

Rozwiązywanie algebraicznych układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Plan wykładu:

Metody:

1. Jacobiego
2. Gaussa-Seidla
3. nadrelaksacji (SOR)

Szukamy rozwiązania układu n równań liniowych

$$Ax = b, \quad A \in R^{n \times n}, \quad x, b \in R^n$$

Dlaczego używamy metod iteracyjnych?

Przykład

$N=50000$ - liczba równań w układzie
 $fl_2 = 8$ bajtów/liczbę - podwójna precyzja

a) Ograniczenia pamięci

$P_d < N^2 fl_2 = 20 \text{ GB}$ (10GB) - zaalokowana pamięć w komputerze

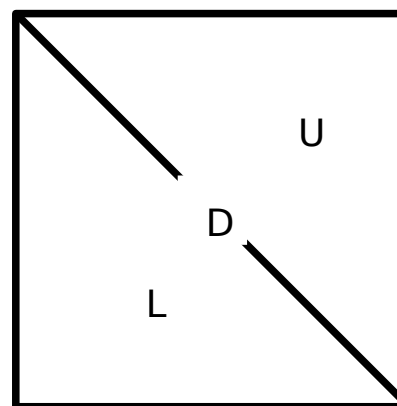
Ale jeśli układ jest np. pięcioprzekątniowy to do zapisu macierzy A (w postaci wektorowej) potrzebujemy tylko
 $P_i < 5N fl_2 = 2 \text{ MB}$ pamięci

b) większa wydajność dla macierzy rzadkich (liczba elementów macierzy różnych od 0 jest rzędu N) w stosunku do metod bezpośrednich

Macierze takie często pojawiają się w obliczeniach naukowych i inżynierskich (FEM, PDE)

Oznaczmy A jako sumę 3 macierzy

$$A = L + D + U$$



Metoda Jacobiego

$$x = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$$

$$b = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

Dla dowolnie wybranego przybliżenia rozwiązania x_0 chcemy tak przekształcać iteracyjnie wektor $x^{(k)}$ aby doprowadzić do znikania składowych wektora reszt w k iteracjach

$$(b - Ax^{(k)})_i = 0$$

co można zapisać

$$\beta_i - \sum_j^n a_{ij} \xi_j^{(k)} = 0$$

$$a_{ii}\xi_i^{(k)} = \beta_i - \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^n a_{ij}\xi_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Składowe wektora reszt znikają w kolejnych iteracjach, więc możemy zapisać

$$\xi_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\beta_i - \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^n a_{ij}\xi_j^{(k)} \right)$$

oraz dla całego wektora

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

W metodzie Jacobiego obliczamy kolejno wszystkie składowe nowego przybliżenia wektora rozwiązań.

Metoda Gaussa-Seidla

Różni się od metody Jacobiego tym, że obliczone już składniki

$$\xi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, j$$

wykorzystywane są w obliczeniach składników $j+1, j+2, \dots, n$.

$$\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\xi_i^{(k+1)}$$

$$-a_{ii}\xi_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\xi_j^{(k)} = 0$$

$$\begin{aligned} \xi_i^{(k+1)} &= \\ &= \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\xi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\xi_j^{(k)} + \beta_i \right) \end{aligned}$$

$$b - Lx^{(k+1)} - Dx^{(k+1)} - Ux^{(k)} = 0$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$$

Metody Jacobiego i GS można zapisać ogólnie w postaci

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b = (M - A)x^{(k)} + b$$

$$A = M - N$$

metoda Jacobiego: $M = D$

metoda Gaussa-Seidela: $M = D + L$

Metoda relaksacji

$$b - Lx^{(k+1)} - Dx^{(k+1)} - Ux^{(k)} = 0$$

$$A = L + D + U$$

$$\omega A = \omega D + \omega L + \omega U$$

$$\omega A = (D + \omega L) + (\omega U - (1 - \omega)D)$$

Metoda nadrelaksacji (SOR)

(Successive Over Relaxation)

$$\xi_i^{(k+1)} = \omega \xi_i^{(k+1)GS} + (1 - \omega) \xi_i^{(k)}$$

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = [-\omega U + (1 - \omega)D]x_k + \omega b$$

$$\omega \in (1, 2)$$

Macierze iterujące i ich przekształcenia (preconditioning)

Ogólny schemat iteracyjny

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$$

$$G_J(A) = I - D^{-1}A$$

$$G_{GS}(A) = I - (D + L)^{-1}A$$

przy podziale macierzy A

$$A = M - N$$

definiujemy **iterację do ustalonego punktu** w jako

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Z porównania obu zapisów dostajemy

$$G = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I - M^{-1}A$$

$$f = M^{-1}b$$

Proces iteracyjny

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$$

możemy potraktować także jako problem rozwiązania układu

$$(I - G)x = f$$

co dla $G = I - M^{-1}A$ daje układ równań

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

Układ ten ma identyczne rozwiązanie jak układ pierwotny. M jest macierzą przekształcenia (preconditioner). Dla metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i SOR macierz ta ma postać:

$$M_J = D$$

$$M_{GS} = D + L$$

$$M_{SOR} = \frac{1}{\omega}(D + \omega L)$$

Zbieżność metod iteracyjnych

Dla macierzy $A \in R^{n \times n}$

definiujemy liczbę $\rho(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|$

którą nazywamy **promieniem spektralnym macierzy**.

Dla dowolnej macierzy kwadratowej zgodnej z normą wektorów prawdziwa jest nierówność

$$|\lambda_i| \leq \|A\|, \quad \lambda_i \in Z$$

Lemat

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\|A\|_p} \|A\|_p \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Tw. Dla każdego wektora $x \in R^n$ elementy ciągu

$$Ax, A^2x, \dots, A^i x, \dots$$

dążą do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\rho(A) < 1$

Dowód

$$\varepsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2}$$

$$\|A\|_p \leq \frac{1 + \rho(A)}{2} < 1$$

$$\|A^n x\|_p \leq \|A\|_p^n \|x\|_p \rightarrow 0$$

$$A^n x \rightarrow 0$$

Tw. Ciąg wektorów

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$$

którego elementy wyznaczamy według wzoru

$$x^{(i+1)} = Gx^{(i)} + f, \quad i = 0, 1, \dots$$

jest zbieżny do jedyne punktu granicznego wtedy i tylko wtedy gdy

$$\rho(M) < 1$$

Dowód

$$x^{(i+1)} = Gx^{(i)} + f = G(Gx^{(i-1)} + f) + f = \dots$$

$$= G^{i+1}x^{(0)} + (G^i f + G^{i-1} f + \dots + f)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G^{i+1}x^{(0)} \rightarrow 0$$

$$\|f + G^1 f + \dots + G^i f + \dots\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|f\|_p \|G\|_p^i = \frac{\|f\|_p}{1 - \|G\|_p}$$

Zbieżność w metodzie SOR

$$G_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}[-\omega U + (1 - \omega)D]$$

$$\begin{aligned} \det(G_{SOR}) &= \det((D + \omega L)^{-1}) \\ &\times \det(-\omega U + (1 - \omega)D) \end{aligned}$$

$$\det((D + \omega L)^{-1}) = \frac{1}{\det(D + \omega L)} = \frac{1}{\det(D)}$$

$$\begin{aligned} \det(-\omega U + (1 - \omega)D) &= \det((1 - \omega)D) \\ &= (1 - \omega)^n \det(D) \end{aligned}$$

$$\det(G_{SOR}) = (1 - \omega)^n$$

$$\det(G_{SOR}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$|1 - \omega| \leq \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i = \rho(G_{SOR}) < 1$$

$$0 < \omega < 2$$

Jeśli macierz układu jest symetryczna, dodatniookreślona i nieosobliwa to procedura iteracyjna jest zawsze zbieżna dla

$$0 < \omega < 2$$