V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Theodor Zies
theodor.zies@tu-dortmund.de

Tom Troska
tom.troska@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.11.2021   Abgabe: 23.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie

Das Ziel dieses Versuches ist es, die Zeitkonstante RC des RC-Kreises zu bestimmen, den Phasenversatz und die Amplitudenveränderung zu betrachten und die Geeignetheit des RC-Kreises als Integrator zu prüfen. Relaxation beschreibt allgemein die nicht-oszillatorische Rückkehr eines Systems in seinen Ausgangszustand. Die Änderung der betrachteten Größe ist meistens proportional zur Zeit t, somit ergibt sich eine asymptotische Annährung an den Ausgangszustand.[Unk]

1.1. Auf- und Entladen eines Kondensators

Ein wichtiges Beispiel für Relaxationsvorgänge ist das Entladen eines zuvor aufgeladenen Kondensators im RC-Kreis. Ein RC-Kreis besteht aus einem Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C, sowie einem Schalter, um zwischen Auf- und Entladung zu wechseln:

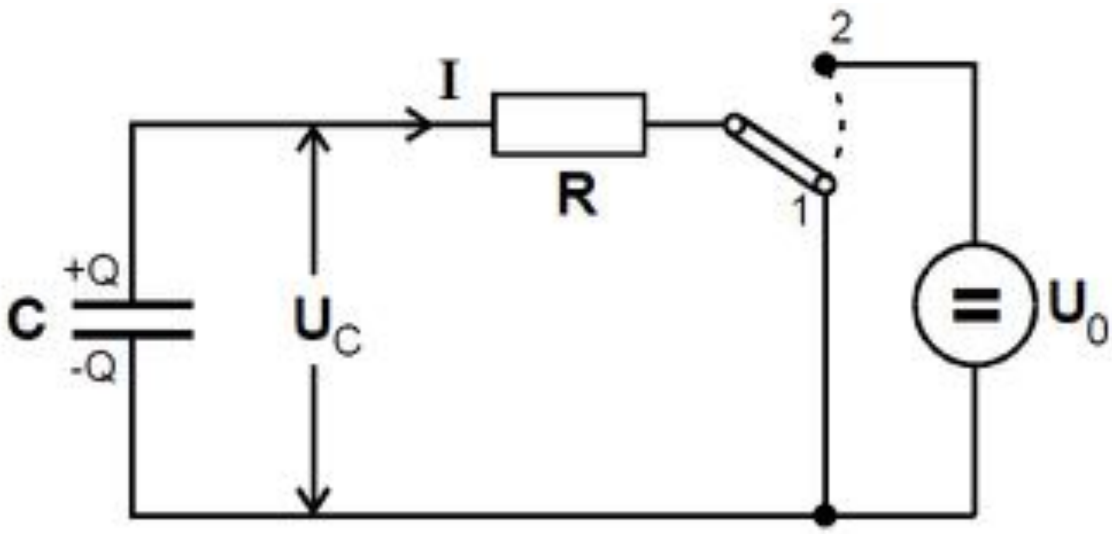


Abbildung 1: RC Kreis mit Schalter. [Unk]

Der Spannungsverlauf bei der Entladung ist gegeben durch:

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}. \tag{1}$$

Bei der Aufladung lautet die Formel:

$$U(t) = U_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}). \tag{2}$$

Dabei beschreibt RC die Zeitkonstante, diese ist das Maß für die Geschwindigkeit mit der das System seinem Ausgangszustand zustrebt und soll in diesem Versuch experimentell ermittelt werden. Außerdem wird das Öffnen/Schließen des Schalters durch das Anlegen einer Rechteckspannung ersetzt.

1.2. Relaxationsvorgänge bei periodischer Auslenkung

Nun wird der RC-Kreis mit Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ betrieben:

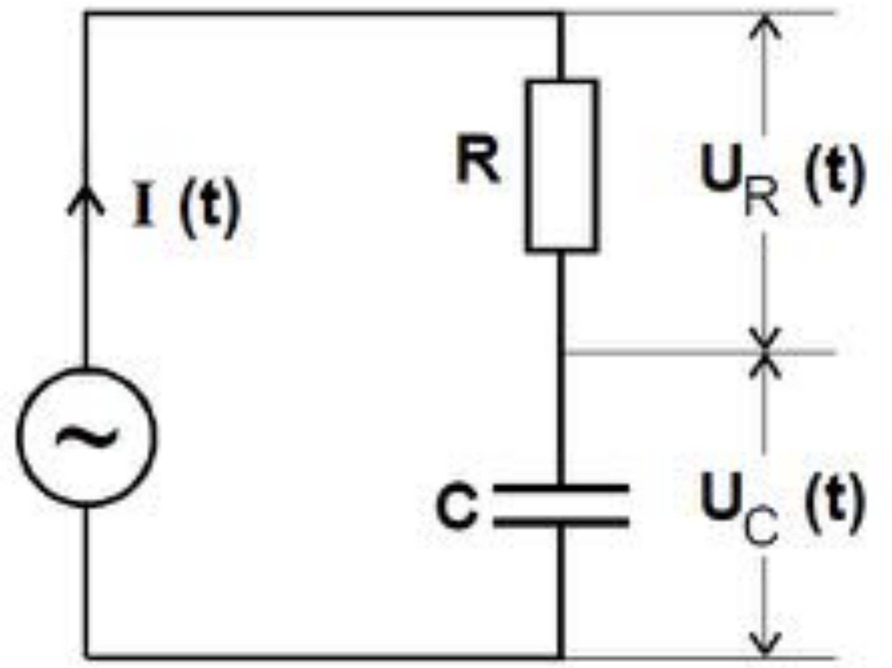


Abbildung 2: RC Kreis mit angelegter Wechselspannung. [Unk]

Die Amplitude A der am Kondensator gemessenen Spannung $U_C(t)$ hängt von der Frequenz ω der Wechselspannung ab:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \tag{3}$$

Zusätzlich ergibt sich ein Phasenversatz φ der Kondensatorspannung $U_C(t)$ und der angelegten Spannung $U(t)$ in Abhängigkeit von der Frequenz ω:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \tag{4}$$

Für kleine Frequenzen bleibt die Amplitude A also nahezu unverändert, bei wachsender Frequenz ω nimmt sie ab während der Phasenversatz φ größer wird. Für sehr große ω geht A gegen Null und der Phasenversatz beträgt $\frac{\pi}{2}$. Dieser Verlauf wird in der Auswertung graphisch dargestellt und ebenfalls verwendet, um die Zeitkonstante RC zu bestimmen.

Aufgrund des beschriebenen Verhaltens wird ein solcher RC-Kreis mit Wechselspannung auch als Tiefpass bezeichnet, weil die angelegte Spannung für niedrige Frequenzen ohne Phasenversatz durchgelassen wird.

1.3. Der RC-Kreis als Integrationsglied

Für Frequenzen $\omega >> 1/RC$ kann man näherungsweise schreiben:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')dt'. \tag{5}$$

Der RC-Kreis ist also in der Lage, die angelegte Spannung $U(t)$ zu integrieren. Dies folgt direkt aus Gleichung 5, da die Kondensatorspannung $U_C(t)$ proportional zum Integral der angelegten Spannug, also $\int U(t)dt$, ist. Dieses Verhalten wird im Versuch graphisch untersucht.

2. Durchführung

2.1. Messung der Zeitkonstanten RC über die Entladekurve

Für die erste Aufgabe wird die Schaltung in Abbildung 3 verwendet. Dabei wird wie in der Theorie bereits erläutert eine Rechteckspannung angelegt.

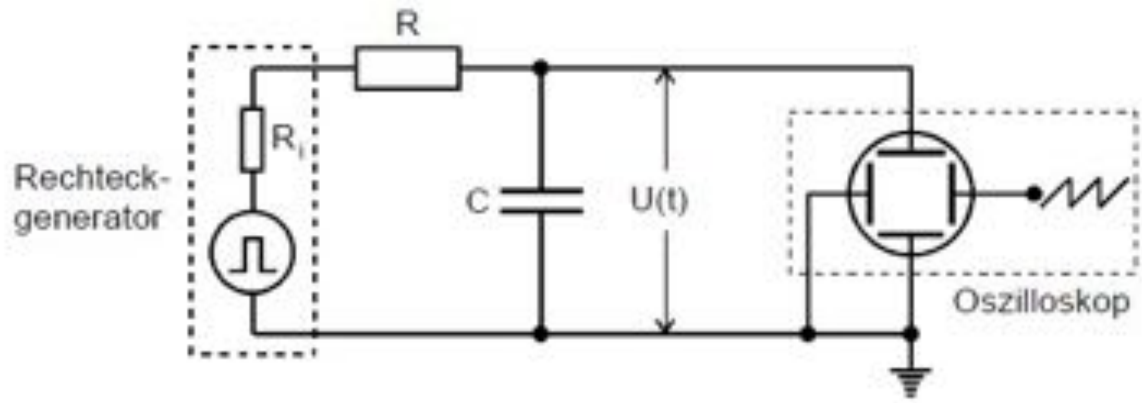


Abbildung 3: Schaltbild für Messung der Zeitkonstanten RC über die Entladekurve. [Unk]

Es wird der Verlauf der Kondensatorspannung $U_\mathrm{C}(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t beobachtet. Die Frequenz der angelegten Rechteckspannung wird hierbei so eingestellt, dass sich eine Änderung um den Faktor 5 bis 10 von $U_\mathrm{C}(t)$ auf dem Oszilloskop ablesen lässt. Anschließend wird das Bild des Oszilloskops fotografiert und in der Auswertung analysiert.

2.2. Messung der Frequenabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung

Nun wird das Schaltbild entsprechend Abbildung 4 verändert und eine Wechselspannung angelegt.

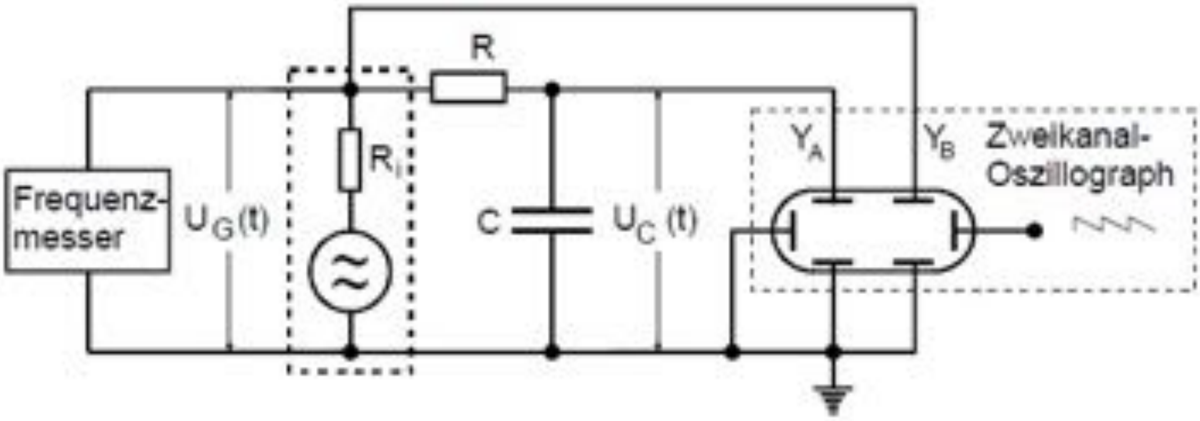


Abbildung 4: Schaltbild für Messung der Frequenabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung. [Unk]

Dabei ist die Frequenz variabel einstellbar, wobei die Amplitude der Wechselspannung identisch bleibt. Es wird nun die Amplitude A der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz f gemessen, dabei wird f von 50 Hz bis 100 kHz, also über mehrere Zehnerpotenzen hinweg, variiert.

Außerdem werden die Periodendauer b und der Abstand a der Nulldurchgänge gemessen, aus denen in der Auswertung der Phasenversatz zwischen U_C und U_0 ermittelt wird. In Abbildung 5 ist die geometrische Bedeutung von b und a skizziert. Die Messwerte werden in einer Tabelle erfasst und anschließend ausgewertet.

2.3. Nutzung des RC-Kreises zur Integration von Spannungen hoher Frequenz

Zuletzt wird die Wirkung des RC-Kreises als Integrationsglied überprüft, dafür kann die Schaltung aus Aufgabe C beibehalten werden. Es wird wie in der Theorie erklärt eine Wechselspannung mit geigneter Frequenz $\omega >> 1/RC$ eingestellt. Dabei werden 3 verschiedene Formen der Wechselspannung gewählt: Eine Rechteck-, Sinus und Dreieickspannung. Auf dem 2-Kanal Oszilloskop ist jeweils die Form der Kondensatorspannung $U_C(t)$ und die Form der gewählten Wechselspannung $U_G(t)$ zu sehen. Die 3 Bilder werden fotografiert und in der Auswertung analysiert.

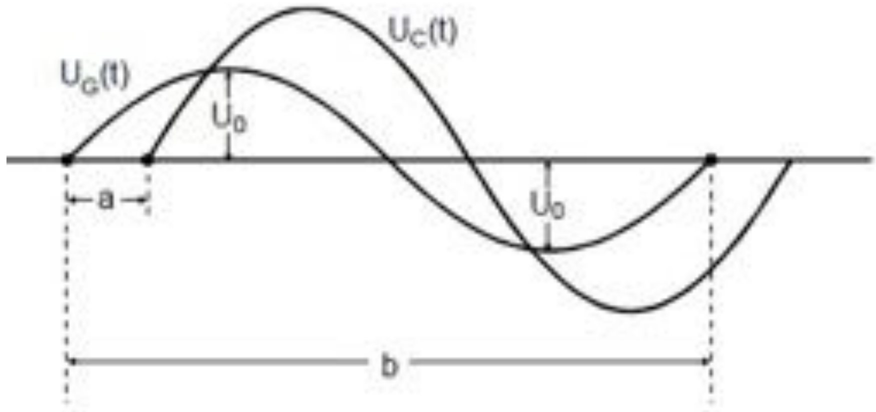


Abbildung 5: Skizze zur Ermittlung des Phasenversatzes. [Unk]

3. Auswertung

3.1. Messung der Zeitkonstanten RC über die Entladekurve

Die Entladekurve des RC-Kreises wird mit einem Oszilloskop sichtbar gemacht, wie in Abbildung 6 zu sehen ist. Die verwendete Frequenz beträgt $f = 5\,\text{kHz}$. Im Folgenden werden Wertepaare $\{t[\mu\text{s}], U[\text{V}]\}$ mithilfe von eingezeichneten Hilfslinien abgelesen (Abbildung 7) und tabellarisch aufgeführt (Tabelle 1). Es ist zu beachten, dass die Schrittweite von t nicht gleichmäßig gewählt wird, da sich die Werte mit der gewählten Schrittweite mit geringerem Fehler ablesen lassen. Die Fehler von t und U werden zu $\Delta t = 1\,\mu\text{s}$ und $\Delta U = 0,1\,\text{V}$ abgeschätzt.

Die Formel des Entladevorgangs eines Kondensators Gleichung 1 wird umgestellt zu

$$\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t. \tag{6}$$

Mithilfe der Python-Erweiterungen "numpy"[Oli07], "scipy"[JOP+] und "matplotlib"[Hun07] werden die Wertepaare der Tabelle 1 halblogarithmisch geplottet und es wird eine Regressionsgerade ermittelt und eingezeichnet.

Die Parameter der Ausgleichsgerade vom Typ $\ln(\frac{U}{U_0}) = m \cdot t + b$ werden zu

$$m = -0,02505 \pm 0,00018\,\frac{1}{\text{s}} \tag{7}$$
$$b = 0,0136 \pm 0,0001$$

bestimmt. Die Zeitkonstante RC ist folglich

$$RC = \frac{1}{m} = (39,92 \pm 0,28)\,\mu\text{s}. \tag{8}$$

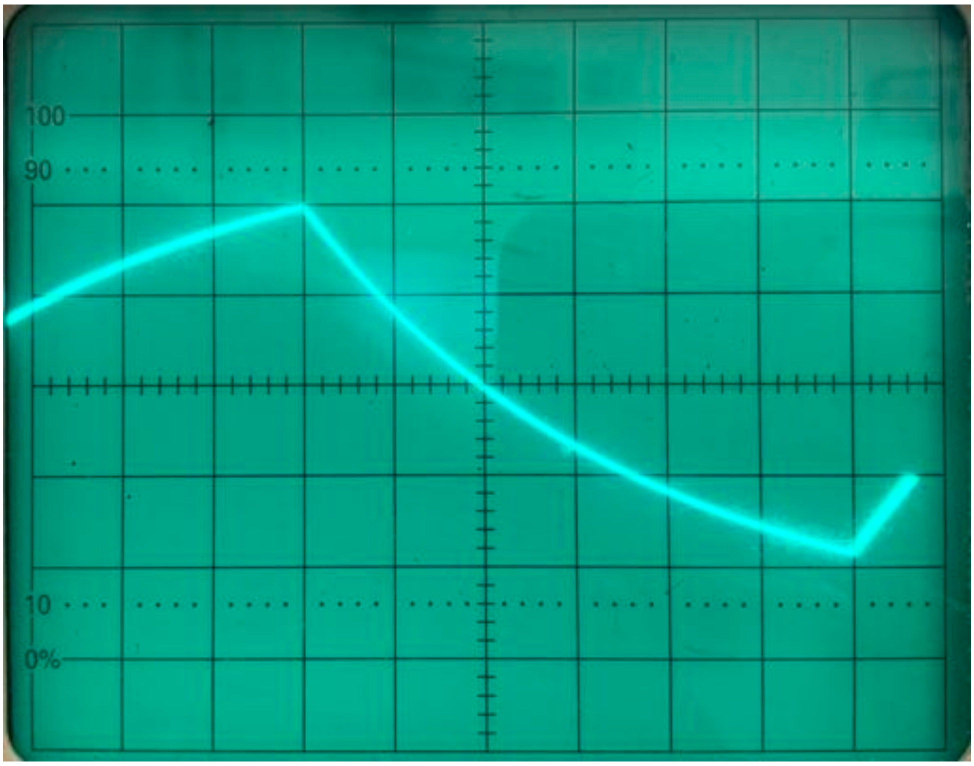
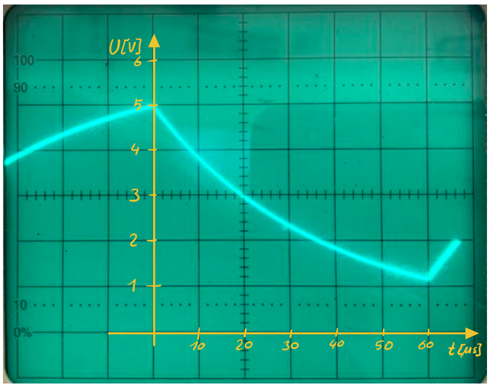
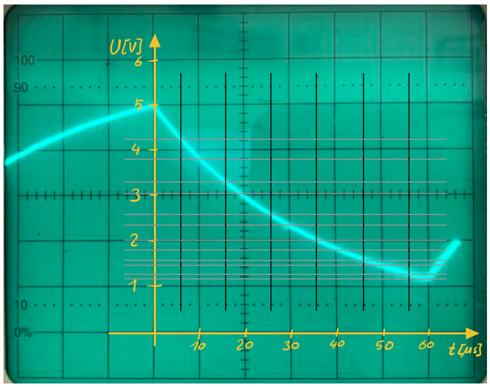


Abbildung 6: Entladekurve des Kondensators mit Vorwiderstand.



(a) Entladekurve mit Koordinatensystem.



(b) Entladekurve mit Hilfslinien.

Abbildung 7: Entladekurve mit eingezeichnetem Koordinatensystem und Hilfslinien. Die Skalierung wurde vorher durch Abgleich mit der Amplitude der Rechteckspannung ermittelt.

Tabelle 1: Darstellung der Messwertpaare, welche aus Abbildung 7 abgelesen wurden.

s [µs]	U [V]	$\ln(\frac{U}{U_0})$
0	5,0	0,00±0,02
6	4,2	-0,17±0,02
10	3,8	-0,27±0,02
16	3,3	-0,41±0,03
20	3,0	-0,51±0,03
26	2,6	-0,65±0,03
30	2,3	-0,77±0,04
36	2,0	-0,91±0,05
40	1,8	-1,02±0,05
46	1,6	-1,13±0,06
50	1,4	-1,27±0,07
56	1,2	-1,42±0,08
60	1,1	-1,51±0,09

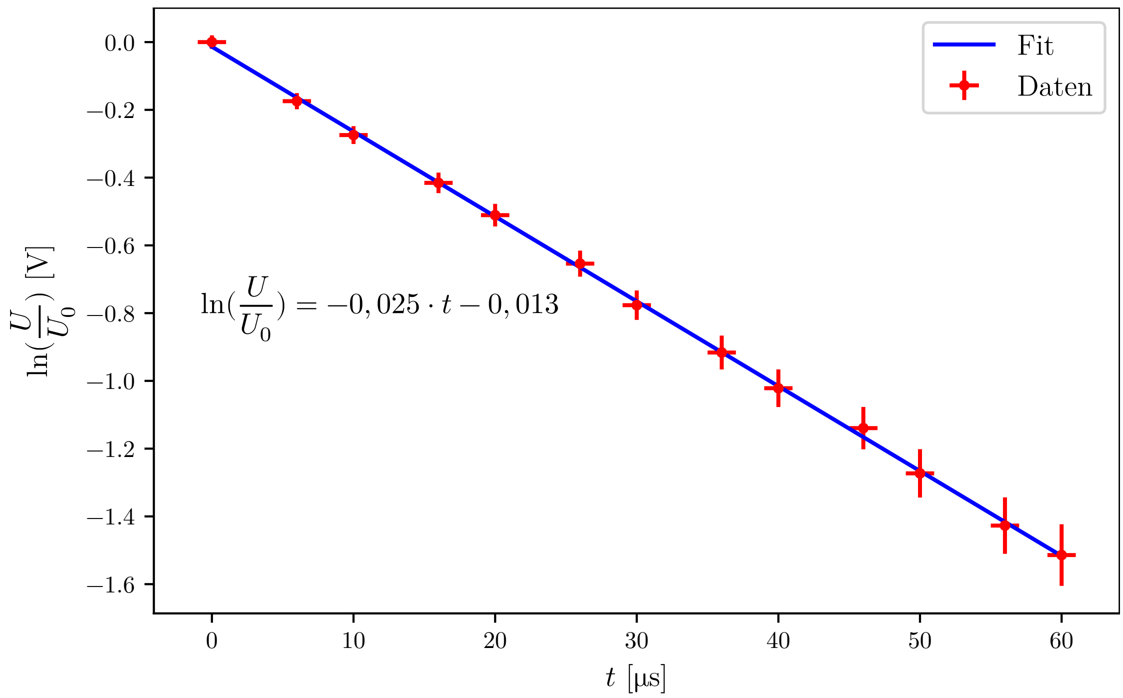


Abbildung 8: Halblogarithmischer Plot der Wertepaare aus Tabelle 1 mit konstantem Fehler $\Delta f = 0{,}1\,\mathrm{Hz}$ und Ausgleichsgerade.

3.2. Bestimmung der Zeitkonstante RC über die Frequenabhängigkeit der Amplitude

Die Spannung am Kondensator A wird ebenso wie die Spannung der Sinusspannungsquelle U_0 bei variabler Frequenz f gemessen und tabellarisch in Tabelle 2 dargestellt. Da sich bei der Messung U_0 als frequenzunabhängig und zu $U_0 = 2,8\text{V}$[1] bestimmen lässt, ist dieser Wert aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in der Tabelle aufgeführt. Das Teilungsverhältnis aus $\frac{A}{U_0}$ wird berechnet und gleichermaßen dokumentiert. Als Fehler für die Frequenz f wird $\Delta f = 0,1\text{Hz}$ und für den Fehler in der Messung der Amplitude A wird $\Delta A = 0,1\text{V}$ verwendet.

Tabelle 2: Messwertpaare Frequenz f und Amplitude A sowie die Relativamplitude $\frac{A}{U_0}$.

f [Hz]	A [V]	$\frac{A}{U_0}$
50	2,80	1,000
100	2,65	0,946
150	2,60	0,929
200	2,60	0,929
500	2,60	0,929
1000	2,50	0,893
1500	2,30	0,821
2000	2,05	0,732
3000	1,80	0,643
4000	1,50	0,536
5000	1,10	0,393
10 000	0,68	0,243
20 000	0,30	0,107
30 000	0,22	0,079
50 000	0,14	0,050
100 000	0,07	0,025

Die Wertepaare $\{f[\text{Hz}], \frac{A}{U_0}\}$ aus Tabelle 2 werden in ein Diagramm aufgetragen und es wird eine nicht-lineare Ausgleichsrechnung mit denselben Python-Erweiterungen wie für die lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Auch die Fehlerrechnung wird analog durchgeführt. Für den Plot werden nicht die gerundeten Werte aus Tabelle 2 verwendet, sondern die exakteren Werte $\frac{A}{U_0}$.

[1] Anm.: Abgelesen wurden 5,2V, allerdingsist die Feineinstellung des Oszilloskops defekt, daher konnte die Amplitude nicht kalibriert werden. Für kleine f gilt $U_0 \approx A$, weshalb wir im Folgenden mit $U_0 = 2,8\text{V}$ gerechnet haben.

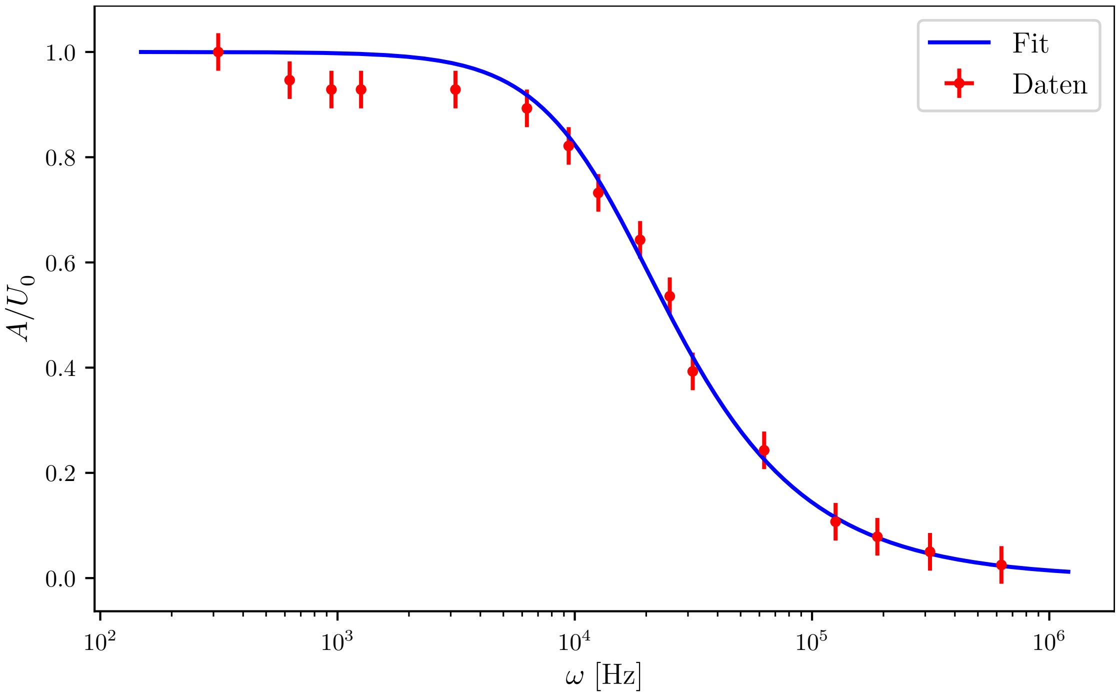


Abbildung 9: Plot der Wertepaare aus Tabelle 2 mit nicht-linearer Ausgleichsfunktion Gleichung 9.Hierbei sind die Werte mit einer kostanten Messungenauigkeit von $\Delta\frac{A}{U_0} = 0,035$ und $\Delta\omega = 0{,}1\,\mathrm{Hz}$ behaftet.

Die nicht-lineare Ausgleichsrechnung liefert für die Funktion

$$\frac{A}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot (RC)^2}} \tag{9}$$

den Wert $RC = (68,750206 \pm 0,000009)\,\mu\text{s}$.

3.3. Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebungzwischen U_C und U_0

Neben der Amplitude ist auch die Phase zwischen U_C und U_0 abhänging von der Frequenz der Spannungsquelle. Der Zusammenhang wird durch die Formel

$$\varphi(\omega) = -\arctan(-\omega \cdot RC) \tag{10}$$

beschrieben. Die Phase φ wird über

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \tag{11}$$

berechnet. Die Messunsicherheit wird sowohl für a als auch für b mit $\Delta a = \Delta b = 0,1\text{s}$ berücksichtigt.

Tabelle 3: Messwert Frequenz f, Phasenverschiebung a, Periodenlänge b. Errechnete Phasenverschiebung φ.

f [Hz]	a [µs]	b [µs]	φ [rad]	φ [$\frac{\pi}{\text{rad}}$]
50	0	20 000	0,000 00 ± 0,000 03	0,000
100	100	10 000	0,062 83 ± 0,000 06	0,020
150	100	6500	0,096 66 ± 0,000 09	0,031
200	100	5000	0,125 66 ± 0,000 12	0,040
500	100	2000	0,3141 ± 0,0003	0,100
1000	100	1000	0,6283 ± 0,0006	0,200
1500	55	630	0,5485 ± 0,0010	0,175
2000	50	500	0,6283 ± 0,0012	0,200
3000	44	330	0,8377 ± 0,0019	0,267
4000	40	250	1,0053 ± 0,0025	0,320
5000	36	200	1,1309 ± 0,0031	0,360
10 000	22	100	1,3823 ± 0,0064	0,440
20 000	12	52	1,449 ± 0,012	0,462
30 000	8	34	1,478 ± 0,018	0,471
50 000	4,9	20	1,539 ± 0,032	0,490
100 000	2,5	10	1,570 ± 0,064	0,500

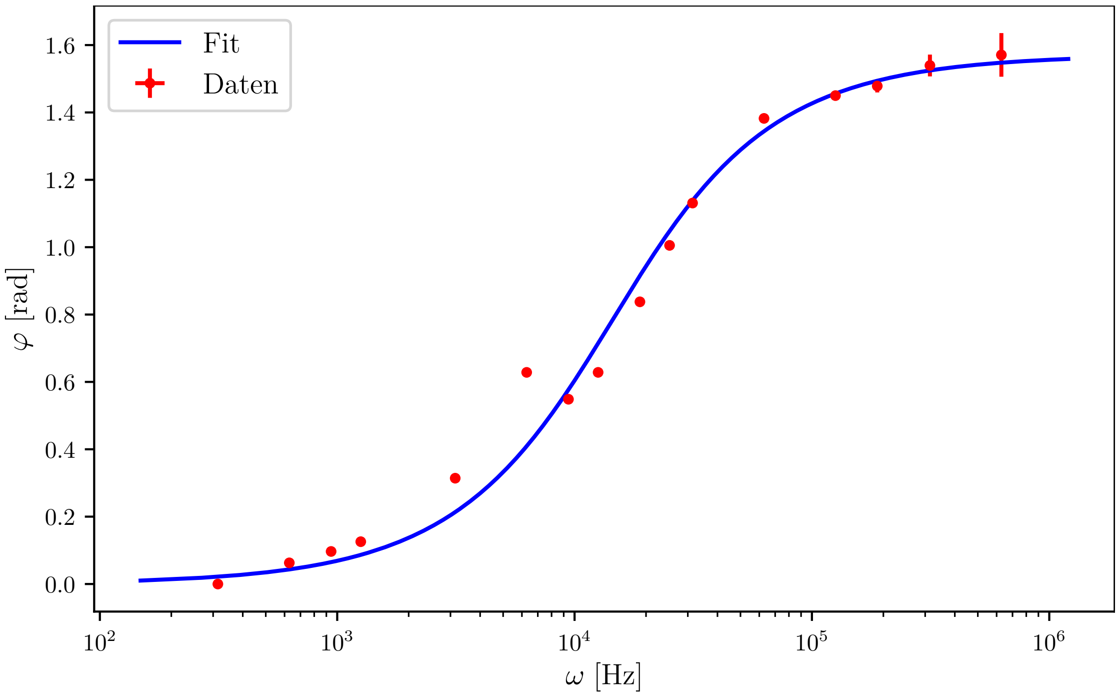


Abbildung 10: Plot der Wertepaare aus Tabelle 3 mit konstantem Fehler $\Delta\omega = 0{,}1\,\mathrm{Hz}$ und nicht-linearerAusgleichsfunktion Gleichung 10.

Auch hier wird für die Wertepaare $\{f[\mathrm{Hz}], \varphi\ [\mathrm{rad}]\}$ eine nicht-lineare Ausgleichsrechnung unter der Funktion für die Phasenverschiebung (Gleichung 10) durchgeführt. Die Zeitkonstante RC lässt sich hier bestimmen zu:

$$RC = (69{,}01295 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{\mu s}. \tag{12}$$

Darüber hinaus werden die Messwerte der frequenzabhängigen Amplitude A aus Tabelle 2 und der ebenfalls frequenzabhängigen Phase φ aus Tabelle 3 in einem Polarplot (Abbildung 11) visualisiert. Zum Vergleich wird deren theoretischer Zusammenhang ebenfalls geplottet, dieser ergibt sich aus Gleichung 10 umgestellt nach ω:

$$\omega = -\frac{\tan(\varphi)}{RC} \tag{13}$$

eingesetzt in

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} \tag{14}$$

Daraus resultiert

$$A(\varphi) = \cos(\varphi) \cdot U_0. \tag{15}$$

.

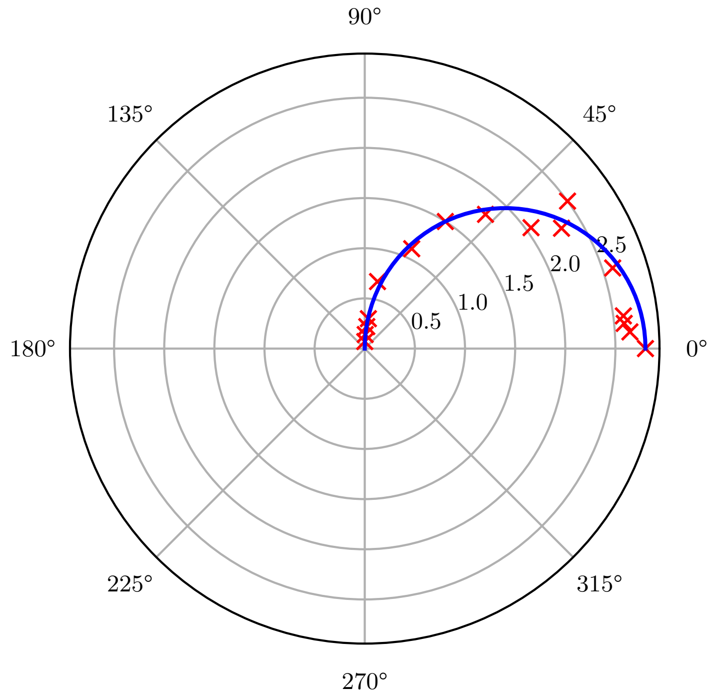


Abbildung 11: Polarplot der Amplitude A in Abhängigkeit der Phasenverschiebung φ.

3.4. Nutzung des RC-Kreises zur Integration von Spannungen hoher Frequenz

Aus Unterabschnitt 1.3 wird klar, dass ein RC-Kreis Spannungen für eine Frequenz $f >> \frac{1}{RC}$ integriert. Als Erstes wird eine Rechteckspannung angelegt. Der Spannungsverlauf einer Rechteckspannung ist jeweils für ein Zeitintevall konstant, somit ist eine Stammfunktion dazu von linearer Art, wie auch in Abbildung 12 zu sehen ist.

Für eine angelegte Dreieckspannung wird erwartet, dass sich für die Spannung U_C ein quadratischer Verlauf ergibt, da eine Dreieckspannung für ein Zeitintevall linear steigt oder sinkt. Dies lässt sich auch in Abbildung 13 erkennen.

Als letztes wird eine Sinusspannungsquelle verwendet. Die Spannung U_C stellt sich als phasenverschoben und amplitudenreduziert gegenüber der Spannung U_0 ein (Abbildung 14). Da eine Stammfunktion zu der Funktion $f(\omega) = \sin(\omega t)$ die Funktion $F(\omega) = \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)$ ist, zeigt sich auch hier, dass der RC-Kreis für bestimmte Frequenzen als Integrator dienen kann.

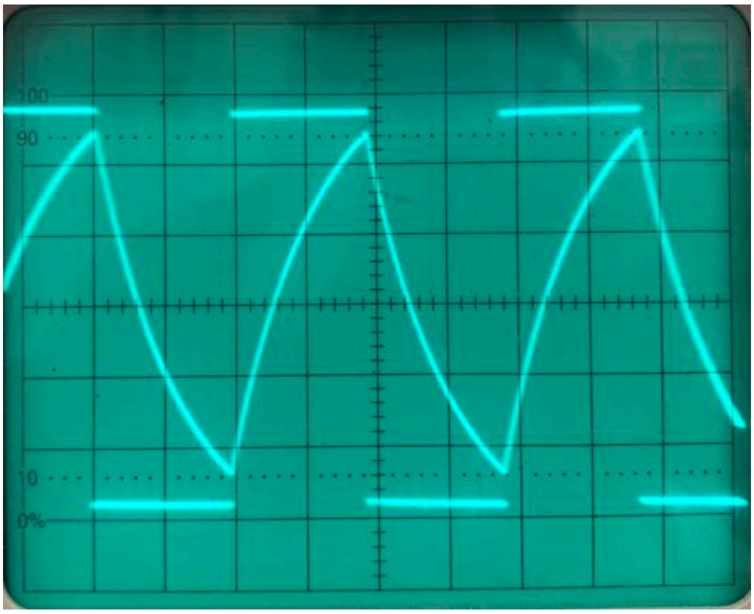


Abbildung 12: Rechteckspannung U_0 und Kondensatorspannung mit $f = 5\text{kHz}$.

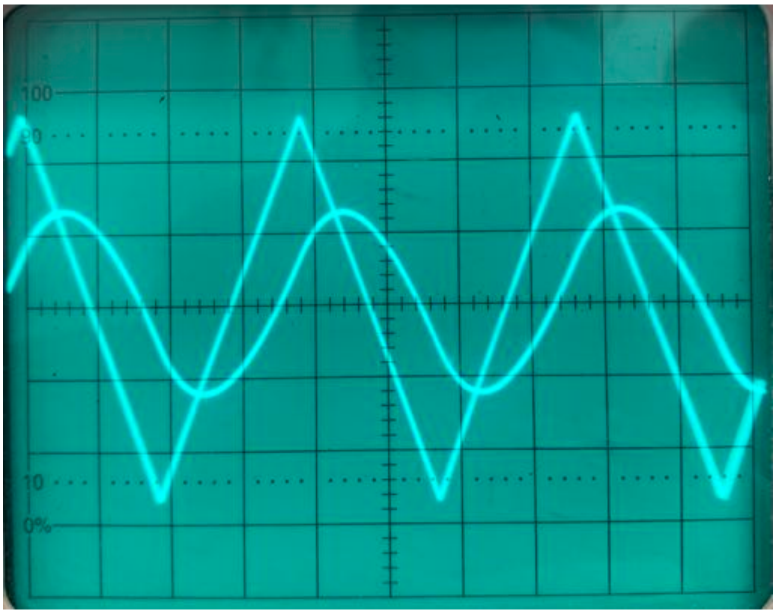


Abbildung 13: Dreieckspannung U_0 und Kondensatorspannung mit $f = 5\text{kHz}$.

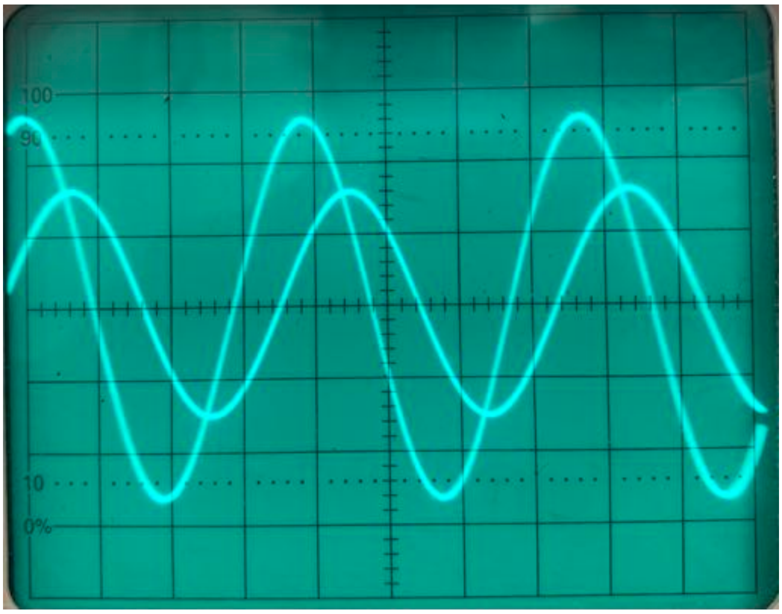


Abbildung 14: Sinusspannung U_0 und Kondensatorspannung mit $f = 5$kHz.

4. Diskussion

Die Zeitkonstante RC ergibt sich mit den unterschiedlichen Messverfahren zu den Werten

$$RC_1 = (39,92 \pm 0,28)\,\mu\text{s}$$
$$RC_2 = (68,750206 \pm 0,000009)\,\mu\text{s}$$
$$RC_3 = (69,01295 \pm 0,00001)\,\mu\text{s}.$$

Die ermittelte Größe RC_1 weicht deutlich von den Größen RC_2 und RC_3 ab. Dabei ist zu beachten, für die Ermittlung der Größen RC_2 und RC_3 der Versuchsaufbau nicht verändert wurde und die Werte zur Bestimmung dieser beiden Größen zusammen gemessen wurden, entsprechend ergeben sich ähnliche Werte. Ein möglicher Grund für die große Abweichung von rund 42% des ersten Wertes auf die anderen Werte ist ein fehlerhafter Frequenzgenerator, der keine konstante Amplitude erzeugt hat. Alternativ ist es auch denkbar, dass Einstellungen am Oszilloskop fehlerhaft vorgenommen wurden. Über die Größenordnung der Zeitkonstante RC lässt sich dennoch eine Aussage treffen, da alle drei Messungen in derselben Größenordnung von 10 µs liegen.

Qualitativ konnte die Theorie zur Funktionsweise es Tiefpass verifiziert werden, da die Plots in Abbildung 9 und Abbildung 10 den Verlauf von Spannung und Phasenversatz wie in der Theorie beschrieben darstellen. Auch die Oszilloskopbilder aus Abbildung 12, Abbildung 13 und Abbildung 14 bestätigen qualitativ die Funktionsweise eines Tiefpass als Integrationsglied.

Literatur

[Hun07] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[JOP+] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[Oli07] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[Unk] Unknown. *Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, Fakultät Physik.

A. Anhang

A.1. Originaldaten

V353 - Relaxationszeit eines RC-Kreises

a) $f = 54\,\mathrm{Hz}$

$\frac{1V}{Div}$

$\frac{10\mu s}{Div}$

Spannungsabfall bei "0%"

b) ~~U...~~

c)

f in Hz	A in V	U_0 in V	a	b
50	2,628	5,2	0ms	20ms
100	2,65	5,2	0,1ms	10ms
150	2,6	5,2	0,1ms	6,5ms
200	2,6	5,2	0,1ms	5ms
500	2,6	5,2	0,1ms	2ms
1000	2,5	5,2	0,1ms	1ms
1500	2,3	5,2	55µs	630µs
2000	2,05	5,2	50µs	500µs
~~5000~~	~~1,~~	~~5,2~~		
3000	1,8	5,2	44µs	330µs
4000	1,5	5,2	40µs	250µs
5000	~~0,6~~ 1,1	5,2	36µs	200µs
10.000	0,68	5,2	22µs	100µs
20.000	0,3	5,2	12µs	52µs
30.000	0,22	5,2	8µs	34µs
50.000	0,14	5,2	4,8µs	20µs
100.000	0,07	5,2	2,5µs	10µs

1) $f = 54\,\mathrm{Hz}$