

# **Rozwiązywanie równań nieliniowych i ich układów. Wyznaczanie zer wielomianów.**

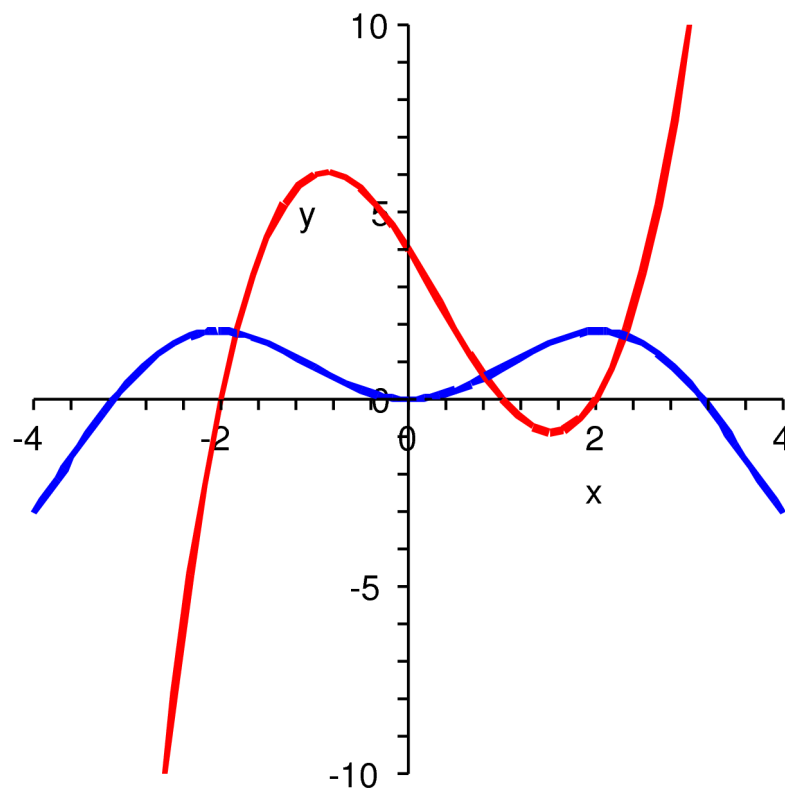
Plan wykładu:

1. Wyznaczanie pojedynczych pierwiastków rzeczywistych równań nieliniowych metodami
  - a) połowienia (bisekcji)
  - b) Regula Falsi
  - c) siecznych
  - d) Newtona
2. Wyznaczanie zer wielokrotnych
  - a) modyfikacja metod przy znajomości krotności pierwiastka
  - b) modyfikacja metod siecznych i Newtona dla przypadku ogólnego
  - c) Proces  $\delta^2$  Aitkena
3. Rozwiązywanie układów równań nieliniowych
4. Wyznaczanie zer rzeczywistych i zespolonych wielomianów
  - a) metoda Lehmera-Schura
  - b) metoda Łobaczewskiego
  - c) dzielenie wielomianów
  - d) metoda iterowanego dzielenia

## Równanie nieliniowe z jedną niewiadomą

Poszukujemy zera rzeczywistego ciągłej funkcji  $f(x)$ , czyli szukamy rozwiązania równania:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \quad x \in R$$



—

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

—

$$f(x) = x \sin(x)$$

Uwagi:

- 1) Nie istnieją wzory pozwalające obliczyć dokładnie pierwiastki równania – trzeba używać **schematów iteracyjnych**. Często w obliczeniach inżynierskich nie jest znana postać równania nieliniowego.
- 2) Rozwiązanie problemu uzyskane metodą iteracyjną będzie przybliżone (z zadaną dokładnością)
- 3) Jak w każdej metodzie iteracyjnej, o tym jak szybko znajdziemy zadowalające przybliżenie pierwiastka zależeć będzie od samej metody, od przybliżenia założonego na starcie oraz od postaci funkcyjnej równania.

### Metoda połowienia (bisekcji)

Rozwiązania szukamy w przedziale, w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji, w tzw. **przedziale izolacji pierwiastka** (wewnątrz tego przedziału pierwsza pochodna funkcji nie zmienia znaku). Przedział wyznacza się na podstawie wykresu funkcji lub w przypadku wielomianów algebraicznych – analitycznie.

Założenia:

- 1) w przedziale  $[a,b]$  znajduje się dokładnie jeden pierwiastek
- 2) Na końcach przedziału wartości funkcji mają różne znaki tj.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Algorytm

1. Dzielimy przedział izolacji na pół

$$x_1 = \frac{b + a}{2}$$

2. Sprawdzamy czy spełniony jest warunek

$$f(x_1) = 0$$

jeśli tak to mamy rozwiązanie, jeśli nie to przechodzimy do kolejnego punktu

3. z dwóch przedziałów  $[a, x_1]$  oraz  $[x_1, b]$  wybieramy ten, w którym wartości funkcji na krańcach przedziałów mają różne znaki

$$f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$$

4. Powtarzamy kroki 1-3, co powoduje że długości kolejnych przedziałów maleją

$$|x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{2^i} (b - a)$$

Lewe krańce przedziałów tworzą ciąg niemalejący ograniczony z góry. Natomiast prawe tworzą ciąg nie rosnący ograniczony z dołu. Istnieje ich wspólna granica w punkcie  $\alpha$ . Punkt ten jest poszukiwanym rozwiązaniem równania nieliniowego.

**Przykład.** Znaleźć w przedziale  $[1,2]$  metodą połowienia pierwiastek równania

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

$$f(1) = -4$$

$$f(2) = 3$$

$$f(a) \cdot f(b) = f(1)f(2) = -12 < 0$$

Wewnątrz przedziału wartość pierwszej pochodnej funkcji jest dodatnia (nie zmienia znaku) - więc jest to przedział izolacji pierwiastka.

Wyniki kolejnych przybliżeń rozwiązania

x	f(x)
1.0	-4
2.0	3
1.5	-1.874
1.75	0.17187
1.625	-0.94335
1.6875	-0.40942
1.71875	-0.12487
1.73437	0.02198
.....	.....
1.73205	0.0000000

Wadą metody wolna zbieżność w otoczeniu punktu stanowiącego rozwiązanie. Zaletą jest natomiast niezawodność metody.

## Wzór iteracyjny.

Jeżeli  $g(y)$  stanowi funkcję odwrotną do  $f(x)$   
to dla zbioru punktów

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

funkcję  $g(y)$  można przybliżyć (aproksymować)  
wielomianem Lagrange'a

$$g(y) \approx \sum_{j=1}^n l_j(y) g(y_j)$$

Oznaczmy  $x_{i+1-j} = g(y_j)$

Jeśli  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  jest rozwiązaniem (pierwiastkiem)  
to wówczas  $\mathbf{y}=\mathbf{0}$

$$x_{i+1} = \sum_{j=1}^n l_j(0) x_{i+1-j}$$

( $x_{i+1-j}$  - to wcześniej wyznaczone przybliżenia)  
gdzie wielomian  $l_j$  ma postać

$$l_j = \frac{(y - y_1) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_n)}{(y_j - y_1) \dots (y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1}) \dots (y_j - y_n)}$$

Wzór na  $x_{i+1}$  określa metodę iteracyjną rozwiązywania  
równania nieliniowego.

Wzór ten można zapisać w bardziej ogólnej  
postaci

$$x_{i+1} = F(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n+1})$$

który jest **n-punktowym wzorem iteracyjnym**.

Szczególnym przypadkiem są metody  
jednopunktowe wykorzystujące do  
znalezienia przybliżenia w  $i+1$  iteracji przy  
znajomości przybliżenia wyznaczonego w  $i$ -  
tym kroku

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

## Zbieżność metody iteracyjnej

Ciąg przybliżeń jest zbieżny gdy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a$$

Błąd rozwiązania w  $i$ -tej iteracji

$$\varepsilon_{i+1} = a - x_{i+1}$$

W punkcie  $x=a$  metoda jest rzędu  $p$ , jeśli  
istnieje liczba rzeczywista

$$p \geq 1$$

dla której zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - a|}{|x_i - a|^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p} = C \neq 0$$

Liczbę  $C$  nazywamy **stałą asymptotyczną błędu**

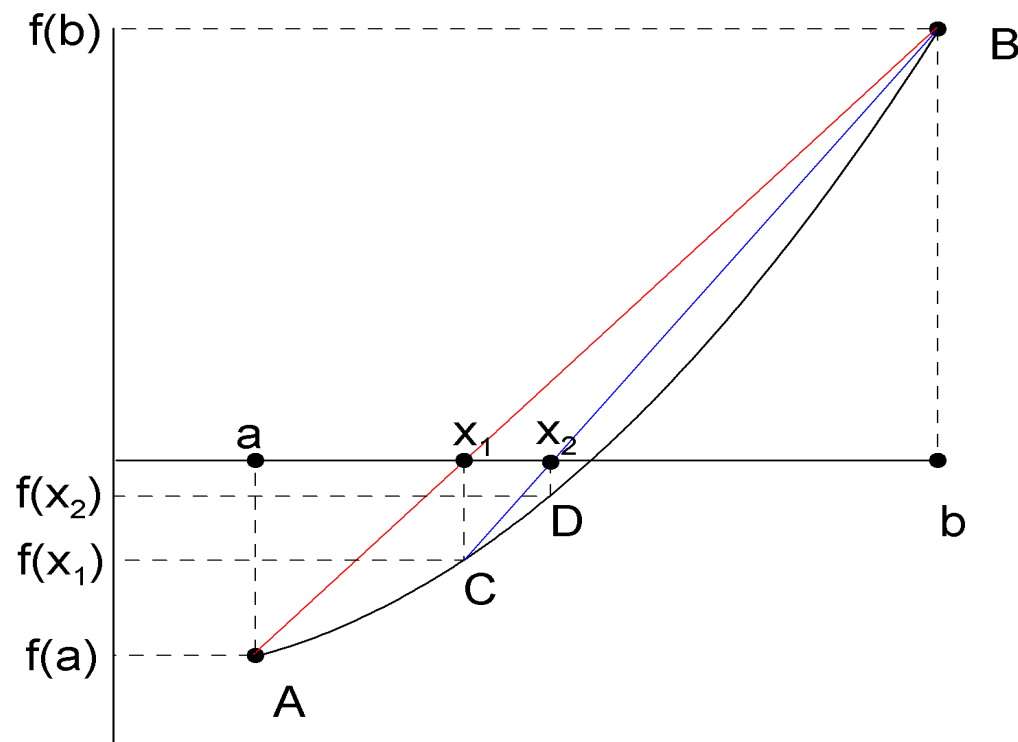
$$|\varepsilon_{i+1}| = C|\varepsilon_i|^p$$

$$|\varepsilon| < 1 \Rightarrow |\varepsilon_{i+1}| \ll |\varepsilon_i|^p$$

## Metoda Regula Falsi

W metodzie tej wykorzystuje się założenie istnienia lokalnej liniowości funkcji (fałszywe, stąd nazwa). Zakładamy ponadto:

- 1) w przedziale  $[a, b]$  funkcja ma tylko jeden pierwiastek pojedynczy
- 2)  $f(a)f(b) < 0$
- 3) funkcja jest klasy  $C^2$
- 4) pierwsza i druga pochodna nie zmieniają znaku w przedziale  $[a, b]$



**Rys.** Idea metody Regula Falsi dla funkcji wypukłej

Sposób postępowania:

1. przez punkty A i B prowadzimy prostą o równaniu:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

2. punkt  $x_1$  w którym prosta przecina oś  $Ox$  przyjmuje się za pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka równania:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

3. sprawdzamy warunek, czy:  $f(x_1)=0$ , jeśli tak to przerywamy obliczenia
4. jeśli  $f(x_1) \neq 0$  to sprawdzamy na końcach którego przedziału ( $[A, x_1]$ ,  $[x_1, B]$ ) wartości funkcji mają różne znaki – przez te punkty prowadzimy kolejną prostą powtarzając kroki 1-4

Jeśli w przedziale  $[A, B]$

- a)  $f^{(1)}(x) > 0$  oraz  $f^{(2)}(x) > 0$  to B jest punktem stacjonarnym (prawy brzeg ustalony)
- b)  $f^{(1)}(x) > 0$  oraz  $f^{(2)}(x) < 0$  to A jest punktem stacjonarnym

Metoda generuje ciąg przybliżeń. Elementy ciągu można wyznaczyć rekurencyjnie

$$x_0 = a \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k)$$

Błąd przybliżenia szacujemy korzystając z tw. Lagrange'a o przyrostach:

$$f(x_k) - f(\alpha) = f'(c)(x_k - \alpha)$$

gdzie:  $c \in [x_k, \alpha]$

Ponieważ  $f(\alpha) = 0$

więc dostajemy oszacowanie

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$$

gdzie

$$m = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

$m$  -oznacza kres dolny pierwszej pochodnej  
Błąd bezwzględny można oszacować znając wartości dwóch kolejnych przybliżeń  $x_k$  i  $x_{k+1}$ .

Przekształcając wzór rekurencyjny otrzymujemy:

$$\rightarrow -f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(b)}{x_k - b}(x_{k+1} - x_k)$$

I dodajemy z lewej strony wyraz

$$f(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(b)}{x_k - b}(x_{k+1} - x_k)$$

Po zastosowaniu tw. Lagrange'a otrzymujemy:

$$(\alpha - x_k)f'(\xi_k) = (x_{k+1} - x_k)f'(\bar{x}_k)$$

$$\xi_k \in (x_k, \alpha) \quad \bar{x}_k \in (x_k, b)$$

Następnie przekształcamy do postaci

$$|\alpha - x_{k+1}| = \frac{|f'(\bar{x}_k) - f'(\xi_k)|}{|f'(\xi_k)|} |x_{k+1} - x_k|$$

Dla

gdzie:  $|f'(\bar{x}_k) - f'(\xi_k)| \leq M - m$

kres dolny

$$m = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

kres górny

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

oszacowanie błędu bezwzględnego ma postać

$$|\alpha - x_{k+1}| \leq \frac{M - m}{m} |x_{k+1} - x_k|$$

Nie znamy wartości  $m$  i  $M$ . W niewielkim otoczeniu pierwiastka można pochodną można zastąpić ilorazem różnicowym:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{k+1}| &\sim \left| \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})} \right| \\ &\sim \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} \right| |f(x_{k+1})| \end{aligned}$$

Metoda Regula Falsi jest zbieżna do dowolnej funkcji ciągłej w przedziale  $[a, b]$  jeśli wartość pierwszej pochodnej jest ograniczona i różna od zera w otoczeniu pierwiastka. Obliczenia przerywa się jeśli dwa kolejne przybliżenia różnią się o mniej niż założone  $\varepsilon$ . Wadą jest wolna zbieżność ciągu przybliżeń - **rząd metody  $p=1$** .



## Metoda siecznych

Jest modyfikacją metody Regula Falsi. Prosta przeprowadza się przez dwa ostatnie przybliżenia  $x_k$  i  $x_{k-1}$  (**metoda dwupunktowa**). Kolejne przybliżenia w metodzie siecznych wyznacza się według relacji rekurencyjnej:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Zbieżność metody jest znacznie szybsza niż w metodzie RF. Rząd metody

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$$

Należy dodatkowo przyjąć, że  $|f(x_k)|$  mają tworzyć ciąg wartości malejących. Jeśli w kolejnej iteracji  $|f(x_k)|$  zaczyna rosnąć, należy przerwać obliczenia i ponownie wyznaczyć punkty startowe zawężając przedział izolacji.

**Przykład.** szukamy dodatniego pierwiastka równania

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$$

$$x_1 = \pi/2 \quad x_2 = \pi$$

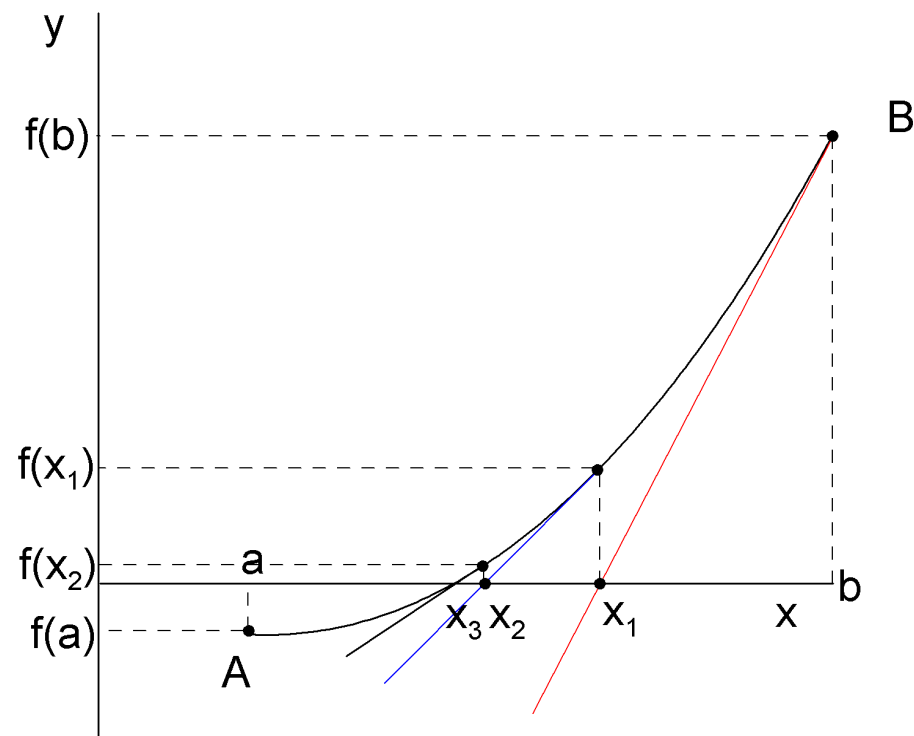
	Regula Falsi	Metoda siecznych
$x_3$	1.75960	1.75960
$x_4$	1.84420	1.93200
$x_5$	1.87701	1.89242
$x_6$	1.88895	1.89543
$x_7$	1.89320	1.89549
$x_8$	1.89469	
$x_9$	1.89521	
$x_{10}$	1.89540	
$x_{11}$	1.89546	
$x_{12}$	1.89548	
$x_{13}$	1.89549	

## Metoda Newtona (metoda stycznych)

Algorytm:

- 1) z końca przedziału  $[a,b]$  w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna należy poprowadzić styczną do wykresu funkcji  $y=f(x)$
- 2) styczna przecina oś  $OX$  w punkcie  $x_1$  który stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania
- 3) sprawdzamy czy  $f(x_1)=0$ , jeśli nie to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną
- 4) druga styczna przecina oś  $OX$  w punkcie  $x_2$  który stanowi drugie przybliżenie
- 5) kroki 3-4 powtarzamy iteracyjnie aż spełniony będzie warunek

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$



Równanie stycznej poprowadzonej z punktu B:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

i dla  $y=0$ , otrzymujemy pierwsze przybliżenie:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Korzystamy z rozwinięcia Taylora:

$$f(\alpha) = f(b) + f'(b)(\alpha - b) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - b)^2$$

Gdzie  $c \in [\alpha, b]$

Wiemy że  $f(\alpha)=0$  , więc po przekształceniu wzoru Taylora otrzymujemy

$$\alpha = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(b)} (\alpha - b)^2$$

Korzystając ze wzoru na pierwsze przybliżenie, możemy oszacować odległość nowego przybliżenia od dokładnego rozwiązania:

$$\alpha - x_1 = -\frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(b)} (\alpha - b)^2 < 0$$

czyli punkt  $x_1$  leży na prawo od pierwiastka  
Natomiast z tw. Lagrange'a wynika że

$$x_1 - b = -\frac{f(b)}{f'(b)} < 0 \quad x_1 \in [\alpha, b]$$

czyli punkt  $x_1$  leży po lewej stronie punktu B.

Powyższe warunki pokazują, że kolejne iteracje przybliżają nas do rozwiązania dokładnego

Równanie stycznej w k-tym przybliżeniu

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

Równanie rekurencyjne na położenie k-tego przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego w metodzie Newtona jest następujące

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Metoda Newtona jest więc **metodą jednopunktową**.

Oszacowanie błędu przybliżenia w metodzie Newtona

$$\varepsilon_{i+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_i)} \varepsilon_i^2$$

Rząd zbieżności metody wynosi **p=2**.

**Przykład.** Zastosować metodę Newtona do znalezienia pierwiastka kwadratowego dodatniej liczby  $c$

$$x^2 - c = 0$$

Szukamy miejsca zerowego funkcji

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

Wykorzystujemy relację rekurencyjną

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k}$$

co po przekształceniu daje

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{c}{x_k} \right)$$

Rozwiązania szukamy w takim przedziale  $[a, b]$ , w którym spełnione są warunki

$$0 < a < c^{1/2}$$

$$b > \frac{1}{2}(a + c/a)$$

## Poszukiwanie pierwiastków wielokrotnych równania nieliniowego

def. Liczbę  $\alpha$  nazywamy  $r$ -krotnym ( $r \geq 2$ ) pierwiastkiem równania  $f(x)=0$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest  $(r-1)$ -krotnym pierwiastkiem równania:

$$f'(x) = 0$$

Metody: połowienia, RF, siecznych nadają się do poszukiwania pierwiastków tylko o **nieparzystej krotności**. Rząd metody siecznych obniża się (wolniejsza zbieżność). Metoda Newtona pozwala znaleźć pierwiastki o parzystej i nieparzystej krotności.

Aby utrzymać rząd metody (przyśpieszyć zbieżność) stosuje się modyfikacje wzorów rekurencyjnych.

### a) Znamy krotność $r$ pierwiastka równania.

Wówczas możemy wykorzystać tę informację w metodzie Newtona

$$x_{k+1} = x_k - r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

(w praktyce bardzo rzadko znamy wartość  $r$  przez co zastosowanie powyższego wzoru jest mocno ograniczone)

Obliczmy różnicę pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a  $k+1$  przybliżeniem

$$a - x_{k+1} = a - x_k + r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$(a - x_{k+1})f'(x_k) = G(x_k)$$

Gdzie  $G(x) = (a - x)f'(x) + rf(x)$

Różniczkujemy  $G(x)$   $j$ -krotnie

$$\begin{aligned} G^{(j)}(x) &= (a - x)f^{(j+1)}(x) - jf^{(j)}(x) \\ &+ rf^{(j)}(x) \end{aligned}$$

Wykorzystujemy fakt że  $a$  jest pierwiastkiem  $r$ -krotnym

$$G^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

$$G^{(r+1)}(a) \neq 0$$

Z rozwinięcia Taylora w punkcie  $x=a$  dostajemy

$$G(x) = \frac{(x - a)^{r+1}}{(r + 1)!} G^{(r+1)}(\xi_1)$$

oraz

$$f'(x) = \frac{(x - a)^{r-1}}{(r - 1)!} f^{(r)}(\xi_2)$$

Kombinacja dwóch ostatnich zależności prowadzi do związku pomiędzy błędami w  $k$  i w  $k+1$  iteracji

$$\varepsilon_{k+1} = (a - x_{k+1}) = \frac{G(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{r(r + 1)} \frac{G^{(r+1)}(\xi_1)}{f^{(r)}(\xi_2)} \varepsilon_k^2$$

Ponieważ

$$f^{(r)}(\xi_2) \neq 0$$

$$G^{(r+1)}(a) \neq 0$$

$$\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^2} \leq C$$

Więc metoda Newtona dla pierwiastka krotności  $r$  ma rząd zbieżności  **$p=2$** .

b) Jeśli wiemy że pierwiastek jest wielokrotny ale nie znamy jego krotności r wówczas możemy badać zera funkcji

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Funkcja u(x) ma zero krotności 1 w punkcie x=a. We wzorach iteracyjnych dokonujemy podstawienia u(x) za f(x)

a) w metodzie siecznych

$$x_{k+1} = x_k - u(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{u(x_k) - u(x_{k-1})}$$

b) w metodzie Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$

gdzie:

$$u'(x_k) = 1 - \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} u(x_k)$$

**Przykład.** Wyznaczyć dodatni pierwiastek równania

$$\left( \sin(x) - \frac{1}{2}x \right)^2 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

	m. Newtona	m. Newtona - r	m. Newtona - u(x)
x <sub>2</sub>	1.78540	2.00000	1.80175
x <sub>3</sub>	1.84456	1.90100	1.88963
x <sub>4</sub>	1.87083	1.89551	1.89547
x <sub>5</sub>	1.88335	1.89549	1.89549
x <sub>6</sub>	1.88946		
x <sub>7</sub>	1.89249		
x <sub>8</sub>	1.89399		
x <sub>9</sub>	1.89475		
x <sub>10</sub>	1.89512		
x <sub>11</sub>	1.89531		
x <sub>12</sub>	1.89540		
x <sub>13</sub>	1.89545		
x <sub>14</sub>	1.89547		
x <sub>15</sub>	1.89548		
x <sub>16</sub>	1.89549		

## Proces $\delta^2$ Aitkena

Jeśli metoda jest zbieżna liniowo to można ją w prosty sposób przyspieszyć

$$a - x_{i+1} = C_i(a - x_i) \quad (|C_i| < 1)$$

gdzie  $|C_i|$  dąży do stałej asymptotycznej błędu. Po wielu iteracjach powinniśmy otrzymać przybliżenie

$$a - x_{i+1} \approx \bar{C}(a - x_i), \quad |\bar{C}| = C$$

Zwiększamy indeks  $i$  o 1 i eliminujemy stałą

$$\frac{a - x_{i+2}}{a - x_{i+1}} \approx \frac{a - x_{i+1}}{a - x_i}$$

Następnie obliczamy  $a$

$$a \approx \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

Procedurę tę można stosować jedynie dla metod zbieżnych liniowo, gdy kolejne 3 przybliżenia są bliskie poszukiwanemu rozwiązaniu.

## Układy równań nieliniowych

Układ równań nieliniowych

$$f_j(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

zapisujemy w postaci wektorowej

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, )$$

Dla takiej postaci układu wyprowadza się wzory iteracyjne. Ogólny wzór iteracyjny

(wielokrokowy)

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \dots, \mathbf{x}_{i-n+1})$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

Zakładamy że funkcja wektorowa  $\mathbf{f}$  ma w otoczeniu rozwiązania

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

funkcję odwrotną

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Jeśli punkt  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}, )$

jest odwrotny do punktu  $\mathbf{x}$  (wektora przybliżonych rozwiązań)

To można funkcję  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $\mathbf{y}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_i) + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} d^j \mathbf{g}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y} - \mathbf{y}_i) \\ &+ \frac{1}{(m+2)!} d^{m+2} \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_i) \\ &\quad \boldsymbol{\xi} \in [\mathbf{y}, \mathbf{y}_i] \end{aligned}$$

$$d^j h(\mathbf{x}, \mathbf{s}) =$$

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_j=1}^n D_{i_1, i_2, \dots, i_j} h(\mathbf{x}) s^{i_1} s^{i_2} \dots s^{i_j}$$

Gdzie:  $D_{i_1, i_2, \dots, i_j} h(\mathbf{x})$  jest pochodną cząstkową funkcji  $h$  względem zmiennych

$$x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}$$

w punkcie  $\mathbf{x}$

wektor  $\mathbf{s}$ :  $\mathbf{s} = (s^{i_1}, s^{i_2}, \dots, s^{i_j})$



Szukane rozwiązanie ma postać

$$\alpha = \mathbf{g}(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Po odrzuceniu reszty w rozwinięciu Taylora i uwzględnieniu powyższego warunku otrzymujemy n-wymiarowy odpowiednik metody Newtona. Dla  $m=0$  (**metoda jednokrokowa**)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + d\mathbf{g}(\mathbf{y}_i, -\mathbf{y}_i) = \\ &= \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}_i)}{\partial y^j} y_i^{(j)}\end{aligned}$$

Pochodne funkcji  $\mathbf{g}$  można wyrazić poprzez pochodne funkcji  $\mathbf{f}$ . Dla  $n=2$  otrzymujemy

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} \end{bmatrix}$$

Rząd zbieżności metody wynosi 2. Zazwyczaj zbieżność uzyskujemy tylko jeśli startujemy już z dobrym przybliżeniem rozwiązania.

Problem poszukiwania rozwiązań układu równań nieliniowych można sformułować jako problem poszukiwania minimum poniższej funkcji

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{x})$$

Funkcja osiąga minimum globalne dla dokładnego rozwiązania  $\mathbf{x}$ . Do jego znalezienia można użyć **metody największego spadku (minimalizacja wartości funkcji)**.

## Wyznaczanie zer wielomianów

Szukamy zer rzeczywistych i zespolonych wielomianu

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

### Metoda Lehmera-Schura

Dla pierwotnego wielomianu  $f(z)$  definiujemy wielomian

$$f^*(z) = z^n \bar{f}(\bar{z}^{-1}) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n$$

(kreska pozioma - sprzężenie zespolone)  
i wprowadzamy operator  $T$

$$T[f(z)] = \bar{a}_0 f(z) - a_n f^*(z)$$

dla  $z=0$

$$T[f(0)] = \bar{a}_0 a_0 - \bar{a}_n a_n = |a_0|^2 - |a_n|^2 \in \mathbb{R}$$

Operator  $T$  działając na  $f(z)$  obniża stopień wielomianu o 1. Działając nim wielokrotnie na  $f(z)$

$$T^j[f(z)] = T[T^{j-1}[f(z)]]$$

otrzymamy ciąg wielomianów coraz niższego stopnia.

**Tw. Jeśli dla  $f(0) \neq 0$**

**istnieje takie  $h$ , że**

$$T^h[f(0)] < 0$$

$$0 < h < k, \quad h, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = \min\{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow T^k[f(0)] = 0$$

**to  $f(z)$  ma co najmniej jedno zero wewnątrz koła jednostkowego.**

**Jeśli**

$$T^i[f(0)] > 0, \quad 1 \leq i < k$$

$$T^{k-1}[f(z)] = \text{const}$$

**to wewnątrz koła jednostkowego nie leży żadne zero  $f(z)$ .**

Jeśli  $f(z)$  ma zero wewnątrz koła

$$|z - c| = \rho$$

to wielomian

$$g(z) = f\left(\frac{z - c}{\rho}\right)$$

ma zero wewnątrz koła jednostkowego.

### Algorytm lokalizacji zer metodą LS:

1. Jeśli  $f(0)=0$  to  $z=0$  jest zerem. Jeśli nie to przechodzimy do 2.

2. Obliczamy  $T[f(z)]$ . Jeśli

$$T[f(0)] < 0$$

to wewnątrz koła jednostkowego leży pierwiastek. Jeśli nie to przechodzimy do 3.

3. Obliczamy

$$T^j[f(z)] (j = 1, 2, \dots)$$

aż do uzyskania

$$T^j[f(0)] < 0 \quad (j < k)$$

(w kole jednostkowym leży pierwiastek)

lub

$$T^k[f(0)] = 0$$

(jeśli  $T^{k-1}[f(0)] = \text{const}$  to w kole nie ma pierwiastka)

4. Jeśli wewnątrz koła jednostkowego nie ma zera to sprawdzamy funkcję  **$g(2z)$**  (wewnątrz koła jednostkowego)

5. Zgodnie z punktami 3 i 4 lokalizujemy zero w pierścieniu

$$R = 2^j \leq |z| < 2^{j+1} = 2R$$

(jeśli zero jest w kole to połowimy jego promień tak długo aż zero znajdzie się w pierścieniu).

6. Znaleziony pierścień można pokryć 8 kołami

$$r = \frac{4}{5}R \quad (\text{promień})$$

$$C_i = \frac{3R}{2\cos(\pi/8)} e^{\frac{\pi}{4}ik}, \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

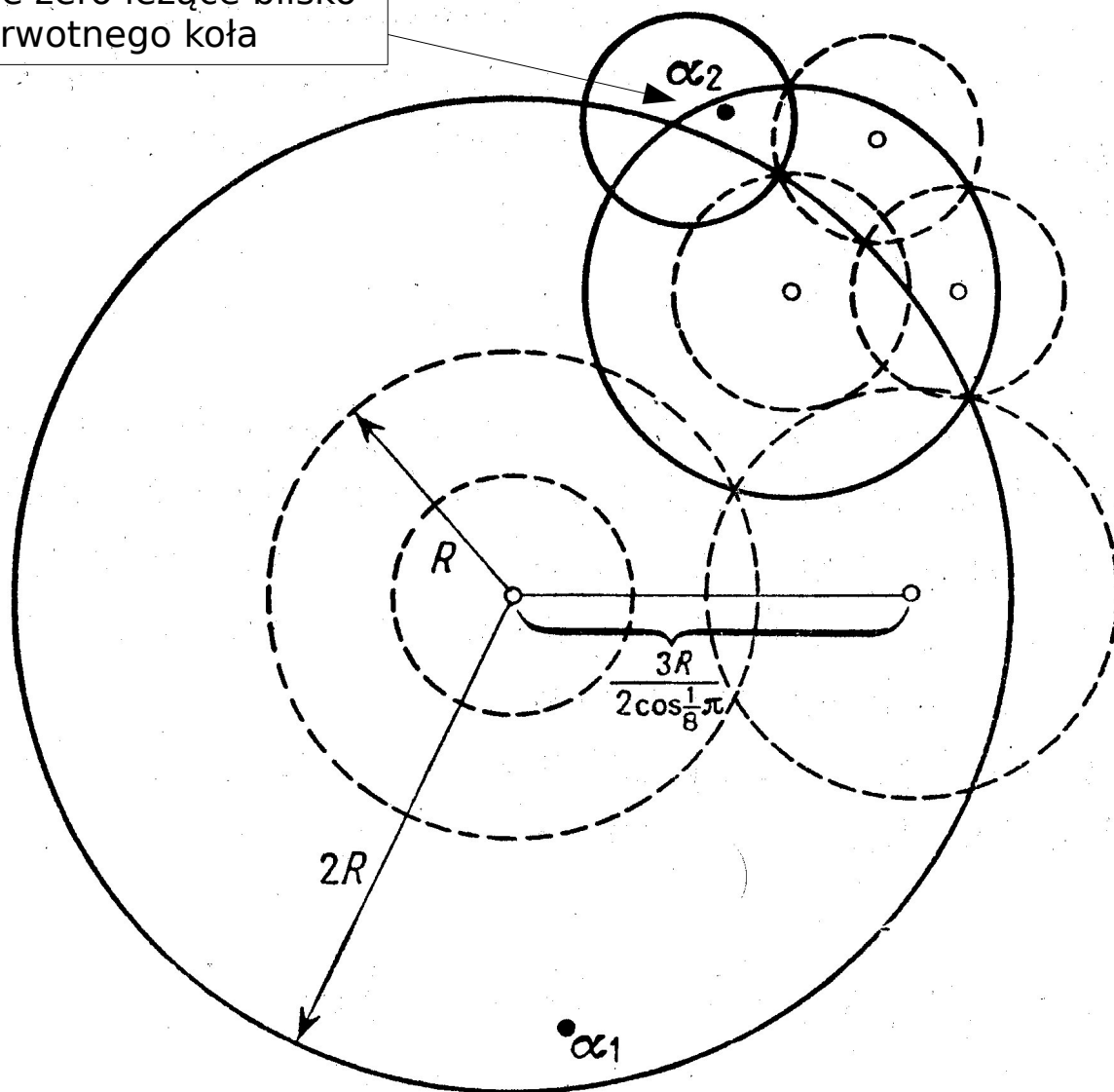
badając każde koło znajdziemy na pewno zero w jednym z nich.

7. W wybranym kole ( $C_j$ ) stosujemy kroki 3-4 (stosując połowienie promienia) i lokalizujemy zero w pierścieniu

$$R_1 = \frac{4}{5}R2^{-j_1} \leq |z - C_j| < \frac{4}{5}R2^{-(j_1-1)} = 2R_1$$

8. Następnie powtarzamy kroki 6-7

Inne zero leżące blisko  
pierwotnego koła



**Rys.** Lokalizacja zer w metodzie Lehmera-Schura.

Po  $k$  krokach zero leży w kole o promieniu  $2R_k$

$$R_k \leq \left(\frac{2}{5}\right)^k R$$

Własności metody Lehmera-Schura:

- 1) Szybkość zbieżności metody jest niewielka ale nie zależy od krotności pierwiastka równania
- 2) Pozwala lokalizować zera rzeczywiste i zespolone zadaną dokładnością
- 3) Po znalezieniu pierwiastka można go wyrugować z równania dzieląc wielomian przez odpowiedni dwumian i szukać jego kolejne zera

## Metoda Łobaczewskiego (Graeffego)

Dla wielomianu  $n$ -tego stopnia w postaci

$$f_0(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

można zdefiniować wielomian stopnia  $2n$

$$\begin{aligned} f_1(w) &= (-1)^n f_0(z) f_0(-z) = \\ &= (w - \alpha_1^2)(w - \alpha_2^2) \dots (w - \alpha_n^2) \\ w &= z^2 \end{aligned}$$

Zera wielomianu  $f_1$  są kwadratami zer  $f_0$  (**rozdzielamy zera**). Ogólnie można to zapisać

$$f_{r+1}(w) = (-1)^n f_r(z) f_r(-z), \quad (r = 0, 1, \dots)$$

Pomiędzy współczynnikami wielomianów  $f_{r+1}$  oraz  $f_r$  zachodzi związek

$$a_j^{(r+1)} = (-1)^{n-j} \left( \left(a_j^{(r)}\right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\min\{n-j, j\}} (-1)^k a_{j-k}^{(r)} a_{j+k}^{(r)} \right)$$

W metodzie Łobaczewskiego współczynniki wielomianu  $f_r$  wykorzystujemy do obliczenia jego zer.

Związek współczynników wielomianu z jego zerami:

$$a_j^r = (-1)^{n-j} S_{n-j}(\alpha_1^{2^r}, \alpha_2^{2^r}, \dots, \alpha_n^{2^r},)$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

gdzie  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest  $k$ -tą funkcją symetryczną zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$S_k(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_k}$$

np.: dla  $j=n-1$ ,  $k=n-j=1$

$$a_{n-1}^{(r)} = -S_1(\alpha_1^{2^r}, \alpha_2^{2^r}, \dots, \alpha_n^{2^r}) = -\sum_{k=1}^n \alpha_k^{2^r}$$

Zera wielomianu możemy zapisać w postaci

$$\alpha_k = \rho_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

i założmy, że pierwiastki mają różne moduły

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_n$$

Wówczas dla  $j=n-1$  otrzymujemy

$$a_{n-1}^{(r)} = -\alpha_1^{2^r} \left[ 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \right)^{2^r} \right]$$

I w granicy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |a_{n-1}^{(r)}|^{1/2^r} = |\alpha_1|$$

Dla dostatecznie dużego  $r$  możemy oszacować moduł zera ( $\alpha_1$ )

$$\rho_1 \approx |a_{n-1}^{(r)}|^{1/2^r}$$

Dla  $j=n-2$  mamy

$$a_{n-2}^{(r)} = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq n} \alpha_{r_1}^{2^r} \alpha_{r_2}^{2^r} =$$

$$= \alpha_1^{2^r} \alpha_2^{2^r} \left[ 1 + \sum_{\substack{1 \leq r_1 < r_2 \leq n \\ (r_1, r_2) \neq (1, 2)}} \left( \frac{\alpha_{r_1} \alpha_{r_2}}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{2^r} \right]$$

$$\rho_2 \approx \frac{1}{\rho_1} |a_{n-2}^{(r)}|^{1/2^r} \approx \left| \frac{a_{n-2}^{(r)}}{a_{n-1}^{(r)}} \right|^{1/2^r}$$

i analogicznie dla pozostałych modułów

$$\rho_k \approx \left| \frac{a_{n-k}^{(r)}}{a_{n-k+1}^{(r)}} \right|^{1/2^r}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Wartość  $r$  określa się empirycznie badając stabilizację cyfr znaczących wyznaczanych modułów.

Znaki zer wyznacza się określając znak wartości wielomianu po podstawieniu do niego odpowiedniego modułu.

**Przykład.** Wyznaczyć zera wielomianu

$$z^3 - 5z^2 - 17z + 21 = 0$$

r	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
1	1	-59	499	-441
2	1	-2483	196963	-194481
3	1	-5771363	37828630723	-37822859361

r	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$
1	7.68	2.91	0.94
2	7.06	2.98	0.997
3	7.001	2.999	0.99998

Dokładne wartości:

$$\alpha_1 = 7$$

$$\alpha_2 = -3$$

$$\alpha_3 = 1$$

- Metodę modyfikuje się dla zer zespolonych oraz przypadku gdy pierwiastki równania mają identyczne moduły.
- Szybki wzrost wartości współczynników eliminuje się normalizując współczynniki.

Do wyznaczania zer wielomianów stosuje się też metody Bernoulliego oraz Laguerre'a.

Metoda Laguerre'a jest zbieżna dla zer rzeczywistych i wielokrotnych, a rząd zbieżności wynosi 2. W przypadku pojedynczych zer zespolonych rząd metody wynosi 3.

## Metody dzielenia wielomianów

Aby wyznaczyć zera zespolone konieczne jest przeprowadzenie dzielenia wielomianów

- przez czynniki liniowe (dwumian)
- przez czynniki kwadratowe (trójmian)

## Dzielenie wielomianu przez czynnik liniowy

Wielomian

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dzielimy przez dwumian:  $(z - z_j)$

Wynikiem dzielenia jest

$$f(z) = (z - z_j) (b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0) + R_j$$

Z porównania współczynników przy jednakowych potęgach otrzymujemy zależności

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - z_j b_{n-1} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0 - z_j b_1 \\ a_0 &= R_j - z_j b_0 \end{aligned}$$

Zatem współczynniki nowego wielomianu można obliczać rekurencyjnie

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ b_k &= a_{k+1} + z_j b_{k+1} \\ k &= n-1, n-2, \dots, 0 \\ R_j &= a_0 + z_j b_0 \end{aligned}$$

Dzieląc jeszcze raz wielomian otrzymamy

$$f(z) = (z - z_j)^2 (c_{n-2}z^{n-2} + c_{n-3}z^{n-3} + \dots + c_0) + R'_j(z - z_j) + R_j$$

Wartości współczynników  $c_i$  wyznaczamy analogicznie jak w poprzednim przypadku.

### Obliczanie zer za pomocą iterowanego dzielenia

Zera wielomianu możemy wyznaczyć iteracyjnie stosując zmodyfikowane wzory jednokrokowe np.. metodę siecznych czy Newtona.

Kolejne przybliżenia w **metodzie siecznych** wyznaczamy ze wzoru

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j(z_j - z_{j-1})}{R_j - R_{j-1}}$$

oraz w **metodzie Newtona**

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j}{R'_j}$$



Metodę Newtona można jeszcze zmodyfikować jeśli zauważymy, że  $R_j=0$  gdy  $z_j$  jest pierwiastkiem równania. Wtedy kolejne przybliżenie ma postać

$$\begin{aligned} z_{j+1} &= -\frac{a_0}{b_0} = z_j - z_j - \frac{a_0}{b_0} = \\ &= z_j - \frac{b_0 z_j + a_0}{b_0} = z_j - \frac{R_j}{b_0} \end{aligned}$$

Wzór

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j}{b_0}$$

określa **metodę Lina**, która jest wolniej zbieżna od metody Newtona (rzęd zbieżności  $p=1$ ). W jednym kroku wymaga ona wykonania mniej działań niż metoda Newtona. Może być też rozbieżna.

Chcąc wyznaczyć pierwiastek zespolony należy wykonywać działania na liczbach zespolonych.

**Ponadto pierwotne przybliżenie pierwiastka powinno być zespolone.**

**Postępowanie w przypadku zer zespolonych**

$$z_j = x_j + iy_j$$

$$b_k = \gamma_k + i\delta_k$$

$$c_k = \varepsilon_k + i\eta_k$$

$$\gamma_n = \delta_n = 0$$

$$\gamma_k = a_{k+1} + x_j \gamma_{k+1} - y_j \delta_{k+1}, \\ (k = n-1, n-2, \dots, 0)$$

$$\delta_{n-1} = \varepsilon_{n-1} = \eta_{n-1} = 0$$

$$\delta_k = x_j \delta_{k+1} + y_j \gamma_{k+1}, \\ (k = n-2, n-3, \dots, 0)$$

$$\varepsilon_k = \gamma_{k+1} + x_j \varepsilon_{k+1} - y_j \eta_{k+1}$$

$$\eta_{n-2} = 0$$

$$\eta_k = \delta_{k+1} + x_j \eta_{k+1} + y_j \varepsilon_{k+1}, \\ (k = n-3, n-4, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} R_j &= b_{-1} = \gamma_{-1} + i\delta_{-1} \\ R'_j &= c_{-1} = \varepsilon_{-1} + i\eta_{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j - \frac{\varepsilon_{-1}\gamma_{-1} + \eta_{-1}\delta_{-1}}{\varepsilon_{-1}^2 + \eta_{-1}^2} \\ y_{j+1} &= y_j - \frac{\delta_{-1}\varepsilon_{-1} - \gamma_{-1}\eta_{-1}}{\varepsilon_{-1}^2 + \eta_{-1}^2} \end{aligned}$$

## Wpływ błędów współczynników wielomianu podczas wyznaczania zer wielomianów.

Dokładny wielomian (współczynniki bez błędów)

$$F(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0$$

oraz wielomian ze współczynnikami zaburzonymi

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

błędy współczynników

$$\delta_i = A_i - a_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$Z_0$  (dokładne zero) i  $z_0$  (obliczone zero) łączy zależność

$$Z_0 = z_0 + \varepsilon$$

Po podstawieniu  $\delta_i$  oraz  $Z_0$  do  $F(z)$  otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \delta_i z_0^i + \varepsilon f'(z_0) \approx 0$$

$$\varepsilon = \frac{|\sum_{i=1}^n \delta_i z_0^i|}{|f'(z_0)|}$$

Oszacowanie traci sens gdy pochodna jest bliska 0.

Okazuje się, że istnieją wielomiany (wysokiego stopnia) dla których nawet niewielkie zaburzenie współczynników powoduje duże zmiany wartości zer (np.. zera rzeczywiste stają się zespolonymi).

Przykład: **wielomian Wilkinsona**.

Wielomiany takie nazywamy źle uwarunkowanymi. Uzyskanie dokładniejszych przybliżeń zer wielomianu możliwe jest wówczas tylko jeśli obliczenia wykonywane przy użyciu silniejszej arytmetyki.