最小平均权重环

参考课本思考题 $24-5$ 题,

$$\mu^* = \min_{v\in V} \max_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}$$

设置一个超级源点 0 ，使用动态规划求出 $dp[k][i]$ ，即 $\delta_k(0,i)$ 。

取一个足够大的 $n=v-1$ ，对于所有顶点 i 求 $avg_i = \max \frac{dp[v-1][i]-dp[j][i]}{v-1-j}$

则 $ans = \min avg_i$

动态规划时间复杂度 $O(|V||E|)$ ，求最值时间复杂度 $O(|V|^2)$ ，总时间复杂度 $O(|V||E|)$ 。

最小权最大匹配

将二分图 G 划分为 S 和 T 两部分。

首先，不考虑权值，仅求最大匹配，可以设置一个超级源点指向 S 中所有顶点，设置一个超级汇点被 T 中所有顶点指向，得到新图 G' 。

令 G' 中每条边流量为 1 ，则显然 G' 中的最大流量即为 G 最大匹配的边数。

考虑在求得最大匹配的同时使其权值最小。

在上一次作业中，通过两种方式改进 FF 方法，可以分别令"距离最短的路径更优先"和"最宽的路径更优先"。

因此为了求得最小权值，可以考虑 BFS 过程中优先选择权值最小的边进行增广。

为了避免后效性，将所有反向边赋予一个负的权值，其绝对值与正向边的权值相同。

每次增广后，流量 $+1$ ，权值 $+\sum e_i$，$e_i \in Path$ 。

尾数还原

$$N \equiv r_i \mod p_i$$

解同余方程组，由中国剩余定理

$$N \equiv \sum^i r_i t_i M_i \mod M$$

其中

$$M = \prod^i p_i$$
$$M_i = M/p_i$$
$$t_i \equiv M_i^{-1} \mod p_i$$

考虑到所有的 p_i 均为质数，由欧拉定理 $t_i \equiv M_i^{p-2} \mod p_i$ 。

使用高精度根据上述公式计算即可得出结果。

重复子串因子

考虑最短重复子串 a ， $S=a^m$ ，假设 $S=(ab)^k$ ，且 $b=a^p$ 对所有自然数 p 均不成立,

则 $S=(ab)^k=(a^{p+1})^k=a^{pk+k}$ 对所有自然数 p 均不成立，故

$$k \nmid m \Rightarrow k \nmid (m \times length(a)) \Rightarrow k \nmid (length(S))$$

因此假设不成立,

得证：S 中所有重复子串因子均为最短重复子串 a 重复若干次后的结果。

使用 KMP 算法求得串 S 的 π 数组，$\pi[n]=d$ 表明 $S[n-d,\dots,n]$ 与 $S[0,\dots,d]$ 相等,

故 $length(a)=n-d$。

求得 a 的长度后，对 $length(S)/length(a)$ 分解因数并输出即可。

总时间复杂度等同于 KMP 算法时间复杂度 $O(n)$。