V407

Fresnelsche Formeln

Theodor Zies
theodor.zies@tu-dortmund.de

Tom Troska
tom.troska@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.06.2022

Abgabe: 21.06.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es, die Fresnelschen Formeln zu verifizieren, indem ein Laserstrahl an einem Siliziumkristall gebrochen wird. Außerdem soll ein experimenteller Wert des Brechungsindex von Silizium sowie der Brewsterwinkel bestimmt werden.

2. Theorie

Licht, welches aus einem Medium in ein anderes übergeht, wird an der Grenzfläche zwischen den Medien gebrochen und reflektiert. Für den transmittierten Teil gilt des Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta). \tag{1}$$

Dabei wird klar, dass die Brechung in direktem Zusammenhang zu dem Einfallswinkel und dem Verhältnis der Brechungsindices steht.
Zur näheren Beschreibung der Reflexion und Transmission von Licht werden die Fresnelschen Formeln hergeleitet.

2.1. Herleitung der Fresnelschen Formeln

Aufgrund der Tatsache, dass Licht aus elektromagnetischer Strahlung besteht, lässt sich die Strahlleistung mit dem Pointingvektor

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{2}$$

schreiben. Mithilfe der Maxwellgleichungen der Elektrodynamik lässt sich der Betrag des Pointingvektors (2) zu

$$S = |\boldsymbol{S}| = c\varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 \tag{3}$$

berechnen. Mit Energieüberlegungen und dem Betrag des Pointingvektors (3) kann die Aufteilung der Strahlleistung

$$S_{\text{ein}} \cos(\alpha) = S_{\text{ref}} \cos(\alpha) + S_{\text{trans}} \cos(\beta) \tag{4}$$

bestimmt werden. Die geometrischen Überlegungen dazu sind in Abbildung 1 dargestellt.

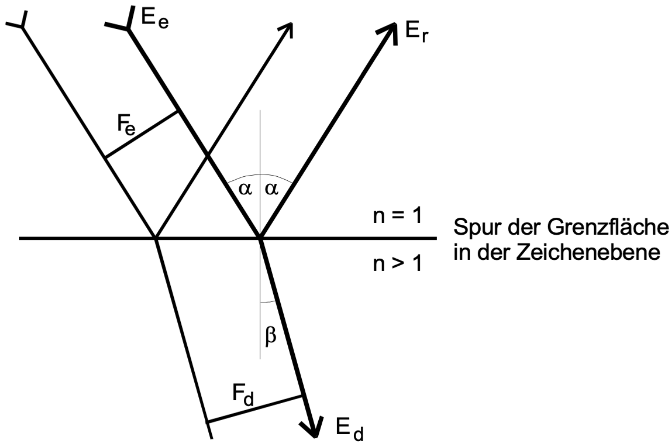


Abbildung 1: Skizzierung von Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche [2].

Wird der Betrag des Pointingvektor (3) in die Aufteilung (4) eingesetzt, ergibt sich

$$(\boldsymbol{E}_{\text{ein}}^2 - \boldsymbol{E}_{\text{ref}}^2)\cos(\alpha) = n\boldsymbol{E}_{\text{trans}}^2\cos(\beta).$$

Dafür wird $n^2 = \varepsilon$ und $c^2 = (\varepsilon\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$, was für nicht-ferromagnetische Stoffe gilt, verwendet. Das elektrische Feld lässt sich in einen senkrecht und einen parallel polarisierten Teil gemäß

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{s}} + \boldsymbol{E}_{\text{p}}$$

aufteilen. Mithilfe von Stetigkeitsüberlegungen

$$\boldsymbol{E}_{\text{ein},s} + \boldsymbol{E}_{\text{ref},s} = \boldsymbol{E}_{\text{trans},s}$$
$$(\boldsymbol{E}_{\text{ein},p} - \boldsymbol{E}_{\text{ref},p})\cos(\alpha) = \boldsymbol{E}_{\text{trans},p}\cos(\beta)$$

an der Grenzfläche lässt sich $\boldsymbol{E}_{\text{trans}}$ herauskürzen. Wird darüber hinaus das Snelliussche Brechungsgesetz (1) eingesetzt, ergibt sich für die s- und p-polarisierten Amplituden des $\boldsymbol{E}$-Feldes zu

$$\boldsymbol{E}_{\text{ref, s}} = -\boldsymbol{E}_{\text{ein, s}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} - \cos(\alpha)}{n^2 - 1} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{E}_{\text{ref, p}} = \boldsymbol{E}_{\text{ein, p}} \cdot \frac{n^2\cos(\alpha) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n^2\cos(\alpha) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}. \tag{6}$$

2.2. Brewsterwinkel

Der Brewsterwinkel α_{p} beschreibt den Winkel, unter dem ein Lichtstrahl vollständig durch eine Grenzfläche transmittiert, also der reflektierte Anteil verschwindet. Er ergibt sich, indem Gleichung (6) mit Additionstheoremen zu

$$\boldsymbol{E}_{\text{ref, p}} = \boldsymbol{E}_{\text{ein, p}} \cdot \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

umgeschrieben wird. Für ein

$$\alpha_\mathrm{p} + \beta_\mathrm{p} = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

gilt $\tan(\frac{\pi}{2}) \to \infty$, weshalb der gesamte Term null wird. Die Bedingung (7) wird in das Snelliussche Brechungsgesetz (1) eingesetzt und es folgt

$$n_2 = \tan(\alpha_p), \tag{8}$$

wenn der Brechungsindex für Luft mit $n_1 \approx 1$ approximiert wird.

3. Durchführung

Der in diesem Versuch verwendete Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

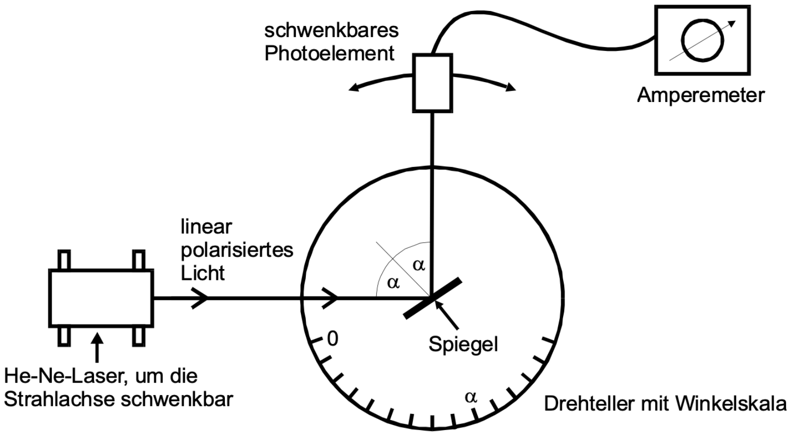


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Experimentes [2].

Der verwendete Laser emmittiert kein in eine bestimmte Richtung polarisiertes Licht, weswegen zwischen Laser und Spiegel ein Polarisationsfilter gesetzt wird. Der drehbare Spiegel ist im Detail in Abbildung 3 gezeigt.

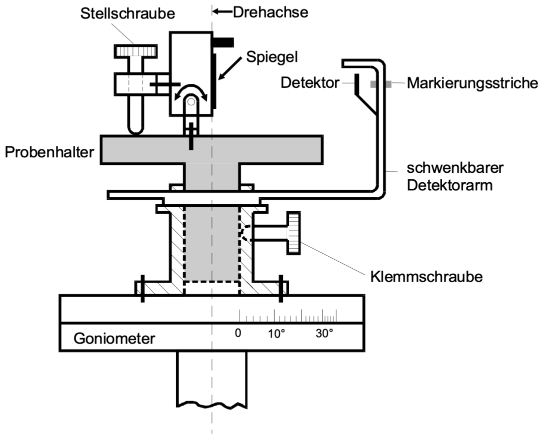


Abbildung 3: Skizze des verwendeten drehbaren Spiegels mit Goniometer [2].

Bevor die eigentliche Messung starten kann, werden eine Null- und eine Dunkelmessung durchgeführt. Für die Dunkelmessung wird der Photostrom ohne eingeschalteten Laser mithilfe der Photozelle gemessen, wohingegen bei der Nullmessung der Laser eingeschaltet wird.
In einem nächsten Schritt wird der Spiegel in die Apparatur eingesetzt und so ausgerichtet, dass ein Winkel von $\alpha = 0°$ gemessen wird, wenn der Laser zurück in die Öffnung strahlt. Nach der Kalibrierung werden die Photoströme für Winkel zwischen 5° und 87° gemessen, wobei alle 2° ein Wert für s-polarisiertes und ein Wert für p-polarisiertes Licht aufgenommen wird.

4. Auswertung

Im Folgenden wird der Brechungsindex n auf zwei Arten aus den experiementellen Daten bestimmt, die einzelnen Methoden werden getrennt betrachtet. Vor Versuchsbeginn wird eine Dunkelmessung durchgeführt, um den durch das Umgebungslicht ausgelösten Photostrom zu bestimmen, dieser ergibt sich zu

$$I_{\mathrm{D}} = 7\,\mathrm{nA}.$$

Außerdem bestimmt sich der Nullstrom, den der unreflektierte Laser in der Photozelle auslöst, zu

$$I_{0,\,\mathrm{s}} = 540\,\mathrm{\mu A}$$
$$I_{0,\,\mathrm{p}} = 520\,\mathrm{\mu A}.$$

4.1. Bestimmung der Brechungsindizes n_{s} und n_{p} über die Fresnelschen Formeln

Die gemessenen Photoströme sind in Tabelle 1 festgehalten. Von allen Strömen wird der aus der Dunkelmessung bestimmte Strom abgezogen. Um die Brechungsindizes aus den

Daten berechnen zu können, werden die Fresnelschen Formeln (5) und (6) nach n_s bzw. n_p umgestellt:

$$n_\mathrm{p}(\alpha, E) = \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^2 \frac{1}{2\cos^2(\alpha)} + \sqrt{\frac{1}{4\cos^2(\alpha)} \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^4 - \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^2 \tan^2(\alpha)} \tag{9}$$

$$n_\mathrm{s}(\alpha, E) = \sqrt{\frac{1+E^2+2E\cos(2\alpha)}{1-2E+E^2}} \tag{10}$$

Dabei beschreibt E das Verhältnis aus reflektierter und einfallender Amplitude. Da der Photostrom proportional zur Intensität und diese proportional zum Quadrat der Amplitude ist, lässt sich diese Größe auch schreiben als

$$E = \frac{E_\mathrm{ref}}{E_\mathrm{ein}} = \sqrt{\frac{I(\alpha)}{I_0}}.$$

Dabei ist I_0 der bereits bekannte der Nullstrom. Die Brechungsindizes ergeben sich somit durch Eingesetzen der Messwerte in (9) und (10). Hierbei fällt auf, dass durch systematische Fehler teilweise zu kleine Werte für n_s und zu große Werte für n_p resultieren. Um deren Einfluss auf das gemittelte Endergebnis zu minimieren, werden alle $n_\mathrm{s} < 3$ und $n_\mathrm{p} > 4.4$ vernachlässigt. Anschließend wird der Mittelwert aller Brechungsindizes gebildet, dessen Fehler mithilfe der Python-Erweiterung *uncertainties* [1] bestimmt wird. Die Ergebnisse lauten somit

$$\bar{n}_\mathrm{s} = (3{,}42 \pm 0{,}29)$$
$$\bar{n}_\mathrm{p} = (3{,}4 \pm 0{,}4).$$

Tabelle 1: Messdaten für die Photoströme bei s- und p-polarisiertem Licht, abhängig vom Einfallswinkel α.

$\alpha\,/\,^\circ$	$I_s\,/\,\mu A$	$I_p\,/\,\mu A$
5	46	42
7	40	39
9	41	40
11	42	38
13	40	36
15	43	38
17	46	41
19	46	39
21	47	40
23	49	40
25	49	40
27	48	36
29	51	38
31	56	39
33	56	38
35	57	36
37	63	38
39	66	36
41	62	32
43	68	33
45	68	32
47	76	32
49	79	30
51	80	26
53	76	23
55	94	24
57	100	22
59	100	20
61	100	17
63	107	14
65	113	11
67	113	9.0
69	120	6.2
71	120	3.6
73	130	2.2
75	133	1.6
77	143	3.8
79	147	6.0
81	147	14
83	153	26
85	153	46
87	160	88

4.2. Bestimmung der Brechungsindizes n_s und n_p über den Brewsterwinkel

Der Brewsterwinkel stellt in der Theorie ein vollständiges Verschwinden der Reflektion dar, sodass für den Photostrom $I_p = 0$ gilt. Da zu jederzeit ein gewisser Untergrundstrom vorhanden ist, fällt der gemessene Photostrom des p-polarisierten Lichts nie vollständig auf Null ab. Deshalb wird derjenige Winkel α gewählt, bei dem der Photostrom ein Minimum erreicht. Die Messwerte aus Tabelle 1 werden in Abbildung 4 geplottet, sodass ein Minimum abgelesen werden kann. Es ergibt sich ein Brewsterwinkel von $\alpha_B = 75°$, dieser wird ebenfalls in Abbildung 4 eingezeichnet.

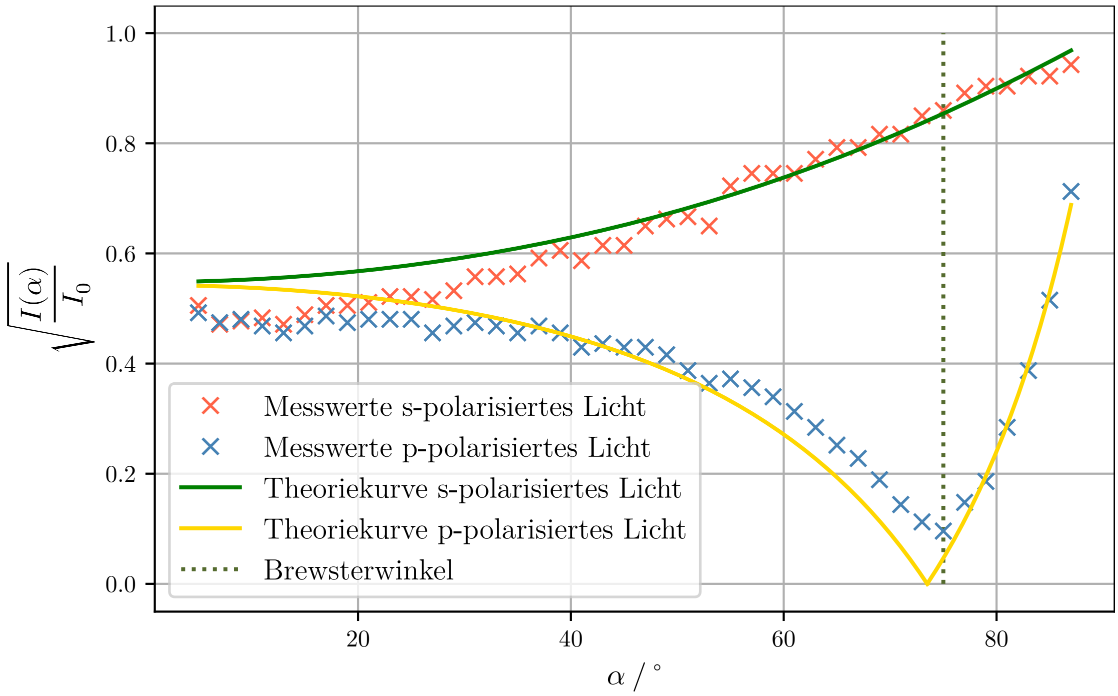


Abbildung 4: Plot der Messwerte sowie Theoriekurven für s- und p-polarisiertes Licht.

Mithilfe des bestimmten Brewsterwinkels kann aus (8) der Brechungsindex zu

$$n = 3{,}73$$

berechnet werden. Abschließend werden die Theoriekurven sowohl für das s- als auch für das p-polarisierte Licht in Abbildung 4 eingezeichnet. Dafür werden die in 4.1 berechneten Mittelwerte der Brechungsindizes in die Fresnelschen Formeln (5) und (6) eingesetzt.

5. Diskussion

Die experiementell bestimmten Brechungsindizes werden im Folgenden miteinander verglichen:

$$\begin{aligned}\bar{n}_{\mathrm{s}} &= (3{,}42 \pm 0{,}29)\\ \bar{n}_{\mathrm{p}} &= (3{,}4 \pm 0{,}4)\\ n_{\alpha_{\mathrm{B}}} &= 3{,}73\end{aligned}$$

In der Theorie ist für Licht mit $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$ in Silizium ein Brechungsindex von ca. 3,7 bis 4.0 zu erwarten. Der über den Brewsterwinkel bestimmte Brechungsindex stimmt also gut mit der Theorie überein. Allerdings weisen die über die Photoströme berechneten Werte eine größere Unsicherheit auf und sind zu gering. Die bereits erwähnten systematischen Fehler konnten vermutlich trotz des Aussortierens grob abweichender Werte nicht ausreichend kompensiert werden. In Abbildung 4 ist zu erkennen, dass die Messwerte zwar grob der Theoriekurve folgen, aber stellenweise nicht zu vernachlässigende Abweichungen aufweisen. Weitere Gründe für die Messfehler können die nicht exakte Winkelmessung an der Messapperatur sowie nicht konstante Schattenverhältnisse im Raum sein.

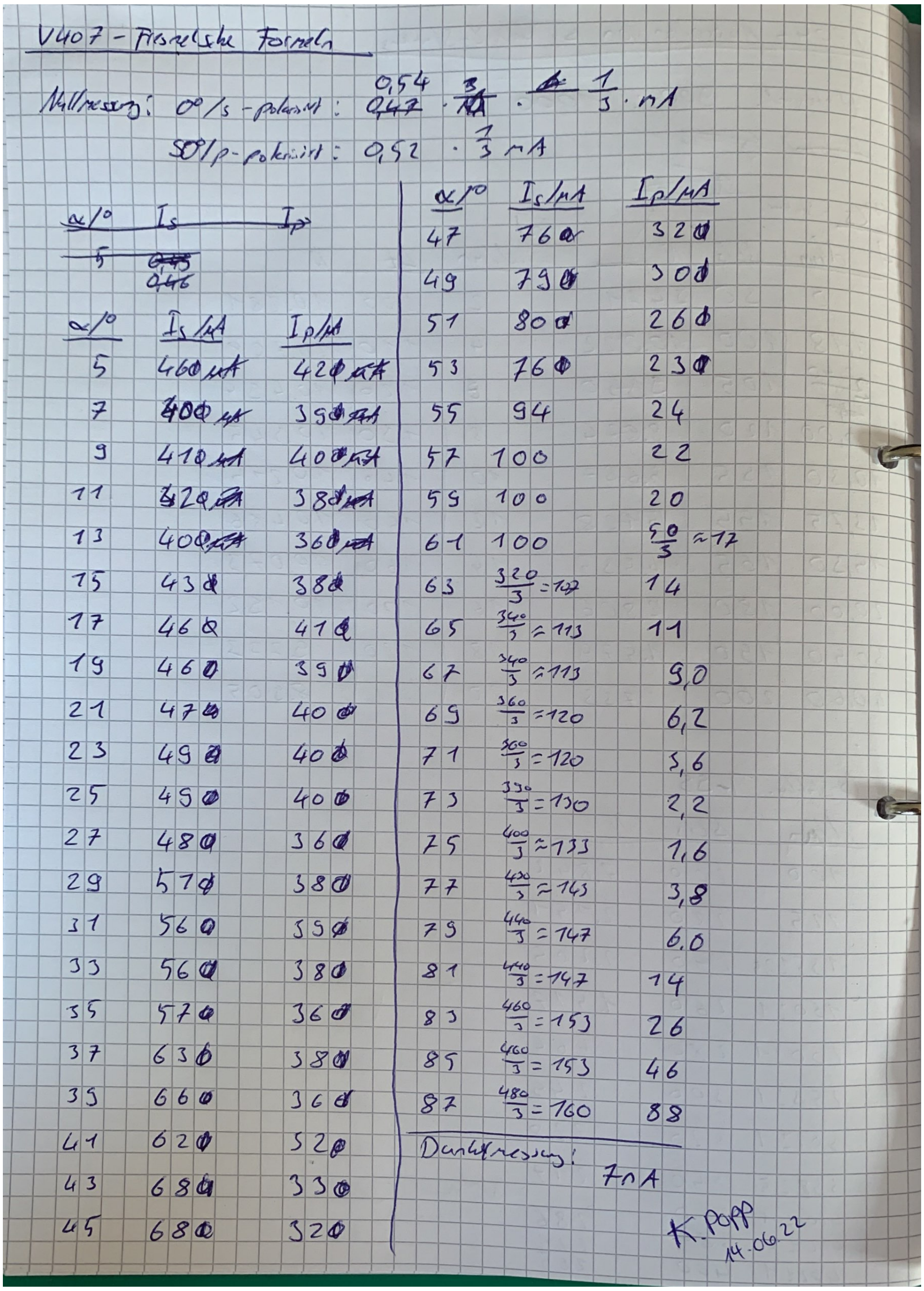
Literatur

[1] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[2] *Versuch V407: Fresnelsche Formeln.* TU Dortmund, Fakultät Physik.

A. Anhang

A.1. Originaldaten



V407 – Fresnelsche Formeln

Nullmessung: 0°/s-polarisiert: ~~0,47~~ 0,54 · ~~3/nA~~ · ~~A~~ 1/3 · nA

90°/p-polarisiert: 0,52 · 1/3 nA

~~α/°~~	~~I_s~~	~~I_p~~
~~5~~	~~0,45~~ 0,46	

α/°	I_s/μA	I_p/μA
5	46~~0~~	42~~0~~
7	40~~0~~	39~~0~~
9	41~~0~~	40~~0~~
11	42~~0~~	38~~0~~
13	40~~0~~	36~~0~~
15	43~~0~~	38~~0~~
17	46~~0~~	41~~0~~
19	46~~0~~	39~~0~~
21	47~~0~~	40~~0~~
23	49~~0~~	40~~0~~
25	49~~0~~	40~~0~~
27	48~~0~~	36~~0~~
29	57~~0~~	38~~0~~
31	56~~0~~	39~~0~~
33	56~~0~~	38~~0~~
35	57~~0~~	36~~0~~
37	63~~0~~	38~~0~~
39	66~~0~~	36~~0~~
41	62~~0~~	52~~0~~
43	68~~0~~	33~~0~~
45	68~~0~~	32~~0~~

α/°	I_s/μA	I_p/μA
47	76~~0~~	32~~0~~
49	79~~0~~	30~~0~~
51	80~~0~~	26~~0~~
53	76~~0~~	23~~0~~
55	94	24
57	100	22
59	100	20
61	100	$\frac{50}{3} \approx 17$
63	$\frac{320}{3} = 107$	14
65	$\frac{340}{3} \approx 113$	11
67	$\frac{340}{3} \approx 113$	9,0
69	$\frac{360}{3} = 120$	6,2
71	$\frac{360}{3} = 120$	3,6
73	$\frac{390}{3} = 130$	2,2
75	$\frac{400}{3} \approx 133$	1,6
77	$\frac{430}{3} \approx 143$	3,8
79	$\frac{440}{3} = 147$	6,0
81	$\frac{440}{3} = 147$	14
83	$\frac{460}{3} = 153$	26
85	$\frac{460}{3} = 153$	46
87	$\frac{480}{3} = 160$	88

Dunkelmessung: 7 nA

K. Popp 14.06.22