BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
---o0o---

BÀI TẬP PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
HOMEWORK #02. Bổ sung: BỔ SUNG THÊM 1 BÀI TẬP SỐ 5 VỀ HÀM SINH

Giáo viên hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. **Nguyễn Nhật Trường 20522087**
2. **Lại Chí Thiện 20520309**
3. **Lê Thị Phương Vy 20520355**
4. **Lê Trương Ngọc Hải 20520481**

5. a.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n=0 \\ 2T(n-1)+7 & \text{khi } n>0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)+7]\, x^n + 1$$

$$= \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n}_{A} + \underbrace{7\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{B} + 1$$

Xét $A = 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = 2x\, f(x)$

Xét $B = 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$

Thay A, B vào $f(x)$, ta được:

$$f(x) = 2x f(x) + \frac{7}{1-x} - 6$$

$$\Leftrightarrow f(x)(1-2x) = \frac{7}{1-x} - 6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{7}{(1-x)(1-2x)} - \frac{6}{1-2x}$$

$$= \frac{-7}{1-x} + \frac{14}{1-2x} - \frac{6}{1-2x}$$

$$= \frac{-7}{1-x} + \frac{8}{1-2x}$$

$$= -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-7 + 8.2^n)\, x^n$$

Mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$

$$\Rightarrow T(n) = -7 + 8.2^n$$

b.

$$T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2) \quad \text{nếu } n \geqslant 2$$
$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 2$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty}[7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + 1 + 2x$$

$$= \underbrace{7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n}_{A} - \underbrace{12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n}_{B} + 1 + 2x$$

Xét $A = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n = 7x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = 7x(f(x)-1)$

Xét $B = 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n = 12x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = 12x^2 f(x)$

Thay A, B vào $f(x)$, ta được:

$$f(x) = 7x(f(x)-1) - 12x^2 f(x) + 1 + 2x$$

$$\Leftrightarrow f(x).(1 - 7x + 12x^2) = 1 - 5x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1-5x}{(3x-1)(4x-1)}$$

$$= \frac{-2}{3x-1} + \frac{1}{4x-1}$$

$$= \frac{-1}{1-4x} + \frac{2}{1-3x}$$

$$= -1\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1.4^n + 2.3^n)x^n$$

Mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$$\Rightarrow T(n) = -1.4^n + 2.3^n$$

C.

$T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ nếu $n \geqslant 1$ (1)

$T(0) = 3$

(1) $\Rightarrow T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$ nếu $n \geqslant 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T(n-1) + 2(n+1)\right] x^n + 3$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n}_{A} + \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n}_{B} + 3$$

Xét $A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1} = x\, f(x)$

Xét $B = 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{2}{(1-x)^2} - 2$

Thay A, B vào f(x), ta được:

$$f(x) = x f(x) + \frac{2}{(1-x)^2} - 2 + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$$

Ta có: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n$$

Thay vào f(x), ta được:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 3)\, x^n$$

Mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$

$$\Rightarrow T(n) = n^2 + 3n + 3$$