funkcji ciągłej  $f(x)$  określonej w przedziale  $[a,b]$  poszukujemy minimum całki:

$$\|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x) [F(x) - f(x)]^2 dx$$

lub sumy gdy funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze  $n+1$  punktów  
**(metoda najmniejszych kwadratów):**

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^n w(x_i) [F(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$w(x_i) \geq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

## Aproksymacja jednostajna.

Dla funkcji  $f(x)$  określonej w przedziale  $[a,b]$  poszukujemy  $F(x)$  dającej najmniejsze maksimum różnicy między nimi w całym przedziale:

$$\|F(x) - f(x)\| = \sup_{x \in [a,b]} |F(x) - f(x)|$$

### Tw. 1 (Weierstrassa)

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła na skończonym przedziale  $[a,b]$ , to dla każdego  $\varepsilon$  dodatniego można dobrać takie  $n$ , że jest możliwe utworzenie wielomianu  $P_n(x)$  stopnia  $n$  ( $n=n(\varepsilon)$ ), który spełnia nierówność:

$$\|f(x) - P_n(x)\| \leq \varepsilon$$

Z twierdzenia powyższego wynika, że **zawsze** można znaleźć wielomian o dowolnie małym odchyleniu od funkcji  $f(x)$ .

### Tw. 2 (Weierstrassa)

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}$  i okresową o okresie  $2\pi$  to dla każdego  $\varepsilon$  dodatniego istnieje wielomian trygonometryczny

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
$$n = n(\varepsilon)$$

spełniający dla wszystkich  $x$  nierówność

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

### Metoda aproksymacji średniokwadratowej.

Dysponując układem funkcji bazowych w przestrzeni  $X_n$ :

$$\varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, m$$

szukamy wielomianu  $F(x)$  będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji  $f(x)$  na zbiorze  $X=(x_j)$ :

$$F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$$

Dla  $F(x)$  liczymy normę  $L_2$

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) =$$
$$= \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right]^2$$
$$= \sum_{j=0}^n w(x_j) R_j^2$$

gdzie:  $R_j$  jest odchyleniem w punkcie  $x_j$

Szukamy minimum funkcji  $H$  (wielu zmiennych) ze względu na współczynniki  $a_0, a_1, \dots$

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Warunek ten generuje  $m+1$  równań liniowych z  $m+1$  niewiadomymi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_k} &= -2 \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_k(x_j) = 0 \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Powyższy układ równań zwany jest **układem normalnym**. Ponieważ funkcje bazowe są liniowo niezależne, istnieje więc dokładnie jedno rozwiązanie minimalizujące wartość  $H$ . Układ równań można zapisać w postaci macierzowej (**zakładamy  $w(x)=1$** ):

$$D^T D A = D^T f$$

$$D = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Uwaga:

- a) Macierz  $D$  może nie być kwadratowa np. w tzw. **regresji liniowej** baza jest dwuelementowa  $\{1, x\}$ , a węzłów może być dowolna ilość
- b)  $D^T D$  jest macierzą kwadratową i symetryczną o rozmiarach  $(m+1) \times (m+1)$

## Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Jako bazę przyjmujemy ciąg jednomianów

$$1, x, x^2, \dots, x^m$$

Warunek minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^n \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i x_j^i \right] x_j^k = 0$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

po zmianie kolejności sumowania

$$\sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k = \sum_{i=0}^m a_i \left( \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \right)$$

i wprowadzeniu oznaczeń

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \quad \rho_k = \sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k$$

otrzymujemy układ normalny:

$$\sum_{i=0}^m a_i g_{ik} = \rho_k \implies G^T A = \rho$$

Uwagi:

- a) Jeżeli  $m=n$  wówczas funkcja aproksymująca pokrywa się z wielomianem interpolującym
- b) Stopień wielomianu aproksymującego powinien być znacznie mniejszy od liczby węzłów  $x_k$ , aby „wygładzić” ewentualne błędy pomiarowe
- c) Dla  $m \geq 6$  macierz układu staje się źle uwarunkowana. Najprostszym remedium jest zastosowanie silniejszej arytmetyki

## Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

**Def.** Funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jeśli

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) g(x_i) = 0$$

a funkcje  $f$  i  $g$  spełniają warunki

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i)]^2 > 0 \quad \sum_{i=0}^n [g(x_i)]^2 > 0$$

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k$$

Oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i) > 0$$

Macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną

$$D^T D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

$$d_{jj} = \sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i)$$

Macierz układu jest dobrze uwarunkowana i układ posiada jedno rozwiązanie.

## Jak znaleźć wielomiany ortogonalne?

Zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

i wykonujemy przekształcenie

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \rightarrow q_i$$

Naszym zadaniem jest znalezienie ciągu wielomianów

$$\{F_i^{(n)}(q)\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \dots, F_m^{(n)}(q)$$

postaci

$$\begin{aligned} F_k^{(n)}(q) &= a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) \\ &+ \dots + a_k q(q-1) \cdots (q-k+1) \end{aligned}$$

spełniające warunek ortogonalności

$$\sum_{i=0}^n F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \iff j \neq k$$

Korzystamy z postaci wielomianu czynnika

$$q^{[k]} = q(q-1) \dots (q-k+1)$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \dots + a_k q^{[k]}$$

i dodatkowo normujemy wielomiany tzn. mają one postać

$$\widehat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \dots + b_k q^{[k]}$$

Szukane **wielomiany ortogonalne** są **wielomianami Grama**

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}$$

Mając zdefiniowaną bazę można znaleźć funkcję aproksymującą  $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)}(q) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)} \left( \frac{x-x_0}{h} \right), \quad m \leq n \end{aligned}$$

Ze współczynnikami

$$s_k = \sum_{q=0}^n [\widehat{F}_k^{(n)}(q)]^2 \quad c_k = \sum_{i=0}^n y_i \widehat{F}_k^{(n)}(x_i)$$

**Wielomiany ortogonalne dla punktów rozmieszczonych dowolnie** (nie równoodległych)

Kolejne wielomiany ortogonalne wyznaczamy rekurencyjnie tj. na podstawie znajomości postaci wielomianów niższych stopni:

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1}(x) &= (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j\varphi_{j-1}(x) \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

z warunkami

$$\varphi_0(x) = 1 \quad \varphi_{-1}(x) = 0$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i)}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \varphi_{j-1} \varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_{j-1}^2(x_i)}$$

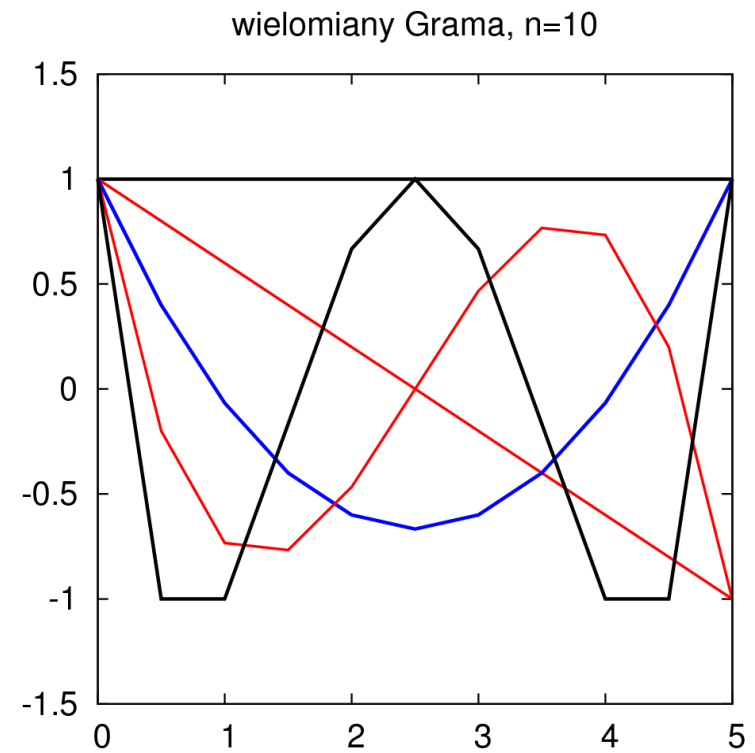


$$F(x) = \sum_{k=0}^m b_k \varphi_k(x)$$

$$b_k = \frac{C_k}{S_k}$$

$$C_k = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_k(x_i)$$

$$S_k = \sum_{i=0}^n \varphi_k^2(x_i)$$



## Aproksymacja średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych

Funkcje okresowe aproksymujemy przy użyciu funkcji trygonometrycznych, czyli w bazie

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots$$

Wielomian trygonometryczny o okresie  $2\pi$  ma postać:

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Jeśli funkcja  $f(x)$  jest określona na dyskretnym zbiorze równoodległych punktów, a liczba punktów jest parzysta i wynosi  $2L$ :

$$x_i = \frac{\pi i}{L}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2L - 1$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \sin(mx_i) \sin(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 0, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos(mx_i) \cos(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 2L, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos(mx_i) \sin(kx_i) = 0, \quad m, k - \text{dowolne}$$

Szukamy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

$$n < L$$

Współczynniki  $a_j$  oraz  $b_j$  wyznacza się z warunku minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{2L-1} [f(x_i) - F(x_i)]^2$$

co prowadzi do zależności na współczynniki

$$a_j = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i) \cos(jx_i)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i) \cos \frac{\pi i j}{L}$$

$$b_j = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i) \sin(jx_i)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i) \sin \frac{\pi i j}{L}$$

## Aproksymacja średnokwadratowa w bazie funkcji sklepanych

Zakładamy, że funkcję  $s(x)$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej funkcji bazowych w postaci funkcji sklepanych trzeciego stopnia (np. zdefiniowanych na wykładzie z interpolacji):

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \quad a \leq x \leq b$$

Szukamy minimum odchylenia kwadratowego:

$$I = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x) \right]^2 dx$$

licząc pochodne cząstkowe względem  $c_i$ :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$$

Dostajemy układ  $n+3$  równań z  $n+3$  niewiadomymi.

$$\sum_{i=-1}^{n+1} c_i \int_a^b \Phi_i^3(x) \Phi_j^3(x) dx = \int_a^b f(x) \Phi_j^3(x) dx$$
$$j = -1, 0, 1, \dots, n+1$$

Ze względu na liniową niezależność funkcji bazy układ ma jednoznaczne rozwiązanie dające minimum funkcji  $I$ .

$$\sum_{i=-1}^{n+1} a_{ij} c_i = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) \Phi_j^3(x) dx$$

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_a^b \Phi_i^3(x) \Phi_j^3(x) dx$$

Macierz układu jest macierzą symetryczną i wstęgową (pięcioprzekątniową).

$$Ac = \rho$$

W przypadku aproksymacji na dyskretnym zbiorze punktów  $(x_i)$ , gdzie:

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_1, \quad n_1 > n + 3$$

szukamy minimum wyrażenia:

$$J = \sum_{k=0}^{n_1} \left[ f(x_k) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x_k) \right]^2$$

Postępując jak w przypadku funkcji ciągłych otrzymamy układ równań:

$$\sum_{i=-1}^{n+1} b_{ij} c_i = \sum_{k=0}^{n_1} f(x_k) \Phi_j^3(x_k)$$

$$j = -1, 0, 1, \dots, n + 1$$

gdzie:

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{n_1} \Phi_i^3(x_k) \Phi_j^3(x_k)$$

Również w tym przypadku macierz współczynników układu jest symetryczna i ma postać wstęgową:

$$b_{ij} = 0 \Leftrightarrow |i - j| \geq 4$$

Nierzadko zależy nam na dopasowaniu do danych pomiarowych określonej zależności funkcyjnej (np. wynikającej z zasady działania danego urządzenia ).

Często stosuje się poniższe upraszczające formuły aproksymacyjne:

$$y = ax^b + c$$

$$y = e^{ax^2+bx+c}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^b e^{cx}$$

## Aproksymacja Padego

Funkcję aproksymowaną przybliżamy funkcją wymierną

$$R_{n,k}(x) = \frac{L_n(x)}{M_k(x)}$$

Gdzie:  $N=n+k$

Zaletą powyższego przybliżenia (w problemie aproksymacji jednostajnej) są mniejsze błędy niż aproksymacja wielomianem stopnia  $N$  (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina).

Zadanie polega na znalezieniu  $N+1$  współczynników  $L_N$  oraz  $M_k$

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$M_k(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$$

$$b_0 \neq 0$$

tak aby w  $x_0=0$  funkcje: aproksymowana i aproksymująca miały jak najwięcej równych pochodnych.

Rozwijamy  $f(x)$  w szereg Maclaurina ( $f(0)=0$ )

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Liczymy **błąd aproksymacji** (w celu otrzymania zależności współczynniki  $a_i$  oraz  $b_i$ )

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{L_n(x)}{M_k(x)} &= \\ &= \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^k b_i x^i} \end{aligned}$$

Wykorzystujemy warunki z pochodnymi oraz wartością funkcji w  $x=0$

$$f(0) = R_{n,k}(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x)|_{x=0} - R_{n,k}^{(m)}(x)|_{x=0} = 0$$

$$m = 1, 2, \dots, k+n$$

Dla  $f(0) = R_{n,k} = 0$

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k)(c_0 + c_1x + \dots) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$$

Dostajemy zależności

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$$

... ..

$$a_r = \sum_{j=0}^r c_{r-j}b_j, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

Wykorzystujemy założenie o równości pochodnych (do rzędu  $n+k+1$ ) co daje dodatkową zależność

$$\sum_{j=0}^k c_{n+k-s-j}b_j = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

Przykład.

Należy przybliżyć w otoczeniu  $x=0$  funkcję

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{8}x}{1 + 2x}}$$

Rozwinięcie w szereg Maclaurina do wyrazów stopnia 2 daje

$$f_M(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2$$

natomiast przybliżenie Padego  $R_{1,1}$

$$R_{1,1} = \frac{1 + \frac{7}{8}x}{1 + \frac{13}{8}x}$$

