# Sztywność*

24 listopada 2008

**Zadanie 1**. Chcemy rozwiązać problem podobny do rozpadu promieniotwórczego dwóch izotopów

$$\frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1/2 \tag{1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 y_2, \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, przy $\lambda_1 = 1/10$ oraz $\lambda_2 = 1/10000$. W równaniu $y_2$ oznacza liczbę jąder izotopu-matki, który rozpada się na $y_1$ ze stałą czasową $\lambda_2$ (o ubytku $y_2$ mówi równanie drugie, związany z ubytkiem przyrost $y_1$ dany jest przez środkowy wyraz prawej strony pierwszego równania). $y_1$ rozpada się z ze stałą czasową $\lambda_1$. Dodatkowo z zewnątrz w czasie $dt$ doprowadzana jest $dt\lambda_1/2$ jąder izotopu $y_1$ (ostatni wyraz prawej strony równania pierwszego).

Używamy metod RK2 i RK4 z krokiem czasowym dobieranym zgodnie z algorytmem z poprzednich zajęć. Całkujemy równanie do $t = 30000$. Przyjąć tolerancję błędu lokalnego $tol = 0.00001$. Narysować $y_1$ oraz $y_2$ (**10 punktów**) [rysunek dla jednej z metod (albo RK2 albo RK4) wyniki nie będą się różnić].

Dla obydwu metod: narysować przyjęty przez metodę krok czasowy w funkcji czasu [znaczy: akceptowane dt(t)] (**po 20 punktów od metody**). Przekonamy się, że krok czasowy metod będzie oscylował wokół kroków krytycznych dla bezwzględnej stabilności metod: $2/\lambda_1 = 20$ dla RK2 i $2.78/\lambda_1 = 27.8$ dla RK4. Są to bardzo małe kroki w porównaniu z wyjątkowo gładkim przebiegiem rozwiązania. Dla jednej z metod: powyżej $T = 10000$ spróbować zwiększyć i zafiksować krok do $\Delta t = 100$. Metoda okaże się niestabilna (**10 punktów za ilustrację**).

Nasz problem jest *sztywny*. W problemach sztywnych jawne schematy różnicowe wymagają bardzo małego kroku czasowego. Problem zazwyczaj wynika z obecności bardzo różnych skal czasowych opisywanego zjawiska (u nas dużej różnicy między stałymi rozpadu $\lambda_1$ oraz $\lambda_2$).

Problemy sztywne rozwiązuje się przy pomocy metod niejawnych. Najlepiej sprawdzają się metody A-stabilne. Najdokładniejszą liniową metodą wielokrokową,

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2008/2009. bszafran@agh.edu.pl która jest $A$-stabilną jest schemat trapezów. Jego zastosowanie do równania $dy/dt = f(t, y)$ zapisuje się jako

$$y^m = y^{m-1} + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t^{m-1}, y^{m-1}) + f(t^m, y^m)\right), \tag{3}$$

(rząd dokładności metody jest równy 2 [tak jak w RK2] – błąd lokalny $= O(\Delta t^3)$, czyli $n = 3$ - do wstawienia w algorytmie doboru kroku czasowego). Dla naszego (liniowego) problemu z (3) można wyprowadzić (jawny) przepis analityczny

$$y_1^m = \frac{y_1^{m-1}(1 - \frac{\lambda_1 \Delta t}{2})}{1 + \frac{\lambda_1 \Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{2\lambda_2 y_2^{m-1} + \lambda_1}{1 + \frac{\lambda_1 \Delta t}{2}} \tag{4}$$

$$y_2^m = \frac{y_2^{m-1}(1 - \frac{\lambda_2 \Delta t}{2})}{1 + \frac{\lambda_2 \Delta t}{2}}. \tag{5}$$

Rozwiązać układ równań metoda trapezów z automatycznym doborem kroku czasowego przy tolerancji $tol = 0.00001$. Narysować rozwiązanie w liniowej i logarytmicznej skali czasowej. Narysować $\Delta t$ (t) w skali log/log (**20 pkt**).

**Zadanie 2** Problem sztywności spotykamy również równaniu

$$\frac{du}{dt} = -100\,(u - \cos(t)) - \sin(t). \tag{6}$$

Rozwiązanie tego równania w stanie ustalonym to $u(t) = \cos(t)$. Odchylenie $u(t)$ od $\cos(t)$ wprowadzone w warunku początkowym zostanie szybko stłumione do zera przez pierwszy człon po prawej stronie równania. Rozwiązać równanie z warunkiem początkowym $u(0) = 2$ dla $t \in (0, 2)$ metodą Eulera z kontrolowanym krokiem czasowym i tolerancją $tol = 1e-2, 1e-3, 1e-4$. Narysować rozwiązanie i krok czasowy w funkcji czasu (**10 pkt**). Zastosować wsteczną metodę Eulera (A-stabilną jak wzór trapezów). Aby wykonać krok czasowy należy rozwiązać równanie na $u(t + \Delta t)$ dane przez wsteczny schemat Eulera:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t\left[-100\,(u(t + \Delta t) - \cos(t + \Delta t)) - \sin(t + \Delta t)\right], \tag{7}$$

co daje

$$u(t + \Delta t) = \frac{u(t) + \Delta t\left[100\cos(t + \Delta t) - \sin(t + \Delta t)\right]}{1 + 100\Delta t}. \tag{8}$$

Narysować rozwiązanie i przyjęty krok czasowy w funkcji czasu (**10 pkt**).