

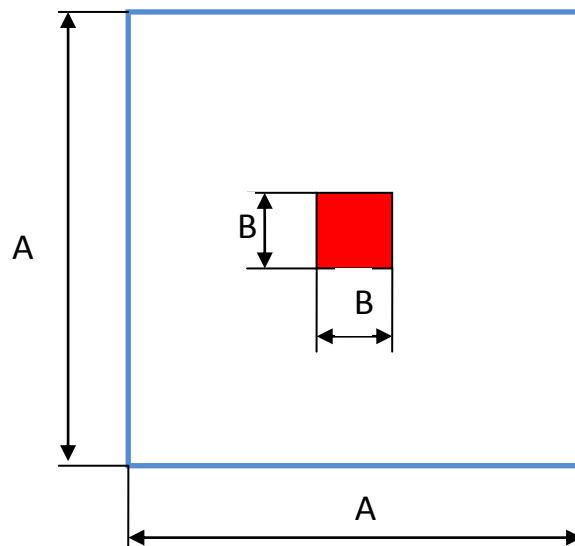
Ćwiczenie 2: Symulacja transportu ciepła

Cel: Celem ćwiczenia jest napisanie prostego programu komputerowego rozwiązującego paraboliczne równanie różniczkowe opisujące proces transportu ciepła dla konkretnego obiektu.

Program ćwiczenia:

1. Zapoznanie się z problemem obliczeniowym.
2. Dyskretyzacja równania różniczkowego.
3. Napisanie programu.
4. Testowanie stabilności numerycznej.
5. Obliczenie rozkładu przestrzennego rozkładu temperatury w płycie dla warunków brzegowych 1
6. Obliczenie przyrostu temperatury w płycie dla warunków brzegowych 2 i porównanie z teorią.

Modelowany obiekt:



Modelowanym obiektem jest kwadratowa blaszka wykonana z miedzi lub aluminium. W środku blaszki przyklejone jest źródło ciepła (czerwony kwadrat)

Rozmiary:

$A=6\text{cm}$ – rozmiar blaszki

$B=1\text{cm}$ – rozmiar grzałki

$h=1\text{mm}$ – grubość blaszki

Równanie do rozwiązania (zakładamy stały współczynnik przewodnictwa):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{c_w \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Warunki brzegowe 1:

Obszar grzałki utrzymuje w trakcie symulacji stałą temperaturę 100°C natomiast brzegi blaszki utrzymywane są w temperaturze 0°C . Realizujemy to przez zastosowanie warunku Dirichleta (ustalenie wartości funkcji na brzegach)

$$T(r_1, t) = 100^{\circ}\text{C}$$

$$T(r_2, t) = 0^{\circ}\text{C}$$

gdzie:

r_1 – obszar należący do czerwonego kwadratu

r_2 – obszar należący do brzegu niebieskiego kwadratu

Warunki brzegowe 2:

Zakładamy stałą moc grzałki wynoszącą 10W działającą przez czas 1s oraz przyjmujemy że brzegi blaszki są odizolowane termicznie od otoczenia.

Zatem dla każdego elementu który ma styczność z grzałką w każdym kroku czasowym przyrost temperatury wynikający z grzania wynosi

$$\Delta T = \frac{P \cdot dt}{c_w \cdot B^2 \cdot h \cdot \rho}$$

Na brzegach izolację od otoczenia realizujemy przez warunek typu von Neumanna (zerowanie pochodnej funkcji)

$$\frac{\partial T(r_2, t)}{\partial r} = 0$$

gdzie:

r_1 – obszar należący do czerwonego kwadratu

r_2 – obszar należący do brzegu niebieskiego kwadratu

P – moc grzałki

K – współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału

B^2 – powierzchnia obszaru grzejnego

c_w – ciepło właściwe materiału

h – grubość płytki

Warunek początkowy:

$$T(r, 0) = 20^{\circ}\text{C}$$

Aproksymacja pochodnych:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

Dyskretyzacja równania:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{K}{c_w \rho} \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right)$$
$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{K \Delta t}{c_w \rho (\Delta x)^2} [T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n] + \frac{K \Delta t}{c_w \rho (\Delta y)^2} [T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n]$$

Dane wejściowe:

dx - krok przestrzenny w kierunku x

dy - krok przestrzenny w kierunku y

dt - krok czasowy

K – współczynnik przewodzenia ciepła

Nt - ilość kroków czasowych

NX - ilość odcinków przestrzennych w kierunku x

NY - ilość odcinków przestrzennych w kierunku y

Przybliżone wartości parametrów fizycznych: (wg www.wikipedia.pl)

Aluminium:

Gęstość	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
Ciepło właściwe	$c_w = 900 \text{ J/kgK}$
Współczynnik przewodnictwa	$K = 237 \text{ W/mK}$

Miedź:

Gęstość	$\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$
Ciepło właściwe	$c_w = 380 \text{ J/kgK}$
Współczynnik przewodnictwa	$K = 401 \text{ W/mK}$

Przebieg ćwiczenia:

1. Napisanie programu rozwiązującego równanie transportu ciepła za pomocą opisanej powyżej metody
2. Obliczenie ewolucji czasowej rozkładu temperatury w blaszce dla zadanego warunku początkowego i warunków brzegowych 1 i dla wybranego materiału.
3. Testowanie stabilności numerycznej rozwiązania metodą 1.
4. Obliczenie ewolucji czasowej rozkładu temperatury oraz temperatury końcowej (prowadzimy symulacje do czasu ustalenia temperatury, przy czym źródło ciepła wyłączamy po 1s) w blaszce dla zadanego warunku początkowego i warunków brzegowych 2 dla materiału aluminium i miedzi.
5. Porównanie przyrostu temperatury z obliczeniem na podstawie bilansu ciepła.
6. Program może być napisany w dowolnym języku lub środowisku obliczeniowym (np. Matlab).
7. Listing programu zaopatrzony w niezbędne komentarze należy umieścić w sprawozdaniu.