統計学

6月2日（火）
第4回

兵庫県立大学 社会情報科学部

山本 岳洋

t.yamamoto@sis.u-hyogo.ac.jp

2020年度前期・火曜3限　神戸商科キャンパス 全学共通科目

本講義の準備（毎回提示する予定）

- slackを見られるようにしておいてください
- 質問やコメントあれば随時slackの
  #統計学 チャネルやDMに書いておいてください
- マイク・カメラはオフにしておいてください
- Webexについては毎回録画して
  後で掲載する予定です（失敗しなければ）
  - SNS等で共有しないようにお願いします

本日の内容

- 課題その3の解説・コメントへの返信
- ミニ演習
- 今週の課題と今週の資料のポイント解説

先週の課題の解説

問1

- **サイコロを1つ振る試行を考える．いま，事象 A を「奇数の目が出る」，事象 B を「3の倍数の目が出る」とするとき，事象 A と B は互いに独立かどうか，理由とともに解答せよ． なお，どの目が出る確率も同様に確からしいとする．**

- **ねらい**
  - 事象の独立の定義が分かっているか？

問1 解答例

- 事象 A 「奇数の目が出る」
  - P(A) = 1/2
- 事象 B を「3の倍数の目が出る」
  - P(B) = 1/3
- $A \cap B$: 奇数かつ3の倍数の目が出る
  - P($A \cap B$)=1/6
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$より，**AとBは独立**

問2

- **講義資料「確率の基礎」p.91-p.92であげている具体例について，$P(A \cap E)$を求めよ．**

- **ねらい**
  - やはり，独立の概念が分かっているか？

- **解答は**
  - $P(A \cap E) = \frac{3}{50}$

講義資料p.92

- 事象A: 病気Xにかかっている
  - $P(A) = 1/10$
- 事象E: 喫煙している
  - $P(E) = 1/5$
- 病気Xの人が喫煙している
  - $P(E|A) = 3/5$
- 求めたい確率: 喫煙していると分かった場合に，病気 Xにかかっている確率
  - $P(A|E)$

講義資料p.93

- $P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)}$ ←ベイズの定理

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{3}{10}$$

講義資料p.94

- 条件付き確率の定義より
  - $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$
- $P(A \cap E)$は病気Xかつ喫煙者である確率なので,
  - $P(A \cap E) = P(A)P(E) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$
- よって
  - $P(A|E) = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{10}$

これは間違い

解説

- p.94のどこが誤っているかというと

$P(A\cap E)$は病気Xかつ喫煙者である確率なので,

$$P(A\cap E)=P(A)P(E)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$$

- 正しくは

$P(A\cap E)$は病気Xかつ喫煙者である確率なので,

$$P(A\cap E)=P(A|E)P(E)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$$

条件付き確率の定義と独立

- **条件付き確率の定義から導ける性質（乗法定理）**
  - これは，**いつでも**成立する

$$P(A \cap E) = P(A|E)P(E)$$

- **独立のときのみ成り立つ性質**

$$P(A \cap E) = P(A)P(E)$$

- **今回の問題はAとEが独立である保証はない**
  - 実際， $P(A \cap E) = \frac{3}{50}$, $P(A)P(E) = \frac{1}{50}$

問3

- 表と裏の出る確率が等しいコインを3回投げる試行を考える．表が出た回数を X とおくとき，以下の問いa. – d. に答えよ．

a. $P(1 \leq X \leq 5)$ を求めよ（分数でよい）
b. 期待値 $E(X)$ を求めよ（分数でよい）
c. X^2の期待値 $E(X^2)$ を求めよ（分数でよい）
d. 分散 $V(X)$ を求めよ（分数で良い）

- ねらい
  - 確率変数の基本的概念が理解できているか

問3 答え

- **表と裏の出る確率が等しいコインを3回投げる試行を考える．表が出た回数を X とおくとき，以下の問いa. – d. に答えよ．**

a. $P(1 \leq X \leq 5) = \frac{7}{8}$

b. 期待値 $E(X) = \frac{3}{2}$

c. X^2**の期待値** $E(X^2)$ **を求めよ**$= 3$

d. 分散 $V(X)$ **を求めよ**$= \frac{3}{4}$

問3 解説

a. $P(1 \leq X \leq 5)$

– 起こりえない事象の確率は0なので，$P(1 \leq X \leq 5) = P(1 \leq X \leq 3)$．結局，表が1回以上3回以下でる確率を求めるので，$\frac{7}{8}$

b. $E(X)$

– $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

c. $E(X^2)$

– $E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + \cdots + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$

問3 解説

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$を用いると,
定義から直接求めるより計算が楽になる

問4

$E(X)=\mu$ とおくと，

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(\boxed{\text{a}})^2 p_i$$

$$=\boxed{\text{b}}\underline{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i}-\boxed{\text{c}}\underline{\sum_{i=1}^{n}x_i p_i}+\boxed{\text{d}}\underline{\sum_{i=1}^{n}p_i}$$

ここで，右辺第1項，第2項，第3項のシグマ（下線部）は

それぞれ，$\boxed{\text{e}}$, $\boxed{\text{f}}$, $\boxed{\text{g}}$ となるので，上記式は

$V(X)=E(X^2)-\mu^2$ となる．よって，

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ は示された．

問4

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$= 1 \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i} - 2\mu \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i} + \mu^2 \underline{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

ここで，右辺第1項，第2項，第3項のシグマ（下線部）の

中身はそれぞれ $E(X^2)$, μ, 1 となるので，上記式は

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$ となる．すなわち，

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$ が示された．

ミニ演習

6月2日ミニ演習

- **Google Formsから提出すること**
  - URLはslackと講義ページに掲載
  - 締め切り: **6月2日中**
    - この時間中に終える想定です
  - 正答率は評価対象としませんので,
    まじめに取り組んでください
    - 資料や教科書・ウェブなど自由に調べてOK
- **○○時○○分から再開します**

今週の課題と資料のポイント解説

課題その4

- 「確率変数・確率分布」と「連続型の確率変数」を学習し課題を解くこと
- 課題: 以下のGoogleフォームより提出
  - 課題の中身は講義ページからPDFを確認すること

https://forms.gle/frTkuVe7ZecmJGRJ8

- 締切: 6月7日（日） 23:59

残りの時間

- **「連続型の確率変数」のポイント解説**
  - 離散型の確率変数とは確率の求め方が異なる点に注意して学習してください