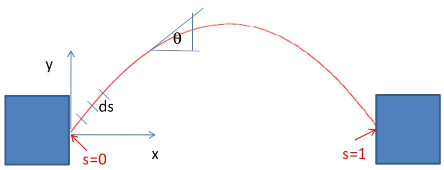
Nieliniowy problem dwupunktowy *

22 kwietnia 2010

Wstęp. Rozwiążemy nieliniowy dwupunktowy problem brzegowy drugiego rzędu stosując dwa różne podejścia na iteracji Newtona. Metody oraz wszystkie wyniki do uzyskania na tych ćwiczeniach są prezentowane na wykładzie.



Rysunek 1: Pręt o jednostkowej długości w szczękach imadła. s to współrzędna liczona wzdłuż długości pręta. Nachylenie pręta względem kierunku poziomego dane jest funkcją $\theta(s)$.

Problem. Elastyczny pręt o jednostkowej długości znajduje się w szczękach imadła [rysunek 1]. Jego kształt opisuje funkcja $\theta(s)$, gdzie s to współrzędna liczona wzdłuż długości drutu, a θ to kąt, który tworzy z osią x styczna do pręta w punkcie o współrzędnej s. W położeniu równowagi pręt jest wygięty tak, że

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -P\sin(\theta), \tag{1}$$

gdzie P to nacisk szczęk (przyjmujemy $P = 10$). Znamy kąt zaczepienia pręta w szczękach $\theta(s = 0) = -\theta(s = 1) = \beta = \pi/4$. Z warunków symetrii styczna do pręta na jego środku jest zorientowana poziomo $\theta(s = 1/2) = 0$.

Zadanie 1. *Metoda strzałów z iteracją Newtona.* Równanie (1) przedstawiamy w formie układu równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -P\sin(y_1), \end{aligned} \tag{2}$$

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2010/2011. bszafran@agh.edu.pl gdzie $y_1 = \theta$, $y_2 = \theta'$. Równanie (1) rozwiązujemy jak problem początkowy. Warunek początkowy na y_1 przepisujemy z lewego warunku brzegowego, to jest $y_1(0) = \beta$. Przyjmiemy $y_2(0) = \alpha$. Naszym zadaniem jest znalezienie takiej wartości α, przy której pręt na środku swojej długości jest równoległy do osi poziomej: $y_1(1/2) = 0$.

Scałkować równania (2) jawną metodą Eulera od $s = 0$ do połowy długości pręta $s = 1/2$ z krokiem $ds = 1/200$. Przyjąć $\alpha = 1$. Narysować $y_1(s)$ oraz kształt pręta we współrzędnych kartezjańskich. Kształt pręta rysujemy mapując wyniki z siatki położonej wzdłuż pręta do współrzędnych (x, y): wg. wzorów $x(s) = \int_0^s \cos(y_1(t))dt$, $y(s) = \int_0^s \sin(y_1(t))dt$ (**20 pkt**).

Wartość α, dla której $y_1(1/2) = 0$ znajdziemy iteracją Newtona

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(1/2;\alpha^{\mu})}{z_1(1/2;\alpha^{\mu})}, \tag{3}$$

gdzie μ to numer iteracji,

$$z_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}, \tag{4}$$

a przez $y_1(s;\alpha)$ rozumiemy kształt pręta uzyskany przy warunku brzegowym $y_2(0) = \alpha$.

Wartość mianownika ułamka ze wzoru (3) uzyskamy różniczując problem (2) względem α co, daje

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2(s) \\ z_2' &= -P\cos(y_1(s))z_1(s), \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $z_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \alpha}$, z warunkami początkowymi $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 1$.

W iteracji pierwszej ($\mu = 1$) przyjmujemy $\alpha^1 = 1$. Przebieg pojedynczej iteracji jest następujący. a) Rozwiązujemy problem początkowy (2) od $s = 0$ do $s = 1/2$. Ostatnia wartość, tj. $y_1(1/2;\alpha^{\mu})$ daje nam licznik w równaniu (3), oraz $y_1(s)$, które wykorzystamy w równaniu (5). b) Rozwiązujemy problem (5) od $s = 0$ do $s = 1/2$. $z_1(1/2;\alpha^{\mu})$ daje nam mianownik do równania (3). c) Poprawiamy wartość α wg. wzoru (3). d) Iteracje kończymy jeśli $\alpha^{\mu+1} \simeq \alpha^{\mu}$.

Wypisać α oraz y_1 w kolejnych iteracjach (**20 pkt**). Narysować kształt pręta, jaki dostajemy po uzyskaniu zbieżności (**20 pkt**).

Zadanie 2. *Metoda różnic skończonych dla problemu nieliniowego.* Dyskretyzacja drugiej pochodnej w równaniu (1) daje układ równań

$$F_i = \theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1} + \Delta s^2 P \sin(\theta_i) = 0, \tag{6}$$

dla $i = 1, \ldots, 99$, gdzie $\theta_i = \theta(i \times ds)$.

Kształt pręta znajdziemy rozwiązując układ równań (6) iteracją Newtona.

$$\mathbf{J}\overrightarrow{d\theta} = -\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\theta_{\mu}}), \tag{7}$$

gdzie $\overrightarrow{\theta_\mu} = \begin{pmatrix} \theta_1^\mu \\ \theta_2^\mu \\ \vdots \\ \theta_{99}^\mu \end{pmatrix}$, a $\overrightarrow{d\theta}$ jest poszukiwanym wektorem poprawek. Po jego znalezieniu poprawiamy rozwiązanie

$$\overrightarrow{\theta}_{\mu+1} = \overrightarrow{\theta}_\mu + \overrightarrow{d\theta}. \tag{8}$$

Elementy macierzy Jakobiego dane są przez $\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$. Macierz $\mathbf{J}$ jest trójprzekątniowa: $J_{i,i} = -2 + P\Delta s^2 \cos(\theta_i)$, $J_{i,i\pm1} = 1$. Uwaga: wektory $\overrightarrow{F}$ oraz $\overrightarrow{d\theta}$ mają 99 składowych, macierz $\mathbf{J}$ jest kwadratowa o rozmiarze 99. Warunki brzegowe zadajemy w punktach o numerach: zero oraz sto: $\theta_0 = \pi/4$ oraz $\theta_{100} = 0$. Równanie (8) zmienia wyłącznie wartości θ_i dla $i = 1, 2, \ldots 99$ – warunków brzegowych nie zmieniamy w czasie iteracji.

Problem rozwiązujemy w sposób następujący: a) zakładamy początkowy kształt pręta. b) liczymy $\mathbf{J}$ oraz prawą stronę (7). c) rozwiązujemy (7) i poprawiamy $\overrightarrow{\theta}$. d) kończymy iterację, jeśli $|d\overrightarrow{\theta}| \simeq 0$.

Wystartować iterację od a) wartości losowych, od b) $\theta_i = \pi/4 - \pi/2 \times ds \times i$. Narysować kształty pręta uzyskiwane w kolejnych iteracjach aż do osiągnięcia zbieżności **40 pkt**.