Równania różniczkowe zwyczajne*

Równanie różniczkowe

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \tag{1}$$

rozwiążemy prostymi schematami różnicowymi

a) jawnym Eulera $u_n = u_{n-1} + dt f(t_{n-1}, u_{n-1})$

b) niejawnym Eulera $u_n = u_{n-1} + dt f(t_n, u_n)$

c) niejawnym trapezów $u_n = u_{n-1} + dt(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_n, u_n))/2$.

Zadanie 1. błąd globalny. Rozwiążmy równanie różniczkowe

$$\frac{du}{dt} = 2t \tag{2}$$

każdą z trzech metod dla $t \in (0, 100)$ z warunkiem początkowym $u(t = 0) = 0$ oraz krokiem czasowym $dt = 1$. Narysować błąd globalny (różnicę rozwiązania dokładnego $u(t) = t^2$ i numerycznego) w funkcji t dla każdej z metod. **1.1: 10 pkt**

Dla metody a) narysować $e(t = 10)$ w funkcji dt (użyć $dt = 2^{-4}, 2^{-3}, ..., 1$). **1.2: 5 pkt**

Zadanie 2. stabilność bezwzględna. Zajmiemy się równaniem

$$\frac{du}{dt} = -10(u - t^2) + 2t, \tag{3}$$

z warunkiem $u(t = 0) = 1$. Dokładne rozwiązanie to $u(t) = \exp(-10t) + t^2$. Rozwiązać równanie (3) metodą a). Porównać rozwiązanie numeryczne z dokładnym (narysować rozwiązanie numeryczne i dokładne oraz błąd globalny) dla $t \in (0, 10)$ z $dt = 0.01, 0.1, 0.2$, oraz 0.21. **2: 10 pkt**

---

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2007/2008. bszafran@agh.edu.pl

Zadanie 3. niejawna metoda Eulera. Rozwiążmy teraz równanie (3) metodą b). Jeden krok dany jest przepisem

$$u_n = u_{n-1} + \Big[-10(u_n - t_n^2) + 2t_n\Big]\,dt. \tag{4}$$

Przepis (4) to równanie liniowe na u_n, które potrafimy rozwiązać analitycznie (w praktyce rzadko się to udaje, nawet gdy znamy wzór na f)

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 10t_n^2 dt + 2t_n dt}{1 + 10dt} \tag{5}$$

Powtórzyć obliczenia z zadania 2 dla $dt = 0.01, 0.1, 0.2, 0.21, 1$. **3: 10 pkt**.

Zadanie 4. iteracja funkcjonalna. Pozostajemy przy niejawnej metodzie Eulera [równanie (4)]. Wyobraźmy sobie, że prawa strona równania (3) nie jest dana w postaci wzoru (a jest np. wynikiem bardziej złożonych rachunków lub pomiarów). Nie dojdziemy wtedy do równania (5). Postarajmy się rozwiązać (4) w sposób iteracyjny. Znamy t_n oraz u_{n-1}. Rozwiązanie na u_n zbudujemy w sposób iteracyjny

$$u_n^\mu = u_{n-1} + \Big[-10(u_n^{\mu-1} - t_n^2) + 2t_n\Big]\,dt, \tag{6}$$

gdzie μ numeruje iteracje. Przyjmiemy $u_1^0 = u_0 = 1$. Wstawmy $dt = 0.01$ Policzmy u_1 wg iteracji (6). Wydrukować kolejne wartości uzyskiwane dla u_1^μ aż do zbieżności (bierzemy pod uwagę 6 cyfr znaczących). **4.1: 5 pkt**. Powtórzyć rachunek dla $dt = 0.1$ oraz $dt = 0.11$ **4.2: 5pkt**.

Zadanie 5. iteracja Newtona dla niejawnego Eulera. Równanie niejawnego schematu Eulera dla pojedynczego kroku najlepiej jest rozwiązać jak równanie nieliniowe – metodą Newtona. Szukamy zera funkcji $F(u_n) = u_n - u_{n-1} - dtf(t_n, u_n)$. Metoda Newtona prowadzi do iteracji

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - dtf(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - dtf'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}. \tag{7}$$

Zastosować ją dla f z równania (3) dla wyliczenia pierwszej wartości przy $dt = 1$ ($u_1^0 = u_0 = 1$). Ile kroków potrzeba do zbieżności? **5: 10pkt**.

Zadanie 6. Równanie nieliniowe. Zmieniamy równanie: $f(t, u) = u(u-1)(u-2)$. Wstawić $u(0) = 1.2$ oraz $dt = 1$. Zbadać zbieżność iteracji Newtona dla pierwszego kroku czasowego (podać kolejne wartości u_1^μ). **6: 10pkt**.

Zadanie 7. iloraz różnicowy zamiast pochodnej po u. Powiedzmy, że nie znamy wzoru na f. Różniczkować musimy numerycznie. We wzorze (7) zastąpić pochodną po u przez iloraz różnicowy

$$f'_u(t,u) = \frac{f(t,u+du) - f(t,u-du)}{2du}, \tag{8}$$

z $du = 0.4$. Po tej modyfikacji powtórzyć zadanie 6. **7.1: 5pkt**. Czy iteracja z ilorazem różnicowym się zbiega do właściwej wartości. Czy iteracja trwa dłużej?. Narysować dokładną wartość pochodnej oraz wartość ilorazu różnicowego dla $u \in (1,2)$ **7.2: 5pkt**.

Zadanie 8. Napisać program, który rozwiązuje ogólne równanie różniczkowe zwyczajne posługując się metodą c) z iteracją Newtona wykorzystującą różniczkowanie numeryczne. Rozwiązać przy jego pomocy równanie (3) z $dt = 0.1$ dla $t \in (0,20)$. Narysować błąd globalny. **8: 25pkt**. Iteracja Newtona dla metody trapezów:

$$u_n^{\mu} = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \frac{dt}{2}\left(f(t_n, u_n^{\mu-1}) + f(t_{n-1}, u_{n-1})\right)}{1 - \frac{dt}{2} f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})} \tag{9}$$