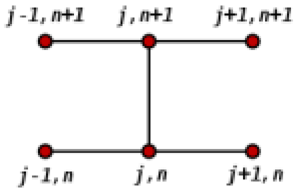
Ćwiczenie 5: Model Taylora – metoda niejawna

Cel: Celem ćwiczenia jest napisanie prostego programu komputerowego rozwiązującego adwekcyjno dyspersyjne równanie transportu (model Taylora) opisującego proces transportu znacznika w rzece. Do rozwiązania wykorzystana będzie metoda Cranka-Nicolsona. Należy ona do rodziny metod niejawnych, ktróre pozwalają na wyliczenie wartości szukanej funkcji w n+1 kroku czasowym na podstawie n-ego oraz n+1 kroku. Widać więc, że rozwiązanie jest uwikłane i w każdym kroku czasowym należy rozwiązać równanie macierzowe.



Program ćwiczenia:

1. Zapoznanie się z problemem obliczeniowym.
2. Zapoznanie się z metodą Cranka-Nicolsona.
3. Napisanie programu.
4. Testowanie różnych wariantów konfiguracji kroków czasowych i przestrzennych.
5. Obliczenie rozkładu przestrzennego znacznika konserwatywnego w rzece i porównanie z wynikami uzyskanymi metoda QUICKEST.

Równanie do rozwiązania:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

Modelowany obiekt fizyczny:

Prostoliniowy odcinek kanału o następujących parametrach:

-jak w poprzednim ćwiczeniu

Warunki brzegowe:

- warunek Dirichleta

$$c(0,t) = 0$$

- warunek von Neumanna

$$\frac{\partial c}{\partial x}(L,t) = 0$$

Warunek początkowy:

$$c(x,0) = f(x)$$

$C_a = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$- adwekcyjna liczba Couranta

$C_d = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$- dyfuzyjna liczba Couranta

Dane wejściowe:

-jak w poprzednim ćwiczeniu

Wyprowadzenie metody Cranka-Nicolsona:

Istota metody polega na zastosowaniu średniej arytmetycznej z aproksymacji pochodnych przestrzennych w n i n+1 kroku czasowym. Wtedy równanie przybiera postać:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{dt} = D \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1}}{dx^2} + \frac{c_{i-1}^n - 2 \cdot c_i^n + c_{i+1}^n}{dx^2} \right) - U \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot dx} + \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2 \cdot dx} \right)$$

Po separacji kroku n+1 z lewej a n z prawej strony równania otrzymujemy:

$$c_i^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{D \cdot dt}{dx^2} \cdot \left(c_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{U \cdot dt}{dx} \cdot \left(c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1} \right) = c_i^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{D \cdot dt}{dx^2} \cdot \left(c_{i-1}^n - 2 \cdot c_i^n + c_{i+1}^n \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{U \cdot dt}{dx} \cdot \left(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n \right)$$

po uporządkowaniu i podstawieniu odpowiednich liczb Couranta:

$$\left(-\frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} \right) c_{i-1}^{n+1} + (1 + C_d) c_i^{n+1} + \left(-\frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} \right) c_{i+1}^{n+1} = \left(\frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} \right) c_{i-1}^n + (1 - C_d) c_i^n + \left(\frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} \right) c_{i+1}^n$$

A to z kolei można przedstawić w postaci macierzowej:

$AA \bullet \bar{c}^{n+1} = BB \bullet \bar{c}^n$ i rozwiązać: $\bar{c}^{n+1} = AA^{-1} \bullet BB \bullet \bar{c}^n$

gdzie macierze AA i BB mają postać:

$$AA = \begin{bmatrix} 1 + C_d & -\frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} & 1 + C_d & -\frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} & 1 + C_d & -\frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} & 1 + C_d \end{bmatrix} \qquad BB = \begin{bmatrix} 1 - C_d & \frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} & 0 & 0 \\ \frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} & 1 - C_d & \frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} & 0 \\ 0 & \frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} & 1 - C_d & \frac{C_d}{2} - \frac{C_a}{4} \\ 0 & 0 & \frac{C_d}{2} + \frac{C_a}{4} & 1 - C_d \end{bmatrix}$$

Iloczyn AA^{-1}*BB podstawiamy pod zmienną AB

Lewostronny warunek brzegowy realizujemy podstawiając w pierwszym wierszu macierzy AB zera (uzyskamy dzięki temu zerowanie pierwszego wyrazu wektora c^{n+1}),
natomiast prawostronny warunek realizujemy podstawiając za ostatni wiersz macierzy AB zera i jedynkę w przedostatniej kolumnie (spowoduje to przepisywanie do ostatniego wyrazu wektora c^{n+1} wartości elementu przedostatniego).

Przebieg ćwiczenia:

1. Napisanie programu rozwiązującego równanie Taylora
2. Obliczenie ewolucji czasowej rozkładu stężenia znacznika w rzece dla warunku początkowego i zdefiniowanych warunków brzegowych.
3. Porównanie wyników obliczeń z rozwiązaniem metoda QUICKEST.
4. Sprawdzenie prawa zachowania masy (czy całkowita masa znacznika w systemie nie ulega zmianie w czasie)
5. Program może być napisany w dowolnym języku lub środowisku obliczeniowym (np. Matlab).
6. Listing programu zaopatrzony w niezbędne komentarze należy umieścić w sprawozdaniu.
7. Sprawozdanie należy zakończyć wnioskami

Literatura:

Szymkiewicz R. Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach I kanałach. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method

http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equations

http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem