Interpolacja

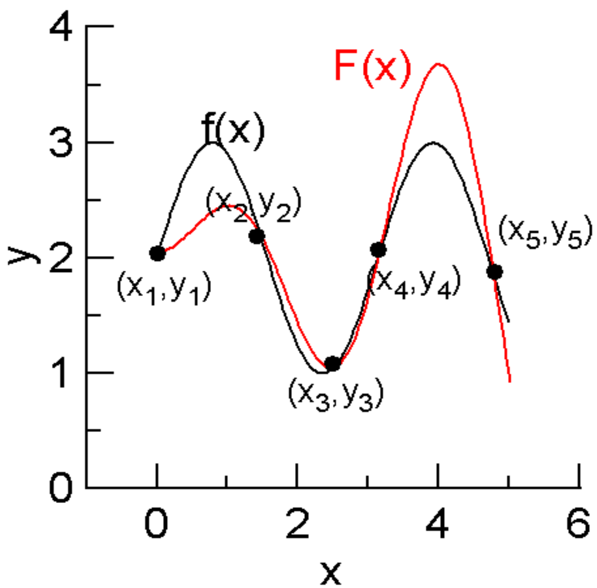
Plan wykładu:

1. Idea interpolacji wielomianowej
2. Interpolacja Lagrange'a
3. Dobór węzłów interpolacji - wielomiany Czebyszewa
4. Ilorazy różnicowe, różnice progresywne , różnice wsteczne
5. Interpolacja Newtona
6. Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale [a,b] danych jest n+1 różnych punktów $x_0,x_1,x_2,...,x_n$
(węzły interpolacji) oraz wartości funkcji y=f(x) w tych punktach:

$$f(x_0) = y_0,\ \ f(x_1) = y_1,\ \ \cdots, f(x_n) = y_n$$

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości. Problem interpolacji sprowadza się do znalezienia **funkcji interpolującej F(x)**, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja y=f(x) – **funkcja interpolowana** (jej postać funkcyjna może nie być nawet znana).



Do czego służy interpolacja?

1) Dla stablicowanych wartości funkcji i określonych położeń węzłów szukamy przybliżenia funkcji pomiędzy węzłami
   a) zagęszczanie tablic
   b) efektywniejsze (szybsze) rozwiązywanie równań nieliniowych
2) Interpolacja wielomianowa pozwala lokalnie przybliżyć dowolną funkcję (np. wyrażającą się skomplikowaną formułą) wielomianem – ułatwia to analizę rozwiązań w modelach fizycznych
3) wykorzystuje się w całkowaniu numerycznym
4) w dwóch i trzech wymiarach do modelowania powierzchnii

Interpolację najczęściej przeprowadza się przy pomocy:

a) wielomianów algebraicznych (nieortogonalne lub ortogonalne)
b) wielomianów trygonometrycznych
c) funkcji sklejanych

Powyższe funkcje stanowią **bazy funkcyjne** – **funkcja interpolująca** jest kombinacją elementów bazowych.

Idea interpolacji wielomianowej
(mało efektywna)

Tw.
Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Dowód.
n+1 węzłów rozmieszczonych jest w dowolny sposób w [a,b]. Szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Podstawiając do $W_n(x)$ kolejno $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ dostajemy układ n+1 równań na współczynniki a_i:

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & y_n \end{array}$$

Macierz współczynników układu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem Vandermode'a

$$D = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij}$$

D_{ij} – wyznaczniki macierzy dopełnień algebraicznych

Interpolacja Lagrange'a

Korzystamy z poprzedniego wyniku, tj. podstawiamy

$$a_i = \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij}$$

do

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

i grupujemy składniki przy y_i

$$W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + y_1\Phi_1(x) + \cdots + y_n\Phi_n(x)$$

funkcje $\Phi_i(x)$ są wielomianami co najwyżej stopnia n.
Zauważmy, że dla dowolnego x_i zachodzi zależność:

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \ldots + y_n\Phi_n(x_i) = y_i$$

skąd wynika warunek

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j \neq i \\ 1 & \text{gdy } j = i \end{cases}$$

Wniosek: aby okreslić funkcje $\Phi_j(x)$ należy znaleźć taki wielomian, który zeruje się w węzłach $x_i \neq x_j$ oraz przyjmuje wartość 1 w węźle x_j. Taką funkcją mógłby być np. wielomian:

$$\Phi_j(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

który w x_j przyjmuje wartość 1:

$$1 = \lambda(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)$$

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

Szukany wielomian przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
W_n(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} \\
&+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \\
&+ \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x)\cdots(x_n-x_{n-1})} \\
&= \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}
\end{aligned}$$

lub krócej, oznaczając

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a ma postać

$$\boxed{W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\left\{\frac{\omega_n(x)}{x-x_j}\right\}\Big|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}}$$

Przykład: dla węzłów x=-2,1,2,4 w których funkcja przyjmuje wartości 3,1,-3,8 znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

$$\begin{aligned} W_3(x) &= 3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 1\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\ &- 3\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + 8\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 5 \end{aligned}$$

Schemat iteracyjny Aitkena (metoda łatwa do zaprogramowania na komputerze) przy obliczaniu **wartości wielomianu** dla x∈ $[x_0,x_n]$ (nie wyznaczamy postaci wielomianu)

$$W_{i,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_j & x_j - x \end{vmatrix}}{x_j - x_i}$$

$W_{i,j}(x)$ wielomian stopnia 1

stopień wielomianu=ilość wskaźników -1

$$W_{i,j,k}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{i,j}(x) & x_j - x \\ W_{i,k}(x) & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - x_j}$$

$W_{i,j,k}(x)$ wielomian stopnia 2

$$W_{1,2,\cdots,k,m}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{1,2,\cdots,k-1,k}(x) & x_k - x \\ W_{1,2,\cdots,k-1,m}(x) & x_m - x \end{vmatrix}}{x_m - x_k}$$

Szukany wielomian interpolacyjny

$$
\left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right|
\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\left|
\begin{array}{c} W_{1,2} \\ W_{1,3} \\ W_{1,4} \\ \vdots \\ W_{1,n} \end{array}\right|
\begin{array}{c} W_{1,2,3} \\ W_{1,2,4} \\ \vdots \\ W_{1,2,n} \end{array}\left|
\begin{array}{c} W_{1,2,3,4} \\ \vdots \\ W_{1,2,3,n} \end{array}\right.
\left|\ \ldots \right| W_{1,2,3,\ldots,n} \left.\right|
$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Interesuje nas rożnica pomiędzy wartościami funkcji interpolowanej i interpolującej w pewnym punkcie $x \in [x_0, x_n]$ nie będącym węzłem:

$$\varepsilon(x) = f(x) - W_n(x)$$

Zakładamy, że funkcja f(x) jest n+1 krotnie różniczkowalna.
Wprowadzamy funkcję pomocniczą:

$$\varphi(u) = f(u) - W_n(u) + K(u - x_0)(u - x_1)\cdots(u - x_n)$$

(K -stała), która spełnia warunek interpolacji

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$$

Wartość współczynnika K dobieramy tak aby pierwiastkiem funkcji φ(u) był punkt $\bar{x}$, wówczas możemy zapisać warunek na stałą K

$$K = \frac{f(\bar{x}) - W_n(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n)} = \frac{f(\bar{x}) - W_n(x)}{\omega_n(\bar{x})}$$

Mianownik jest różny od 0 więc funkcja φ(u) jest n+2 krotnie różniczkowalna. Pochodna funkcji ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale ograniczonym jej miejscami zerowymi (tw. Rolle'a) więc ma ich conajmniej n+1. Każda kolejna pochodna ma o jedno miejsce zerowe mniej. Istnieje zatem taki punkt, że

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

i podobnie dla wielomianu interpolującego

$$W_n^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

n+1 pochodna funkcji pomocniczej ma postać

$$\varphi^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - K(n+1)!$$

Dla

$$u = \xi$$

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

można oszacować błąd interpolacji

$$\varepsilon(x) = f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

Oznaczmy kres górny modułu n+1 pochodnej

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|f(x) - W_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$$

Może posłużyć do oszacowania błędu bezwzględnego wzoru interpolacyjnego pod warunkiem, że znamy maksymalną wartość n+1 pochodnej f(x) w zadanym przedziale – możemy nie znać dokładnej postaci funkcji, ale z analizy problemu możemy wywnioskować jaka powinna to być zależność.

Przykład. Oszacować błąd wzoru interpolacyjnego przy obliczaniu wartości ln100.5.
Dane są wartości: ln100, ln101, ln102, ln103.

$$f(x) = ln(x),\ n = 3,$$
$$a = 100,\ b = 103,$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M_4 = \sup_{x\in[100,103]} |f^4(x)| = \frac{6}{100^4}$$

$$|ln100.5 - W(100.5)| \le 2.344 \cdot 10^{-9}$$

Dobór węzłów interpolacji.

Oszacowanie błędu interpolacji Lagrange'a zależy od:

1) postaci funkcji (n+1 pochodna)
2) ilości węzłów (mianownik)
3) położenia węzłów (ω_n(x))

Wartośc oszcowania można ograniczyć jedynie zmieniając położenia węzłów (pkt. (3)).

Chcemy zatem aby

$$\sup_{x\in[a,b]} |\omega_n(x)|$$

było jak najmniejsze.

Optymalne położenia węzłów stanowią zera wielomianów Czebyszewa

$$\begin{aligned} T_n(x) &= cos(n \cdot arc\ cos(x)) \\ x &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

Relacje rekurencyjne

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= cos(arc\ cos(x)) = x \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ n \ge 2 \end{aligned}$$

Zera wielomianów

$$x_m = cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right),\ m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Szukamy funkcji ω_n(x), która musi być wielomianem Czebyszewa (znormalizowanym do 1 – relacja rekurencyjna dla T_n(x))

$$\omega_n(x) = T_n^*(x)$$

$$\begin{aligned} T_n^*(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \\ &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Skalowanie przedziału [-1,1] na [a,b]

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)],\ x \in [a,b]$$

Skalowanie z [a,b] na [-1,1]

$$z = \frac{1}{b-a}(2x - b - a),\ z \in [-1,1]$$

Optymalne położenie węzłów można wyznaczyć wg wzoru:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)cos\frac{2m+1}{2n+2}\pi + (b+a)\right] \qquad m = 0,1,\ldots,n$$

Węzły nie są rozmieszczone równomiernie, ale są zagęszczone na krańcach przedziału. Przy takim wyborze węzłów oszacowanie błędu jest następujące:

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Wielomian wyznaczony przy takim ułożeniu węzłów na ogół nie daje **najmniejszego błędu** tylko jego **najmniejsze oszacowanie**.

Ilorazy różnicowe.

Funkcja f(x) przyjmuje w punktach $x_i, \ i = 0, 1, \ldots, n, \ x_i \neq x_j$
wartości

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

Zakładamy że różnice

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

mogą nie być stałe

Ilorazy różnicowe definiujemy następująco:

a) pierwszego rzędu

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

b) drugiego rzędu

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

c) n-tego rzędu

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}$$

Przy założeniu i=0, iloraz różnicowy n-tego rzędu można zapisać:

$$\boxed{f(x_0;x_1;\ldots;x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}}$$

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega_n'(x_j)}$$

Dowód przez indukcję: dla n=1 $\quad f(x_i;x_{i+1}) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \dfrac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$

Zazwyczaj tworzy się tablicę z ilorazami różnicowymi (łatwe do zaprogramowania na komputerze)

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe				
		1 rzędu	2 rzędu	3 rzędu	4 rzędu	5 rzędu
X_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0;x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$			
		$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$		$f(x_0;\ldots;x_4)$	
		$f(x_2;x_3)$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)$		$f(x_0;\ldots;x_5)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2;x_3;x_4)$		$f(x_1;\ldots;x_5)$	
		$f(x_3;x_4)$		$f(x_2;x_3;x_4;x_5)$		
x_4	$f(x_4)$		$f(x_3;x_4;x_5)$			
		$f(x_4;x_5)$				
x_5	$f(x_5)$					

Różnice progresywne (dla równoodległych węzłów)

Zakładamy że węzły interpolacji tworzą ciąg arytmetyczny i są równoodległe:

$$x_n = x_0 + nh$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$h = const$$

Różnice progresywne („w przód”) definiujemy następująco:

a) pierwszego rzędu

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

b) drugiego rzędu

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= \Delta(\Delta f) = \Delta[f(x+h) - f(x)] \\ &= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\end{aligned}$$

c) n-tego rzędu

$$\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f),\ n = 2, 3, \ldots$$

Różnicę progresywną dowolnego rzędu funkcji f można przedstawić jako kombinacje liniową wartości tej funkcji

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(x) &= f(x)\\ \Delta^n f(x) &= \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)\\ n &= 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Dla funkcji stablicowanej (w interpolacji) wygodniej jest przyjąć oznaczenia

$$\begin{aligned}y_i &= f(x_i)\\ \Delta^0 y_i &= y_i\\ \Delta^n y_i &= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i\end{aligned}$$

Własności różnic progresywnych:

1) Różnica progresywna wielomianu stopnia n jest wielomianem stopnia n-1
2) n-tą różnicę można wyznaczyć za pomocą wzoru

$$\Delta^n y_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} y_{i+n-j}$$

3) Dysponując wartościami różnic progresywnych można wyznaczyć wartość y_i

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{k}{k} \Delta^k y_0$$

Własności operatora Δ

$$
\begin{aligned}
\Delta(g_k \pm f_k) &= \Delta g_k \pm \Delta f_k \\
\Delta(a f_k) &= a\Delta f_k \\
\Delta^m(\Delta^n f_k) &= \Delta^{m+n} f_k \\
\Delta[f(x_k)\cdot g(x_k)] &= f(x_{k+1})\Delta g(x_k) + g(x_{k+1})\Delta f(x_k) \\
\Delta \frac{f(x_k)}{g(x_k)} &= \frac{\Delta f(x_k) g(x_k) - f(x_k)\Delta g(x_k)}{g(x_{k+1})g(x_k)}, \qquad g(x_{k+1})g(x_k) \neq 0 \\
\Delta c &= 0, \qquad c = const
\end{aligned}
$$

x_i	y_i					
		$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0					
		$\Delta^1 y_0$				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		$\Delta^1 y_1$		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		$\Delta^1 y_2$		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		$\Delta^1 y_3$		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		$\Delta^1 y_4$				
x_5	y_5					

x_i	y_i	$y = x^3 - 1$				
		$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	-1					
		1				
1	0		6			
		7		6		
2	7		12		0	
		19		6		0
3	26		18		0	
		37		6		
4	63		24			
		61				
5	124					

Różnice wsteczne

Różnicę wsteczną pierwszego rzędu definiujemy następująco:

$$\nabla y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Różnica wsteczna k-tego rzędu:

$$\begin{aligned} \nabla^k y &= \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} \\ \nabla^0 y_0 &= y_0 \\ k &= 1, 2, \ldots, n \\ i &= k, k+1, \ldots, n \end{aligned}$$

x_i	y_i	$\nabla^1 y_i$	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
x_{-6}	y_{-6}	∇y_{-5}				
x_{-5}	y_{-5}	∇y_{-4}	$\nabla^2 y_{-4}$			
x_{-4}	y_{-4}	∇y_{-3}	$\nabla^2 y_{-3}$	$\nabla^3 y_{-3}$		
x_{-3}	y_{-3}	∇y_{-2}	$\nabla^2 y_{-2}$	$\nabla^3 y_{-2}$	$\nabla^4 y_{-2}$	
x_{-2}	y_{-2}	∇y_{-1}	$\nabla^2 y_{-1}$	$\nabla^3 y_{-1}$	$\nabla^4 y_{-1}$	$\nabla^5 y_{-1}$
x_{-1}	y_{-1}	∇y_0	$\nabla^2 y_0$	$\nabla^3 y_0$	$\nabla^4 y_0$	$\nabla^5 y_0$
x_0	y_0					

Interpolacja Newtona dla nierównoodległych węzłów

Zakładamy że odległości między węzłami mogą być różne

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

I musi on spełniać warunek w węzłach interpolacji

$$W_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Szuakny wielomani zapiszemy w równoważnej postaci

$$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)] + \cdots + [W_n(x) - W_{n-1}(x)]$$

gdzie różnice $\quad W_k(x) - W_{k-1}(x)$

Są wielomianami zdefiniowanymi następująco

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \qquad A_k = const$$

Stałą A wyznaczamy dokonując podsatwienia $x=x_k$

$$W_k(x_k) - W_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})$$

Korzystamy z warunku $W_k(x_k) = f(x_k)$

$$A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\frac{\omega_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_i)\omega_{k-1}'(x_i)}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$A_k = \frac{f(x_k)}{\omega_k'(x_k)} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{f(x_i)}{(x_k - x_i)\omega_{k-1}'(x_i)} = \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega_k'(x_i)}$$

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega_k'(x_i)}\right)\omega_{k-1}(x)$$

Wyrażenie w nawiasie jest ilorazem różnicowym
k-tego rzędu.

Wielomian interpolacyjny można zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= f(x_0) + f(x_0;x_1)\omega_0(x) + f(x_0;x_1;x_2)\omega_1(x) \\ &+ \cdots + f(x_0;x_1;\cdots;x_n)\omega_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Powyższa formuła nazywana jest **wzorem interpolacyjnym Newtona dla nierównych odstępów argumentów**.

Przykład.
Znaleźć wielomian interpolujący funkcję f(x) dla stablicowanej funkcji:

f(0)=1, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=5, f(6)=7

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;x_{i+1})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+2})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+3})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+4})$
0 2 3 4 6	**1** 3 4 5 7	**1** -1 3 1	**-2/3** 2 -2/3	**2/3** -2/3	**-2/9**

$$\begin{aligned} W_4(x) &= 1 + 1(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-3) \\ &- \frac{2}{9}(x-0)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1 \end{aligned}$$

Wzory interpolacyjne Newtona dla równoodległych wartości argumentu

Dane są wartości funkcji f(x)

$$y_i = f(x_i),\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Dla siatki węzłów o stałym kroku h

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih \\ i &= 0, 1, 2, \cdots, n \\ h &= const \end{aligned}$$

Iloraz różnicowy n-tego rzędu dla równoodległych węzłów:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 = y_0 \\ f(x_0; x_1) &= a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} \\ f(x_0; x_1; x_2) &= a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{2h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_0; \cdots; x_n) &= \frac{y_n - ny_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - \cdots + (-1)^n y_0}{n! h^n} \end{aligned}$$

Wykorzystujemy wzory na różnice progresywne:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_1 &= \Delta y_0 / h \\
a_2 &= \Delta^2 y_0 / 2h^2
\end{aligned}
\qquad\qquad
a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! \cdot h^k}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n
$$

Po podstawieniu a_k do wzoru interpolacyjnego Newtona otrzymamy

$$
\boxed{
\begin{aligned}
W_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&+ \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
}
$$

powyższa formuła nosi nazwę **pierwszego wzoru interpolacyjnego Newtona** (wzór interpolacyjny Newtona na interpolację w przód).
W praktyce wygodniej jest używać tego wzoru w nieco zmienionej postaci.

Dokonajmy podstawienia:

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{x - x_0}{h} \\
\frac{x - x_1}{h} &= \frac{x - (x_0 + h)}{h} = q - 1 \\
\frac{x - x_2}{h} &= \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = q - 2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{x - x_{n-1}}{h} &= \frac{x - [x_0 + (n-1)h]}{h} = q - (n - 1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} W_n(x) &= W_n(x_0+qh) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots \\ &+ \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned}$$

Powyższy wzór stosuje się w otoczeniu punktu x_0 tj. $q<1$. Gdy $q>1$ wówczas za x_0 należy wybrać najbliższy węzeł taki że $x_i<x$, aby q znowu było mniejsze od 1.

Wzór interpolacyjny Newtona na interpolację wstecz
(**drugi wzór interpolacyjny Newtona**)

Interesuje nas teraz interpolacja w pobliżu końca tablicy (w okolicy punktu x_n). Szukamy więc wielomianu iterpolacyjnego w postaci:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= y_0 + \frac{\nabla y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\nabla^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_{-1}) + \cdots \\ &+ \frac{\nabla^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{-n+1}) \end{aligned}$$

punktom

$$x_{-n}, x_{-n+1}, \cdots, x_{-1}, x_0$$

odpowiadają teraz punkty

$$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$$

Jeśli dokonamy podstawienia

$$q = \frac{x_0 - x}{h}$$

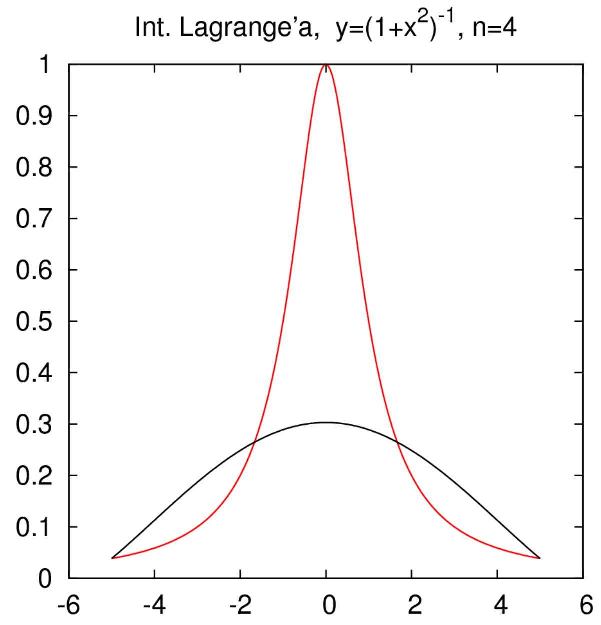
to otrzymamy **wzór interpolacyjny Newtona na interpolację wstecz**

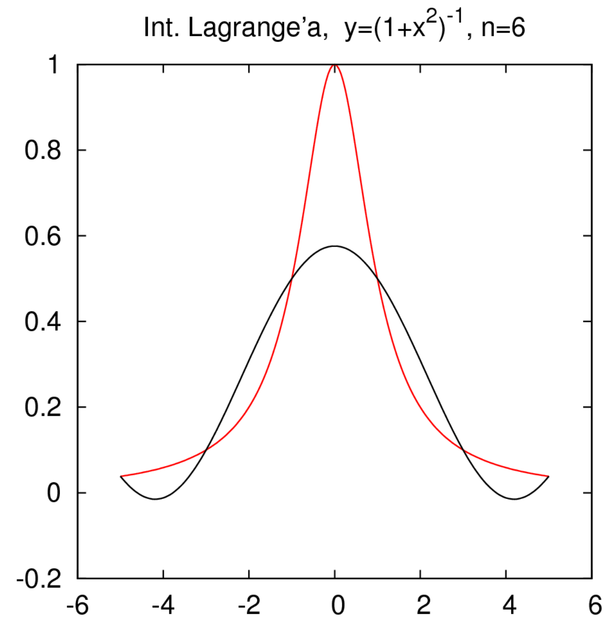
$$\begin{aligned} W_n(x) &= y_0 - q\nabla y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\nabla^2 y_0 - \ldots \\ &+ (-1)^n \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\nabla^n y_0 \end{aligned}$$

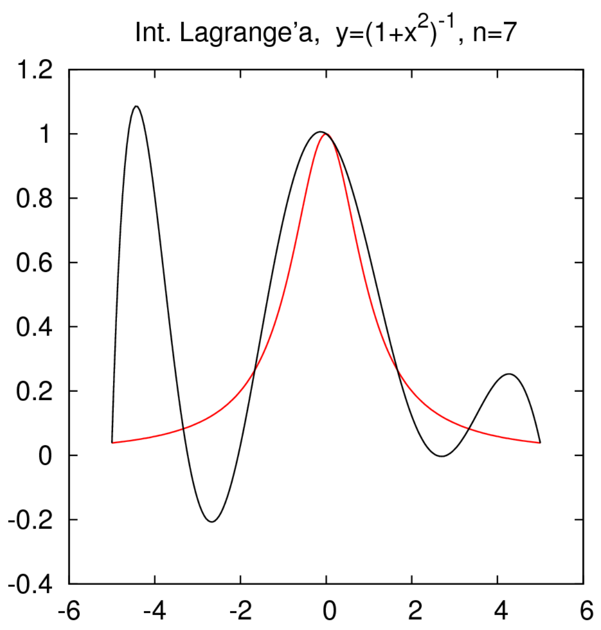
Zbieżność procesów interpolacyjnych

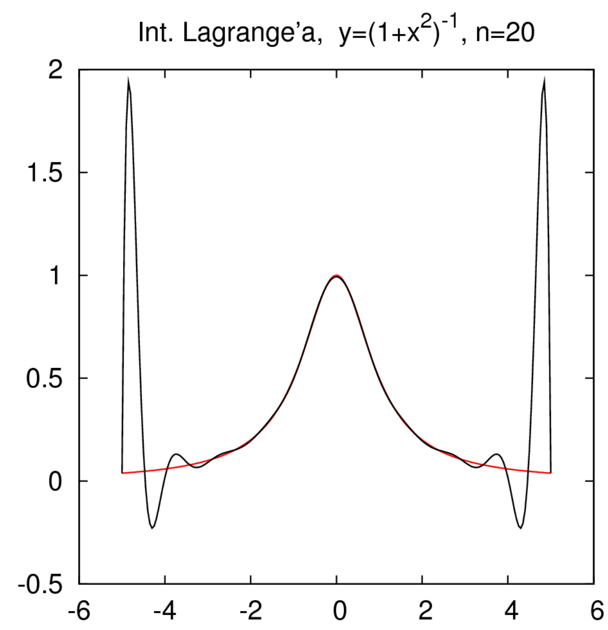
1) Zwiększanie liczby węzłów interpolacji (przy stałych odległościach) nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Jest to **efekt Rungego** - zadanie jest źle uwarunkowane.

2) Interpolacja funkcji, której przebieg znacznie różni się od przebiegu wielomianu interpolacyjnego, może nie dawać dobrych wyników przy dużej liczbie węzłów. Wpływ na to mają pojawiające się ekstrema w funkcji interpolującej (np.: f(x)=1/x).


Int. Lagrange'a, y=(1+x2)-1, n=4


Int. Lagrange'a, y=(1+x2)-1, n=6


Int. Lagrange'a, y=(1+x2)-1, n=7


Int. Lagrange'a, y=(1+x2)-1, n=20

Złożoność obliczeniową poszczególnych metod interpolacji można określić podając liczbę potrzebnych działań do jej przeprowadzenia:

1) Wzór Lagrange'a

   a) $(3/2)n^2+(13/2)n+3$ działań,
   b) w tym n^2+4n+2 mnożeń i dzieleń

2) Wzór Newtona

   a) $(3/2)n^2+(9/2)n$ działań
   b) w tym n^2+4n+2 mnożeń i dzieleń

3) Wzór Aitkena

   a) $2n^2+3n+1$ działań
   b) w tym $n^2/2+n/2$ mnożeń i dzieleń

Metoda iteracyjna Aitkena jest mniej wydajna, ale łatwa w programowaniu.

Interpolacja funkcjami sklejanymi - sklejki

W przedziale [a,b] mamy n+1 punktów takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkty te określają podział przedziału [a,b] na n podprzedziałów tj. $[x_i,x_{i+1}]$.
Funkcję s(x) określoną na przedziale [a,b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia m (*m 1*) jeżeli:

1) s(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i; x_{i+1})$, i=0,1,...,n-1

2) $s(x) \in C^{m-1}([a,b])$

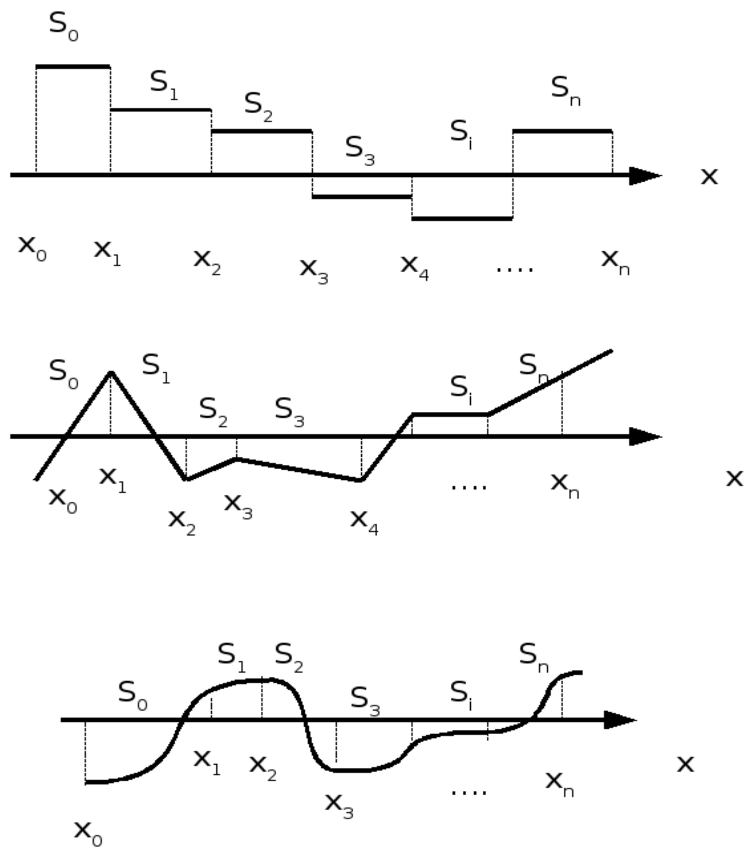
Punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej. W każdym przedziale (x_i,x_{i+1}) funkcja s(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1})$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$

$$\boxed{s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \qquad x \in [a,b]}$$

W każdym z n podprzedziałów aby określić s(x) należałoby wyznaczyć m+1 stałych. Ale żądamy ciągłości pochodnych rzędu 0,1,2,..,m-1 w każdym z węzłów (sklejamy rozwiązania) co daje nam m(n-1) warunków. Ostatecznie funkcja s(x) zależy „jedynie” od: n(m+1)-m(n-1)=**n+m** parametrów które należy wyznaczyć.



m=0 ← funkcje nie „sklejają się”

m=1 ← funkcja ciągła, ale pochodne nie są ciągłe

m=2 ← funkcja ciągła, pierwsza pochodna też ciągła

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (m=3) (najczęściej stosowane).

Funkcję s(x) nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji f(x), jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n;\ n \geq 2$$

Do określenia funkcji s(x) stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie (n+3) parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa n+1 pozostają 2 stopnie swobody. Musimy nałożyć dwa dodatkowe warunki. Rodzaj tych warunków zależy od funkcji f(x) lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a,b]:

1 rodzaj warunków (1 pochodna)

$$s^{(1)}(a+0) = \alpha_1$$
$$s^{(1)}(b-0) = \beta_1$$

2 rodzaj warunków (2 pochodna)

$$s^{(2)}(a+0) = \alpha_2$$
$$s^{(2)}(b-0) = \beta_2$$

gdzie: $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ są ustalonymi liczbami

3 rodzaj warunków stosuje się dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 2 pochodną):

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0),\ i = 1, 2$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Oznaczmy

$$M_j = s^{(2)}(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) **jest ciągła i liniowa** w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} s^{(2)}_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x &\in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i &= x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

Całkujemy dwukrotnie powyższe wyrażenie:

$$s^{(1)}_{i-1}(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + A_i$$

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} \\ &+ A_i(x - x_{i-1}) + B_i \end{aligned}$$

Stałe A_i i B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji:

$$s_{i-1}(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1} \qquad B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$s_{i-1}(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = y_i \qquad A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i) = s_i^{(1)}(x_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$s_i^{(1)}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Porównując prawe strony dwóch powyższych równań dla każdego z węzłów uzyskamy (n-1) równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków.

Dla warunków z 1 pochodną:

$$2M_0 + M_1 = d_0 \qquad d_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1 \right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \qquad d_n = \frac{6}{h_1} \left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right)$$

Dla warunków z 2 pochodną

$$M_0 = \alpha_2 \qquad M_n = \beta_2$$

Otrzymujemy układ równań który można przedstawić
w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n_1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n_1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Macierz współczynników układu, jest macierzą silnie diagonalnie dominująca. Moduły elementów na diagonali są większe od sumy modułów pozostałych elementów leżących w tym samym wierszu. Układy te mają więc jednoznaczne rozwiązanie – istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego spełniająca przyjęte warunki dodatkowe.

Po rozwiązaniu układu równań - znalezieniu współczynników M_i – wyznaczamy funkcję sklejaną wg wzoru:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + ih, \quad f = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Bazę stanowią funkcje

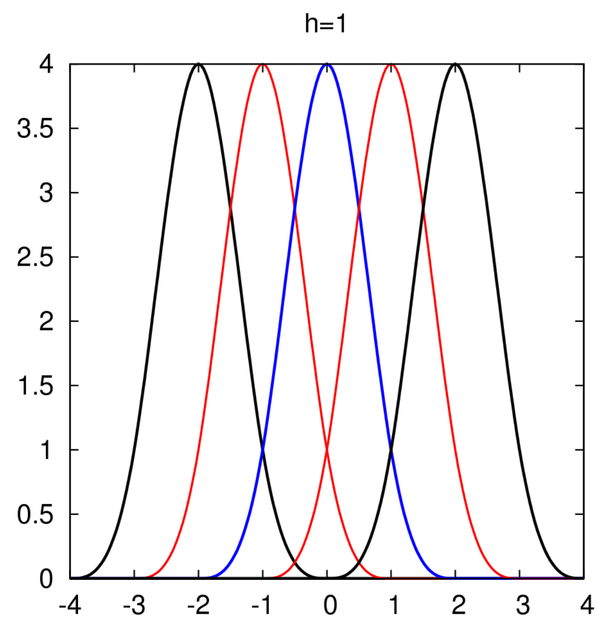
$$\Phi_i^3(x), \quad i = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1$$

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & x \notin [x_{-3}, x_{n+3}] \end{cases}$$

Funkcję s(x) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \qquad a \le x \le b$$

	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}
$\Phi^3_j(x)$	0	1	4	1	0
$[\Phi^3_j(x)]'$	0	3/h	0	-3/h	0
$[\Phi^3_j(x)]''$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0



Korzystając z warunku interpolacji można zapisać:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Jeśli rozważamy dodatkowo warunek z pierwszą pochodną to do powstałego układu równań należy dołączyć kolejne 2 równania:

$$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3}\alpha_1 \qquad -c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta_1$$

Po wyeliminowaniu współczynników c_{-1} i c_{n+1} otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & & \vdots & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{h}{3}\alpha_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta_1 \end{bmatrix}$$