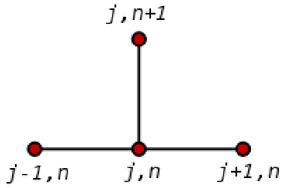
Ćwiczenie 4: Model Taylora – metoda jawna

Cel: Celem ćwiczenia jest napisanie prostego programu komputerowego rozwiązującego adwekcyjno dyspersyjne równanie transportu (model Taylora) opisującego proces transportu znacznika w rzece. Do rozwiązania wykorzystana będzie jawna metoda QUICKEST. Metody jawne pozwalają na wyliczenie wartości szukanej funkcji w n+1 kroku czasowym na podstawie n-ego kroku.



Program ćwiczenia:

1. Zapoznanie się z problemem obliczeniowym.
2. Zapoznanie się z metoda QUICKEST.
3. Napisanie programu.
4. Testowanie różnych wariantów warunków brzegowych.
5. Obliczenie rozkładu przestrzennego znacznika konserwatywnego w rzece dla różnych warunków początkowych.

Równanie do rozwiązania:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

Modelowany obiekt fizyczny:

Prostoliniowy odcinek kanału o następujących parametrach:

- długość	100m
- szerokość	5m
- głębokość	1m
- średnia prędkość przepływu	0.1m/s
- współczynnik dyspersji	0.01m^2/s
- położenie punktu iniekcji	10m
- położenie punktu pomiarowego	90m
- ilość wrzuconego znacznika	1kg

Warunki brzegowe:

- warunek Dirichleta

$$c(0,t) = 0$$
$$c(L,t) = 0$$

- warunek von Neumanna

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(L,t) = 0$$

Warunek początkowy:

$$c(x,0) = f(x)$$

$C_a = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$- adwekcyjna liczba Couranta

$C_d = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$- dyfuzyjna liczba Couranta

Dane wejściowe:

dx - krok przestrzenny
dt - krok czasowy
D - stała dyspersji
U – współczynnik adwekcji
nt - ilość kroków czasowych
nx - ilość odcinków przestrzennych
f(x) – funkcji wejścia (rozpatrzyć funkcję impulsową i f. prostokątną)

Wzór iteracyjny (metoda QUICKEST):

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \left[C_d(1-C_a) - \frac{C_a}{6}(C_a^2 - 3C_a + 2)\right]c_{j+1}^n - \left[C_d(2-3C_a) - \frac{C_a}{2}(C_a^2 - 2C_a - 1)\right]c_j^n + \left[C_d(1-3C_a) - \frac{C_a}{2}(C_a^2 - C_a - 2)\right]c_{j-1}^n + \left[C_d C_a + \frac{C_a}{6}(C_a^2 - 1)\right]c_{j-2}^n$$

Przebieg ćwiczenia:

1. Napisanie programu rozwiązującego równanie Taylora metodą QUICKEST.
2. Obliczenie ewolucji czasowej rozkładu stężenia znacznika w rzece dla warunku początkowego i różnych wariantów warunków brzegowych
3. Porównanie wyników obliczeń z rozwiązaniem teoretycznym.
4. Sprawdzenie prawa zachowania masy (czy całkowita masa znacznika w systemie nie ulega zmianie w czasie)
5. Program może być napisany w dowolnym języku lub środowisku obliczeniowym (np. Matlab).
6. Listing programu zaopatrzony w niezbędne komentarze należy umieścić w sprawozdaniu.
7. Sprawozdanie należy zakończyć wnioskami

Literatura:

Szymkiewicz R. Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach I kanałach. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equations

http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem