V103

Biegung elastischer Stäbe

Theodor Zies
theodor.zies@tu-dortmund.de

Tom Troska
tom.troska@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021 Abgabe: 8.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Wenn Kräfte F_i auf einen Körper wirken, kann es bei hinreichender Kraft zu einer Deformierung des Körpers kommen. Der Elastizitätsmodul E ist eine Kenngröße dieser Deformation und wird in diesem Versuch für zwei Körper aus Kupfer bestimmt.

2. Theorie

2.1. Das Hooksche Gesetz

In dem Fall, dass eine auf einen Körper wirkende Spannung eine hinreichend kleine Änderung einer Körperdimension $\frac{\Delta L}{L}$ bewirkt, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Spannung, der durch das *Hooksche Gesetz*

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

beschrieben wird. Der Proportionalitätsfaktor E wird als Elastizitätsmodul definiert und ist eine materialabhängige Konstante.

2.2. Durchbiegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Wird ein Stab, wie in Abbildung 1 zu sehen, einseitig eingespannt, verbiegt er sich bereits unter seinem Eigengewicht. An jeder Stelle x des Stabes kann eine Durchbiegung $D(x)$ festgestellt werden. Wird weiteres Gewicht an ein Stabende angehängt, wirkt eine größere Gewichtskraft F_G und der Stab verbiegt sich stärker, die Durchbiegung $D(x)$ wird an jeder Stelle x größer.

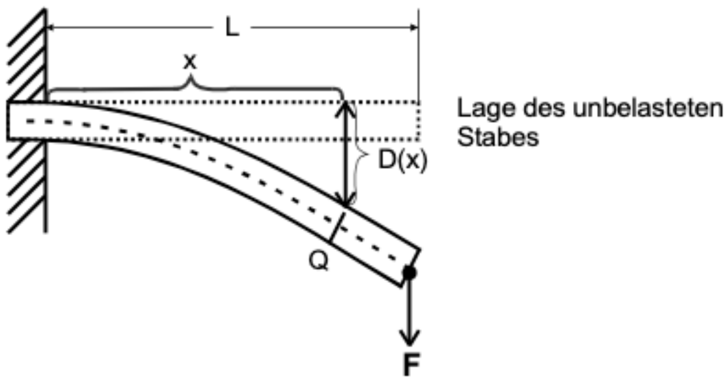

Abbildung 1: Versuchsaufbau des einseitig eingespannten Stabes. [4]

Die wirkende Gewichtskraft F_G hat zur Folge, dass in dem Stab Drehmomente M wirken, die den Stab aus seiner Ruhelage verdrehen. Diesen Drehmomente M gegenüber treten

Normalenspannungen auf und es stellt sich ein Gleichgewichtszustand mit endgültiger Durchbiegung $D(x)$ ein. Der obere Teil wird durch vorhandene Zugspannungen gestreckt während der untere Teil durch Druckspannungen gestaucht wird. Zwischen diesen Teilen liegt eine Fläche, die ihre ursprüngliche Länge beibehält und als *neutrale Faser* bezeichnet wird. Die Zug- und Druckspannungen σ, welche an der neutralen Faser angereifen, sind genau entgegengesetzt und heben sich daher auf. Die Abbildung 2 verdeutlicht dies.

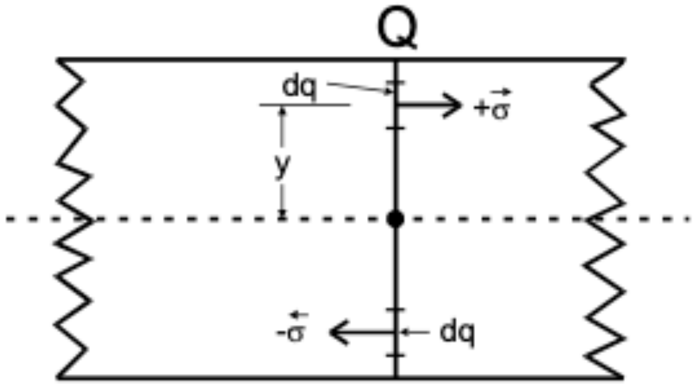

Abbildung 2: Neutrale Faser mit wirkenden Zug- und Druckspannungen σ. [4]

Für die Durchbiegung $D(x)$ lässt sich eine Formel aufstellen, wobei $x = 0$ den eingespannten Punkt und $x = L$ den Endpunkt des Stabes beschreibt:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3) \tag{1}$$

Dabei beschreibt F die Gewichskraft, E den Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment. Für einen runden Stab ist I gegeben durch:

$$I = \frac{\pi}{4}R^4 \tag{2}$$

2.3. Durchbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Auflage

Nun wird der Stab wieder mit einem Gewicht belastet, welches hier jedoch in dessen Mitte platziert wird. Die Enden des Stabes liegen dabei nur auf und sind nicht wie in Unterabschnitt 2.2 fest eingespannt, Abbildung 3 verdeutlicht dies.

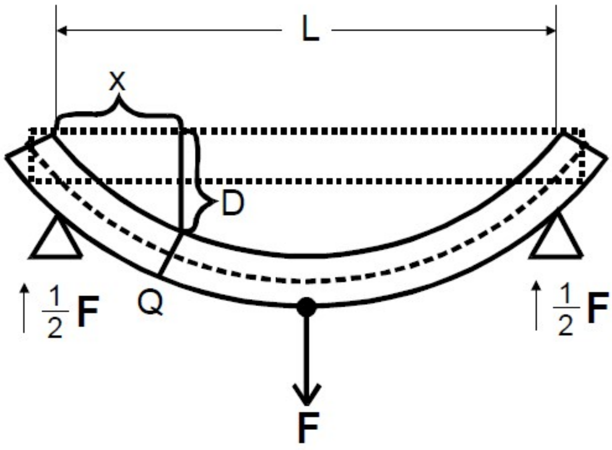

Abbildung 3: Beidseitig aufliegender Stab. [4]

Für die Durchbiegung $D(x)$ erhält man nun 2 Formlen, abhängig von der Position auf dem Stab. Für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \tag{3}$$

Und für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ ergibt sich:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \tag{4}$$

Für einen eckigen Stab mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge a bestimmt sich das Flächenträgheitsmoment I zu:

$$I = \frac{1}{12}a^4 \tag{5}$$

2.4. Versuchsapparatur

Um die Durchbiegung genau zu messen, wird die in Abbildung 4 abgebildete Apparatur verwendet. Die Stäbe können damit einseitig eingespannt oder beidseitig aufgelegt werden. Darüber befinden sich auf einer Schiene zwei Messuhren, mit denen der Abstand zum Stab präzise gemessen werden kann.

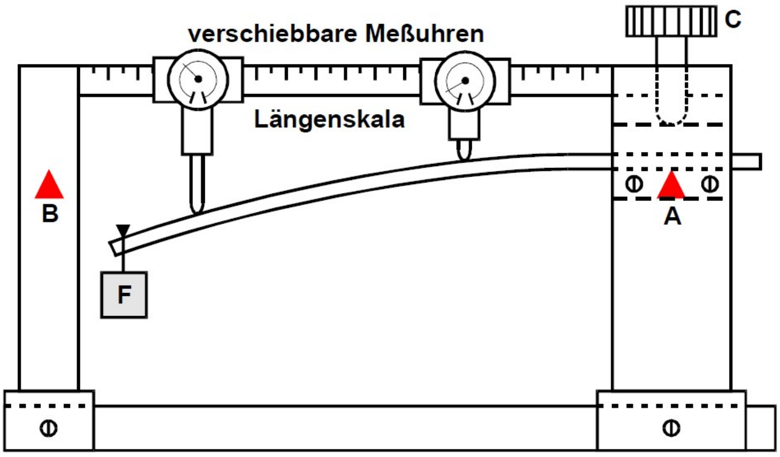

Abbildung 4: Verwendete Versuchsapperatur zum Messen der Durchbiegung $D(x)$ der Stäbe. [4]

3. Durchführung

Es werden insgesamt vier Messreihen durchgeführt, für die 2 verschiende Stäbe aus Kupfer verwendet werden. Die Abmessungen der Stäbe sowie deren Massen werden vor Ort gemessen. Der erste Kupferstab besitzt einen runden Querschnitt mit Durchmesser d, die Daten lauten:

$$
\begin{aligned}
d &= (10 \pm 0,1)\,\mathrm{mm} \\
l_{\mathrm{rund}} &= 590\,\mathrm{mm} \\
m_{\mathrm{rund}} &= (412 \pm 0,1)\,\mathrm{g}.
\end{aligned}
$$

Der andere Kupferstab weist einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a auf:

$$
\begin{aligned}
a &= (10 \pm 0,1)\,\mathrm{mm} \\
l_{\mathrm{eckig}} &= 600\,\mathrm{mm} \\
m_{\mathrm{eckig}} &= (535,6 \pm 0,1)\,\mathrm{g}.
\end{aligned}
$$

Zuerst wird der Kupferstab mit rundem Querschnitt einseitg eingespannt und dessen Durchbiegung ohne Gewicht gemessen. Dabei werden Messwerte in Abständen von $\Delta 3\,\mathrm{cm}$ aufgenommen. Darauf platziert man ein Gewicht von $550\,\mathrm{g}$ am Stabende und misst wie zuvor die Durchbiegung des Stabs.
Als nächstes wird die Apparatur so umgebaut, dass der runde Kupferstab auf beiden Seiten aufliegt. Erneut werden zuerst Messwerte ohne ein Gewicht genommen, danach werden $1750\,\mathrm{g}$ in der Mitte des Stabes platziert und wieder wird die Durchbiegung ermittelt.

Dieselbe Vorgehensweise wird jetzt mit dem eckigen Kupferstab durchgeführt. Bei einseitiger Einspannung wird dieser mit 750 g und bei beidseitiger Auflage mit 1750 g belastet. Die Gewichte werden dabei jeweils so gewählt, dass eine maximale Auslenkung von mindestens 3 cm erzeugt wird.

4. Auswertung

Im Folgenden werden die Messwerte, sowohl für den runden, als auch für den eckigen Stab, ausgewertet.

4.1. Elastizitätsmodul des runden Stabs

Die Messwerte für die Durchbiegung des runden Stabes bei einseitiger Einspannung ohne Gewicht $D_0(x)$ und mit Gewicht $D_\mathrm{G}(x)$ sind in Tabelle 1 aufgeführt. Deren Messfehler wird dabei mit $\varDelta D(x) = 0,01\,\mathrm{mm}$ versehen, da ein genaueres Ablesen der Messuhren nicht möglich ist. Die tatsächliche Durchbiegung $D(x)$ wird aus der Differenz der Werte berechnet:

$$D(x) = D_0(x) - D_\mathrm{G}(x)$$

Um eine lineare Regressionsrechnung durchzuführen, wird eine Hilfsvariable $\eta(x)$ eingeführt:

$$\eta(x) = Lx^2 - \frac{1}{3}x^3$$

L wird wie in Abbildung 1 zu sehen bestimmt und ergibt sich zu $L = 0{,}48\,\mathrm{m}$. Setzt man $\eta(x)$ in Gleichung 1 ein, resultiert ein linearer Zusammenhang zwischen $D(\eta)$ und $\eta(x)$:

$$D(\eta) = \frac{F}{2EI}\eta \tag{6}$$

Nun wird $\eta(x)$ in Abhängigkeit von $D(x)$ in Abbildung 5 geplottet. Die Regression liefert dann einen Wert für die Steigung m, aus dem durch Umstellen der Elastizitätsmodul bestimmt werden kann:

$$\frac{F}{2EI} = m \Leftrightarrow E = \frac{F}{2Im} \tag{7}$$

Das Flächenträgheitsmoment I ist aus Gleichung 2 bekannt, die Gewichtskraft bestimmt sich aus $F = Mg$.

Tabelle 1: Durchbiegung des einseitig eingespannten, runden Stabes im unbelasteten Zustand, sowie mit Gewicht von 550 g.

x / cm	$D_0(x)$ / cm	$D_G(x)$ / mm
3	8,00	7,95
6	7,93	7,82
9	7,81	7,59
12	7,63	7,29
15	7,42	6,90
18	7,15	6,43
21	6,92	5,98
24	6,63	5,45
27	6,34	4,88
30	6,03	4,31
33	5,74	3,69
36	5,43	3,05
39	4,96	2,35
42	4,68	1,60
45	4,30	0,98
48	3,90	0,24

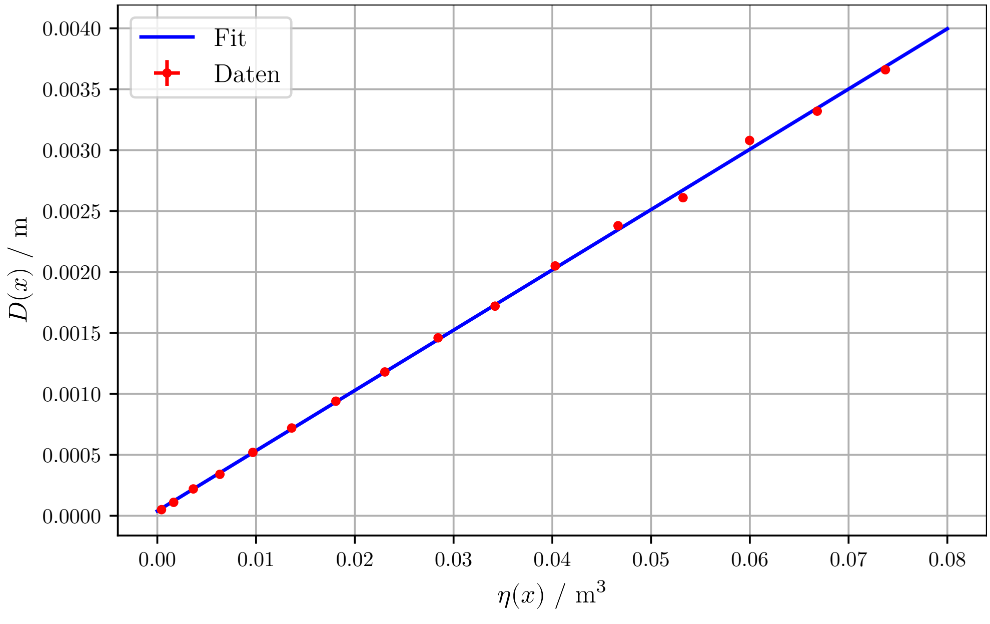

Abbildung 5: Durchbiegung des einseitig eingespannten, runden Stabes.

Als nächstes wird die beidseitige Auflage mit Gewicht in der Mitte betrachet, die Messwerte finden sich in Tabelle 2. Da für diesen Fall die zwei theoretische Formeln (Gleichung 3 und Gleichung 4) existieren, werden nun für jede Hälfte die Werte unabhängig geplottet. Dementsprechend werden auch zwei Hilfsvariablen verwendet:

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= 3L^2x - 4x^3\\ \eta_2(x) &= 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\end{aligned}$$

L wird in diesem Fall mit $L = 0{,}54\,\mathrm{m}$ gemessen. Dabei ist $\eta_1(x)$ für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gültig und $\eta_2(x)$ für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$. Eingesetzt in Gleichung 3 und Gleichung 4 resultieren erneut die linearen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}D_1(\eta_1) &= \frac{F}{48EI}\eta_1\\ D_2(\eta_2) &= \frac{F}{48EI}\eta_2\end{aligned}$$

Umstellen der Gleichungen analog zu Gleichung 6 und Bestimmung von m durch lineare Regressionen liefert abschließend zwei weitere Werte für das Elastizitätsmodul.

Tabelle 2: Durchbiegung des beidseitig aufliegenden, runden Stabes im unbelasteten Zustand und mit Gewicht von 1750 g.

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_G(x)$ / mm
3	7,95	7,79
6	7,89	7,59
9	7,80	7,37
12	7,73	7,17
15	7,65	6,99
18	7,58	6,82
21	7,61	6,75
24	7,60	6,70
27	7,61	6,74
30	7,19	6,28
33	7,25	6,38
36	7,35	6,53
39	7,42	6,70
42	7,51	6,90
45	7,63	7,14
48	7,71	7,44
51	7,85	7,65
54	8,02	7,95

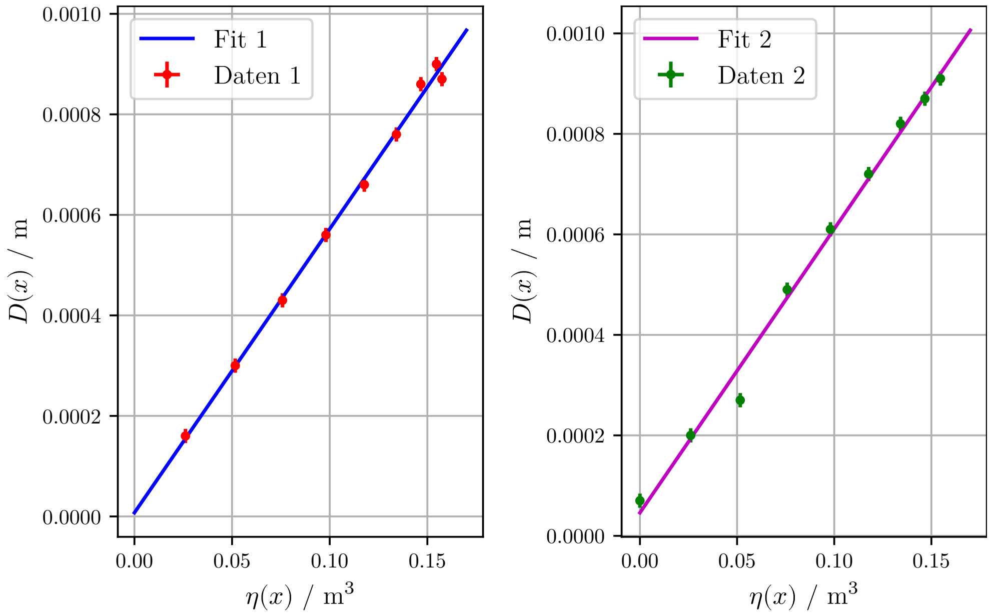

Abbildung 6: Durchbiegung des beidseitig aufliegenden, runden Stabes.

Die linearen Regressionen werden mithilfe der Python Erweiterungen *numpy*[3] und *scipy*[2] durchgeführt und liefern die Ausgleichsgeraden vom Typ $D(x) = m \cdot \eta(x) + b$ jeweils mit den Parametern

$$
\begin{aligned}
m_{\text{einseitig}} &= 0,04947 \pm 0,00032 & b_{\text{einseitig}} &= 0,0000 \pm 0,0003 \\
m_{\text{beidseitig},1} &= 0,00565 \pm 0,00012 & b_{\text{beidseitig},1} &= 0,0000 \pm 0,0001 \\
m_{\text{beidseitig},2} &= 0,00565 \pm 0,00019 & b_{\text{beidseitig},2} &= 0,0000 \pm 0,0001.
\end{aligned}
$$

Mit Gleichung 7 ergibt sich der Elastizitätsmodul des runden Stabs dann zu:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{einseitig}} &= (111 \pm 9)\,\text{GPa} \\
E_{\text{beidseitig},1} &= (129 \pm 11)\,\text{GPa} \\
E_{\text{beidseitig},2} &= (129 \pm 11)\,\text{GPa}.
\end{aligned}
$$

Der Mittelwert, als bester Schätzwert für das tatsächliche Elastizitätsmodul E von Kupfer, lässt sich zu

$$\bar{E}_{\text{rund}} = (123 \pm 10)\,\text{GPa}$$

bestimmen.

4.2. Elastizitätsmodul des eckigen Stabs

Das Vorgehen beim eckigen Stab ist identisch wie in Unterabschnitt 4.1. Das Flächenträgheitsmoment ist nun ein anderes und wird mit Gleichung 5 bestimmt. Auch die Messfehler werden unverändert wie in Unterabschnitt 4.1 behandelt.

Tabelle 3: Durchbiegung des einseitig eingespannten, eckigen Stabes im unbelasteten Zustand, sowie mit Gewicht von 750 g.

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_G(x)$ / mm
3	8,00	7,95
6	7,99	7,88
9	7,98	7,77
12	7,93	7,60
15	7,88	7,41
18	7,80	7,14
21	7,79	6,92
24	7,72	6,63
27	7,61	6,29
30	7,51	5,92
33	7,41	5,57
36	7,37	5,22
39	7,21	4,80
42	7,12	4,37
45	6,96	3,89
48	6,82	3,44

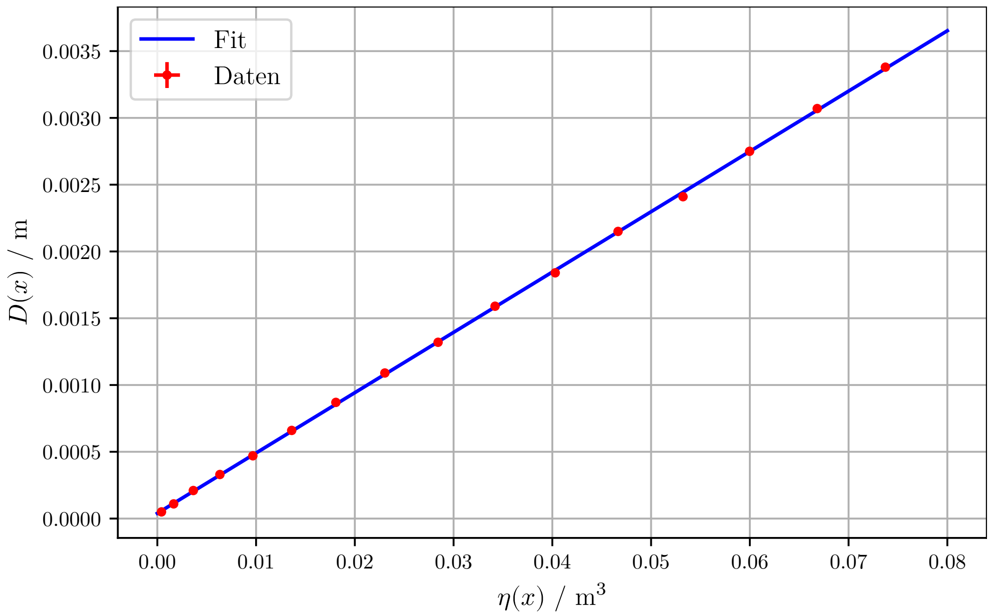

Abbildung 7: Durchbiegung des einseitig eingespannten, eckigen Stabes.

Tabelle 4: Durchbiegung des beidseitig aufliegenden, eckigen Stabes im unbelasteten Zustand und mit Gewicht von 1750 g.

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_G(x)$ / mm
3	8,00	7,91
6	8,02	7,85
9	8,04	7,79
12	8,09	7,69
15	8,08	7,62
18	8,08	7,55
21	8,15	7,60
24	8,20	7,60
27	8,23	7,63
30	7,42	6,75
33	7,44	6,89
36	7,54	6,88
39	7,62	7,14
42	7,68	7,26
45	7,75	7,41
48	7,67	7,55
51	7,89	7,77
54	8,00	7,84

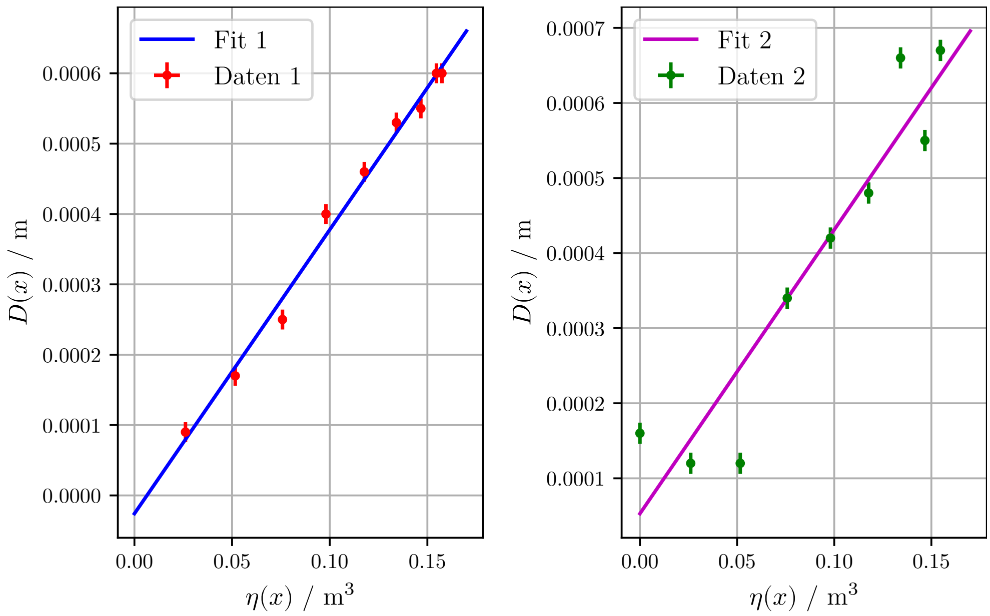

Abbildung 8: Durchbiegung des beidseitig aufliegenden, eckigen Stabes.

Die linearen Regressionen werden analog zu Unterabschnitt 4.2 durchgeführt und es ergeben sich die Werte

$$
\begin{aligned}
m_{\text{einseitig}} &= 0,04516 \pm 0,00014 & b_{\text{einseitig}} &= 0,0000 \pm 0,0001 \\
m_{\text{beidseitig},1} &= 0,00404 \pm 0,00015 & b_{\text{beidseitig},1} &= 0,0000 \pm 0,0001 \\
m_{\text{beidseitig},2} &= 0,0038 \pm 0,0005 & b_{\text{beidseitig},2} &= 0,0000 \pm 0,0005.
\end{aligned}
$$

Es resultiert für das Elastizitätsmodul des eckigen Stabs mit Gleichung 7:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{einseitig}} &= (98 \pm 4)\,\text{GPa} \\
E_{\text{beidseitig},1} &= (106 \pm 6)\,\text{GPa} \\
E_{\text{beidseitig},2} &= (113 \pm 16)\,\text{GPa}.
\end{aligned}
$$

Der Mittelwert beträgt hierbei

$$\bar{E}_{\text{eckig}} = (106 \pm 7)\,\text{GPa}.$$

5. Diskussion

Ein Literaturwert [1, S. 829 / E77] für den Elastizitätsmodul von Kupfer lautet

$$E_{\text{lit}} = 125\,\text{GPa}.$$

Für den runden Stab ergibt sich der Elastizitätsmodul E zu

$$\bar{E}_{\text{rund}} = (123 \pm 10)\,\text{GPa}.$$

Der gemessene Wert lässt sich also hierbei mit dem Literaturwert bestätigen.
Der Elastizitätsmodul E des eckigen Stabes wird allerdings zu

$$\bar{E}_{\text{eckig}} = (106 \pm 7)\,\text{GPa}$$

bestimmt. Der Literaturwert liegt hierbei außerhalb der Fehlertoleranz und es wird eine Abweichung $\Delta\bar{E}_{\text{eckig}} \approx 18\,\%$ festgestellt.
Generell ist zu beachten, dass die zur Bestimmung der Auslenkung $D(x)$ verwendeten Messuhren mitunter große Ungenauigkeiten verursachen könnten. Es ist zu beobachten, dass selbst kleine Erschütterungen des Versuchsaufbaus große Schwankungen in den gemessenen Werten ergeben. Außerdem sind die Werte, die mit der linken Messuhr abgelesen werden, nicht annähernd kongruent zu Messwerten der rechten Messuhr, auch wenn an ein und derselben Stelle gemessen wird.
Auch die vergleichsweise geringe maximale Auslenkung des eckigen Stabes verursacht Ungenauigkeiten, weil so nur ein kleinerer Messbereich der Messuhren genutzt werden kann.

Literatur

[1] Horst Czichos und Manfred Hennecke. *HÜTTE - Das Ingenieurwissen*. Springer, 2008. ISBN: 9783540718512.

[2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[4] Unknown. *Versuch V103: Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik.

A. Anhang

A.1. Originaldaten

V103 - Biegung elastischer Stäbe

Runder Stab - einseitig

ΔD(x) ... 8...

x in cm	$D^{(0)}_{rund}(x)$ in mm	$D^{(550s)}_{rund}(x)$ in mm
3	8,00	7,95
6	7,93	7,82
9	7,81	7,59
12	7,63	7,29
15	7,42	6,50
18	7,15	6,43
21	6,92	5,98
24	6,63	5,45
27	6,34	4,88
30	6,03	4,31
33	5,74	3,69
36	5,43	3,05
39	4,96	2,35
42	4,68	1,60
45	4,30	0,98
48	3,90	0,24

Runder Haupstab: Länge $l =$ ~~595 ±~~ (590 ± 1) mm

Durchmesser $d = (10 \pm 0,1)$ mm

Masse $m = (412 \pm 0,1)$ g

Eckiger Stab: $l = (600 \pm 1)$ mm

Kantenlänge $d = (10 \pm 0,1)$ mm

Masse $m = (535,6 \pm 0,1)$ g

x in cm	$D^{(0)}_{eckig}(x)$ in mm	$D^{(250s)}_{eckig}(x)$ in mm
3	8,00	7,95
6	7,99	7,88
9	7,98	7,77
12	7,93	7,60
15	7,88	7,41
18	7,80	7,14
21	7,79	6,92
24	7,72	6,63
27	7,61	6,29
30	7,51	5,92
33	7,41	5,57
36	7,37	5,22
39	7,21	4,80
42	7,12	4,37
45	6,96	3,89
48	6,82	3,44

rechts - beidseitig fest

X in cm	$D_{rechts}^{(0)}(x)$ in mm	$D_{rechts}^{(1750)}(x)$
3	8,00	7,91
6	8,02	7,85
9	8,04	7,75
12	8,09	7,69
15	8,08	7,62
18	8,08	7,55
21	8,15	7,60
24	8,20	7,60
27	8,23	7,63
30	7,42	6,75
33	7,44	6,89
36	7,54	6,88
39	7,62	7,14
42	7,68	7,26
45	7,75	7,41
48	7,67	7,55
51	7,89	7,77
54	8,00	7,84

27,5 ↑ Gerät

rund - beidseitig fest

x in cm	$D^{(10)}_{rund}$ in mm	D^{1750}_{rund} in mm
3	7,95	7,79
6	7,89	7,59
9	7,80	7,37
12	7,73	7,17
15	7,65	6,99
18	7,58	6,82
21	7,61	6,75
24	7,60	6,70
27	7,61	6,74
30	7,19	6,28
33	7,25	6,38
36	7,35	6,53
39	7,42	6,70
42	7,51	6,90
45	7,63	7,14
48	7,71	7,44
51	7,85	7,65
54	8,02	7,95