

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG

– LABORATOIRE DE DIDACTIQUE –

DIPLÔME D'ENSEIGNEMENT AUX ÉCOLES DE MATURITÉ

---

# Outils d'Adaptativité

## Utiliser avec souplesse l'outillage mathématique

---

*Auteurs*

Mathias BLAISE

Alexandros RISPO CONSTANTINOU

9 mai 2024



UNIVERSITÉ DE FRIBOURG  
UNIVERSITÄT FREIBURG



## Table des matières

<b>Tables</b>	<b>i</b>
<b>Abstrait</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Les compétences basales . . . . .	1
1.2 Modalités du présent travail . . . . .	5
1.3 Produit final . . . . .	9
1.4 Usage prévu (exemple) . . . . .	9
<b>2 Mise à disposition du travail</b>	<b>13</b>
2.1 Le dépôt GitHub . . . . .	13
2.2 Utilisation de la ressource . . . . .	14
<b>3 Structure des algorithmes</b>	<b>16</b>
3.1 Équations de second degré . . . . .	16
3.2 Systèmes d'équations . . . . .	20
<b>4 Rétroactions</b>	<b>23</b>
4.1 Résultats du contact avec le corps enseignant . . . . .	23
4.2 Améliorations et extensions possibles . . . . .	26
4.3 Conclusion . . . . .	28
<b>Références</b>	<b>29</b>
<b>A Code source</b>	<b>31</b>
A.1 Les QUICKSTART et README . . . . .	31
A.2 Documents LuaL <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X . . . . .	51
A.3 Algorithmes Lua . . . . .	58
<b>B Questionnaire du GCM</b>	<b>77</b>


## Table des figures

1	Thèmes retenus et rejetés (2 <sup>e</sup> mandat) . . . . .	4
2	Compétence n <sup>o</sup> 10 (rapport du 3 <sup>e</sup> mandat) . . . . .	6
3	Les compétences n <sup>os</sup> 14 et 17 (rapport du 3 <sup>e</sup> mandat) . . . . .	6
4	Exemple d'une fiche pour équations quadratiques . . . . .	10
5	Exemple d'une fiche pour système d'équations . . . . .	11
6	Le dépôt GitHub du travail . . . . .	12
7	Réponses à notre questionnaire (1 et 2) . . . . .	23
8	Réponses à notre questionnaire (suite) . . . . .	24

## Table des codes

3.1	Algorithme pour équations du second degré . . . . .	16
3.2	Génération de coefficients . . . . .	17
3.3	Choix de la méthode . . . . .	18
3.4	Facilité de factorisation . . . . .	19
3.5	Algorithme pour systèmes d'équations . . . . .	20
3.6	Génération de coefficients . . . . .	21
3.7	Choix de la méthode . . . . .	22
A.1	QUICKSTART pour équations de second degré . . . . .	31
A.2	README pour équations de second degré . . . . .	34
A.3	QUICKSTART pour systèmes d'équations . . . . .	41
A.4	README pour systèmes d'équations . . . . .	44
A.5	Préambule Lua <sup>L</sup> A <sup>T</sup> E <sup>X</sup> pour équations de second degré . . . . .	51
A.6	Document Lua <sup>L</sup> A <sup>T</sup> E <sup>X</sup> pour équations de second degré . . . . .	53
A.7	Préambule Lua <sup>L</sup> A <sup>T</sup> E <sup>X</sup> pour systèmes d'équations . . . . .	55
A.8	Document Lua <sup>L</sup> A <sup>T</sup> E <sup>X</sup> pour systèmes d'équations . . . . .	57
A.9	Code Lua pour équations du second degré . . . . .	58
A.10	Code Lua pour systèmes d'équations . . . . .	68

## Abstrait

ANS LE CADRE du Laboratoire didactique de leur formation à l'enseignement en secondaire II, les soussignés ont créé le projet *Outils d'Adaptativité* visant à répondre aux exigences suivantes : (i) développer une ou plus des compétences basales en mathématiques définies dans le Plan d'études cadre (PEC) national (CDIP 2016) ; (ii) dont notamment celle consistant à « utiliser avec souplesse l'outillage mathématique » ; (iii) à l'aide d'une ressource numérique générant automatiquement des exercices autocorrigés, pouvant être proposés durant les cours de soutien ; (iv) ainsi qu'une réflexion sur l'évaluation des compétences basales par les enseignant-e-s dans leurs cours, avec une proposition concrète à utiliser en classe.

Le résultat final de l'activité consiste en deux documents à compiler avec le moteur  $\text{Lua}\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ , rendus disponibles à travers un dépôt GitHub.<sup>1</sup> Ceux-ci comportent chacun une liste d'exercices — de résolution d'équations du second degré pour l'un, de résolution de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues pour l'autre — accompagnée de leurs solutions. Pour pouvoir répondre aux exercices de façon efficace, les élèves devront déterminer la méthode la plus appropriée à la résolution de chaque équation, *utilisant ainsi avec souplesse l'outillage mathématique*. Aux solutions est jointe pour chaque équation une méthode jugée par nous optimale, décidée algorithmiquement. Dans la confrontation à — et l'éventuel désaccord avec — ces méthodes, les élèves pourront développer une réflexion critique sur la pertinence de leurs divers outils mathématiques face à des situations données.

Enfin, le rapport ci-présent a été écrit pour répondre au point (iv) susdit. Nous y résumons le travail fait jusqu'à présent dans le canton de Fribourg autour des compétences basales en mathématiques, puis présentons la ressource par nous créée, avec son manuel d'utilisation et une proposition concrète pour son intégration en classe. Nous analysons également les résultats d'un sondage mené auprès des enseignant-e-s autour de ce projet.

<sup>1</sup>Alexandros RISPO CONSTANTINOU et Mathias BLAISE (2024). *Outils d'Adaptativité*. URL : <https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique>.



## Introduction

**D**EPUIS DES ANNÉES, différents groupes de travail se succèdent dans le canton de Fribourg pour discuter de la notion de compétences basales en mathématiques (GCM 2017, 2018, 2020, 2021). En effet, une maturité gymnasiale se doit d'ouvrir les portes à toute filière scientifique. C'est à cette fin que les compétences basales sont définies et redéfinies : elles consistent en ce qui doit être au minimum acquis par un-e étudiant-e voulant se lancer à l'Université, peu importe son choix disciplinaire. Ainsi, la problématique est de taille : comment définir au mieux les compétences nécessaires et prendre en compte tous les domaines d'études supérieures ? Et plus important encore, comment faire pour que ces compétences basales soient acquises par les élèves ? Nous débuterons notre parcours en décrivant brièvement la cristallisation de cette notion, et survolerons ensuite les tentatives successives de concrétiser les compétences admises comme basales, ainsi que les réflexions quant à l'implémentation d'un système favorisant l'acquisition par les élèves. Pour finir, nous discuterons de notre apport dans ces réflexions d'implémentation. Celui-ci réside dans la préparation d'un document  $\text{\LaTeX}$  permettant d'auto-générer des exercices et des corrigés pour deux thèmes précis : les équations quadratiques et les systèmes d'équations linéaires.

### 1.1 Les compétences basales

Les compétences de base sont une notion introduite par les Plans d'études cadre (PEC). On entend généralement par « compétence basale » en mathématiques toute compétence nécessaire dans des chapitres donnés pour permettre la poursuite d'études scientifiques après le gymnase.<sup>2</sup> Elles ne suffisent toutefois pas, à elles seules, à garantir l'aptitude générale aux études supérieures.

#### 1.1.1 Définition générale d'une compétence basale

La Conférence des directrices et directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP) est venue formaliser cette notion du Plan d'études cadre de 1994 (CDIP 1994),

<sup>2</sup>Notamment, une compétence basale n'est *pas* une compétence « minimale » ou « de base » en mathématiques, suffisante à un-e adulte moyen-ne dans la vie quotidienne.

jusqu'alors floue, dans son annexe du 17 mars 2016 (CDIP 2016). On en tire que la compétence de base en mathématiques, constitutive de l'aptitude générale aux études supérieures, est « une maîtrise tout en souplesse, adaptative des thèmes mathématiques de base du Plan d'études ».<sup>3,4</sup>

Dans les faits, cette notion de la CDIP est-elle reprise par les acteurs cantonaux ? Nous apercevons dès le troisième rapport (GCM 2018, p. 6) une définition « usuelle » des compétences basales en mathématiques, reportée dans l'encadré ci-dessous.

**Définition :** Une compétence basale est une compétence technique élémentaire régulièrement présente dans le cursus de mathématiques et dont la maîtrise est importante à la résolution d'exercices simples ou à la bonne compréhension de différentes branches dispensées au gymnase.

. . . le tout dans l'optique de poursuivre des études supérieures. Cette définition consolide et précise celle de la CDIP, trop vaste pour pragmatiquement être appliquée. Néanmoins, même dans cette définition bien opérationnelle, il y a deux pièges dans lesquels il faut veiller à ne pas tomber :

- (i) Une compétence nécessaire à atteindre un certain seuil de suffisance peut parfaitement ne pas être considérée comme basale.
- (ii) Une compétence basale n'est pas nécessairement facile à acquérir.

Munis à présent d'une notion de compétence basale soigneusement établie, voyons ensuite comment celle-ci a été concrétisée dans le canton de Fribourg en une liste de quarante-trois compétences précises.

### 1.1.2 Un catalogue des compétences basales : les évolutions

La définition précise des compétences à retenir comme « basales » a fait l'objet de différents mandats et groupes de travaux au fil des années, et ce depuis 2005 déjà. En effet, de 2005 à 2008, une évaluation de la réforme de la maturité (EVAMAR II ; EBERLE, GEHRER et al. 2008) a été conduite. Il en est ressorti (p. 16) que les connaissances et compétences en mathématiques des gymnasien-ne-s testé-e-s étaient insuffisantes. C'est pourquoi quand, en 2012, la CDIP lançait un projet visant à garantir un accès sans examen aux Hautes Écoles pour toute personne en possession d'une maturité

<sup>3</sup>Les compétences basales telles qu'elles sont en vigueur dans le canton de Fribourg depuis l'année scolaire 2022 ont été créées à partir de cette définition actualisée de l'annexe au PEC. Elles sont décrites dans le *Plan des études gymnasiales* fribourgeois (Domaines des Mathématiques) (S2 2020).

<sup>4</sup>Les compétences basales en mathématiques sont d'ailleurs un cas spécial de la « compétence disciplinaire de base constitutive de l'aptitude générale aux études supérieures », définie dans l'annexe au PEC comme étant « la somme des savoirs et savoir-faire dans les disciplines concernées dont l'acquisition est prérequis pour étudier un grand nombre de branches universitaires, et non pas certaines d'entre elles seulement ».



gymnasiale (CDIP 2013, p. 3), l'un des sous-projets concernait les compétences disciplinaires de base requises pour les études universitaires, dans le but de les uniformiser à l'échelle nationale.

Quelques années plus tard, en 2015 et en 2016, avec l'introduction du bilinguisme dès la première année de gymnase, l'accès des élèves à l'enseignement des mathématiques dans la langue partenaire devait être facilité. Un groupe de travail, formé de deux enseignant-e-s par gymnase du canton, est alors mandaté (CDIP 2015) par le Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré (S2) et la Conférence des recteurs (CORECOFR). En bref, le mandat du groupe de travail était de définir des buts communs à la première année de gymnase des deux communautés linguistiques, à l'aide d'un catalogue de compétences disciplinaires de base en lien avec l'aptitude générale aux études supérieures, ainsi que de développer des idées sur les manières de promouvoir la branche des mathématiques. À cette fin, un questionnaire d'exercices types (GCM 2016, reproduit en annexe B, p. 77) a été distribué aux enseignant-e-s de mathématiques des gymnases du canton, à partir duquel fut écrite une liste articulant

- (i) les thèmes ayant été retenus par les deux sections linguistiques,
- (ii) les thèmes ayant été rejetés par les deux sections linguistiques,
- (iii) ainsi que les quatorze thèmes retenus par l'une des sections et rejetés par l'autre.

Cette liste est reproduite en fig. 1 telle qu'elle apparaît dans GCM (2017).

En parallèle de ce premier mandat, la CDIP a recommandé aux cantons d'émettre des directives pour l'acquisition de compétences de base en mathématiques, ce qui a conduit à l'annexe au PEC discutée auparavant (CDIP 2016).

Depuis ce premier mandat, trois autres du même type ont été conduits en 2017, 2018 puis 2020, avec dans chacun des cas un objectif spécifique. Le mandat de 2017 (S2 2017) se trouve être le troisième mandat portant sur les compétences basales, le premier mandat ayant disposé d'un prolongement (deuxième mandat) pour finaliser les listes en fig. 1. Ce troisième mandat avait pour but de clarifier la manière d'identifier les compétences basales et de proposer des mesures concrètes pour les améliorer. Le rapport résultant (GCM 2018) énonce quarante-trois compétences convenues basales, piochées dans les différents thèmes de la première année gymnasiale.<sup>5</sup>

En 2018, le quatrième mandat consiste en la mise en œuvre des mandats précédents. Cette fois-ci, le groupe de travail s'est réparti l'effort par établissement, et le rapport (GCM 2020) présente les points de vue de chaque gymnase du canton. Il propose également une adaptation de la liste des quarante-trois compétences retenues basales, mais par des modifications quasi négligeables dans la mise en pratique : le plus grand changement est l'ajout conseillé d'une nouvelle compétence n° 7 par le Collège du Sud, amenant le total à quarante-quatre compétences basales et entraînant la renumérotation

<sup>5</sup>Un exemple particulier est présenté en fig. 2 ; on y remarque en effet qu'il est précisé que la factorisation par trinôme n'est pas considérée comme compétence basale.

### Thèmes retenus par les deux sections linguistiques

#### Algèbre

- Bases de la théorie des ensembles (appartenance, intersection, réunion, différence, diagramme de Venn)
- Ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$
- Intervalles
- Opérations sur les nombres rationnels sans calculatrice, y compris puissances avec exposant rationnel
- Notation scientifique (Wissenschaftliche Schreibweise)
- Gestion des parenthèses
- Développement et réduction de polynômes
- Calcul algébrique avec puissances et racines (y compris travail avec exposants rationnels)
- Identités remarquables de degré 2 (Binomische Formeln)
- Factorisations simples (mise en évidence et polynômes du deuxième degré)
- Résolution d'équations de degré 1, quel que soit l'ensemble des solutions
- Résolution d'équations quadratiques à l'aide de la méthode du discriminant
- Résolution d'équations de degré supérieur à 2 réductibles à la forme  $x^n = a$
- Résolution d'équations rationnelles réductibles au premier degré, y compris avec mise à l'écart d'une solution étrangère (Bruchgleichungen mit Lösungen, welche nicht im Definitionsbereich liegen)
- Isoler une lettre dans une formule, sans qu'une mise en évidence ne soit nécessaire
- Résolution de systèmes linéaires  $2 \times 2$

#### Géométrie

- Notion de triangle rectangle et d'hypoténuse
- Théorème de Pythagore
- Calculs de longueurs et d'angles à l'aide de la trigonométrie du triangle rectangle
- Notion de vecteur
- Notion de colinéarité
- Représentations graphiques de différents multiples d'un vecteur donné par un de ses représentants
- Représentations graphiques des additions et des soustractions de vecteurs donnés par des représentants
- Opérations sur les composantes des vecteurs
- In geometrischen Figuren, deren Eckpunkte bekannt sind, Terme mit Vektoren vereinfachen und Berechnungen durchführen

#### Fonctions

- Erkennen ob eine als Pfeildiagramm oder Graph gegebene Relation eine Funktion ist
- Zu linearen und quadratischen Funktionstermen den dazugehörigen Graphen erkennen
- Erstellen einer Wertetabelle und zeichnen des Graphen
- Erstellen einer Wertetabelle mit Hilfe eines Taschenrechners
- Lösen von linearen Ungleichungen
- Premier degré: expression fonctionnelle de la droite, représentation, pente, intersections, domaine
- Premier degré: résolution d'équations graphiquement en cas de solution unique
- Deuxième degré: expression fonctionnelle de la courbe, représentation, sommet, intersections, domaine
- Premier et deuxième degré: connaissances générales au sujet des représentations graphiques

### Thèmes rejetés par les deux sections linguistiques

#### Algèbre

- Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction littérale en amplifiant par le conjugué
- Résolution d'équations cubiques factorisables par division polynomiale
- Résolution d'équations avec racine dont l'élévation au carré nécessite l'utilisation du carré d'une somme ou d'une différence
- Discussion du nombre de solutions d'une équation quadratique avec paramètres

#### Géométrie

- Constructions géométriques faisant intervenir le cercle de Thalès
- Constructions de triangles rectangles étant donné un rapport trigonométrique

#### Fonctions

- Zeichnerisches Verschieben und Strecken eines Funktionsgraphen in Richtung der x-Achse
- Verketten von Funktionen und Bestimmung des Definitionsbereichs der verketteten Funktionen
- Bestimmung mit Hilfe des Taschenrechners in welchen Intervallen eine Funktion fallend ist
- Ungleichungen mit Bruchtermen, bei denen die Unbekannte im Zähler und Nenner vorkommt
- Ungleichungen mit Bruchtermen mit Hilfe des Taschenrechners lösen
- Vorzeichen von gebrochen rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen
- Bestimmung von Gebieten in der Ebene, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind
- Résolution algébrique d'une équation avec valeur absolue
- Donner une définition par morceaux d'une ligne brisée, éventuellement en utilisant une valeur absolue
- Établir l'équation d'une parabole de sommet connu et de droite tangente connue
- Résolution d'inéquation entre valeur absolue d'une fonction du premier degré d'une part et fonction du deuxième degré d'autre part, le graphique ne suffisant pas à lire les solutions
- Exercices relatifs à une fonction du deuxième degré dont les coefficients sont liés à un paramètre

### Thèmes retenus par la section mentionnée et rejetés par l'autre

#### Section alémanique

- Berechnung von  $(a + b)^n$  mit Hilfe des Pascal-Dreiecks (mais résultats inhomogènes entre les sections)
- Résolution d'équations avec racines simples sans solution étrangère
- Géométrie vectorielle de l'espace

#### Section romande

- Extraction des carrés parfaits d'une racine
- Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction numérique comportant une racine
- Identités remarquables de degré 3
- Identification des composantes des vecteurs du plan dans des bases quelconques
- Utilisation du terme de norme et de la notation  $||\vec{v}||$  pour désigner la longueur d'un représentant d'un vecteur  $\vec{v}$
- Lösen von quadratischen Ungleichungen
- Ungleichungen dritten Grades, bei denen eine Lösung Null ist
- Bestimmung von Punkten im Graphen einer Funktion, die mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllen
- Bestimmen der Definitionsmenge und Nullstellen von gebrochen rationalen Funktionen
- Résolution graphique d'une équation dont les solutions sont multiples (réunion d'un intervalle et de singletons)
- Présentation de l'étude du signe d'une fonction sous la forme d'un tableau de signes

FIG. 1: Liste des différents thèmes retenus et rejetés suite au deuxième mandat (GCM 2017).

$n \mapsto n + 1$  des anciennes compétences  $n \in \{7, \dots, 42\}$ . C'est dès ce mandat que l'importance du choix de la méthode de résolution dans un exercice commence à être citée en dehors de l'annexe au PEC (CDIP 2016). Le rapport fit remarquer qu'aucun effet positif de l'entraînement des compétences basales n'avait pu être observé, et plusieurs raisons furent amenées : la difficulté d'entraîner les compétences basales sans préteriter l'atteinte des objectifs du plan cantonal ; la courte durée de l'expérience et son interruption par le confinement COVID-19 ; et l'insuffisance de la simple responsabilisation des élèves à l'acquisition des compétences basales sans contrôle de la part de l'enseignant-e.

Le mandat le plus récent, dont le rapport date de 2021 (GCM 2021), s'est concentré sur deux aspects : l'établissement d'une liste de compétences basales pour la deuxième année gymnasiale, dans la même idée que celle qui avait été proposée par le rapport du troisième mandat, et sur la mise en place de leçons de soutien axées sur les compétences basales. Ces leçons de soutien sont encore en vigueur dans les gymnases du canton, avec notamment au collège Saint-Michel une heure par semaine ; selon GCM (2021), ces leçons peuvent entre autres s'appuyer sur :

- un recueil cantonal d'exercices, encore à rédiger (c'est là que le présent travail s'instaure) ;
- un recueil d'exercices déjà existant (EBERLE, BRÜGGENBROC et al. 2014, chap. 6.5, p. 82 *seqq.*), dit de Christof WEBER ;
- le recueil de compétences basales du canton de Berne (BKD 2019) ;
- les manuels de mathématiques issus du cycle d'orientation ;
- ainsi que sur les précédents rapports des mandats susmentionnés.

Le rapport en question (GCM 2021) contient même un chapitre résumant les outils élaborés dans les divers cantons, et leur taux de succès auprès du corps enseignant.<sup>6</sup>

## 1.2 Modalités du présent travail

Dans ce laboratoire de didactique, l'accent est mis sur la réalisation d'un projet concret permettant de pousser à la progression d'une des compétences basales en mathématiques que l'on peut retrouver dans l'annexe au PEC de la maturité gymnasiale national (CDIP 2016). Nous avons ainsi développé une ressource pour générer des exercices et corrigés centrés sur l'une des compétences basales.

Globalement, la compétence choisie est celle décrite dans l'annexe au PEC comme « utiliser avec souplesse l'outillage mathématique ». C'est-à-dire que les élèves doivent

<sup>6</sup>Un exemple très développé est la ressource Lernnavi (<https://lernnavi.ch/>), qui promet d'aider à accroître le niveau d'allemand et de mathématiques, tout en identifiant les points faibles de ses utilisat-eu-ric-e-s afin de les entraîner. Les soussignés n'ont toutefois pas réussi à faire fonctionner le site depuis leurs appareils.

**Compétence 10**

Factoriser une expression polynomiale à coefficients entiers à l'aide d'une mise en évidence d'un monôme ou d'un binôme ou à l'aide d'un produit remarquable du second degré.

*La factorisation d'un trinôme du second degré n'est pas considérée comme une compétence basale.*

**Exemples 10.1**

Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

- |                                       |                        |
|---------------------------------------|------------------------|
| (a) $15x^3 + 10x$                     | (d) $a^2 + 8a + 16$    |
| (b) $3x(x + 1) + 5(x + 1)$            | (e) $16y^2 - 9$        |
| (c) $(x - 2)(x + 8) + (x - 2)(x - 5)$ | (f) $36x^2 - 84x + 49$ |

**Contre-exemples 10.2**

Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

- |                                    |                           |
|------------------------------------|---------------------------|
| (a) $x^2 - x - 12$                 | (d) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$ |
| (b) $2x^2 - 8x - 10$               | (e) $x^4 - 4$             |
| (c) $(2x - 5)(4x - 7) - 3(5 - 2x)$ | (f) $x^3 - 16x^2 - 64x$   |

FIG. 2: La compétence 10 présentée dans le rapport du troisième mandat (GCM 2018).

**Compétence 14**

Résoudre une équation polynomiale du second degré, sans paramètre, à coefficients entiers et dont les membres gauches et droits peuvent être simplifiés selon les critères de la compétence 9.

**Compétence 17**

Résoudre un système régulier de deux équations linéaires.

FIG. 3: Les compétences basales 14 et 17, correspondant à celles choisies pour le présent travail, telles qu'elles sont décrites dans GCM (2018). *La compétence 9 citée dans l'intitulé de la compétence 14 concerne la réduction d'une expression polynomiale à au plus trois termes.*

être capables de choisir, parmi leurs connaissances mathématiques, la ou les méthodes les plus appropriées à l'exercice ou au problème auquel iëls sont confronté-e-s. L'approfondissement de cette compétence dans tous les domaines parcourus en mathématiques au gymnase serait un travail titanesque, mais nécessaire dans la continuité des mandats présentés en section 1.1.2. Ainsi, les outils développés par les auteurs s'inscrivent chacun dans un thème bien précis, respectivement les équations quadratiques et les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues. Par conséquent, si l'on reprend la liste de quarante-trois compétences données dans GCM (2018), les compétences 14 et 17 sont le sujet du présent travail (v. fig. 3). Une discussion autour du choix des thèmes est l'objet de la section 1.2.2.

### 1.2.1 Notre but

Le choix de compétences étant fait, comment les entraîner dans la pratique ? Une situation concrète illustrant le propos est donnée dans l'encadré.

**Exemple :** Supposons l'élève confronté-e à l'équation  $x^2 + 5x - 14 = 0$ . Le but est qu'iël se rende compte que le polynôme peut être factorisé pour en soutirer les racines :  $(x - 2)(x + 7) = 0$ . Cette méthode est bien plus efficace que d'appliquer sans réfléchir la formule de Viète (même si elle marche également).

Comment faire maintenant pour que les exercices poussent à la compétence visée, qui n'est pas uniquement la résolution des équations ? Évidemment, il ne suffira pas de donner aux élèves la solution des équations pour les pousser à en accélérer la résolution. Une autre approche s'impose.

Nous proposons, dans notre projet, de créer un document  $\text{\LaTeX}$  qui, à la compilation, génère un  $\text{\pdf}$  d'exercices de résolutions d'équations avec corrigés mettant l'accent sur la méthode et non la solution.<sup>7</sup> Pour reprendre l'exemple ci-dessus, le corrigé de la version compilée donnerait en bas de page

**Exercice 1 :** par factorisation du trinôme,  $S = \{2; -7\}$ .

Ce faisant, les élèves seront d'office confronté-e-s à une méthode de résolution potentiellement différente de la leur. En la comparant à celle qu'iëls auront empruntée, les élèves seront amené-e-s à remettre en cause leur *modus operandi*, et encouragé-e-s par la même occasion à l'optimiser, ayant goûté au gain de temps envisageable. Une consigne adaptée devra évidemment accompagner l'exercice.

<sup>7</sup>En effet,  $\text{\LaTeX}$  (dans sa variante  $\text{\LuaTeX}$ ) permet d'implémenter directement dans son code le langage de programmation Lua, qui se compile en même temps que le fichier  $\text{\tex}$ . Ceci nous donne accès à toute la richesse d'un langage de programmation à part entière, permettant ainsi le traitement de logique plus complexe. C'est cette implémentation qui a été choisie pour la suite du projet.

### 1.2.2 Notre choix

En parcourant les compétences basales en mathématiques dans l'annexe au PEC (CDIP 2016), on remarque qu'elles sont divisées en deux : d'une part les thèmes de base (savoirs) et d'autre part les exigences de base (savoir-faire). En l'espèce, nous avons chacun choisi un thème qui nous semblait adapté à une automatisation informatique et facilement autocorrectif : les équations du second degré pour l'un et les systèmes d'équations linéaires (précisés dans l'annexe : à deux équations et deux inconnues) pour l'autre.

À ces thèmes il fallait maintenant ajouter une exigence. Nous avons le choix entre les trois présentées dans l'annexe :

- « utiliser avec souplesse l'outillage mathématique », *i. e.* faire preuve d'une approche flexible des outils et d'une utilisation appropriée à la spécificité de l'exercice ou problème donné ;
- « manier de manière adaptative graphiques, représentations tridimensionnelles, formules et statistiques », *i. e.* verbaliser un graphique ou une formule ou à l'inverse, formaliser un texte ou une représentation graphique ;
- « établir des liens entre les concepts mathématiques ».

Le deuxième point a été vite écarté lors de nos réflexions pour deux raisons principales. Premièrement, nos connaissances informatiques ne permettaient pas de prendre en compte la difficulté algorithmique d'un tel travail pour des graphiques tri- ou même bidimensionnels dans la génération automatique d'exercices et de corrigés. Deuxièmement, dans le cas spécifique des thèmes choisis, bien que comportant un important bagage géométrique (résoudre un système d'équations revient à calculer le point d'intersection entre deux droites, une équation de second degré à chercher les zéros d'une parabole), il nous semblait nécessaire de se concentrer sur le développement d'une seule exigence, afin de ne pas surcharger les élèves avec des informations qu'ils ne retiendraient sûrement pas. Il serait néanmoins intéressant de compléter ce présent travail d'une approche géométrique pour lier les chapitres qui, aux yeux des étudiant-e-s, sont souvent peu rattachés.

Le troisième point a similairement été évincé pour des raisons de difficulté de mise en pratique : une exigence si vaste est difficilement soumise à une approche algorithmique.

L'exigence choisie a donc été l'utilisation avec souplesse de l'outillage mathématique. Dans notre cas cela signifiait : choisir la *bonne* méthode de résolution (combinaison linéaire ou substitution pour les systèmes linéaires, factorisation, isolation directe, Viète et autres pour les équations du second degré). Par rapport à la fig. 2, nous avons décidé de tout de même présenter des équations quadratiques présentant des factorisations par trinôme pour une raison bien spécifique : savoir reconnaître différentes méthodes de résolution fait partie du domaine des compétences transversales. En effet, il nous semblait plus important qu'un-e élève sache reconnaître qu'un polynôme donné ne soit *pas* issu d'une identité remarquable plutôt que de réussir à

le factoriser par trinôme. Si, de surcroît, les élèves peuvent repartir avec la capacité de factoriser rapidement tout polynôme de second degré s’y prêtant, celle-ci ne sera guère perdue.<sup>8</sup>

### 1.3 Produit final

Ainsi avons-nous visé la création de deux fiches — l’une pour les systèmes linéaires d’équations à deux inconnues, l’autre pour les équations de second degré — posant une série d’équations à résoudre, et proposant pour chacune de celles-ci ses solutions *ainsi que la méthode jugée optimale pour y parvenir*. Chacune des fiches doit être générée algorithmiquement à partir de nombres pseudoaléatoires.

Deux exemplaires de fiches obtenues ainsi sont donnés en figg. 4 et 5.

### 1.4 Usage prévu (exemple)

Les enseignant-e-s sont bien évidemment libres de faire de cette ressource l’usage qui leur convient. Cependant, pour aiguiller la pensée, nous donnons ici un exemple de l’utilisation qui pourrait en être faite, et pour laquelle la mise en page des figg. 4 et 5 a été conçue.

#### Étape 1 : Préparation enseignante

L’enseignant-e prépare à l’avance un nombre de fiches égal au nombre d’élèves dans la classe. Chaque fiche est unique. L’enseignant-e coupe ensuite la pile de fiches le long des traits tillés, créant ainsi un lot de fiches d’exercices chacune avec sa fiche de solutions.

#### Étape 2 : Travail individuel

L’enseignant-e distribue ensuite les fiches d’exercices, une par élève. Les élèves ont ensuite la tâche de résoudre chacune des vingt-quatre (ou dix-huit, ou douze, ou  $n \in \mathbb{N}$ ) équations. Une fois toutes les équations résolues, l’élève demande sa feuille de réponse (identifiée par la date et l’heure de création), et est tâché-e de s’autocorriger. Pour chaque équation, l’élève doit indiquer s’il a suivi ou non la même méthode de résolution que celle indiquée dans la feuille de réponse.

#### Étape 3 : Mise en commun

L’enseignant-e demande à chaque élève de citer une seule équation pour laquelle la méthode optimale de résolution lui est parue difficile à repérer. Une fois toutes ces équations (et méthodes de résolution) récoltées, l’enseignant-e entame une discussion avec la classe pour en déterminer les points communs.

<sup>8</sup>Nous donnons toutefois aux enseignant-e-s la possibilité d’éliminer entièrement la factorisation par trinôme : voir code 3.4, p. 19.

Résolvez ces équations en utilisant à chaque fois la méthode la plus rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la forme standard si elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations résolues, vérifiez vos réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question si vous avez utilisé la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas droit à la calculatrice.

#### Exercices

(générées le 2024-05-03 à 10h49m25s)

- |                             |                              |                             |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 01. $-5x^2 - 75x - 280 = 0$ | 09. $-4x^2 + 9x - 52 = 0$    | 17. $-3x^2 = 1$             |
| 02. $7x^2 + 105x + 350 = 0$ | 10. $5x^2 + 14x - 38 = 0$    | 18. $-2x^2 = -8x - 64$      |
| 03. $x^2 - 10x + 25 = 0$    | 11. $3x^2 + 2x - 21 = 0$     | 19. $-8x^2 + 20x - 25 = 0$  |
| 04. $-3x^2 + 6x + 72 = 0$   | 12. $5x^2 - 40x - 165 = 0$   | 20. $4x^2 - 12x - 160 = 0$  |
| 05. $x^2 + 4x - 32 = 0$     | 13. $-4x^2 + 52x - 48 = 0$   | 21. $-x^2 = -16x + 60$      |
| 06. $2x^2 = 4x + 16$        | 14. $-8x^2 + 48x - 40 = 0$   | 22. $-5x^2 - 45x + 110 = 0$ |
| 07. $3x^2 - 18x + 3 = 0$    | 15. $-3x^2 + 9x = 0$         | 23. $-3x^2 + 18x + 216 = 0$ |
| 08. $2x^2 + 16x + 53 = 0$   | 16. $x = \frac{1}{5}x^2 + 2$ | 24. $8x^2 - 24x - 320 = 0$  |

#### Réponses

(générées le 2024-05-03 à 10h49m25s)

01. diviser par  $-5$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-8; -7\}$
02. diviser par  $7$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-5; -10\}$
03. par identité remarquable (carré parfait),  $S = \{5\}$
04. diviser par  $-3$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{6; -4\}$
05. par factorisation du trinôme,  $S = \{4; -8\}$
06. diviser par  $2$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-2; 4\}$
07. formule quadr.,  $S = \{3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\} \approx \{0,172; 5,83\}$
08. formule quadr. / en calculant le discriminant ( $\Delta$ ),  $S = \emptyset$
09. formule quadr. / en calculant le discriminant ( $\Delta$ ),  $S = \emptyset$
10. formule quadr.,  $S = \left\{-\frac{7}{5} + \frac{\sqrt{239}}{5}; -\frac{7}{5} - \frac{\sqrt{239}}{5}\right\} \approx \{-4,49; 1,69\}$
11. formule quadr.,  $S = \left\{-3; \frac{7}{3}\right\} \approx \{-3,0; 2,33\}$
12. diviser par  $5$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{11; -3\}$
13. diviser par  $-4$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{1; 12\}$
14. diviser par  $-8$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{1; 5\}$
15. par mise en évidence de  $-3x$ ,  $S = \{0; 3\}$
16. multiplier par  $9$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{3; 6\}$
17. somme de nombres du même signe ne fait jamais zéro,  $S = \emptyset$
18. diviser par  $-2$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-4; 8\}$
19. formule quadr. / en calculant le discriminant ( $\Delta$ ),  $S = \emptyset$
20. diviser par  $4$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{8; -5\}$
21. diviser par  $-1$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{6; 10\}$
22. diviser par  $-5$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{2; -11\}$
23. diviser par  $-3$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-6; 12\}$
24. diviser par  $8$ , puis par factorisation du trinôme,  $S = \{-5; 8\}$

FIG. 4: Exemple d'une fiche pour la résolution efficace d'équations de second degré.



Résolvez ces systèmes d'équations en utilisant à chaque fois la méthode la plus rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la forme standard si elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations résolues, vérifiez vos réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question si vous avez utilisé la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas droit à la calculatrice.

#### Exercices

(générés le 2024-05-02 à 16h27m14s)

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 01. $\begin{cases} 9x - 7y = 0 \\ 9x - 6y = 7 \end{cases}$     | 07. $\begin{cases} 8x - 8y = 1 \\ -3y = 3 \end{cases}$          | 13. $\begin{cases} -10x + 10y = -12 \\ -7x + 5y = 9 \end{cases}$ |
| 02. $\begin{cases} -2x + 3y = -12 \\ 4x = 15 \end{cases}$      | 08. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -6x - 12y = 0 \end{cases}$     | 14. $\begin{cases} 8x - 9y = 1 \\ -5x - 7y = 10 \end{cases}$     |
| 03. $\begin{cases} 5x + y = -8 \\ -10x + 9y = -10 \end{cases}$ | 09. $\begin{cases} -3x + 10y = -11 \\ -x + y = -12 \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} -4x - 6y = -4 \\ 5x + 6y = -9 \end{cases}$    |
| 04. $\begin{cases} -9x - y = -9 \\ 54x + 6y = 54 \end{cases}$  | 10. $\begin{cases} 8x + 7y = -13 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$   | 16. $\begin{cases} -10x + 10y = 8 \\ 8x + y = 4 \end{cases}$     |
| 05. $\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 18x + 24y = -6 \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} -8x + 2y = 9 \\ 4x + 8y = -2 \end{cases}$    | 17. $\begin{cases} -2x + 8y = 3 \\ -4x + 16y = 6 \end{cases}$    |
| 06. $\begin{cases} -8y = 11 \\ -32y = 11 \end{cases}$          | 12. $\begin{cases} -x - 7y = -13 \\ -5x - 4y = -2 \end{cases}$  | 18. $\begin{cases} x - 10y = -5 \\ 10x + y = -15 \end{cases}$    |

#### Réponses

(générés le 2024-05-02 à 16h27m14s)

01. soustraction directe des deux équations,  $S = \{(\frac{49}{9}, 7)\}$
02. isoler  $x$  dans la 2<sup>e</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(\frac{15}{4}, -\frac{3}{2})\}$
03. isoler  $y$  dans la 1<sup>re</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{62}{55}, -\frac{26}{11})\}$
04. les deux équations sont dépendantes,  $S = \{(x, 9 - 9x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
05. les deux équations sont dépendantes,  $S = \{(x, -\frac{1}{4} - \frac{3x}{4}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
06. surdéfini,  $S = \emptyset$
07. isoler  $y$  dans la 2<sup>e</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{7}{8}, -1)\}$
08. sans solutions,  $S = \emptyset$
09. isoler  $y$  dans la 2<sup>e</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(\frac{109}{7}, \frac{25}{7})\}$
10. diviser par  $-2$  puis isoler  $y$  dans la 2<sup>e</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(\frac{13}{6}, -\frac{13}{3})\}$
11. diviser par 2 puis isoler  $y$  dans la 1<sup>re</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{19}{18}, \frac{5}{18})\}$
12. diviser par  $-1$  puis isoler  $x$  dans la 1<sup>re</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{38}{31}, \frac{63}{31})\}$
13. diviser par 10 puis isoler  $y$  dans la 1<sup>re</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{15}{2}, -\frac{87}{10})\}$
14. par combinaison linéaire,  $S = \{(-\frac{83}{101}, -\frac{85}{101})\}$
15. addition directe des deux équations,  $S = \{(-13, \frac{28}{3})\}$
16. isoler  $y$  dans la 2<sup>e</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(\frac{16}{45}, \frac{52}{45})\}$
17. les deux équations sont dépendantes,  $S = \{(x, \frac{3}{8} + \frac{x}{4}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
18. isoler  $x$  dans la 1<sup>re</sup> équation, substituer ensuite,  $S = \{(-\frac{155}{101}, \frac{35}{101})\}$

FIG. 5: Exemple d'une fiche pour la résolution efficace d'un système d'équations.

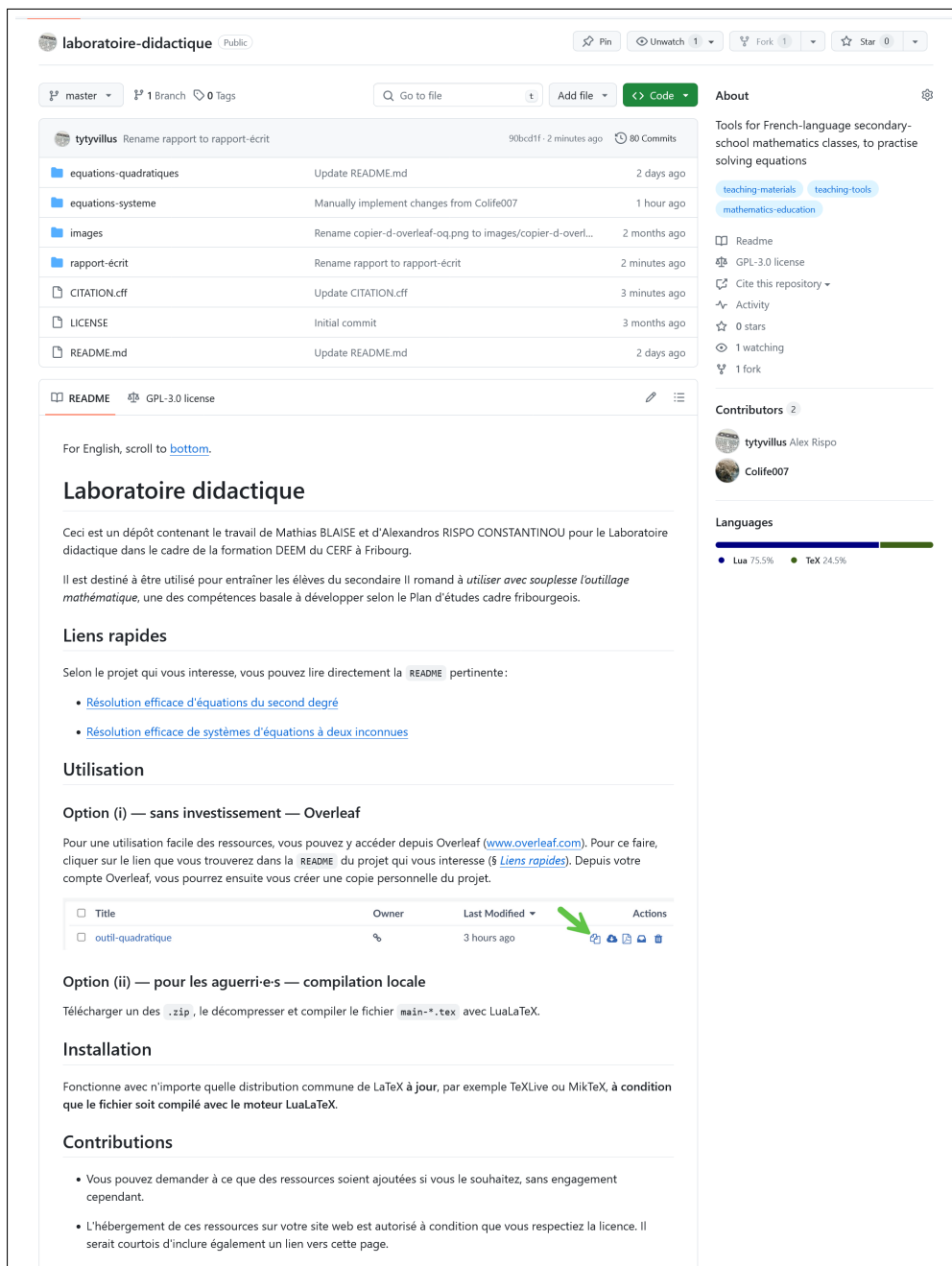


FIG. 6: Le dépôt GitHub du travail. *Capture d'écran depuis la page d'accueil, prise en avril 2024.*

## Mise à disposition du travail

**P**OUR QUE LA COMMUNAUTÉ des enseignant-e-s de mathématiques puisse accéder à notre travail, nous avons décidé de lui créer un dépôt GitHub (RISPO CONSTANTINOU et BLAISE 2024). Ainsi, l'accès au projet est garanti en tout temps, et la possibilité reste ouverte pour que celui-ci évolue ; que ce soit l'un des auteurs à vouloir y apporter des modifications, ou encore une tierce personne, le système des *forks* et des *pull requests* le leur permettra aisément.

### 2.1 Le dépôt GitHub

Une capture d'écran du dépôt, prise depuis la page d'accueil, est reproduite en fig. 6. L'on y voit notamment la structure du dépôt, qui est divisé en quatre dossiers :

- `equations-quadratiques`, contenant la ressource visée à la résolution d'équations quadratiques ;
- `equations-systeme`, avec la ressource pour la résolution de systèmes à deux équations linéaires en deux inconnues ;
- `images`, contenant les fichiers `.png` nécessaires au bon affichage des README ;
- et `rapport-écrit`, avec le fichier `.pdf` du présent rapport.

Il y a également dans la page d'accueil une `README.md` globale pour le dépôt, un fichier `LICENSE` avec la licence choisie pour la diffusion du travail, et un fichier `CITATION.cff`, permettant la juste attribution bibliographique de l'œuvre. Nous avons choisi de distribuer le projet sous la *GNU General Public License* (version 3, abrégée « *GPLv3* »), une licence *copyleft*, afin qu'il puisse facilement être adapté aux besoins de ses utilisateur-ice-s. Pour ce qui est de la mention des auteurs, la *GPLv3* interdit explicitement d'imposer la citation systématique des auteurs d'origine ; nous nous bornons à rappeler — dans la *README* principale — que la juste attribution du travail d'autrui relève de la politesse et de la bonne éducation.

La *README* principale comporte une brève description du projet, des liens vers les deux sous-projets, une section « Démarrage rapide » (« *Quickstart* »), la licence, et une notice sur les possibilités de contributions ou d'hébergement externe. Ce document

est également traduit en anglais pour prévenir une potentielle future traduction des ressources composant le projet.

## 2.2 Utilisation de la ressource

Dans chacun des deux dossiers spécifiques, c'est-à-dire `equations-quadratiques` et `equations-systeme`, sont présents sept fichiers (ici indiqués pour le dossier `quadratique`, pour l'autre le mot `quadratique` est à remplacer par `systeme`):

- (i) `README.md`, spécifique à l'outil;
- (ii) `QUICKSTART.md`, également spécifique à l'outil, donnant toutes les informations nécessaire à un démarrage tout en vitesse (utilisation + modification simple);
- (iii) `codeQuadratique.lua`, contenant l'algorithme de génération des équations ainsi que de leur solution;
- (iv) `preamble-quadratique.tex`, le préambule du fichier `.tex`;
- (v) `main-quadratique.tex`, le fichier principal à ouvrir et compiler en  $\text{Lua}\text{\LaTeX}$  avec une distribution  $\text{\LaTeX}$  à jour;
- (vi) `main-quadratique.pdf`, un exemple d'une feuille de travail générée par l'outil en question;
- (vii) `DOWNLOADME-outil-quadratique.zip`, un fichier condensé, facile à télécharger, contenant les fichiers (i–v).

Pour utiliser la ressource, deux possibilités existent, décrites clairement et abordablement dans les `QUICKSTART`. La première, d'utilisation facile, est de suivre un lien depuis la `QUICKSTART` vers un projet Overleaf, d'en faire une copie, puis de laisser Overleaf compiler les documents. Les liens Overleaf sont les suivants :

- pour les équations de second degré,

<https://www.overleaf.com/read/tsmdmkhnrzjq#7569b4>;

- et pour les systèmes d'équations à deux inconnues,

<https://www.overleaf.com/read/hmxjgqgkkmcq#9ccf30>.

La deuxième possibilité, plus technique, mais pas pour autant beaucoup plus difficile, consiste à télécharger le `DOWNLOADME-outil-*.zip`, de le dézipper, et de compiler le fichier `main-*.tex` avec une installation  $\text{Lua}\text{\LaTeX}$  locale. Ici, «`*`» tient lieu de `quadratique` ou `systeme`.

Les `QUICKSTART` contiennent, en outre, des consignes au sujet des commandes mises à disposition depuis le document `main-*.tex` pour mettre en page les fiches,

comme par exemple chez les équations de second degré la commande `\aprintqna`, qui imprime l'équation sur une ligne, suivie de la réponse.

Les README, elles, donnent des explications plus détaillées sur le fonctionnement interne des deux outils, et rajoutent également quelques conseils ou fonctionnalités additionnelles. Par exemple, pour la compilation locale, la README explique comment générer avec une seule commande plusieurs fiches d'un coup. Pour un système d'exploitation basé sur Linux, on peut simplement taper le code suivant dans Bash depuis le dossier contenant `main-*.tex`:


```
for i in {1..20}; do
    lualatex -jobname feuille-$i main-*.tex;
done
```

Notez que le code est ici séparé en lignes différentes pour qu'il rentre sur la page ; dans Bash, il est recommandé de tout taper sur la même ligne. Quelques adaptations pourraient être nécessaires, par exemple du nom du moteur `LuaATEX` (`lualatex`, `lualatex.exe` ou autre). Sachez également que les commandes sont à adapter à la syntaxe particulière du terminal du système d'exploitation ; nous donnons dans les README aussi l'exemple pour Windows PowerShell.

Elles expliquent de plus comment accéder aux fonctions internes du code Lua et, véritable apogée de notre projet, comment combiner les fonctionnements des deux outils. Un document Overleaf (encore expérimental !) illustrant cette fonctionnalité est disponible au lien suivant :

<https://www.overleaf.com/read/wzdcckddkjzy#f3d012>.

## Structure des algorithmes

ES ALGORITHMES SONT, comme cité plus haut, principalement implémentés en langage Lua dans un fichier `.lua` appelé par le document `.tex` (PÉGOURIÉ-GONNARD 2012). Les calculs sont donc effectués par Lua, et  $\text{\LaTeX}$  se charge ensuite de la mise en page. Un troisième logiciel, le paquet `luacas` (COCHRANE et ALL 2023) disponible sur CTAN, se charge pour certaines expressions complexes de leur simplification algébrique.

Dans cette section, nous passons les détails de la conversation entre Lua,  $\text{\LaTeX}$  et `luacas`, et nous focalisons sur le fonctionnement général des algorithmes. Pour les enseignant-e-s désirant adapter le code à leur usage spécifique, différentes options de personnalisation sont mises à disposition depuis le document `.tex`; pour la modification des algorithmes, certains paramètres sont facilement modifiables dans une section dédiée, au début du fichier `.lua`. Préparer un manuel détaillé documentant toutes les modifications de ce genre possibles aurait été une tâche gargantuesque; pour les utilisateur-ice-s souhaitant mettre les mains à la pâte, les `QUICKSTART` et `README` sont disponibles, et les divers éléments du fichier `.lua` sont équipés de commentaires fréquents visés à élucubrer leur fonctionnalité. Nous espérons que ces commentaires suffiront.

### 3.1 Équations de second degré

Le code complet et détaillé de cet algorithme-ci est à trouver dans le code A.9 (p. 58), mais n’y est pas particulièrement adapté à la lecture non-initiée. Nous donnons donc ici une version simplifiée en pseudocode.

L’algorithme est assez complexe, et se découpe en quatre grandes parties : la génération des équations de type  $ax^2 + bx + c = 0$  à résoudre (`polynomial()`), leur impression (`printEquation()`), le choix de la méthode la plus efficace avec résolution de l’équation (`method()` et `solution()`) et enfin l’impression de la solution (`answer()`). Cette logique est celle donnée en pseudocode dans le code 3.1.

---

Code 3.1 : Algorithme global pour les équations du second degré.

```
fonction fullRoutine ()
  début
    tableau polynomialCoeffs ← polynomial()
```

```

// génère les coefficients a, b, c de  $ax^2 + bx + c$ 

chaîne eqnString != printEquation(polynomialCoeffs)
// crée une chaîne avec " $ax^2 + bx + c = 0$ " (ou autre équation)

chaîne ansString != answer(
    method(polynomialCoeffs),
    solution (polynomialCoeffs)
)
// crée une chaîne avec "[méthode],  $S = \{x_1, x_2\}$ "

toTEX(eqnString ++ ansString)
// envoie les réponses à TeX pour qu'il les imprime
fin

```

---

Prenons donc ces composantes une à une, en commençant avec la génération des coefficients de polynôme.

### 3.1.1 Coefficients de polynôme

Pour s'assurer que les polynômes générés soient intéressants à résoudre d'un point de vue technique, et non uniquement des polynômes à résoudre avec la formule de Viète, nous avons utilisé deux méthodes différentes s'alternant de façon aléatoire. La première génère d'abord les solutions  $x_1, x_2 \in \llbracket -15, 15 \rrbracket$ ,<sup>9</sup> et en déduit les coefficients du polynôme; la deuxième choisit directement trois coefficients  $a \in \llbracket -10, 10 \rrbracket$ ,  $b \in \llbracket -20, 20 \rrbracket$  et  $c \in \llbracket -60, 60 \rrbracket$ . La première méthode est choisie dans sept cas sur dix. Le principe est illustré dans le code 3.2.

Code 3.2: Génération de coefficients pour équations de second degré.

```

fonction polynomial()
début
    booléen fromSols != aléatoirement(vrai, 7/10 | faux, 3/10)

    si fromSols = vrai,
        alors // définit aléatoirement les solutions
            x1, x2 ←  $\llbracket -12, 12 \rrbracket$ 
            si aléatoirement(vrai, 1/10 | faux, 9, 10)
                x2 != x1 // insiste que ~10% des cas fromSols...
            fin si // ... soient des carrés parfaits
            a ←  $\llbracket -10, 10 \rrbracket \setminus \{0\}$ 
            b != - a * (x1 + x2)
            c != a * x1 * x2
        sinon // définit aléatoirement les coefficients a, b, c
            a ←  $\llbracket -10, 10 \rrbracket$ 
            b ←  $\llbracket -20, 20 \rrbracket$ 

```

<sup>9</sup>La notation  $\llbracket m, n \rrbracket$  est ici utilisée pour signifier l'ensemble  $\{m, m+1, \dots, n-1, n\}$ , où  $m < n \in \mathbb{Z}$ .

```

c ← [-60, 60]
x1 := (- b - sqrt(b^2 - 4*a*c)) / (2*a)
x2 := (- b + sqrt(b^2 - 4*a*c)) / (2*a)
// il y des protections pour rendre nil si la solution
// n'existe ou si l'équation est linéaire /autre
finsi

n := longueur( filtre ( {x1, x2} | # ≠ nil ) )
// n est défini comme le nombre de solutions
// peut être égal à 0, 1, 2 ou infini

rendre {a, b, c, n, x1, x2}
fin

```

---

Une fois l'équation générée, il faut choisir la méthode «la plus efficace» pour la résoudre. L'algorithme consiste essentiellement à vérifier toutes les situations possible (code 3.3), avec une nuance : la fonction `easyFactor()` (code 3.4).

Code 3.3: Choix de la méthode «la plus efficace».

---

```

// n = nombre de solutions, équation est ax^2+bx+c=0
chaîne méthode :=
si n = ∞ alors "par évidence"
// c'est le cas 0 = 0
sinon si n ≠ 0 alors
si a = 0 alors "résoudre algébriquement"
// équation de 1er degré
sinon si b = 0 alors "par réarrangement"
// le cas ax^2 + c = 0
sinon si c = 0 alors "par mise en évidence"
// le cas ax^2+bx=0
sinon si easyFactor(a,x1,x2) alors
si n = 1 alors "par identité remarquable (carré parfait)"
sinon "par factorisation du trinôme" finsi
// si différent de 1, rappeler de factoriser par a :
si a ≠ 1 alors préfixer ("diviser par a, puis [...] ") finsi
sinon "avec la formule de Viète"
fin si
sinon si n = 0 alors
si a = 0 et b = 0 et c ≠ 0 alors "évidemment"
// c'est le cas 1 = 0
sinon si b = 0 "la somme de nombres positifs ne fait jamais 0"
// c'est le cas ax^2+c=0, sgn(a*c)>0
sinon "en calculant le discriminant"
// car le manque de solutions n'est pas immédiatement évident
fin si
fin si

```

---



La fonction `easyFactor()` est la méthode utilisée pour décider si un polynôme donné est facile à factoriser «à l’œil» ou non. Nous avons choisi de dire qu’un trinôme est facilement factorisable si les facteurs sont suffisamment petits, dans un sens formalisé dans le code 3.4. La fonction est volontairement séparée du reste du programme, afin que les utilisateurs du document puissent, au besoin, facilement la modifier.

Par exemple, si l’enseignant-e ne souhaite pas encourager la factorisation par trinôme, il suffit de poser

```
local function easy_factor(a, x1, x2) return false end
```

dans le code Lua, c’est-à-dire d’étiqueter tous les polynômes comme difficiles à factoriser.<sup>10</sup>

Code 3.4: Décision de facilité à factoriser.

---

```

fonction booléenne easyFactor(a, x1, x2)
  // détermine si un polynôme est facile à factoriser
  // à partir de a et de ses racines
  début
    c != a*x1*x2
    rendre vrai si
      ( (max(|x1|,|x2|) ≤ 12 ou min(|x1|,|x2|) ≤ 3) et
        (|a| ≤ 5 ou a = 10 ou mod(c,10) = 0) )
      ou |c| ≤ 144
    rendre faux sinon
  fin

```

---

Un commentaire, enfin, sur l’impression de l’équation : la forme de l’équation est aléatoirement choisie, pour avoir quatre formes possibles. Celles-ci sont les suivantes, avec la probabilité de leur apparition donnée entre parenthèses.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (80 \%)$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2 \quad (6,66 \%)$$

$$\frac{c}{a} = -x\left(x + \frac{b}{a}\right) \quad (6,66 \%)$$

$$ax^2 = -bx - c \quad (6,66 \%)$$

Ces trois types d’équation permettent de varier un peu la forme à résoudre et entraîner le réarrangement de l’équation sous la forme standard.

<sup>10</sup>Relisant aujourd’hui les détails de l’implémentation, je me rends compte que prendre cette mesure désactivera regrettablement aussi les cas d’identité remarquable de type  $(A \pm B)^2$ . Ce défaut pourrait être corrigé dans une version améliorée de l’outil en extirpant la condition `if num_sols == 1` de la vérification `elseif easy_factor(a, x1, x2)` (vers la ligne 247 du code A.9; voir sinon la condition  $n = 1$  dans le code 3.3).

Une fois l'équation, les solutions et la méthode de résolution décidées, elles sont passées à Lua $\text{\LaTeX}$ , qui les met en page et les imprime. Pour le détails de ce processus, la ou le lecteur-ice est invité-e à consulter les appendices, p. 31 *seqq*.

## 3.2 Systèmes d'équations

Le code complet de cet algorithme-ci est à trouver dans le code A.10 (p. 68). Son fonctionnement suit la logique reproduite dans le code 3.5.

Code 3.5: Algorithme pour les systèmes d'équations

---

```

fonction fullRoutine ()
  début
    tableau systemCoeffs != generate_system()
    // génère les coefficients  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  du système d'équations

    chaîne eqnString != printEquation(systemCoeffs)
    // crée une chaîne avec  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  (ou autre équation)

    chaîne ansString != answer(
      method(systemCoeffs),
      solution(systemCoeffs)
    ) // crée une chaîne avec "[méthode],  $S = \{(x, y)\}$ "

    toTEX(eqnString ++ ansString)
    // envoie les réponses à TeX pour qu'il les imprime
  fin

```

---

Tout comme dans la précédente section, analysons en détails les composantes du pseudo-code ci-dessus.

### 3.2.1 Impression du système d'équation

Les systèmes d'équations traités étant uniquement linéaires et à deux inconnues, il y a peu de valeur à chercher à ce que les élèves doivent les mettre sous la forme standard. Tous les systèmes sont donc mis en page sous la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} .$$

### 3.2.2 Coefficients du système d'équations

Contrairement à la génération des coefficients dans les polynômes quadratiques, les coefficients sont ici générés purement aléatoirement, c'est pourquoi la plupart des

solutions, lorsqu'il y en a, ne seront pas entières. Cependant, différentes méthodes de génération sont utilisées. La première méthode, qui intervient dans 10 % des cas, génère tout d'abord les coefficients de la première équation de manière aléatoire, tous compris dans l'intervalle  $[-12, 12]$ , puis un coefficient  $k \in [-7, 7]$  qui viendra multiplier les derniers coefficients afin de générer la deuxième équation (ce qui nous donne une infinité de solutions, les deux équations étant linéairement dépendantes). La deuxième méthode, qui intervient dans 80 % des cas, génère de manière aléatoire tous les coefficients du système et vérifie que le système généré soit régulier

$$\left( \text{en calculant le déterminant de la matrice } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right)$$

et possède ainsi une unique solution. La troisième méthode, qui intervient dans le reste des cas, est similaire à la première, en faisant attention à ce que  $c_1 \neq k \cdot c_2$ , pour n'avoir aucune solution (les droites sont strictement parallèles). Le principe est illustré dans le code 3.6.

Code 3.6: Génération de coefficients pour équations de second degré.

```

fonction system(proba_singular)
    // proba_singular est donné par l'utilisateur et définit la probabilité
    // que le système généré n'ait aucune ou une infinité de solutions
    début
        booléen singular = aléatoirement(vrai, proba_singular |
                                           faux, 1-proba_singular)

        si singular = vrai,
            alors
                a1, b1, c1 ← [-12, 12],
                k ← [-7, 7],
                a2, b2, c2 = k*(a1, b1, c1)
                // dans 50% des cas
            ou
                a1, b1, c1 ← [-12, 12],
                k ← [-7, 7],
                a2, b2 = k*(a1, b1)
                c2 = c1
                // dans les 50% des cas restants
            système = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
            rendre système
        sinon
            a1, b1, a2, b2 ← [-10, 10]
            c1, c2 ← [-15, 15]
            système = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
            det = a1 * b2 - b1 * a1

            si det = 0
                rendre generate_system(proba_singular)
                // vérifie si le système est effectivement régulier,

```

```

        // si ce n'est pas le cas, on regénère
    sinon
        rendre systeme

    n, x, y = solutions(a1, b1, c1, a2, b2, c2)
    // n est défini comme le nombre de solutions, une fonction
    // détermine ce nombre puis calcule les solutions x, y
    // peut être égal à 0, 1, ou infini

    rendre {systeme, n, x, y}
fin

```

---

Une fois le système généré et résolu par la règle de Cramer (plus simple à implémenter dans le code Lua), il faut choisir la méthode «la plus efficace» pour le résoudre. Le principe est très similaire au code 3.3 ci-dessus, et il n'y a rien de plus intelligent à faire que simplement de l'énumération de cas. Les cas sont les suivants.

Code 3.7: Choix de la méthode «la plus efficace».

```

// n = nombre de solutions, systeme est le système
chaîne méthode :=
    si n = ∞ alors "les deux équations sont dépendantes"
    sinonsi n = 1 alors
        si a1=0 ou b1=1 alors "isoler y dans la première équation,
            substituer ensuite"
        sinonsi b1=0 ou a1=1 alors "isoler x dans la première équation,
            substituer ensuite"
        sinonsi a2=0 ou b2=1 alors "isoler y dans la deuxième équation,
            substituer ensuite"
        sinonsi b2=0 ou a2=1 alors "isoler x dans la deuxième équation,
            substituer ensuite"
        sinonsi a1=a2 ou b1=b2 alors "soustraction directe
            des deux équations"
        sinonsi a1=-a2 ou b1=-b2 alors "addition directe
            des deux équations"
        sinonsi a1 mod b1 = 0 alors "diviser par b1 puis isoler y dans
            la première équation, substituer ensuite"
        sinonsi b1 mod a1 = 0 alors "diviser par a1 puis isoler x dans
            la première équation, substituer ensuite"
        sinonsi a2 mod b2 = 0 alors "diviser par b2 puis isoler y dans
            la deuxième équation, substituer ensuite"
        sinonsi b2 mod a2 = 0 alors "diviser par a2 puis isoler x dans
            la deuxième équation, substituer ensuite"
        sinon "par combinaison linéaire "
        finsi
    sinon "sans solution (comb. lin. donne 1 = 0)"
    finsi

```

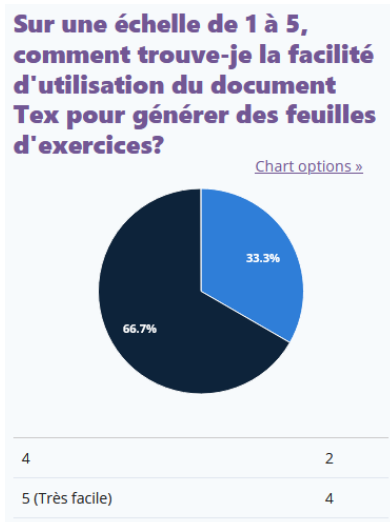
---

## Rétroactions

### 4.1 Résultats du contact avec le corps enseignant



**A**VANT DE FINALISER NOS outils, nous avons souhaité obtenir un retour de la part du corps enseignant au sujet de son utilité et facilité d'utilisation perçues. Afin de récolter des ressentis concernant de tels documents permettant de générer des exercices autocorrigés, un lien Framafoms — pour éviter d'utiliser Google Forms — fut envoyé à différent-e-s enseignant-e-s de mathématiques du canton de Fribourg. Nous avons reçu six réponses (anonymes) à notre questionnaire. Les résultats sont reportés ci-dessous dans les figg. 7 et 8. Il est à noter que toutes les personnes ayant répondu au questionnaire ont utilisé la version en ligne (Overleaf) de l'outil et que les questions offraient toutes comme réponse une échelle allant de 1 (ne correspond pas) à 5 (correspond tout à fait).

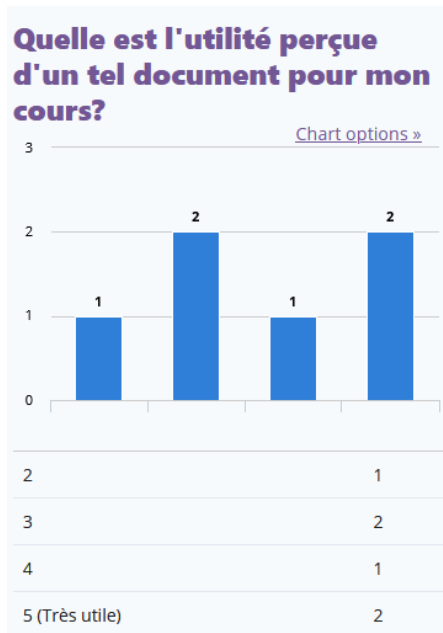


(a) La facilité d'utilisation de l'outil est mise en avant.

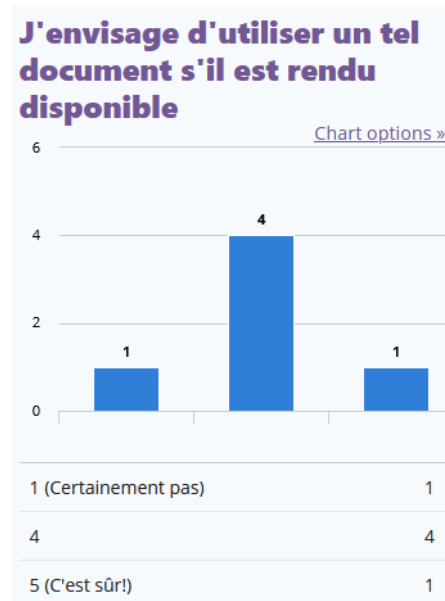


(b) La README semble bien éclaircir l'utilisation de l'outil.

FIG. 7 : Les deux premières questions du questionnaire et leurs réponses associées.



(a) L'utilité perçue de l'outil divise.



(b) Si le document était mis à disposition, la grande majorité serait encline à l'utiliser. La réponse « certainement pas » correspond à l'utilité perçue de 1 sur 5.



(c) La grande majorité souhaiterait modifier le document pour le personnaliser.



(d) La modification semble tendanciellement atteignable.

FIG. 8: Les questions successives du questionnaire et leurs réponses associées.

Plusieurs commentaires sont à faire sur ces résultats. En premier lieu, l'on remarque que l'utilité perçue de cet outil par les enseignant-e-s questionné-e-s (fig. 8a) est très divisée ; en effet, la moitié des réponses renvoient à une utilité moyenne (3) à faible (2). Les causes peuvent être multiples ; nous en citerons une ici, et parlerons d'améliorations possibles dans la section 4.2.

Une cause pourrait être que, bien qu'il soit utile pour les élèves de savoir faire usage de différentes méthodes afin de choisir la plus efficace dans un contexte donné, la majorité des élèves se satisfasse de l'étape *trouver un résultat*, peu importe la méthode. La compétence serait donc bien plus terre-à-terre, à décrire comme « résoudre des équations quadratiques » ou « résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues ». La compétence naturellement visée par les élèves étant différente, nous comprenons l'écart qu'il existe entre cette dernière et celle choisie dans ce travail : l'une semble presque utopique. Cependant, l'outil élaboré permet de travailler les deux ; il suffit d'acquiescer auprès des élèves que la méthode donnée dans le corrigé est indicative.

Le deuxième commentaire concerne la modification du document (fig. 8c). Malgré une écrasante majorité souhaitant modifier le document pour une appropriation plus personnelle, l'espace « Remarques, suggestions et commentaires » à la fin du questionnaire ne permettait pas aux enseignant-e-s de laisser exprimer tout ce qu'ils souhaitaient nous dire. À moins de retrouver ces personnes, nous ne pouvons que supputer des raisons poussant à vouloir modifier le document. En observant les résultats de la question suivante (fig. 8d), on peut imaginer que les modifications soient d'ordre esthétique, et que plus d'informations dédiées au fichier `preamble-*.tex` permettraient potentiellement de répondre assez facilement aux demandes d'adaptabilité.<sup>11</sup> Cependant, il serait très intéressant de pouvoir avoir une discussion plus élaborée sur les apports potentiels des enseignant-e-s ; nous tenterons de les contacter.

Dernier aspect du questionnaire : le champ des remarques, suggestions et commentaires. Ci-dessous, la liste exhaustive des commentaires reçus concernant ce travail.

- (i) *12 équations devraient suffire — Pourquoi les élèves n'ont pas le droit à la calculatrice ?*
- (ii) *Le terme formule de Viète est utilisé au CO notamment dans l'aide mémoire, mais n'est pas correct.*
- (iii) *Bravo pour votre travail, il permet de gagner un temps considérable pour la création d'items si les étudiants en demandent plus.*
- (iv) *Pas assez de place ici!!! Je ne pourrais faire que de petites modifications facilement (consigne, etc.), pas de grosse modif.*
- (v) *Pas assez de place ici!!!*

<sup>11</sup>Notamment, nous avons pu mettre en place un ajout de ce type ; voir plus bas.

Certaines de ces remarques sont plus énigmatiques que d'autres. Avant de les commenter dans l'ordre afin d'apporter de potentielles réponses aux questions posées, il faut remarquer que l'une des personnes n'a pas laissé de remarque (malheureusement cette personne est celle ayant répondu que ce travail n'avait aucune utilité ; nous aurions bien aimé en discuter avec elle afin d'envisager diverses pistes d'améliorations).

Nos réponses sont les suivantes :

- (i) Le nombre d'équations est, comme décrit dans la README, très facile à changer. Le nombre de 24 a été choisi simplement pour remplir une demi-page servant d'exemple. Le non-droit à la calculatrice était pour nous un choix pour pousser les élèves à réfléchir à la méthode à utiliser plutôt que de foncer, tête baissée, dans le calcul du discriminant. Néanmoins, il est vrai que ce choix est discutable.
- (ii) Merci pour la remarque ; la formule de Viète correspond en effet à tout autre chose. Nous avons, depuis, réécrit l'outil pour qu'il emploie le terme de « formule quadratique », abrégé en « formule quadr. ».
- (iii) Cette remarque nous touche beaucoup et nous permet de croire en notre travail, prenant en compte les différents retours ainsi que les améliorations discutées dans la section 4.2. Elle contraste particulièrement avec l'utilité nulle perçue par l'un-e de nos collègues enseignant-e-s.

Suite à l'obtention de ces retours, et à une discussion plus approfondie avec une enseignante de l'ECGF ayant testé ces outils, la structure de la README.md fut modifiée et un fichier QUICKSTART.md ajouté au dépôt GitHub, ceci afin de faciliter l'appropriation des documents par les enseignant-e-s. Nous espérons ainsi rendre plus abordable la modification et personnalisation de ces outils.

## 4.2 Améliorations et extensions possibles

### 4.2.1 Limitations du format par fiches

Le choix de mener à terme le projet à l'intérieur de  $\text{\LaTeX}$  est relativement controversé. Pour que l'implémentation fonctionne, nous dûmes jongler entre trois « logiciels » différents ( $\text{\LaTeX}$ , Lua et `luacas`), augmentant ainsi la complexité finale. Le projet est non-trivial à adapter, et rendre sa modification plus accessible serait une amélioration bien appréciée.

Cependant, les alternatives ne sont pas forcément meilleures : nous avons, à l'origine, pensé créer une interface Moodle proposant les équations directement aux élèves de façon interactive ; seulement une fois que celles- et ceux-ci auraient tapé leur solution putative dans un champ textuel, la réelle solution ainsi que la méthode conseillée auraient été affichées. L'avantage de cette implémentation aurait également été, dans le cas où l'élève se serait trompé-e dans sa réponse, que les différentes étapes de la résolution auraient pu être affichées, afin d'aider l'élève à comprendre son erreur. Malgré les bienfaits d'une telle approche, toutefois, nous avons vite été contraints à l'abandonner. Nous reproduisons ici un extrait de notre journal de bord :



## 28.11.2023

- Décision d'utiliser un script ``lua`` dans LuaLaTeX plutôt que le plugin Moodle «STACK»:

1. STACK n'est utilisé ni à St-Michel, ni à l'ECGF;
2. Il nous est peu clair si nous pouvons facilement avoir accès à STACK, et c'est un accès qu'on risque de perdre dès l'obtention du DEEM;
3. STACK semble très puissant pour faire des calculs et manipulations en arrière-plan - grâce à l'intégration du système d'algèbre numérique (SAN) \*Maxima\* - mais ne semble pas particulièrement plus propice à la création de questions favorisant les compétences; ce que nous avons en tête est parfaitement réalisable au sein d'un langage de code classique non SAN.

Nous avons donc opté pour un script ``lua``, plus facilement accessible aux enseignants (même s'il faudra à l'enseignant compiler le document pour avoir les questions, sans que les élèves puissent de façon autonome aller sur Moodle et remplir les questions interactivement).

L'option plus extrême, celle de coder *ā nihilō* un site web avec l'implémentation susdite, était très attirante, notamment pour sa liberté d'accès depuis la Toile, mais comportait hélas pour les auteurs — non rodés à la création de sites web — une trop forte charge de travail pour être mise en marche dans les délais de leur formation.

#### 4.2.2 Intégration dans la pratique

Nous nous sommes beaucoup concentrés sur la production du travail en question, quelque peu au détriment de sa diffusion. Le temps investi — nécessairement ! — pour produire une ressource fiable était, par la force des choses, du temps qui n'a pu être consacré à la planification de l'intégration de notre ressource dans la pratique enseignante. Une extension possible à notre projet serait donc de contacter un plus grand nombre d'enseignant-e-s en leur demandant de tester nos outils au sein de leurs classes. Ceci permettrait de maximiser l'utilité du travail que nous avons fourni, ainsi que de générer plus de retours pouvant — qui sait ? — mener à d'ultérieures améliorations.

Il faut cependant souligner que cette étape de diffusion est difficile pour tout nouveau projet, et que nous n’eussions pu fournir des outils en si bon état d’achèvement si nous nous y fussions trop penchés.

#### 4.2.3 Ajout d’autres outils

L’on pourrait également concevoir que l’un des auteurs — ou peut-être même une tierce personne — décide de reprendre la structure de base des outils que nous fournissons ici pour entraîner encore un autre type de calcul où un choix de méthode est à faire. Par exemple, le calcul des déterminants dans l’algèbre matricielle. Le mode de diffusion (GitHub) choisi pour notre ressource nous permettra facilement d’intégrer des extensions de ce type.

### 4.3 Conclusion

Le laboratoire de didactique est une opportunité intéressante offerte par la formation fribourgeoise à l’enseignement en écoles de maturité pour développer une approche qui n’aurait jamais sinon été suivie. Cette année, la contrainte était de produire des questions algorithmiquement générées. L’un des auteurs, en tout cas, a pris un malin plaisir à entraîner ses capacités de codage : c’est une activité agréablement différente de l’habituelle préparation de leçon. L’autre auteur, quant à lui, a pris un plaisir quelque peu moins malin ; habitué du langage Python et de Stack-Exchange, le langage Lua et ses subtilités lui ont causé quelques longues soirées. Néanmoins, l’expérience retirée d’un tel projet, tant du point de vue du codage que de la lecture des différentes mandats et rapports sur les compétences basales, est immense. Le bagage construit par ces mois de travail permettra, *quizás*, de créer un nouvel outil qui sera utilisé dès les premières années d’engagement des futurs enseignant-e-s.

Le succès du projet fut mitigé, bien que seule une minorité des personnes interrogées ne vît en ce projet aucune utilité : si la ressource développée fonctionne surprenamment bien, son adoption laisse quelque chose à désirer. Néanmoins, les auteurs souhaitent remercier leur superviseur pour ce projet, et seront par la suite d’autant plus reconnaissants des ressources enseignantes à leur disposition, dont la création ils savent à présent fatalement chronophage.

\* \* \*

Achevé le 9 mai 2024 à Fribourg par  
Alexandros RISPO CONSTANTINO  
et Mathias BLAISE.

## Références

- BILDUNGS- UND KULTURDIREKTION DES KANTONS BERN (Abteilung Mittelschulen) [BKD] (22 fév. 2019). *Beispielaufgaben Mathematik Basale fachliche Studierkompetenzen*. Allemand. gymIMATUR. URL : <https://www.bkd.be.ch/content/dam/bkd/dokumente/de/themen/bildung/mittelschulen/gymnasium/ams-gym-bk-beispielaufgaben-mathematik.pdf> (visité le 05/05/2024).
- COCHRANE Evan et ALL Timothy (26 mai 2023). *The luacas package*. Anglais. Version 1.0.2. URL : <https://ctan.org/pkg/luacas> (visité le 11/01/2024).
- CONFÉRENCE SUISSE DES DIRECTEURS CANTONAUX DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE [CDIP] (9 juin 1994). *Plan d'études cadre pour les écoles de maturité · du 9 juin 1994*. Berne. Chap. 5.2. 139 pp. URL : <https://www.cdip.ch/fr/documentation/textes-juridiques/recueil-des-bases-legales> (visité le 01/12/2023).
- (mars 2013). *Rapport annuel 2012*. Berne. 44 pp. URL : [https://edudoc.ch/nanna/record/107403/files/Jb\\_2012\\_f\\_web.pdf](https://edudoc.ch/nanna/record/107403/files/Jb_2012_f_web.pdf) (visité le 09/05/2024).
- (17 mars 2016). *Annexe au plan d'études cadre du 9 juin 1994 pour les écoles de maturité : Compétences de base en mathématiques et en langue première constitutives de l'aptitude générale aux études supérieures · du 17 mars 2016*. Berne. Chap. 5.2.2. 9 pp. URL : <https://www.cdip.ch/fr/documentation/textes-juridiques/recueil-des-bases-legales> (visité le 01/12/2023).
- DIRECTION DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, DE LA CULTURE ET DU SPORT [DICS] (23 fév. 2015). *Mandat du Service de l'enseignement secondaire du 2<sup>e</sup> degré (S2) et de la Conférence des recteurs (CORECOFR) · Groupe de travail de « mathématiques »*. 3 pp.
- EBERLE FRANZ, BRÜGGENBROC Christel, RÜEDE Christian et al. (15 oct. 2014). *Basale fachliche Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit in Mathematik und Erstsprache · Schlussbericht zuhanden der EDK*. Allemand. Éd. révisée du 12 janvier 2015. 284 pp. URL : [https://www.ife.uzh.ch/research/lehrstuhleberle/forschung/bfkfas/downloads/Schlussbericht\\_final\\_V7.pdf](https://www.ife.uzh.ch/research/lehrstuhleberle/forschung/bfkfas/downloads/Schlussbericht_final_V7.pdf).
- EBERLE FRANZ, GEHRER Karin, JAGGI Beat et al. (31 oct. 2008). *Evaluation des Maturitätsreform 1995 (EVAMAR) · Schlussbericht zur Phase II*. Allemand. 418 pp. URL : <https://www.sbfi.admin.ch/sbfi/de/home/bildung/maturitaet/gymnasiale-maturitaet/evamar.html/>.

- FREE SOFTWARE FOUNDATION (29 juin 2007). *GNU General Public License · version 3*. Anglais. URL : <https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.en.html> (visité le 21/04/2024).
- GROUPE CANTONAL DE MATHÉMATIQUES [GCM] (2016). *Analyse der zu erwartenden Kompetenzen · Teil 1 : Algebra im ersten Jahr*. Français et allemand. 14 pp.
- (juin 2017). *Schlussbericht der Arbeitsgruppe · 2. Mandat*. Français et allemand. 7 pp.
- (15 nov. 2018). *Compétences basales en première année gymnasiale dans le canton de Fribourg*. Français et allemand. 29 pp.
- (30 juin 2020). *Mise en œuvre des compétences basales en première année gymnasiale dans le canton de Fribourg durant l'année 2019–2020*. Français et allemand. 49 pp.
- (31 août 2021). *Rapport suite au cinquième mandat*. Français et allemand. 19 pp.
- PÉGOURIÉ-GONNARD Manuel (23 jan. 2012). *The luacode package*. Anglais. Version 1.2a. URL : <https://ctan.org/pkg/luacode> (visité le 11/01/2024).
- RISPO CONSTANTINOU Alexandros et BLAISE Mathias (2024). *Outils d'Adaptativité*. URL : <https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique>.
- SERVICE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DU DEUXIÈME DEGRÉ [S2] (2 oct. 2017). *3<sup>e</sup> mandat du Service de l'enseignement secondaire du 2<sup>e</sup> degré (S2) et de la Conférence des recteurs (CORECOFR) · Groupe de travail « mathématiques »*. 3 pp.
- (nov. 2020). *Plan des études gymnasiales · Domaines des Mathématiques*. Fribourg. 25 pp. URL : [https://www.fr.ch/sites/default/files/2021-08/plan-d-etudes-s2mathematiquesgym2021\\_0.pdf](https://www.fr.ch/sites/default/files/2021-08/plan-d-etudes-s2mathematiquesgym2021_0.pdf) (visité le 27/03/2024).
- WEBER Christof (août 2008). “»Umfallen und Wegrutschen ist gleich« — mit mathematischen Vorstellungsubungen in den Dialog gehen”. Allemand. In : *Besser lernen im Dialog · Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis*. Sous la dir. d'Urs RUF, Stefan KELLER et Felix WINTER. Klett | Kallmeyer, p. 142–161. ISBN : 978-3-7800-4913-1.

## Code source

### A.1 Manuels d'utilisation (QUICKSTART et README)

#### A.1.1 Équations du second degré

Code A.1: QUICKSTART pour la ressource sur les équations de second degré

```

1 # Guide de démarrage rapide
2
3 ## « Je ne gère pas l'informatique » : version en ligne
4
5 Si vous voulez rapidement accéder au projet sans trop avoir à mettre les mains à
  la pâte, vous pouvez accéder à une [version en
  ligne](https://www.overleaf.com/read/tsmdmkhnrzjq#7569b4). Il faut en créer
  une copie. Pour cela, le plus simple est de vous créer un compte sur Overleaf,
  'douvrir le lien ci-dessus puis de créer une copie du projet en cliquant sur
  le bouton «copie»:
6
7 ![Bouton «copie» dans Overleaf, mis en évidence avec une grande flèche
  verte.](../images/copier-d-overleaf-oq.png)
8
9 - Assurez-vous, si le document refuse de compiler, que le compilateur soit bien
  sélectionné comme LuaLaTeX et non pas pdfTeX. Vous accéder à ce paramètre
  depuis le menu en haut à gauche d'Overleaf.
10
11 Vous pouvez aussi télécharger les fichiers et les compiler avec **une version à
  jour** de LaTeX sur votre ordinateur en choisissant LuaLaTeX :
12
13 ![Bouton «téléchargement» dans Overleaf, mis en évidence avec une grande flèche
  verte.](../images/telecharger-d-overleaf-oq.png)
14
15 Pour une présentation plus complète, vous êtes invité·e à lire la README,
  notamment la [section sur l'utilisation de
  l'outil](./README.md#utilisation-de-loutil).
16
17 ***
18
19 ## Personnalisation de l'outil
20
21 Deux aspects de l'outil sont modifiables: la fiche visible (`.tex`) et le code de
  génération des exercices (`.lua`). Le premier est particulièrement adapté à la
  modification par utilisat·eu·rice·s non techniques.
22
23 ### Modifier les `.tex`
24
25 L'outil contient deux documents `.tex` : le fichier principal
  `main-quadratique.tex` et son préambule `preamble-quadratique.tex`.
26
27 ##### Fichier principal

```

```

28
29 La plupart des modifications sont apportable dans le fichier
   `main-quadratique.tex`. En l'ouvrant (sur Overleaf, il suffit de cliquer
   dessus pour l'ouvrir), vous pourrez personnaliser les aspects suivants.
30
31 ##### Consigne
32
33 Cherchez le bloc de texte suivant, et modifiez-y la consigne comme bon vous
   semble.
34
35 ```tex
36 %%%%%%%%%%% CONSIGNE %%%%%%%%%%%
37
38 {\small\em Résolvez ces équations en utilisant à chaque fois la méthode la plus
   rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la forme standard si
   elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations résolues, vérifiez vos
   réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question si vous avez utilisé
   la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas droit à la
   calculatrice.}
39
40 ```
41
42 ##### Nombre de questions
43
44 Pour modifier le nombre de questions imprimées, cherchez le bloc suivant et
   remplacez `24` par le nombre qui vous arrange.
45
46 ```tex
47 %%%%%%%%% GÉNÈRE LES QUESTIONS DANS UNE BOÎTE VIRTUELLE %%%%%%%%%
48
49 \raggedright
50 \foreach \n in {1,2,...,24}{\afullroutine{\n}}
51
52 ```
53
54 ##### Horodatages
55
56 Pour facilement pouvoir retrouver la fiche de réponses pour chaque fiche
   d'exercices, un horodatage (*timestamp* en anglais) a été fourni. Ceci
   peut-être utile dans le cas où les exercices sont séparés de leurs solutions
   en découpant le long des traits tillés.
57
58 Si cette fonctionnalité ne vous sert pas, effacez dans les deux sections
   intitulées `[...] HORODATAGE [...]` les caractères suivants (ni plus ni moins).
59
60 ```tex
61 \\\tiny\sffamily (générés le \DTMtoday\ à \DTMcurrenttime s)}
62 ```
63
64 ##### Refaire la mise en page
65
66 Si vous voulez refaire depuis le début la mise en page, sachez que le document
   minimal qui fonctionne encore selon le même modèle est le suivant. Tout le
   reste du `main-quadratique.tex` est cosmétique. C'est à vous de voir ce que
   vous voulez retirer, ajouter ou retenir.
67
68 ```tex
69 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
70 \input{preamble-quadratique.tex}
71
72 \begin{document}

```

```

73
74 \foreach \n in {1,2,...,24}{\afullroutine{\n}} % prépare les questions/réponses
75
76 \showallquestions % imprime la liste des questions
77
78 \showallanswers % imprime la liste des réponses
79
80 \end{document}
81
82 ```
83
84 ##### Mises en page alternatives
85
86 Si vous voulez *vraiment* complètement refaire la mise en page, quelques
87 commandes additionnelles vous sont fournies, à utiliser depuis le fichier
88 `main-*.tex` :
89
90 - ``\aprintqna` : imprime l'équation sur une ligne, suivie de la réponse.
91
92 - ``\amakequestion` : à utiliser en mode mathématique (*mathmode*, c.-à-d.
93 ``$\amakequestion$`), génère une équation à résoudre.
94
95 - ``\amakeanswer` : à utiliser en mode texte, donne la solution recommandée à la
96 dernière équation générée par ``\amakequestion`.
97
98 Les deux dernières sont plus modulables, pouvant être utilisées pour placer
99 l'équation et la réponse plus librement, par exemple au sein d'une plus grande
100 feuille de travail avec d'autres types de questions.
101
102 ##### Autres modifications
103
104 Si vous le souhaitez, vous pouvez également modifier quelques réglages dans
105 l'algorithme qui décide des polynômes et des méthodes pour les résoudre. Ces
106 réglages sont tous dans la section intitulée `(EDITABLE) PREAMBLE` du fichier
107 `.lua`. En particulier, vous avez accès aux fonctionnalités suivantes :
108
109 - choisir la graine pour la générations de nombres pseudoaléatoires, en modifiant
110 le paramètre de la fonction `math.randomseed()` - *si vous voulez pouvoir
111 garder vos feuilles d'une fois à une autre, il vous faut fixer ce paramètre
112 **avant** la compilation*;
113
114 - choisir la terminologie pour la formule de Viète (de base `formule = [[formule
115 quad.\@]]`, que vous pouvez remplacer par `formule = [[formule de Viète]]` par
116 exemple) ;
117
118 - déterminer la probabilité que les solutions d'un exercice donné soient des
119 nombres entiers, en modifiant la fonction booléenne
120 `whether_from_factored_form()` ;
121
122 - fixer, dans le cas de solutions entières, la proportion avec laquelle un carré
123 parfait sera imposée, avec la fonction booléenne `enforce_perfect_square()` ;
124
125 - décider quels polynômes sont estimés faciles à factoriser par trinôme, en
126 modifiant la fonction booléenne `easy_factor()` [pour utilisat·eu·rice·s
127 avancé·e·s].
128
129 ***
130
131 ## Plus d'informations
132
133

```

114 D'autres conseils et modes d'utilisation sont donnés dans la  
 [README](./README.md), notamment pour le traitement par lots (génération  
 automatique de plusieurs fiches d'un coup avec une version locale de  
 LuaLaTeX). Il y a aussi une version combinant cet outil avec son jumeau sur  
 les systèmes d'équations, disponible [sur  
 Overleaf](https://www.overleaf.com/read/wzdcckddkjzy#f3d012). Pour son mode  
 d'emploi, consulter la README.

## Code A.2: README pour la ressource sur les équations de second degré

```

1 # Démarrage rapide
2
3 Pour démarrer rapidement l'utilisation de cet outil sans vous soucier de tous les
  aboutissants de sa création, vous pouvez consulter le fichier
  [QUICKSTART.md](./QUICKSTART.md) ci-joint. Il contient également des
  conseils sur la modification facile de l'outil.
4
5 Si vous lisez ce document depuis un autre chose que la page GitHub, sachez qu'en
  suivant le lien [pour le dépôt du
  projet](https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique) vous pouvez lire
  des versions de ce guide d'un abord facile, avec une mise en page élégante.
6
7 # Résoudre efficacement une équation de second degré
8
9 ## Présentation
10
11 Le présent outil est conçu pour permettre à des élèves d'entraîner la résolution
  d'équations de deuxième degré  $ax^2 + bx + c = 0$  en utilisant la méthode la
  plus appropriée, en reconnaissant les suivants cas:
12
13 - quand  $b = 0$ , on peut résoudre par réarrangement  $x^2 = -\frac{c}{a}$ ;
14
15 - quand  $c = 0$ , on peut factoriser  $ax$  pour avoir  $a x \left( \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = 0$ ;
16
17 - si c'est un carré parfait, utiliser les identités remarquables  $(A \pm B)^2$ 
  pour factoriser;
18
19 - si les nombres sont petits, factoriser par trinôme;
20
21 - et sinon, utiliser la formule de Viète / formule quadratique.
22
23 (Certains cas spéciaux sont aussi inclus: l'équation de premier degré, ou de type
   $0 = 1$ , ou  $0 = 0$ ; ceux-ci apparaissent avec une faible probabilité.)
24
25 Pour ce faire, l'outil permet de produire des fiches d'exercices avec des
  équations du second degré à résoudre le plus efficacement possible par les
  élèves. Avec les exercices sont générées des solutions recommandées, choisies
  parmi les méthodes énumérées ci-dessus. L'utilisation recommandée de l'outil
  est après avoir discuter et entraîné les différentes méthodes indépendamment -
  ayant expliqué l'utilité de chercher une méthode efficace - de distribuer une
  feuille par élève, chacune générée séparément, et de les laisser travailler à
  les résoudre. Une fois une proportion suffisante des exercices résolus,
  l'enseignant·e peut procéder à une mise en commun lors de laquelle chaque
  élève - par exemple - expose l'équation dont la méthode de résolution a été
  perçue comme la moins évidente.
26
27 Ce projet entre dans le contexte d'entraîner la compétence de base «utiliser avec
  souplesse l'outillage mathématique» donnée dans l'*Annexe au plan d'études
  cadre du 9 juin 1994 pour les écoles de maturité : Compétences de base en
  mathématiques et en langue première constitutives de l'aptitude générale aux
  études supérieures, du 17 mars 2016*.

```



```

28
29 ## Structure de l'outil
30
31 L'outil se présente comme cinq fichiers dans une archive `.zip`: le QUICKSTART,
    la README, un fichier `codeQuadratique.lua`, un fichier `main-quadratique.tex`
    et un fichier `preamble-quadratique.tex`.
32
33 - Le `*.lua` contient la majorité de l'algorithme servant à produire les
    questions.
34
35 - Le `preamble-*.tex` enclenche un petit nombre de paquets, librement distribués
    dans TEXLive, MikTEX ou sur www.ctan.org. Ceux-ci comprennent `luacode`
    (automatique avec LuaLaTeX) et `luacas`, utilisé pour simplifier
    algébriquement certaines des équations-réponses. Dans le préambule, plusieurs
    commandes sont définies qui se réfèrent au `*.lua`.
36
37 - Le `main-*.tex` enclenche le préambule puis se charge de la mise en page du
    document.
38
39 ## Utilisation de l'outil
40
41 ### Démarrage rapide
42
43 L'outil est disposé afin que, après avoir décompressé l'archive `.zip`, il
    suffise d'ouvrir le fichier `main-*.pdf` dans votre éditeur TeX favori et de
    le compiler pour obtenir une fiche complète et utilisable. C'est un outil
    «prêt à l'emploi» («*plug and play*»).
44
45 Il vous faut seulement vous assurer que vous ayez une distribution LaTeX à jour,
    et **compiler le document avec le moteur LuaLaTeX** (et non pdfLaTeX ou
    XeLaTeX).
46
47 #### Version Overleaf
48
49 Une version en ligne est aussi mise à disposition si vous ne voulez pas devoir
    installer LaTeX localement. Le lien est
    [celui-ci](https://www.overleaf.com/read/tsmdmkhnrzjq#7569b4). Pour pouvoir
    modifier le document, il faudra vous créer une copie personnelle: le plus
    simple est de vous créer un compte sur Overleaf, ouvrir le lien donné puis de
    créer une copie du projet en cliquant sur le bouton «copie»:
50
51 ![Bouton «copie» dans Overleaf, mis en évidence avec une grande flèche
    verte.](../images/copier-d-overleaf-oq.png)
52
53 Assurez-vous, si le document refuse de compiler, que le compilateur soit bien
    sélectionné comme LuaLaTeX et non pas pdfTeX. Vous accéder à ce paramètre
    depuis le menu en haut à gauche d'Overleaf.
54
55 ### Modifier le document: mains à la pâte
56
57 #### Depuis le `.tex`
58
59 Le document `main-*.tex` consiste en une série de 24 exercices, mis en page
    algorithmiquement avec les commandes
60 ```tex
61 \foreach \n in {1,2,...,24}{\afullroutine{\n}}
62 ```
63 et `\showallquestions` et `\showallanswers`.
64
65 Quelques commandes additionnelles sont également proposées directement dans le
`main-*.tex` pour une mise en page alternative :

```

```

66
67 - \aprintqna : imprime l'équation sur une ligne, suivie de la réponse.
68
69 - \amakequestion : à utiliser en mode mathématique (*mathmode*), génère une
    équation à résoudre.
70
71 - \amakeanswer : à utiliser en mode texte, donne la solution recommandée à la
    dernière équation générée par \amakequestion.
72
73 Les deux dernières sont plus modulables, pouvant être utilisées pour placer
    l'équation et la réponse plus librement, par exemple au sein d'une plus grande
    feuille de travail avec d'autres types de questions.
74
75 ##### Depuis le code .lua
76
77 Si vous le souhaitez, vous pouvez modifier quelques réglages dans l'algorithme
    qui décide des polynômes et des méthodes pour les résoudre. Ces réglages sont
    tous dans la section intitulée (EDITABLE) PREAMBLE du fichier .lua. En
    particulier, vous avez accès aux fonctionnalités suivantes :
78
79 - choisir la graine pour la générations de nombres pseudoaléatoires, en modifiant
    le paramètre de la fonction math.randomseed() - *si vous voulez pouvoir
    garder vos feuilles d'une fois à une autre, il vous faut fixer ce paramètre
    **avant** la compilation*;
80
81 - choisir la terminologie pour la formule de Viète (de base formule = [[formule
    quadr.\@]], que vous pouvez remplacer par formule = [[formule de Viète]]
    par exemple);
82
83 - déterminer la probabilité que les solutions d'un exercice donné soient des
    nombres entiers, en modifiant la fonction booléenne
    whether_from_factored_form();
84
85 - fixer, dans le cas de solutions entières, la proportion avec laquelle un carré
    parfait sera imposée, avec la fonction booléenne enforce_perfect_square();
86
87 - décider quels polynômes sont estimés faciles à factoriser par trinôme, en
    modifiant la fonction booléenne easy_factor() [pour utilisat·eu·rice·s
    avancé·e·s].
88
89 ##### Accès à des fonctions additionnelles
90
91 Pour les utilisat·eu·rice·s les plus téméraires, quelques dernières fonctions
    sont également fournies à LaTeX depuis le code Lua. C'est la dernière section
    du code mainQuadratique.tex, qui ressemble à ceci:
92
93 ```lua
94 -- INTERFACE WITH LUALATEX ENGINE --
95
96 -- Export user-accessible functions (renamed using syntax `new = old`):
97 return {
98     polynomial = generate_polynomial, -- returns {a, b, c, num_sols, x1, x2, rat}
99     methodString = pick_method, -- provides recommended method
100     printEquation = cas_equation, -- question preprinted for LaTeX
101     answer = answer_line, -- answer preprinted for LaTeX
102     fullRoutine = full_routine, -- whole shebang
103     printQnA = print_questions_and_answers, -- alternative, single-equation
        formatting style
104 }
105 ```
106

```

```

107 Pour accéder à ces fonctions, il faut les appeler depuis un document `.tex`.
    C'est ce qui est déjà fait dans `preamble-*.tex` pour certaines de celles-ci,
    avec les commandes suivantes.
108
109 ```tex
110 % Activer les fonctions dans le code / Load lua code:
111 \directlua{codeA = require "codeQuadratique"}
112
113 % Convertir fonctions de code.lua en commandes LaTeX / Extract useful functions
    as LaTeX commands:
114 \newcommand{\afullroutine}[1]{\directlua{codeA.fullRoutine(#1)}} % format par
    défaut / default style
115
116 %[...]
117 ```
118
119 La syntaxe de ces fonctions est documentée dans le fichier `mainQuadratique.lua`
    directement.
120
121 ### Traitement par lots
122
123 Pour produire plusieurs feuilles différentes d'un coup, afin de pouvoir par
    exemple les distribuer individuellement à une classe de 20 élèves, nous
    n'avons malheureusement pas trouvé d'autre solution que d'appeler plusieurs
    fois le moteur LuaLaTeX depuis un programme externe. Par exemple, sur Linux,
    vous pouvez taper le code suivant dans Bash depuis le dossier contenant
    `main-*.tex` :
124
125 ```bash
126 for i in {1..20}; do lualatex -jobname feuille-$i main-quadratique.tex; done
127 ```
128 Il faudra cependant adapter ces commandes à la syntaxe particulière de votre
    système opératoire. Un autre exemple, pour Windows : ouvrez le dossier
    contenant `main-*.tex`, effectuez un clic-droit et sélectionner *Ouvrir dans
    le Terminal*. (Vérifiez que celui-ci soit bien la Windows PowerShell.) Dans le
    terminal, vous pouvez ensuite taper :
129
130 ```powershell
131 for ($var = 1; $var -le 20; $var++) {lualatex.exe -jobname feuille-$var
    main-quadratique.tex}
132 ```
133 Il vous faudra donc vous familiariser avec la variante qui vous conviendra.
    *N.b.* - il vous faudra aussi adapter le nom de votre moteur LuaLaTeX
    (`lualatex`, `lualatex.exe` ou autre).
134
135 ### Intégration avec l'autre outil du même projet
136
137 Dans le cadre de ce laboratoire didactique, deux outils ont été créés: l'un sur
    les systèmes d'équations et l'autre sur les équations du second degré. Si vous
    voulez pouvoir combiner les deux types de questions dans un seul et même
    document, créez un dossier contenant les fichiers `codeQuadratique.lua` et
    `codeSysteme.lua`. Ensuite, créez un fichier `preamble.tex` et copiez-y le
    code suivant (n'oubliez pas de sauvegarder).
138
139 ```tex
140 %!TeX root = main.tex
141
142 % --- PRÉAMBULE ---
143
144 % langue et police:
145 \usepackage[quiet]{fontspec}
    \usepackage{polyglossia} \setmainlanguage[variant=swiss]{french}

```



```

204
205 \makeatletter
206
207 \newcount\@DT@modctr
208 \newcount\@dtctr
209
210 \def\@modulo#1#2{%
211   \@DT@modctr=#1\relax
212   \divide \@DT@modctr by #2\relax
213   \multiply \@DT@modctr by #2\relax
214   \advance #1 by -\@DT@modctr}
215
216 \newcommand{\xxivtime}{%
217   \@dtctr=\time%
218   \divide \@dtctr by 60
219   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr.%
220   \@dtctr=\time%
221   \@modulo{\@dtctr}{60}%
222   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr%
223 }
224
225 \newcommand{\timestamp}{\the\year-%
226   \ifnum\month<10 0\fi\the\month-%
227   \ifnum\day<10 0\fi\the\day\ \xxivtime}
228
229 \makeatother
230
231
232 % ----- ACCÈS AU CODE LUA: -----
233
234 % Aide-mémoire Lua: https://devhints.io/lua
235
236 %% OUTIL SECOND DEGRÉ
237
238 % Activer les fonctions dans le code:
239 % Load lua code:
240 \directlua{codeA = require "codeQuadratique"}
241
242 % Pour le format par défaut:
243 \newcommand{\afullroutine}[1]{\directlua{codeA.fullRoutine(#1)}}
244
245 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
246 \newcommand{\aprintqna}{\directlua{codeA.printQnA()}}
247
248 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
249 \newcommand{\amakequestion}{%
250   % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: $\amakequestion$
251   \directlua{%
252     polynomialcoeffs = codeA.polynomial()
253     eqn = codeA.printEquation(table.unpack(polynomialcoeffs,1,3))
254     tex.print(eqn)
255   }
256 }
257 \newcommand{\amakeanswer}{%
258   % IN TEXTMODE
259   \directlua{%
260     tex.print(codeA.answer(table.unpack(polynomialcoeffs)))
261   }
262 }
263
264 %% OUTIL SYSTÈME D'ÉQUATIONS

```

```

265
266 % Activer les fonctions dans le code:
267 % Load lua code:
268 \directlua{codeB = require "codeSysteme"}
269
270 % Pour le format par défaut:
271 \newcommand{\bfullroutine}[1]{\directlua{codeB.fullRoutine(#1)}}
272
273 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
274 \newcommand{\bprintqna}{\directlua{codeB.printQnA()}}
275
276 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
277 \newcommand{\bmakequestion}{%
278   % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: $\bmakequestion$
279   \directlua{%
280     coeffs, num_sols, x, y = codeB.polynomial(0.2)
281     eqn = codeB.printEquation(coeffs)
282     tex.print(eqn)
283   }
284 }
285 \newcommand{\bmakeanswer}{%
286   % IN TEXTMODE
287   \directlua{%
288     tex.print(codeB.answer(coeffs, num_sols, x, y))
289   }
290 }
291
292 ---
293
294 Une fois que c'est fait, vous pouvez créer un fichier `main.tex` (toujours dans
    le même dossier) et le remplir comme vous convient, tant que vous n'oubliez
    pas d'y inclure le préambule avec la commande `\input{preamble.tex}`. Une idée
    de base depuis laquelle travailler est la suivante.
295
296 ```tex
297 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
298 \usepackage[margin=2cm]{geometry}
299 \input{preamble.tex}
300
301 \begin{document} \thispagestyle{empty}
302
303   \foreach \n in {1,2,...,12}{\afullroutine{\n}} % prépare les questions/réponses
304   \begin{multicols}{3} \showallquestions \end{multicols} % imprime la liste des
    questions
305   ~\medskip \showallanswers      % espace vertical, puis imprime la liste des
    réponses
306
307   \medskip %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
308
309   \hbox to \linewidth{\leaders\hbox to 4pt{\hss · \hss}\hfil} % séparation entre
    les parties
310
311   \setbox\allanswers=\vbox{} % vider la boîte des réponses
312   \setbox\allquestions=\vbox{} % vider la boîte des questions
313
314   \medskip %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
315
316   \foreach \n in {1,2,...,9}{\bfullroutine{\n}} % prépare les questions/réponses
317   \begin{multicols}{3} \showallquestions \end{multicols} % imprime la liste des
    questions

```

```

318 ~\medskip \showallanswers % espace vertical, puis imprime la liste des
    réponses
319
320 \end{document}
321 ```
322
323 Un exemple de fiche créée suivant cette procédure est disponible [sur
    Overleaf](https://www.overleaf.com/read/wzdcckddkjzy#f3d012).
324
325 ***
326
327 ## Licence et attributions
328
329 Cet outil est distribué avec la licence
    [GPL-3.0-or-later](https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html) par ses auteurs :
330
331 - Alexandros Rispo Constantinou
332
333 Une [page GitHub pour cet
    outil](https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique) est également
    disponible.

```

## A.1.2 Systèmes de deux équations

Code A.3: QUICKSTART pour la ressource sur les systèmes d'équations

```

1 # Guide de démarrage rapide
2
3 ## « Je ne gère pas l'informatique » : version en ligne
4
5 Si vous voulez rapidement accéder au projet sans trop avoir à mettre les mains à
    la pâte, vous pouvez accéder à une [version en
    ligne](https://www.overleaf.com/read/hmxjgqgkkmq#9ccf30). Il faut en créer
    une copie. Pour cela, le plus simple est de vous créer un compte sur Overleaf,
    'douvrir le lien ci-dessus puis de créer une copie du projet en cliquant sur
    le bouton «copie»:
6
7 ![Bouton «copie» dans Overleaf, mis en évidence avec une grande flèche
    verte.](../images/copier-d-overleaf-oq.png)
8
9 - Assurez-vous, si le document refuse de compiler, que le compilateur soit bien
    sélectionné comme LuaLaTeX et non pas pdfTeX. Vous accéder à ce paramètre
    depuis le menu en haut à gauche d'Overleaf.
10
11 Vous pouvez aussi télécharger les fichiers et les compiler avec **une version à
    jour** de LaTeX sur votre ordinateur en choisissant LuaLaTeX :
12
13 ![Bouton «téléchargement» dans Overleaf, mis en évidence avec une grande flèche
    verte.](../images/telecharger-d-overleaf-oq.png)
14
15 Pour une présentation plus complète, vous êtes invité·e à lire la README,
    notamment la [section sur l'utilisation de
    l'outil](./README.md#utilisation-de-loutil).
16
17 ***
18
19 ## Personnalisation de l'outil
20
21 Deux aspects de l'outil sont modifiables: la fiche visible (`.tex`) et le code de
    génération des exercices (`.lua`). Le premier est particulièrement adapté à la
    modification par utilisat·eu·rice·s non techniques.

```

```

22
23 ### Modifier les `.tex`
24
25 L'outil contient deux documents `.tex` : le fichier principal `main-systeme.tex`
    et son préambule `preamble-systeme.tex`.
26
27 ##### Fichier principal
28
29 La plupart des modifications sont apportable dans le fichier `main-systeme.tex`.
    En l'ouvrant (sur Overleaf, il suffit de cliquer dessus pour l'ouvrir), vous
    pourrez personnaliser les aspects suivants.
30
31 ##### Consigne
32
33 Cherchez le bloc de texte suivant, et modifiez-y la consigne comme bon vous
    semble.
34
35 ```tex
36 %%%%%%%%%%% CONSIGNE %%%%%%%%%%%
37
38 {\small\em Résolvez ces équations en utilisant à chaque fois la méthode la plus
    rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la forme standard si
    elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations résolues, vérifiez vos
    réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question si vous avez utilisé
    la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas droit à la
    calculatrice.}
39
40 ```
41
42 ##### Nombre de questions
43
44 Pour modifier le nombre de questions imprimées, cherchez le bloc suivant et
    remplacez `18` par le nombre qui vous arrange.
45
46 ```tex
47 %%%%%%%%% GÉNÈRE LES QUESTIONS DANS UNE BOÎTE VIRTUELLE %%%%%%%%%
48
49 \raggedright
50 \foreach \n in {1, 2, ..., 18}{\bf fullroutine{\n}}
51
52 ```
53
54 ##### Horodatages
55
56 Pour facilement pouvoir retrouver la fiche de réponses pour chaque fiche
    d'exercices, un horodatage (*timestamp* en anglais) a été fourni. Ceci
    peut-être utile dans le cas où les exercices sont séparés de leurs solutions
    en découpant le long des traits tillés.
57
58 Si cette fonctionnalité ne vous sert pas, effacez dans les deux sections
    intitulées `[...] HORODATAGE [...]` les caractères suivants (ni plus ni moins).
59
60 ```tex
61 \{\tiny\sffamily (générés le \DTMtoday\ à \DTMcurrenttime s)}
62 ```
63
64 ##### Refaire la mise en page
65
66 Si vous voulez refaire depuis le début la mise en page, sachez que le document
    minimal qui fonctionne encore selon le même modèle est le suivant. Tout le

```



reste du ``main-systeme.tex`` est cosmétique. C'est à vous de voir ce que vous voulez retirer, ajouter ou retenir.

```

67
68 ```tex
69 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
70 \input{preamble-systeme.tex}
71
72 \begin{document}
73
74   \foreach \n in {1, 2, ..., 18}{\bfullroutine{\n}} % prépare les
       questions/réponses
75
76   \showallquestions % imprime la liste des questions
77
78   \showallanswers % imprime la liste des réponses
79
80 \end{document}
81 ```
82
83 ##### Mises en page alternatives
84
85 Si vous voulez *vraiment* complètement refaire la mise en page, quelques
       commandes additionnelles vous sont fournies, à utiliser depuis le fichier
       `main-*.tex` :
86
87 - `\bprintqna` : imprime l'équation sur une ligne, suivie de la réponse.
88
89 - `\bmakequestion` : à utiliser en mode mathématique (*mathmode*, c.-à-d.
       `$`), génère une équation à résoudre.
90
91 - `\bmakeanswer` : à utiliser en mode texte, donne la solution recommandée à la
       dernière équation générée par `\bmakequestion`.
92
93 Les deux dernières sont plus modulables, pouvant être utilisées pour placer
       l'équation et la réponse plus librement, par exemple au sein d'une plus grande
       feuille de travail avec d'autres types de questions.
94
95 ##### Autres modifications
96
97 Si vous le souhaitez, vous pouvez modifier quelques réglages dans l'algorithme
       qui décide des polynômes et des méthodes pour les résoudre. Ces réglages sont
       tous dans la section intitulée `(EDITABLE) PREAMBLE` du fichier `lua`. En
       particulier, vous avez accès aux fonctionnalités suivantes :
98
99 - choisir la graine pour la générations de nombres pseudoaléatoires, en modifiant
       le paramètre de la fonction `math.randomseed()` - *si vous voulez pouvoir
       garder vos feuilles d'une fois à une autre, il vous faut fixer ce paramètre
       **avant** la compilation*;
100
101 - déterminer la probabilité que le système généré soit singulier, en modifiant la
       variable `probability_singular`.
102
103 ***
104
105 ## Plus d'informations
106
107 D'autres conseils et modes d'utilisation sont donnés dans la
       [README](./README.md), notamment pour le traitement par lots (génération
       automatique de plusieurs fiches d'un coup avec une version locale de
       LuaLaTeX). Il y a aussi une version combinant cet outil avec son jumeau sur
       les équations du second degré, disponible [sur

```

Overleaf](<https://www.overleaf.com/read/wzdcckddkjzy#f3d012>). Pour son mode d'emploi, consulter la README.

#### Code A.4: README pour la ressource sur les systèmes d'équations

```
1 # Démarrage rapide
2
3 Pour démarrer rapidement l'utilisation de cet outil sans vous soucier de tous les
  aboutissants de sa création, vous pouvez consulter le fichier
  [QUICKSTART.md](./QUICKSTART.md) ci-joint. Il contient également des
  conseils sur la modification facile de l'outil.
4
5 Si vous lisez ce document depuis un autre chose que la page GitHub, sachez qu'en
  suivant le lien [pour le dépôt du
  projet](https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique) vous pouvez lire
  des versions de ce guide d'un abord facile et de mise en page élégante.
6
7 # Résoudre efficacement un système de deux équations linéaires
8
9 ## Présentation
10
11 Le présent outil est conçu pour permettre à des élèves d'entraîner la résolution
  de systèmes d'équations linéaires de la forme
12 ```math
13 \left\{\begin{array}{c} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{array}\right.
14 ```
15 en utilisant la méthode la plus appropriée, en reconnaissant les cas suivants:
16
17 - quand  $a \in \{0, 1\}$  ou  $b \in \{0, 1\}$ , on peut
  isoler directement l'une des deux inconnues dans la première équation ;
18
19 - quand  $d = 0$  ou  $e = 0$ , on peut isoler directement l'une des deux inconnues
  dans la deuxième équation;
20
21 - si l'une des équations est un multiple de l'autre, le nombre de solutions est
  infini (droites confondues) ;
22
23 - si le déterminant de la matrice des coefficients est nul et que les deux
  équations ne sont pas multiples l'une de l'autre, alors les droites sont
  parallèles;
24
25 - si  $a \equiv 0 \pmod b$  ou inversement, on divise toute l'équation par  $b$ ,
  respectivement  $a$  et on retombe dans le premier cas abordé ci-dessus; idem si
 $d \equiv 0 \pmod e$  ou inversement;
26
27 - et sinon, faire de la combinaison linéaire (via règle de Cramer si elle est
  connue).
28
29
30 Pour ce faire, l'outil permet de produire des fiches d'exercices avec des
  systèmes de deux équations linéaires à résoudre le plus efficacement possible
  par les élèves. Avec les exercices sont générées des solutions recommandées,
  choisies parmi les méthodes énumérées ci-dessus. L'utilisation recommandée de
  l'outil est à faire après avoir discuté et entraîné les différentes méthodes
  indépendamment, en ayant expliqué l'utilité de chercher une méthode efficace.
  Ensuite, il conviendra de distribuer une feuille par élève, chacune générée
  séparément, et de les laisser travailler à les résoudre. Une fois une
  proportion suffisante des exercices résolus, l'enseignant·e peut procéder à
  une mise en commun lors de laquelle chaque élève - par exemple - expose
  l'équation dont la méthode de résolution a été perçue comme la moins évidente.
```

32 Ce projet entre dans le contexte d'entraîner la compétence de base «utiliser avec  
souplesse l'outillage mathématique» donnée dans l'\*Annexe au plan d'études  
cadre du 9 juin 1994 pour les écoles de maturité : Compétences de base en  
mathématiques et en langue première constitutives de l'aptitude générale aux  
études supérieures, du 17 mars 2016\*.

33

34

35 ## Structure de l'outil

36

37 L'outil se présente comme cinq fichiers dans une archive ``.zip``: le QUICKSTART,  
la README, un fichier ``codeSysteme.lua``, un fichier ``main-systeme.tex`` et un  
fichier ``preamble-systeme.tex``.

38

39 - Le ``*.lua`` contient la majorité de l'algorithme servant à produire les  
questions.

40

41 - Le ``preamble-*.tex`` enclenche un petit nombre de paquets, librement distribués  
dans TEXLive, MikTEX ou sur [www.ctan.org](http://www.ctan.org). Ceux-ci comprennent ``luacode``  
(automatique avec LuaLaTeX) et ``luacas``, utilisé pour simplifier  
algébriquement certaines des équations-réponses. Dans le préambule, plusieurs  
commandes sont définies qui se réfèrent au ``*.lua``.

42

43 - Le ``main-*.tex`` enclenche le préambule puis se charge de la mise en page du  
document.

44

45

46 ## Utilisation de l'outil

47

48 L'outil est conçue pour que, après avoir décompressé l'archive ``.zip``, il suffise  
d'ouvrir le fichier ``main-*.pdf`` dans votre éditeur TeX favori et de le  
compiler pour obtenir une fiche complète et utilisable. C'est un outil «prêt  
à l'emploi» («\*plug and play\*»).

49

50 Il vous faut seulement vous assurer que vous ayez une distribution LaTeX à jour,  
et \*\*compiler le document avec le moteur LuaLaTeX\*\* (et non pdfLaTeX ou  
XeLaTeX).

51

52 \*\*\*

53

54 ### Modifier le document: mains à la pâte

55

56 #### Depuis le ``.tex``

57

58 Le document ``main-*.tex`` consiste en une série de 18 exercices, mis en page  
algorithmiquement avec les commandes

59 ```tex`

60 `\foreach \n in {1,2,...,18}{\bfullroutine{\n}}`

61 `````

62 et ```\showallquestions`` et ```\showallanswers``.

63

64 Quelques commandes additionnelles sont également proposées directement dans le  
``main-*.tex`` pour une mise en page alternative :

65

66 - ```\bprintqna`` : imprime l'équation sur une ligne, suivie de la réponse.

67

68 - ```\bmakequestion`` : à utiliser en mode mathématique (`*mathmode*`), génère une  
équation à résoudre.

69

70 - ```\bmakeanswer`` : à utiliser en mode texte, donne la solution recommandée à la  
dernière équation générée par ```\bmakequestion``.

71

```

72 Les deux dernières sont plus modulables, pouvant être utilisées pour placer
    l'équation et la réponse plus librement, par exemple au sein d'une plus grande
    feuille de travail avec d'autres types de questions.
73
74 ##### Depuis le code `.lua`
75
76 Si vous le souhaitez, vous pouvez modifier quelques réglages dans l'algorithme
    qui décide des polynômes et des méthodes pour les résoudre. Ces réglages sont
    tous dans la section intitulée `(EDITABLE) PREAMBLE` du fichier `.lua`. En
    particulier, vous avez accès aux fonctionnalités suivantes :
77
78 - choisir la graine pour la générations de nombres pseudoaléatoires, en modifiant
    le paramètre de la fonction `math.randomseed()` - *si vous voulez pouvoir
    garder vos feuilles d'une fois à une autre, il vous faut fixer ce paramètre
    **avant** la compilation*;
79 - choisir la probabilité d'avoir une matrice de coefficients qui soit singulière,
    en modifiant le paramètre `probability_singular`.
80
81 ##### Accès à des fonctions additionnelles
82
83 Pour les utilisateurs les plus téméraires, quelques dernières fonctions
    sont également fournies à LaTeX depuis le code Lua. C'est la dernière section
    du code `mainSysteme.tex`, qui ressemble à ceci:
84
85 ```lua
86 -- INTERFACE WITH LUALATEX ENGINE --
87
88 -- Export user-accessible functions (renamed using syntax `new = old`):
89 return {
90     polynomial = generate_exercise, -- returns {coefficients, num_sols, x, y}
91     methodString = pick_method_case, -- provides recommended method
92     printEquation = cas_equation, -- question preprinted for LaTeX
93     answer = answer_line, -- answer preprinted for LaTeX
94     fullRoutine = full_routine, -- whole shebang
95     printQnA = print_questions_and_answers, -- alternative, single-equation
        formatting style
96 }
97 ```
98
99 Pour accéder à ces fonctions, il faut les appeler depuis un document `.tex`.
    C'est ce qui est déjà fait dans `preamble-*.tex` pour certaines de celles-ci,
    avec les commandes suivantes.
100
101 ```tex
102 % Activer les fonctions dans le code / Load lua code:
103 \directlua{codeB = require "codeSysteme"}
104
105 % Convertir fonctions de code.lua en commandes LaTeX / Extract useful functions
    as LaTeX commands:
106 \newcommand{\bfullroutine}[1]{\directlua{codeB.fullRoutine(#1)}} % format par
    défaut / default style
107
108 %[...]
109 ```
110
111 La syntaxe de ces fonctions est documentée dans le fichier `mainSysteme.lua`
    directement.
112
113 ### Traitement par lots
114

```

```

115 Pour produire plusieurs feuilles différentes d'un coup, afin de pouvoir par
    exemple les distribuer individuellement à une classe de 20 élèves, nous
    n'avons malheureusement pas trouvé d'autre solution que d'appeler plusieurs
    fois le moteur LuaLaTeX depuis un programme externe. Par exemple, sur Linux,
    vous pouvez taper le code suivant dans Bash depuis le dossier contenant
    `main-*.tex` :
116
117 ```bash
118 for i in {1..20}; do lualatex -jobname feuille-$i main-systeme.tex; done
119 ```
120 Il faudra cependant adapter ces commandes à la syntaxe particulière de votre
    système opératoire. Un autre exemple, pour Windows : ouvrez le dossier
    contenant `main-*.tex`, effectuez un clic-droit et sélectionner *Ouvrir dans
    le Terminal*. (Vérifiez que celui-ci soit bien la Windows PowerShell.) Dans le
    terminal, vous pouvez ensuite taper :
121 ```powershell
122 for ($var = 1; $var -le 20; $var++) {lualatex.exe -jobname feuille-$var
    main-systeme.tex}
123 ```
124 Il vous faudra donc vous familiariser avec la variante qui vous conviendra.
    *N.b.* - il vous faudra aussi adapter le nom de votre moteur LuaLaTeX
    (`lualatex`, `lualatex.exe` ou autre).
125
126 ### Intégration avec l'autre outil du même projet
127
128 Dans le cadre de ce laboratoire didactique, deux outils ont été créés: l'un sur
    les systèmes d'équations et l'autre sur les équations du second degré. Si vous
    voulez pouvoir combiner les deux types de questions dans un seul et même
    document, créez un dossier contenant les fichiers `codeQuadratique.lua` et
    `codeSysteme.lua`. Ensuite, créez un fichier `preamble.tex` et copiez-y le
    code suivant (n'oubliez pas de sauvegarder).
129
130 ```tex
131 %!TeX root = main.tex
132
133 % --- PRÉAMBULE ---
134
135 % langue et police:
136 \usepackage[quiet]{fontspec}
137 \usepackage{polyglossia} \setmainlanguage[variant=swiss]{french}
138
139 % calculs internes:
140 \usepackage{luacas}
141
142 % maths:
143 \usepackage{amsmath}
144 \usepackage{amssymb}
145 \usepackage[warnings-off={mathtools-colon,mathtools-overbracket},
    math-style=ISO,]{unicode-math}
146 \usepackage[locale = FR, round-precision = 3, round-mode = figures, round-pad =
    false,]{siunitx}
147 % vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
148 % \newcommand{\num}[1]{#1}
149 %% ^ à décommenter si vous voulez vous débarrasser de <>siunitx
150 %% ^ uncomment if you want to get rid of <>siunitx
151
152 % choix esthétiques, facultatifs:
153 \let\oldemptyset\emptyset
154 \let\emptyset\varnothing
155
156 % permettent mise en page:

```

```

157 \usepackage{multicol}
158 \usepackage{pgffor}
159
160 % date et heure
161 \usepackage[timesep=., showzone=false, hourminsep=h, minsecsep=m,]{datetime2} %
    permet les horodatages
162
163
164 % ---- ANSWER-PRINTING STYLE FROM https://tex.stackexchange.com/a/15354 ----
165
166 % Define answer environment
167
168 \newbox\allanswers
169 \setbox\allanswers=\vbox{}
170
171 \newenvironment{customanswer}
172 {\global\setbox\allanswers=\vbox\bgroup
173   \unvbox\allanswers
174   \vspace{-4pt}
175 }
176 {\bigbreak\egroup}
177
178 \newcommand{\showallanswers}{\par\unvbox\allanswers}
179
180 % Define question environment
181
182 \newbox\allquestions
183 \setbox\allquestions=\vbox{}
184
185 \newenvironment{customquestion}
186 {\global\setbox\allquestions=\vbox\bgroup
187   \unvbox\allquestions
188 }
189 {\bigbreak\egroup}
190
191 \newcommand{\showallquestions}{\par\unvbox\allquestions}
192
193
194 %% ----- PROVIDE \timestamp COMMAND -----
195 % -- from https://flaterco.com/util/timestamp.sty --
196
197 \makeatletter
198
199 \newcount\@DT@modctr
200 \newcount\@dtctr
201
202 \def\@modulo#1#2{%
203   \@DT@modctr=#1\relax
204   \divide \@DT@modctr by #2\relax
205   \multiply \@DT@modctr by #2\relax
206   \advance #1 by -\@DT@modctr}
207
208 \newcommand{\xxivtime}{%
209   \@dtctr=\time%
210   \divide \@dtctr by 60
211   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr.%
212   \@dtctr=\time%
213   \@modulo{\@dtctr}{60}%
214   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr%
215 }
216

```

```

217 \newcommand{\timestamp}{\the\year-%
218 \ifnum\month<10 0\fi\the\month-%
219 \ifnum\day<10 0\fi\the\day\ \xxivtime}
220
221 \makeatother
222
223
224 % ----- ACCÈS AU CODE LUA: -----
225
226 % Aide-mémoire Lua: https://devhints.io/lua
227
228 %% OUTIL SECOND DEGRÉ
229
230 % Activer les fonctions dans le code:
231 % Load lua code:
232 \directlua{codeA = require "codeQuadratique"}
233
234 % Pour le format par défaut:
235 \newcommand{\afullroutine}[1]{\directlua{codeA.fullRoutine(#1)}}
236
237 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
238 \newcommand{\aprintqna}{\directlua{codeA.printQnA()}}
239
240 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
241 \newcommand{\amakequestion}{%
242   % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: \(\amakequestion\)
243   \directlua{%
244     polynomialcoeffs = codeA.polynomial()
245     eqn = codeA.printEquation(table.unpack(polynomialcoeffs,1,3))
246     tex.print(eqn)
247   }
248 }
249 \newcommand{\amakeanswer}{%
250   % IN TEXTMODE
251   \directlua{%
252     tex.print(codeA.answer(table.unpack(polynomialcoeffs)))
253   }
254 }
255
256 %% OUTIL SYSTÈME D'ÉQUATIONS
257
258 % Activer les fonctions dans le code:
259 % Load lua code:
260 \directlua{codeB = require "codeSysteme"}
261
262 % Pour le format par défaut:
263 \newcommand{\bfullroutine}[1]{\directlua{codeB.fullRoutine(#1)}}
264
265 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
266 \newcommand{\bprintqna}{\directlua{codeB.printQnA()}}
267
268 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
269 \newcommand{\bmakequestion}{%
270   % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: \(\bmakequestion\)
271   \directlua{%
272     coeffs, num_sols, x, y = codeB.polynomial(0.2)
273     eqn = codeB.printEquation(coeffs)
274     tex.print(eqn)
275   }
276 }
277 \newcommand{\bmakeanswer}{%

```

```

278 % IN TEXTMODE
279 \directlua{%
280     tex.print(codeB.answer(coeffs, num_sols, x, y))
281 }
282 }
283
284 ---
285
286 Une fois que c'est fait, vous pouvez créer un fichier `main.tex` (toujours dans
    le même dossier) et le remplir comme vous convient, tant que vous n'oubliez
    pas d'y inclure le préambule avec la commande `\input{preamble.tex}`. Une idée
    de base depuis laquelle travailler est la suivante.
287
288 ---tex
289 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
290 \usepackage[margin=2cm]{geometry}
291 \input{preamble.tex}
292
293 \begin{document} \thispagestyle{empty}
294
295 \foreach \n in {1,2,...,12}{\afullroutine{\n}} % prépare les questions/réponses
296 \begin{multicols}{3} \showallquestions \end{multicols} % imprime la liste des
    questions
297 ~\medskip \showallanswers % espace vertical, puis imprime la liste des
    réponses
298
299 \medskip %%%%%%%%%%%%%%%
300
301 \hbox to \linewidth{\leaders\hbox to 4pt{\hss · \hss}\hfil} % séparation entre
    les parties
302
303 \setbox\allanswers=\vbox{} % vider la boîte des réponses
304 \setbox\allquestions=\vbox{} % vider la boîte des questions
305
306 \medskip %%%%%%%%%%%%%%%
307
308 \foreach \n in {1,2,...,9}{\bfullroutine{\n}} % prépare les questions/réponses
309 \begin{multicols}{3} \showallquestions \end{multicols} % imprime la liste des
    questions
310 ~\medskip \showallanswers % espace vertical, puis imprime la liste des
    réponses
311
312 \end{document}
313 ---
314
315 Un exemple de fiche créée suivant cette procédure est disponible [sur
    Overleaf](https://www.overleaf.com/read/wzdckddkjzy#f3d012).
316
317 ***
318
319 ## Licence et attributions
320
321 Cet outil est distribué avec la licence
    [GPL-3.0-or-later](https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html) par ses auteurs :
322
323 - Alexandros Rispo Constantinou
324 - Mathias Blaise
325
326 Une [page GitHub pour cet
    outil](https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique) est également
    disponible.

```



### A.2.1 Équations du second degré

```

1 %!TeX root = main-quadratique.tex
2
3
4 % --- PRÉAMBULE ---
5
6 % langue et police:
7 \usepackage[quiet]{fontspec}
8 \usepackage{polyglossia} \setmainlanguage[variant=swiss]{french}
9
10 % calculs internes:
11 \usepackage{luacas}
12 \% \usepackage[pl,import]{penlight} % désuet
13
14 % maths:
15 \usepackage{amsmath}
16 \usepackage{amssymb}
17 \usepackage[ % choix esthétique, facultatif
18   warnings-off={mathtools-colon,mathtools-overbracket},
19   math-style=ISO,
20   ]{unicode-math}
21 \usepackage[ % à régler selon préférences / change as preferred
22   % utilisé ici pour formater les nombres à virgule avec \num{}
23   % used here to format decimal numbers via \num{}
24   locale = FR,
25   round-precision = 3,
26   round-mode = figures,
27   round-pad = false,
28   %zero-decimal-as-symbol = true, % choix personnel / personal choice
29   ]{siunitx}
30 % vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
31 % \newcommand{\num}[1]{\#1}
32 %% ^ à décommenter si vous voulez vous débarrasser de <>siunitx
33 %% ^ uncomment if you want to get rid of <>siunitx
34
35 % choix esthétiques, facultatifs:
36 \let\oldemptyset\emptyset
37 \let\emptyset\varnothing
38
39 % permettent mise en page:
40 \usepackage{multicol}
41 \usepackage{pgffor}
42
43 % date et heure
44 \usepackage[ % permet les horodatages (timestamps)
45   timesep=.,
46   showzone=false,
47   hourminsep=h,
48   minsecsep=m
49   ]{datetime2}
50
51
52 % ---- ANSWER-PRINTING STYLE FROM https://tex.stackexchange.com/a/15354 ----
53
54 % Define answer environment
55

```

```

56 \newbox\allanswers
57 \setbox\allanswers=\vbox{}
58
59 \newenvironment{customanswer}
60 {\global\setbox\allanswers=\vbox\bgroup
61   \unvbox\allanswers
62   \vspace{-4pt}
63 }
64 {\bigbreak\egroup}
65
66 \newcommand{\showallanswers}{\par\unvbox\allanswers}
67
68 % Define question environment
69
70 \newbox\allquestions
71 \setbox\allquestions=\vbox{}
72
73 \newenvironment{customquestion}
74 {\global\setbox\allquestions=\vbox\bgroup
75   \unvbox\allquestions
76 }
77 {\bigbreak\egroup}
78
79 \newcommand{\showallquestions}{\par\unvbox\allquestions}
80
81 % -----
82
83
84
85 %% ----- PROVIDE \timestamp COMMAND -----
86 % -- from https://flaterco.com/util/timestamp.sty --
87
88 \makeatletter
89
90 \newcount\@DT@modctr
91 \newcount\@dtctr
92
93 \def\@modulo#1#2{%
94   \@DT@modctr=#1\relax
95   \divide \@DT@modctr by #2\relax
96   \multiply \@DT@modctr by #2\relax
97   \advance #1 by -\@DT@modctr}
98
99 \newcommand{\xxivtime}{%
100   \@dtctr=\time%
101   \divide \@dtctr by 60
102   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr.%
103   \@dtctr=\time%
104   \@modulo{\@dtctr}{60}%
105   \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr%
106 }
107
108 \newcommand{\timestamp}{\the\year-%
109   \ifnum\month<10 0\fi\the\month-%
110   \ifnum\day<10 0\fi\the\day\ \xxivtime}
111
112 \makeatother
113
114 % -----
115
116

```

```

117 % ----- ACCÈS AU CODE LUA: -----
118 %
119 % Aide-mémoire Lua: https://devhints.io/lua
120 % (= Lua cheat-sheet)
121 %
122 % Activer les fonctions dans le code:
123 % Load lua code:
124 \directlua{codeA = require "codeQuadratique"}
125 %
126 % Convertir fonctions de code.lua en commandes LaTeX:
127 % Extract useful functions as LaTeX commands:
128 %
129 % Pour le format par défaut / for default style:
130 \newcommand{\afullroutine}[1]{\directlua{codeA.fullRoutine(#1)}}
131 %
132 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
133 % To print question immediately followed by answer:
134 \newcommand{\aprintqna}{\directlua{codeA.printQnA()}}
135 %
136 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
137 % To freely produce question, and separately answer
138 \newcommand{\amakequestion}{%
139 % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: \(\amakequestion\)
140 \directlua{%
141 polynomialcoeffs = codeA.polynomial()
142 eqn = codeA.printEquation(table.unpack(polynomialcoeffs,1,3))
143 tex.print(eqn)
144 }
145 }
146 \newcommand{\amakeanswer}{%
147 % IN TEXTMODE
148 \directlua{%
149 tex.print(codeA.answer(table.unpack(polynomialcoeffs)))
150 }
151 }
152 }

```

Code A.6: Document Lua<sup>A</sup>TeX pour lesdits exercices de second degré

```

1 %!TeX TS-program = lualatex
2 %!TeX spellcheck = fr
3
4 %%%%%%%%%%%%%%%
5 %%% AUTHORSHIP & LICENCE %%%
6 %%%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % This tool is distributed with the GPL-3.0-or-later
9 % (https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html) licence
10 % by its author, Alexandros Rispo Constantinou, from
11 % its GitHub page tytyvillus/laboratoire-didactique.
12 %
13 % https://github.com/tytyvillus/laboratoire-didactique
14 %
15 % Cet outil est distribué avec la licence GPL-3.0-or-later
16 % (https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html) par son auteur
17 % Alexandros Rispo Constantinou et est mis à disposition
18 % depuis sa page GitHub tytyvillus/laboratoire-didactique.
19
20 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
21 \usepackage[margin=2cm]{geometry}
22

```

```

23 \input{preamble-quadratique.tex}
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DÉBUT DU DOCUMENT %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 \setlength\parindent{0pt} % pour rendre les lignes plus compactes
30 \baselineskip=0.9\baselineskip
31
32 \begin{document} \thispagestyle{empty}
33
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONSIGNE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35
36 {\small\em Résolvez ces équations en utilisant à chaque fois la méthode la plus
   rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la forme standard si
   elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations résolues, vérifiez vos
   réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question si vous avez utilisé
   la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas droit à la
   calculatrice.}
37
38 %%%%%%%%% GÉNÈRE LES QUESTIONS DANS UNE BOÎTE VIRTUELLE %%%%%%%%%
39
40 \raggedright
41 \foreach \n in {1,2,...,24}{\afullroutine{\n}}
42
43 %%%%%%%%% MET TITRE ET HORODATAGE, PUIS IMPRIME EXERCICES %%%%%%%%%
44
45 % "horodage" = timestamp
46
47 \centering\vspace{-12pt}
48
49 Exercices \{\tiny\sffamily (générés le \DTMtoday\ à \DTMcurrenttime s)} \}
50
51 \begin{multicols}{3}
52   \showallquestions
53 \end{multicols}
54
55 \medskip
56
57 %%%%%%%%% SÉPARATION ENTRE EXERCICES ET RÉPONSES %%%%%%%%%
58
59 \hbox to \linewidth{\leaders\hbox to 4pt{\hss · \hss}\hfil}
60 % --> traits tillés (voir https://tex.stackexchange.com/a/474310)
61
62 % modifiable, par exemple remplaçant par nouvelle page \newpage
63
64 %%%%%%%%% MET TITRE ET HORODATAGE, PUIS IMPRIME EXERCICES %%%%%%%%%
65
66 \bigskip
67
68 Réponses \{\tiny\sffamily (générées le \DTMtoday\ à \DTMcurrenttime s)} \} ~\}
69
70 \linespread{0.5}\selectfont
71 \showallanswers
72
73 \end{document}

```

## A.2.2 Systèmes de deux équations

```

1 %!TeX root = main-systeme.tex
2
3
4 % --- PRÉAMBULE ---
5
6 % langue et police:
7 \usepackage[quiet]{fontspec}
8 \usepackage{polyglossia} \setmainlanguage[variant=swiss]{french}
9
10 % calculs internes:
11 \usepackage{luacas}
12 %\usepackage[pl,import]{penlight} % désuet
13
14 % maths:
15 \usepackage{amsmath}
16 \usepackage{amssymb}
17 \usepackage[ % choix esthétique, facultatif
18 warnings-off={mathtools-colon,mathtools-overbracket},
19 math-style=ISO,
20 ]{unicode-math}
21 \usepackage[ % à régler selon préférences / change as preferred
22 % utilisé ici pour formater les nombres à virgule avec \num{}
23 % used here to format decimal numbers via \num{}
24 locale = FR,
25 round-precision = 3,
26 round-mode = figures,
27 round-pad = false,
28 zero-decimal-as-symbol = true, % choix personnel / personal choice
29 ]{siunitx}
30 % vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
31 % \newcommand{\num}[1]{#1}
32 %% ^ à décommenter si vous voulez vous débarrasser de <>siunitx
33 %% ^ uncomment if you want to get rid of <>siunitx
34
35 % choix esthétiques, facultatifs:
36 \let\oldemptyset\emptyset
37 \let\emptyset\varepsilon
38
39 % permettent mise en page:
40 \usepackage{multicol}
41 \usepackage{pgffor}
42
43 % date et heure
44 \usepackage[ % permet les horodatages (timestamps)
45 timesep=. ,
46 showzone=false,
47 hourminsep=h,
48 minsecsep=m
49 ]{datetime2}
50
51
52 % ---- ANSWER-PRINTING STYLE FROM https://tex.stackexchange.com/a/15354 ----
53
54 % Define answer environment
55
56 \newbox\allanswers
57 \setbox\allanswers=\vbox{}
58
59 \newenvironment{customanswer}
60 {\global\setbox\allanswers=\vbox\bgroup

```

```

61 \unvbox\allanswers
62 \vspace{-4pt}
63 }
64 {\bigbreak\egroup}
65
66 \newcommand{\showallanswers}{\par\unvbox\allanswers}
67
68 % Define question environment
69
70 \newbox\allquestions
71 \setbox\allquestions=\vbox{}
72
73 \newenvironment{customquestion}
74 {\global\setbox\allquestions=\vbox\bgroup
75 \unvbox\allquestions
76 }
77 {\bigbreak\egroup}
78
79 \newcommand{\showallquestions}{\par\unvbox\allquestions}
80
81 % -----
82
83
84
85 %% ----- PROVIDE \timestamp COMMAND -----
86 % -- from https://flaterco.com/util/timestamp.sty --
87
88 \makeatletter
89
90 \newcount\@DT@modctr
91 \newcount\@dtctr
92
93 \def\@modulo#1#2{%
94 \@DT@modctr=#1\relax
95 \divide \@DT@modctr by #2\relax
96 \multiply \@DT@modctr by #2\relax
97 \advance #1 by -\@DT@modctr}
98
99 \newcommand{\xxivtime}{%
100 \@dtctr=\time%
101 \divide \@dtctr by 60
102 \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr.%
103 \@dtctr=\time%
104 \@modulo{\@dtctr}{60}%
105 \ifnum \@dtctr<10 0\fi\the \@dtctr%
106 }
107
108 \newcommand{\timestamp}{\the\year-%
109 \ifnum\month<10 0\fi\the\month-%
110 \ifnum\day<10 0\fi\the\day\ \xxivtime}
111
112 \makeatother
113
114 % -----
115
116
117
118 % ----- ACCÈS AU CODE LUA: -----
119
120 % Aide-mémoire Lua: https://devhints.io/lua
121

```

```

122 % Activer les fonctions dans le code:
123 % Load lua code:
124 \directlua{codeB = require "codeSysteme"}
125
126 % Convertir fonctions de code.lua en commandes LaTeX:
127 % Extract useful functions as LaTeX commands:
128
129 % Pour le format par défaut / for default style:
130 \newcommand{\bfullroutine}[1]{\directlua{codeB.fullRoutine(#1)}}
131
132 % Pour imprimer question immédiatement suivie de réponse:
133 % To print question immediately followed by answer:
134 \newcommand{\bprintqna}{\directlua{codeB.printQnA()}}
135
136 % Pour librement produire question, et séparément la réponse
137 % To freely produce question, and separately answer
138 \newcommand{\bmakequestion}{%
139   % MUST BE INSERTED IN MATHMODE: \(\makequestion\)
140   \directlua{%
141     coeffs, num_sols, x, y = codeB.polynomial(0.2)
142     eqn = codeB.printEquation(coeffs)
143     tex.print(eqn)
144   }
145 }
146 \newcommand{\bmakeanswer}{%
147   % IN TEXTMODE
148   \directlua{%
149     tex.print(codeB.answer(coeffs, num_sols, x, y))
150   }
151 }

```

Code A.8: Document Lua<sup>A</sup>TeX pour lesdits exercices de systèmes d'équations

```

1 %!TeX TS-program = lualatex
2 %!TeX spellcheck = fr
3
4 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
5 \usepackage[margin=2cm]{geometry}
6 \input{preamble-systeme.tex}
7
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DÉBUT DU DOCUMENT %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11
12 \setlength\parindent{0pt} % pour rendre les lignes plus compactes
13 \baselineskip=0.9\baselineskip
14
15 \begin{document} \thispagestyle{empty}
16
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONSIGNE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18
19 {\small\em Résolvez ces systèmes d'équations en utilisant à chaque fois la
   méthode la plus rapide possible. (N'oubliez pas d'écrire l'équation sous la
   forme standard si elle ne l'est pas déjà.) Une fois toutes les équations
   résolues, vérifiez vos réponses dans le corrigé. Indiquez pour chaque question
   si vous avez utilisé la même méthode que le corrigé ou non. Vous n'avez pas
   droit à la calculatrice.}
20
21 %%%%%%%%% GÉNÈRE LES QUESTIONS DANS UNE BOÎTE VIRTUELLE %%%%%%%%%
22
23 \raggedright

```

```

24 \foreach \n in {1, 2, ..., 18}{\bfullroutine{\n}}
25
26 %%%%%% MET TITRE ET HORODATAGE, PUIS IMPRIME EXERCICES %%%%%%
27
28 % "horodatage" = timestamp
29
30 \centering\vspace{-12pt}
31
32 Exercices \{\tiny\sffamily (g         le \DTMtoday\    \DTMcurrenttime s)}\}
33
34 \begin{multicols}{3}
35   \showallquestions
36 \end{multicols}
37
38 \medskip
39
40 %%%%%%%%% S         ENTRE EXERCICES ET R         %%%%%%%%%
41
42 \hbox to \linewidth{\leaders\hbox to 4pt{\hss . \hss}\hfil}
43 % --> traits till     (voir https://tex.stackexchange.com/a/474310)
44
45 % modifiable, par exemple rempla         par nouvelle page \newpage
46
47 %%%%%% MET TITRE ET HORODATAGE, PUIS IMPRIME EXERCICES %%%%%%
48
49 \bigskip
50
51 R         \{\tiny\sffamily (g           le \DTMtoday\    \DTMcurrenttime s)}\}\sim\}
52
53 \linespread{0.5}\selectfont
54 \showallanswers
55
56 \end{document}

```

## A.3 Algorithmes Lua

### A.3.1          du second degré

Code A.9: Code Lua pour g         les          du second degré avec r        

```

1  -- All functions are defined locally, and only user-accessible functions are
2  -- exported at the end.
3  -- The practices followed are given by [this stackexchange
4  -- answer](https://tex.stackexchange.com/a/464049).
5
6  -- IMPORTANT NOTE: algorithm assumes a, b, c \in \mathbb{Z}
7  --> generalising the algorithm to non-integer a, b, c will be a bit of work,
8  -- because luacas isn't very happy with non-integer coefficients
9
10 -----
11 ----- (EDITABLE) PREAMBLE -----
12 -----
13
14 -- SET GLOBAL SEED
15 --> set manually if you want a reproducible sheet:
16 math.randomseed(os.time()) -- e.g. 2 or os.time()
17

```



```

18 -- GENERAL PARAMETERS --> modify at will but at your own peril
19
20 -- Choose your preferred terminology for the quadratic formula:
21 local formule = [[formule quadr.\@]]
22 --> typical choices are [[formule de Viète]] or [[formule quadratique]]
23
24 local function whether_from_factored_form ()
25     -- randomly decides whether choose [integer] solutions first (return true)
26     -- or generate a, b, c at random (return false)
27     if math.random(10) <= 7 --> weightings, feel free to change
28         then return true
29         else return false
30     end
31 end
32
33 local function enforce_perfect_square ()
34     -- randomly chooses to enforce a perfect-square polynomial (return true)
35     -- or just leave things alone (return false)
36     if math.random(10) == 1 --> weightings, feel free to change
37         then return true
38         else return false
39     end
40 end
41
42 local function easy_factor(a, x1, x2)
43     -- boolean test; decides whether  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  is easy to factorise or not
44     -- where x1, x2 are the solutions s.t.  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x-x1) \cdot (x-x2)$ 
45     -- n.b. a::Int, x1::Float, x2::Float|Nil
46
47     local decision = true -- by default, if x2 is nil, poly is easy to factor
48
49     if x2 ~= nil then
50
51         decision = (x1 % 1 == 0) and (x2 % 1 == 0) and --> check integer solutions
52             (
53                 (
54                     (
55                         math.max(math.abs(x1),math.abs(x2)) <= 12
56                         or math.min(math.abs(x1),math.abs(x2)) <= 3
57                     )
58                     and
59                     (math.abs(a) <= 5 or a == 10 or math.abs(a*x1*x2) % 10 == 0)
60                 )
61                 or (math.abs(a*x1*x2) <= 144)
62             )
63         --> these choices were made using gut instinct and trial-and-error
64         -- feel free to change
65
66     end
67
68     return decision
69 end
70
71
72
73
74 -----
75 -----  HELPER FUNCTIONS  -----
76 -----
77
78 local function is_one_of (value, table)

```

```

79     -- checks whether value is one of the elements of table
80     for idx, val in ipairs(table) do
81         if value == val then return true end
82     end
83     return false --> this only gets triggered if all previous checks fail
84 end
85
86 local function gcd (a, b)
87     if b == 0 then
88         return a
89     end
90     return gcd(b, a % b)
91 end
92
93 local function lcm (a, b)
94     return (a * b) / gcd(a, b)
95 end
96
97
98 local function map (tbl, f)
99     -- applies function to table
100     local t = {}
101     for k,v in pairs(tbl) do
102         t[k] = f(v)
103     end
104     return t
105 end
106
107 local function range (n)
108     -- generates table from 1 to n
109     assert(n % 1 == 0 and n > 0, "argument of range should be a positive integer")
110     local list = {}
111     for i = 1, n, 1 do
112         list[i] = i
113     end
114     return list
115 end
116
117 local function approx (x, y)
118     -- checks approximate equality, within 10-6
119     if math.abs(x-y) < 1e-6 then return true else return false end
120 end
121
122 local function table_concat(t1,t2)
123     for i=1,#t2 do
124         t1[#t1+1] = t2[i]
125     end
126     return t1
127 end
128
129
130 local function table_flatten_1 (matrix)
131     local output = {}
132     for i, list in ipairs(matrix) do
133         local ouput = table_concat(output, list)
134     end
135     return output
136 end
137
138
139

```

```

140 -----
141 ----- MAIN ALGORITHM -----
142 -----
143
144 -- ALGORITHM PART 1: POLYNOMIAL GENERATOR --
145
146 -- warning: have a lot of checks of type a==0
147
148 -- Generate quadratic polynomials:
149 local function generate_polynomial()
150     -- returns {a, b, c, num_sols, x1, x2, rat}
151
152     -- initialise generate_polynomial() outputs, fixes scope:
153     local a, b, c, num_sols, x1, x2, delta
154
155     -- decide whether integer solutions or not:
156     local rat = whether_from_factored_form()
157
158     if rat == true then -- integer solutions
159         local sol_bdy = 12 -- boundary of solution range
160
161         -- generate two solutions:
162         x1 = math.random(-sol_bdy, sol_bdy)
163         if enforce_perfect_square() then x2 = x1 else -- artificially bump up
            number of perfect squares
164         x2 = math.random(-sol_bdy, sol_bdy) end
165
166         -- also generate leading coefficient:
167         a = (-1)^math.random(2) * math.random(10) -- avoid zero
168         -- now compute other coefficients:
169         b = - a * (x1 + x2)
170         c = a * x1 * x2
171
172         -- set number of and order solutions
173         if x1 == x2 then num_sols, x2 = 1, nil -- set number of solutions to one
            and clear x2
174         else num_sols = 2 -- set number of solutions to two
            if x1 > x2 then x1, x2 = x2, x1 end -- order solutions correctly
175         end
176
177     else -- totally random solutions
178         a = math.random(-10,10) -- zero (linear equation) allowed (with low
            probability, cf rat == true)
179         b = math.random(-20,20)
180         c = math.random(-60,60)
181
182         -- Compute solutions:
183         if a == 0 then -- if linear then either
184             if b == 0 then -- no x-dependence
185                 if c == 0 then num_sols, x1, x2 = math.huge, nil, nil -- "0 = 0"
186                     --> might have to hardcode this special case later
187                     --> essentially, here reserve num_sols = math.huge for S = \R
188                 else num_sols, x1, x2 = 0, nil, nil end -- "0 = 1"
189             else -- or linear
190                 num_sols, x1, x2 = 1, -c / b, nil -- (and delta = nil)
191             end
192         else delta = b^2 - 4*a*c -- elseif quadratic
193             -- if quadratic, do the three cases
194             if delta == 0 then -- one solution with multiplicity two
195                 num_sols = 1
196                 x1 = - b / (2*a)
197

```

```

198         x2 = nil
199     elseif delta < 0 then -- no solutions
200         num_sols = 0
201         x1 = nil
202         x2 = nil
203     elseif delta > 0 then -- two separate solutions
204         num_sols = 2
205         x1 = (- b - math.sqrt(delta)) / (2*a)
206         x2 = (- b + math.sqrt(delta)) / (2*a)
207     else assert(false, "You broke the law of excluded middle, wtf dude.")
208     end
209 end
210 end
211
212 return {a, b, c, num_sols, x1, x2, rat}
213 end
214
215
216
217
218 -- ALGORITHM PART 2: OPTIMAL METHOD DETECTOR --
219
220 local function pick_method(polynomial_info, override_method)
221     -- polynomial_info is the list a, b, c, num_sols, x1, x2, rat
222     -- override_method is an optional input, of the form {bool: overwrite
223         method?, string: new method}
224
225     local a, b, c, num_sols, x1, x2, rat = table.unpack(polynomial_info)
226     -- a, b, c are the polynomial coefficients (number type)
227     -- num_sols is the number of solutions (number type, values in {0, 1, 2})
228     -- x1, x2 are the solutions of the equation  $a x^2 + b x + c = 0$  (number type)
229     -- rat is a flag for which version of the generation algorithm was used
230     (boolean type)
231
232     --assert(num_sols == math.huge or (num_sols >= 0 and num_sols <= 2), --
233         remove if works
234     assert( is_one_of(num_sols, {0, 1, 2, math.huge}),
235         "Woah, something went wrong -- I didn't receive a sensible number of
236         solutions.")
237
238     local method = "" -- initialise string containing the answer method
239
240     -- run through different preset methods when problem has solution:
241     if num_sols == math.huge then method = [[par évidence]] --> S = \R case
242
243     elseif num_sols ~= 0 then
244         if a==0 then method = [[équation de premier degré, à résoudre
245             algébriquement]]
246         elseif b==0 then method = [[résolution algébrique classique
247             \(\left(\text{attention à }\pm\sqrt{\text{square}}\right)\)]
248         elseif c==0 then method = [[par mise en évidence de ]] -- then by x or
249             a*x, depending
250             if a==1 then method = method..[[\ (x)]]
251             else method = method..string.format([[ \ (%d x) ]], a)
252             end
253         elseif -- (rat == true) or -- "rat==true" commented out because should
254             already be covered by easy_factor
255             easy_factor(a, x1, x2) -- test whether easily factorised by hand
256             then
257                 if num_sols == 1 then method = [[par identité remarquable (carré
258                     parfait)]] --  $(x \pm x_1)^2 = 0$ 

```

```

250         else method = [[par factorisation du trinôme]]
251     end
252     if a ~= 1 -- then, if a /= 1, remind of necessity of bringing
        $a$ out the front
253     and not (override_method and not override_method[1]) -- check
        whether already being told about premultiplying
254     then method = string.format([[diviser par \(%d\), puis ]],
        a)..method end
255     else method = formule -- [[formule de Viète]]
256 end
257
258 -- give instead methods when problem has no solution:
259 else method = [[sans solutions]] -- initialise as no solutions, just in case
260     if a==0 and b==0 and c~=0 then method = [[évidemment]]
261     elseif b==0 then method = [[somme de nombres du même signe ne fait jamais
        zéro]]
262     else method = formule..[[ / en calculant le discriminant \((\Delta)\)]]
263     end
264 end
265
266 -- override method if equation was weirdly printed
267 if override_method then --> checks whether nil
268     if override_method[1] then method = override_method[2] --> check whether
        need to overwrite
269     else method = override_method[2]..method --> else just prepend
270     end
271 end
272
273 return method
274 end
275
276 -----
277 ----- PREPARE OUTPUTS -----
278 -----
279
280 -- PRINT LUALATEX-FORMATTED EQUATION --
281
282 local function cas_equation (a, b, c)
283     -- prints equation using luacas
284     -- outputs string AND (optionally!) method override
285
286     local tex_string = "" -- initialise output equation string
287
288     local override_method = nil -- initialise optional method override
289     --> this is of the form {Bool, String},
290     -- where Bool is whether to overwrite
291     -- (true = overwrite, false = prepend)
292     -- and String is the method to use
293
294     -- randomly choose form, then create with luacas:
295     if math.random(10) > 2 then --> normal in 8/10 cases
296         -- f(x) = a*x^2 + b*x + c
297         tex_string = string.format(
298             [[
299                 \begin{CAS}
300                 vars('x')
301                 f = %d * x^2 + %d * x + %d
302                 f = topoly(f)
303                 \end{CAS}
304                 \print{f} = 0

```

```

306     ]], -- work out in luacas, then print
307     a, b, c
308 )
309 elseif a*b ~= 0 and math.random(3) == 1 then
310     -- x = - c/b - a/b x^2
311     --> n.b. a must be non-zero otherwise get x = -c/b
312     tex_string = string.format(
313         [[
314             \begin{CAS}
315             vars('x')
316             a = %d
317             b = %d
318             c = %d
319             f = topoly(- c / b - a / b * x^2)
320             \end{CAS}
321             x = \print{f}
322         ]],
323         a, b, c
324     )
325     if c == 0 then --> easy and obvious, so override predicted method
326         override_method = {true, string.format(
327             [[par réarrangement et mise en évidence de \(\begin{CAS}
328             temp = (%d) / (%d) \end{CAS}\print{temp} x\)]],
329             a, b)
330     }
331     elseif (c/b % 1) ~= 0 or (a/b % 1) ~= 0 then --> if non-integer, tell
332         them to multiply to kill fractions
333         override_method = {false, string.format([[multiplier par %d, puis ]],
334             math.abs(lcm(b / gcd(b, c), b / gcd(a, b)))) --> gets lcm of
335             denominators
336     }
337     else override_method = {false, ""} --> to kill the 'multiplier par a',
338         without changing method
339     end
340 elseif a*b ~= 0 and math.random(2) == 1 then
341     -- c/a = -x(x + b/a)
342     --> n.b. b must be non-zero otherwise get c/a = -x(x)
343     tex_string = string.format(
344         [[
345             \begin{CAS}
346             vars('x')
347             a = %d
348             b = %d
349             c = %d
350             f = c/a
351             g = topoly(-x(x + b/a))
352             \end{CAS}
353             \print{f} = \print{g}
354         ]],
355         a, b, c
356     )
357     if c == 0 then override_method = {true, [[par le principe du produit
358         nul]]} --> easy so override
359     elseif (c/a % 1) ~= 0 or (b/a % 1) ~= 0 then --> if non-integer, tell
360         them to multiply to kill fractions
361         override_method = {false, string.format([[multiplier par %d, puis ]],
362             math.abs(lcm(a / gcd(a, c), a / gcd(a, b)))) --> gets lcm of
363             denominators
364     }
365     else override_method = {false, ""} --> to kill the 'multiplier par a',
366         without changing method

```

```

360         end
361     else -- a x^2 = -b x - c
362         tex_string = string.format(
363             [[
364                 \begin{CAS}
365                 vars('x')
366                 a = %d
367                 b = %d
368                 c = %d
369                 f = topoly(a*x^2)
370                 g = topoly(-b*x-c)
371                 \end{CAS}
372                 \print{f} = \print{g}
373             ]],
374             a, b, c
375         )
376     end
377
378     return tex_string, override_method
379 end
380
381 -- PRINT LUALATEX-FORMATTED ANSWER --
382
383 local function cas_sol_set (polynomial_info)
384     -- gets luacas to calculate and simplify solutions
385     -- outputs string to tex.print in math environment
386
387     local a, b, c, num_sols, x1, x2, rat = table.unpack(polynomial_info)
388
389     local S -- initialise output string
390
391     -- cases:
392
393     if num_sols == math.huge then S = [[\mathbb{R}]] -- "0 = 0"
394
395     elseif num_sols == 0 then S = [[\emptyset]] -- no sols
396
397     elseif num_sols == 1 then
398         if a == 0 then S = string.format( -- one sol to linear eqn
399             [[
400                 \begin{CAS}
401                 x1 = - %d / %d
402                 \end{CAS}
403                 \left\{ \print{*x1} \right\}
404             ]],
405             c, b
406         ) --> x = - c / b
407         else S = string.format( -- one sol to quadratic eqn
408             [[
409                 \begin{CAS}
410                 x1 = - %d / (2*%d)
411                 \end{CAS}
412                 \left\{ \print{*x1} \right\}
413             ]],
414             b, a
415         ) --> x1 = b / (2*a)
416         end
417
418     elseif num_sols == 2 then S = string.format( -- two sols
419         [[
420             \begin{CAS}

```

```

421     vars('x')
422     f = %d*x^2 + %d*x + %d
423     S = roots(f)
424     \end{CAS}
425     \left\{ \print*{S[1]}; \print*{S[2]} \right\}
426     ],
427     a, b, c
428 ) --> roots of a*x^2 + b*x + c
429
430 else assert(false, "There is a deep error -- number of solutions not being
431     tracked correctly.")
432 end -- debugging
433
434 return S
435 end
436
437 local function num_sol_set (polynomial_info)
438     -- create numerical solution set as string
439     -- CURRENTLY UNDER DEBUGGING
440
441     local a, b, c, num_sols, x1, x2, rat = table.unpack(polynomial_info)
442
443     local sol_set_list = {} -- initialise solution set
444     local S = "" -- initialise output string
445
446     -- since appending nil to an empty table does nothing, append both solutions
447     table.insert(sol_set_list, x1) -- first small
448     table.insert(sol_set_list, x2) -- then big
449
450     -- preprocess formatting: turn entries into strings with \num
451     for idx, val in ipairs(sol_set_list) do --> cycle through elements
452         sol_set_list[idx] = string.format([\num{%s}], val)
453     end
454
455     -- preprocess formatting: combine into output string with set notation
456     --> if empty, replaces with empty set symbol; else just fills braces
457     if next(sol_set_list) == nil --> check table empty
458     then S = [{"emptyset"}]
459     else S = string.format([\left\{{s}\right\}], table.concat(sol_set_list,
460         "; "))
461     end
462
463     return S
464 end
465
466 local function answer_line (polynomial_info, --[[optional]] override_method)
467     -- print the answer in the form "par factorisation, $S = \{1; 2\}$" :
468
469     local a, b, c, num_sols, x1, x2, rat = table.unpack(polynomial_info)
470
471     assert(not override_method or type(override_method) == "table",
472         "override_method is not a table...")
473
474     local output_string = string.format(
475         [{"%s"}, \{(S = %s\)}],
476         pick_method(polynomial_info, override_method),
477         cas_sol_set(polynomial_info)
478     )
479
480     -- if solutions aren't integers, then also give numerical values
481     if is_one_of(num_sols, {1, 2})

```



```

479     and ( (x1 % 1 ~= 0) or (x2 ~= nil and x2 % 1 ~= 0) ) --> if there are
        non-integer solutions
480     then
481         output_string = output_string..string.format(
482             [[\(\approx %s \)],
483             num_sol_set(polynomial_info) -- nb: fn only actually uses x1, x2
484         )
485         --> formats and appends numerical solutions x1, x2 to output string
486     end
487
488     return output_string
489 end
490
491
492
493 -- FULL ROUTINE
494
495 local function print_questions_and_answers()
496     -- compute some coefficients
497     local polynomial_coeffs = generate_polynomial()
498
499     local equation_string, override_method =
        cas_equation(table.unpack(polynomial_coeffs,1,3))
500     --> cas provides equation and optional override for the method string
501     --> n.b. override_method is an optional output, so might well be nil
502
503     -- print the equation
504     tex.print([[ \begin{equation} ]].equation_string..[[ \end{equation} ]])
505     --> take printed equation string, enclose in $$.$$ and write to tex
506
507     -- print the solution
508     tex.print(
509         answer_line(polynomial_coeffs, override_method)
510         --> = "avec [méthode], S = {x1;x2}"
511     )
512
513 end
514
515 local function full_routine(n)
516     -- takes an integer and outputs question + answer text numbered with that
        integer
517
518     -- compute some coefficients
519     local polynomial_coeffs = generate_polynomial()
520
521     local unwrapped_equation, override_method =
        cas_equation(table.unpack(polynomial_coeffs,1,3))
522     --> cas provides equation and optional override for the method string
523
524     -- wrap equation string
525     local eqn_string = [[\([)]].unwrapped_equation..[[\)]]] --> enclose in \(...\)
526
527     -- create answer string
528     local ans_string = answer_line(polynomial_coeffs, override_method)
529     --> = "avec [méthode], S = {x1;x2}"
530
531     -- produce output tex with properly formatted answer key
532     local output_string = string.format([[
533         \begin{customquestion} %02d.~~\ %s \end{customquestion}
534         \begin{customanswer} %02d.~~ \ %s \end{customanswer}
535         ]], n, eqn_string, n, ans_string)

```

```

536     tex.print(output_string)
537 end
538
539
540
541 -- INTERFACE WITH LUALATEX ENGINE --
542
543 -- Export user-accessible functions (renamed using syntax `new = old`):
544 return {
545     polynomial = generate_polynomial, -- returns {a, b, c, num_sols, x1, x2, rat}
546     methodString = pick_method, -- provides recommended method
547     printEquation = cas_equation, -- question preprinted for LaTeX
548     answer = answer_line, -- answer preprinted for LaTeX
549     fullRoutine = full_routine, -- whole shebang
550     printQnA = print_questions_and_answers, -- alternative, single-equation
        formatting style
551 }

```

### A.3.2 Systèmes de deux équations

Code A.10: Code Lua pour générer les systèmes de deux équations avec réponses

```

1  -- All functions are defined locally, and only user-accessible functions are
   exported at the end.
2  -- The practices followed are given by [this stackexchange
   answer](https://tex.stackexchange.com/a/464049).
3
4  -- IMPORTANT NOTE: algorithm assumes a, b, c \in \mathbb{Z}
5  --> generalising the algorithm to non-integer a, b, c will be a bit of work,
6  -- because luacas isn't very happy with non-integer coefficients
7
8
9  -----
10 ----- (EDITABLE) PREAMBLE -----
11 -----
12
13 -- SET GLOBAL SEED
14 --> set manually if you want a reproducible sheet:
15 math.randomseed(os.time()) -- e.g. 2 or os.time()
16
17 -- Set probability to generate singular matrices (number between 0 and 1)
18 probability_singular = 0.2 -- here 20% of the generated singular equations
   systems will be kept (the real proportion is way less, since the probability
   of generating a singular matrix fully at random approaches 0)
19
20 local function whether_singular ()
21     -- randomly decides whether choose top have a unique solution first (return
       true)
22     -- or generate a singular system (return false)
23     if math.random(10)/10 <= probability_singular --> weightings, feel free to
       change
24         then return true
25         else return false
26     end
27 end
28
29 -- HELPER FUNCTIONS --
30
31 local function is_one_of (value, table)
32     -- checks whether value is one of the elements of table

```

```

33     for idx, val in ipairs(table) do
34         if value == val then return true end
35     end
36     return false
37 end
38
39 local function map (tbl, f)
40     -- applies function to table
41     local t = {}
42     for k,v in pairs(tbl) do
43         t[k] = f(v)
44     end
45     return t
46 end
47
48 local function range (n)
49     -- generates table from 1 to n
50     assert(n % 1 == 0 and n > 0, "argument of range should be a positive integer")
51     local list = {}
52     for i = 1, n, 1 do
53         list[i] = i
54     end
55     return list
56 end
57
58 local function approx (x, y)
59     -- checks approximate equality, within 10(-6)
60     if math.abs(x-y) < 1e-6 then return true else return false end
61 end
62
63 function flatten(v)
64     local res = {}
65     local function flatten(v)
66         if type(v) ~= "table" then
67             table.insert(res, v)
68             return
69         end
70         for _, v in ipairs(v) do
71             flatten(v)
72         end
73     end
74     flatten(v)
75     return res
76 end
77
78
79 -----
80 -----  MAIN  ALGORITHM  -----
81 -----
82
83 -- ALOGRITHM PART 0: EQUATION SOLVER --
84
85 -- Function to solve a system of linear equations by linear combination (Cramer's
86 -- rule)
87 -- If the system is of the form a1x + b1y = c1 , a2x + b2y = c2
88
89 function solveLinearEquations(system)
90     local a1, b1, c1 = system[1], system[2], system[3]
91     local a2, b2, c2 = system[4], system[5], system[6]
92     -- Calculate determinant
93     local determinant = a1 * b2 - b1 * a2

```

```

93
94 -- Check if the determinant is zero
95 if determinant == 0 then
96     print("The lines are either overlapping or parallel.")
97     return nil
98 else
99     -- Calculate x and y using Cramer's rule
100     local x = (b2 * c1 - b1 * c2) / determinant
101     local y = (a1 * c2 - a2 * c1) / determinant
102
103     -- local x_num, x_den = decimalToFraction(x)
104     -- local y_num, y_den = decimalToFraction(y)
105     return x, y
106 end
107 end
108
109 -- ALGORITHM PART 1: POLYNOMIAL GENERATOR --
110
111 -- warning: have a lot of checks of type a==0
112
113 -- Generate two factors linear polynomials:
114 -- generate 2x2 matrices to have 0, 1 or infinitely many solutions depending on
115 -- the random number given (if the matrix is singular, then it will be wiped
116 -- away 80% of the time)
117 local function generate_system(probability_singular)
118
119     local rat = whether_singular()
120
121     if rat == true then -- integer solutions
122         if math.random() <= 0.5 then
123             local coef_bdy = 12 -- boundary of coefficient range
124
125             -- generate first equation
126             local a1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
127             local b1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
128             local c1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
129
130             -- also generate proportionality coefficient:
131             local k = math.random(-7, 7)
132             -- now compute other coefficients:
133             local a2, b2, c2 = k*a1, k*b1, k*c1
134             system = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
135             return system
136         else
137             local coef_bdy = 12 -- boundary of coefficient range
138
139             -- generate first equation
140             local a1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
141             local b1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
142             local c1 = math.random(-coef_bdy, coef_bdy)
143
144             -- also generate proportionality coefficient:
145             local k = math.random(-7, 7)
146             -- now compute other coefficients:
147             local a2, b2, c2 = k*a1, k*b1, c1
148
149             system = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
150
151             return system
152         end
153     end
154 end

```

```

152
153     else -- Generate random values for the matrix
154         local a1 = math.random(-10, 10)
155         local b1 = math.random(-10, 10)
156         local a2 = math.random(-10, 10)
157         local b2 = math.random(-10, 10)
158
159         -- Choose arbitrary constants for the linear equations
160         local c1 = math.random(-15, 15)
161         local c2 = math.random(-15, 15)
162         local system = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
163         -- Check if the determinant is non-zero
164         local determinant = a1 * b2 - b1 * a1
165
166         if determinant==0 then
167             return generate_system(probability_singular)
168         else
169             -- Return the system
170             return system
171         end
172     end
173 end
174
175     -- Function to generate a system of linear equations using the coefficients
176     -- the generated matrix
177 local function generate_linear_system(matrix)
178     -- Choose arbitrary constants for the linear equations
179     local c1 = math.random(-15, 15)
180     local c2 = math.random(-15, 15)
181
182     -- Extract coefficients from the matrix
183     local a1, b1, a2, b2 = matrix[1][1], matrix[1][2], matrix[2][1], matrix[2][2]
184
185     -- Generate the system of linear equations
186     local system = {a1, b1, c1, a2, b2, c2}
187     return system
188 end
189
190     -- function that determines the number of solutions of the system
191     -- function that determines the number of solutions of the system
192 local function number_solutions_two(eqs)
193     -- Coefficients from equations
194     local a1, b1, c1 = eqs[1], eqs[2], eqs[3]
195     local a2, b2, c2 = eqs[4], eqs[5], eqs[6]
196     local det = a1 * b2 - a2 * b1
197
198     if det ~= 0 then
199         -- unique solution
200         return 1
201     else
202         -- verify if the lines coincide or if they are parallel
203         local ratio_a = a1 / a2
204         local ratio_b = b1 / b2
205         local ratio_c = c1 / c2
206
207         if (a1 == 0 and a2 == 0) and (b1 == 0 and b2 == 0) then
208             if c1 == c2 then
209                 return math.huge -- zero system
210             else
211                 return 0 -- Impossible if c1 != c2
212             end
213         end
214     end
215 end

```

```

212         elseif (a1 == 0 and a2 == 0) or (b1 == 0 and b2 == 0) then
213             -- one variable is totally missing
214             if ratio_c == (b1 == 0 and b2 == 0 and ratio_a or ratio_b) then
215                 return math.huge
216             else
217                 return 0
218             end
219         else
220             if ratio_a == ratio_b and ratio_b == ratio_c then
221                 -- lines coincide
222                 return math.huge
223             else
224                 -- parallel lines
225                 return 0
226             end
227         end
228     end
229 end
230
231 local function generate_exercise(probability_singular)
232     local system = generate_system(probability_singular)
233     local num_sols = number_solutions_two(system)
234     local x, y = solveLinearEquations(system)
235
236     return system, num_sols, x, y
237 end
238
239 -- ALGORITHM PART 2: OPTIMAL METHOD DETECTOR --
240
241 local function pick_method_case(system, num_sols)
242     -- system is the matrix of coefficients of the system
243     -- num_sols is the number of solutions (number type, values in {0, 1,
244     -- math.huge})
245     a, b, d, e = system[1], system[2], system[4], system[5]
246     assert( is_one_of(num_sols, {0, 1, math.huge}),
247         "Woah, something went wrong -- I didn't receive a sensible number of
248         solutions.")
249
250     local method = "" -- initialise string containing the answer method
251
252     -- run through different preset methods when problem has solution:
253     if num_sols == math.huge then method = [[les deux équations sont
254     dépendantes]] --> S = line case, i.e. (a&d==0 and b&e==0 and c&f==0) or
255     (d&a==0 and e&b==0 and f&c==0)
256
257     elseif num_sols == 1 then
258         if a==0 or b==1 then method = [[isoler \(\y\) dans la
259         1\textsuperscript{re} équation, substituer ensuite]]
260         elseif b==0 or a==1 then method = [[isoler \(\x\) dans la
261         1\textsuperscript{re} équation, substituer ensuite]]
262         elseif d==0 or e==1 then method = [[isoler \(\y\) dans la
263         2\textsuperscript{e} équation, substituer ensuite]]
264         elseif e==0 or d==1 then method = [[isoler \(\x\) dans la
265         2\textsuperscript{e} équation, substituer ensuite]]
266         elseif a==d or b==e then method = [[soustraction directe des deux
267         équations]]
268         elseif a==d or b==e then method = [[addition directe des deux
269         équations]]
270         elseif a%b==0 then method = string.format([[diviser par \(%d\) puis
271         isoler \(\y\) dans la 1\textsuperscript{re} équation, substituer
272         ensuite]], b)

```

```

261         elseif b%a==0 then method = string.format([[diviser par \(%d\) puis
                isoler \(\x\) dans la 1\textsuperscript{re} équation, substituer
                ensuite]], a)
262         elseif d%e==0 then method = string.format([[diviser par \(%d\) puis
                isoler \(\y\) dans la 2\textsuperscript{e} équation, substituer
                ensuite]], e)
263         elseif e%d==0 then method = string.format([[diviser par \(%d\) puis
                isoler \(\x\) dans la 2\textsuperscript{e} équation, substituer
                ensuite]], d)
264         else method = [[par combinaison linéaire]]
265         end
266
267         -- give instead methods when problem has no solution:
268         else method = [[sans solutions (combinaison linéaire donne $1=0$)]]
269         end
270         return method
271     end
272
273     -----
274     ----- PREPARE OUTPUTS -----
275     -----
276
277     -- PRINT LUALATEX-FORMATTED EQUATION --
278
279     local function cas_equation (system)
280         -- prints equation using luacas
281
282         tex_string = string.format(
283             [[
284                 \begin{CAS}
285                     vars('x', 'y')
286                     f = Equation(%d * x + %d * y, %d)
287                     g = Equation(%d * x + %d * y, %d)
288                 \end{CAS}
289                 \left\{\begin{array}{c} \print*{f} \\ \print*{g}\end{array}\right.
290             ]], -- work out in luacas, then print
291             table.unpack(system)
292         )
293         return tex_string
294     end
295
296     -- PRINT LUALATEX-FORMATTED ANSWER --
297
298     local function cas_sol_set (system, num_sols, x, y)
299         -- outputs string to tex.print in math environment
300
301         local S -- initialise output string
302
303         -- cases:
304
305         if num_sols == math.huge then
306             S = string.format(
307                 [[
308                     \begin{CAS}
309                     vars('x', 'y')
310                     f= Equation(%d * x + %d * y, %d):autosimplify()
311                     eqx = f:solvefor(y)
312                     \end{CAS}
313                     \left\{
314                         \left(x, \print{eqx.rhs}\right) \;; \middle| \;; x \in \mathbb{R}
315                     \right\}

```

```

316     ]], -- droites confondues
317     table.unpack(system)
318 )
319
320 elseif num_sols == 0 then S = [[\emptyset]] -- no sols
321
322 -- A MODIFIER ABSOLUMENT POUR AVOIR LES FRACTIONS EXACTES DES SOLUTIONS
323 elseif num_sols == 1 then
324     S = string.format(
325         [[
326             \begin{CAS}
327             determinant = %d * %d - %d * %d
328             x = (%d * %d - %d * %d) / determinant
329             y = (%d * %d - %d * %d) / determinant
330             \end{CAS}
331             \left\{\left(\print*{x}, \print*{y} \right)\right\}
332         ]], -- droites sécantes
333         system[1], system[5], system[4], system[2], system[5], system[3],
334         system[2], system[6], system[1], system[6], system[4], system[3]
335     )
336 else assert(false, "There is a deep error -- number of solutions not being
337     tracked correctly.")
338 end
339 return S
340 end
341
342 local function num_sol_set (system, num_sols, x, y)
343     -- create numerical solution set as string
344     -- CURRENTLY UNDER DEBUGGING
345
346     local sol_set_list = {} -- initialise solution set
347     local S = "" -- initialise output string
348
349     -- since appending nil to an empty table does nothing, append both solutions
350     table.insert(sol_set_list, x) -- first small
351     table.insert(sol_set_list, y) -- then big
352
353     -- preprocess formatting: turn entries into strings with \num
354     for idx, val in ipairs(sol_set_list) do --> cycle through elements
355         sol_set_list[idx] = string.format([\num{%s}], val)
356     end
357
358     -- preprocess formatting: combine into output string with set notation
359     --> if empty, replaces with empty set symbol; else just fills braces
360     if next(sol_set_list) == nil --> check table empty
361     then S = [[\emptyset]]
362     else S = string.format([\left\{%s\right\}], table.concat(sol_set_list,
363         "; "))
364     end
365
366     return S
367 end
368
369 local function answer_line (system, num_sols, x, y)
370     -- print the answer in the correct form:
371
372     local output_string = string.format(
373         [{%s}, \ (S = %s\)],
374         pick_method_case(system, num_sols),
375         cas_sol_set(system, num_sols, x, y)
376     )
377 end

```



```

374
375     return output_string
376 end
377
378
379 -- FULL ROUTINE
380
381 local function print_questions_and_answers()
382     -- compute some coefficients and the associated equations
383     local coeffs, num_sols, x, y = generate_exercise(probability_singular)
384
385     -- print the equation
386     tex.print(
387         [[\begin{equation}]]..
388         cas_equation(coeffs) --> cas provides equation
389         .. [[\end{equation}]] --> then, enclose in $$. $$
390     ) --> write to tex
391
392     -- print the solution
393     tex.print(
394         answer_line(coeffs, num_sols, x, y) --> = "avec [méthode], S = ..."
395     )
396
397 end
398
399 local function full_routine(n)
400     -- takes an integer and outputs question + answer text numbered with that
401     -- integer
402     -- compute coefficients and the associated equations
403     local coeffs, num_sols, x, y = generate_exercise(probability_singular)
404
405     -- create equation string
406     local eqn_string = [[\ ( ) ] ] ..
407     cas_equation(coeffs) --> cas provides equation
408     .. [[\ ) ] ] --> then, enclose in \ ( ... \ )
409
410     -- create answer string
411     local ans_string = answer_line(coeffs, num_sols, x, y) --> = "avec [méthode],
412     S = {x1;x2}"
413
414     -- produce output tex with properly formatted answer key
415     local output_string = string.format([[
416         \begin{customquestion} %02d.~~\ %s \end{customquestion}
417         \begin{customanswer}   %02d.~~ \ %s \end{customanswer}
418         ]], n, eqn_string, n, ans_string)
419
420     tex.print(output_string)
421 end
422
423 -- INTERFACE WITH LUALATEX ENGINE --
424
425 -- Export user-accessible functions (renamed using syntax `new = old`):
426 return {
427     polynomial = generate_exercise, -- returns {coefficients, num_sols, x, y}
428     methodString = pick_method_case, -- provides recommended method
429     printEquation = cas_equation, -- question preprinted for LaTeX
430     answer = answer_line, -- answer preprinted for LaTeX
431     fullRoutine = full_routine, -- whole shebang
432     printQnA = print_questions_and_answers, -- alternative, single-equation
433     formatting style
434 }

```



## Questionnaire du GCM aux enseignant·e·s de mathématiques fribourgeois·e·s

Groupe Cantonal de Mathématiques

2016

*Kantonale Arbeitsgruppe Mathematik*

### Analyse der zu erwartenden Kompetenzen

#### Teil 1 : Algebra im ersten Jahr

Bien que les collèges du canton de Fribourg disposent d'un plan d'étude commun pour l'enseignement des mathématiques, certaines différences entre écoles et entre sections linguistiques sont fréquemment évoquées. Monsieur Piccand et la CORECOF nous ont demandé de faire un état des lieux aussi précis que possible, en commençant par une analyse des compétences visées en fin de première année.

Nous aimerions que chaque enseignant de mathématiques nous renseigne sur ses attentes. Aussi, nous vous demandons de compléter ce questionnaire jusqu'au **vendredi 15 avril** en prenant connaissance de la liste d'exercices ci-dessous et cochant des cases selon la convention suivante :

- $\forall$   
☒  $\equiv$  contenu devant être enseigné avec un objectif d'acquisition par tous les élèves ;
- $\exists$   
☒  $\equiv$  contenu devant être enseigné avec un objectif d'acquisition par un maximum d'élèves ;
- $\emptyset$   
☒  $\equiv$  contenu ne devant pas être enseigné ou devant être traité sans objectif d'acquisition par les élèves.

Nous sommes persuadés que la liberté que le plan d'étude actuel nous laisse est bénéfique à l'enseignement des mathématiques et nous souhaitons la préserver. L'objectif de ce questionnaire est d'identifier nos différences afin de mieux pouvoir les gérer en cas de changement de section linguistique voire d'école.

Bien que nous ayons essayé de composer cette liste du mieux possible, nous vous invitons à nous communiquer tous les manquements éventuels, tant au niveau du contenu que de la forme. Les personnes de contact sont Fabien Augsburgers et Ole Raemy pour le collège de Gambach, Gisela Bissig et Dominique Murith pour le collège Sainte-Croix, Marius Fux et Yves Roisin pour le collège Saint-Michel et Jérôme Charrière et Laurent Karth pour le collège du Sud.

En vous souhaitant une agréable lecture et en vous remerciant d'avance de votre précieuse collaboration, nous vous adressons nos salutations les meilleures.

Gisela Bissig et Yves Roisin

## Ensembles, nombres et opérations

**1**

Représenter les ensembles

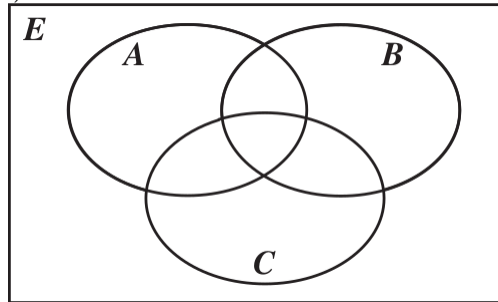
$$A = \{\alpha; \beta; \gamma; \mu\} \quad B = \{\beta; \delta; \lambda; \mu; \psi\} \quad C = \{\alpha; \beta; \gamma; \delta; \mu; \psi; \varphi; \omega\} \quad D = \{\sigma; \epsilon\}$$

à l'aide d'un diagramme de Venn et répondre aux questions suivantes :

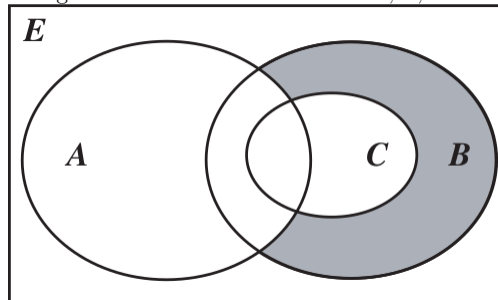
- (1) Compléter avec les symboles  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$ .
- (a)  $\alpha \quad A$
- (b)  $\alpha \quad B$
- (c)  $\{\delta\} \quad A$
- (d)  $\{\delta\} \quad B$
- (e)  $\{\alpha; \sigma\} \quad C$
- (f)  $\emptyset \quad D$
- (2) Donner les ensembles suivants par énumération.
- (a)  $A \cup B$
- (b)  $A \cap B$
- (c)  $C \cap D$
- (d)  $C \setminus B$

**2**

- (1) Dans le diagramme de Venn ci-dessous, colorier le sous-ensemble correspondant à l'expression  $[A \setminus (B \cup C)] \cup (B \cap C)$ .



- (2) Exprimer le sous-ensemble grisé ci-dessous en fonction de  $A, B, C$  et  $E$ .



**3**

Le dépouillement d'un sondage effectué sur 180 personnes a montré que ...

- ... 75 d'entre elles regardent des matchs de tennis à la télévision ;
- ... 60 font du tennis ;
- ... 40 regardent des matchs de tennis à la télévision et pratiquent elles-mêmes ce sport.

Considérons les ensembles

$$E = \{x \mid x \text{ est une personne interrogée lors du sondage}\}$$

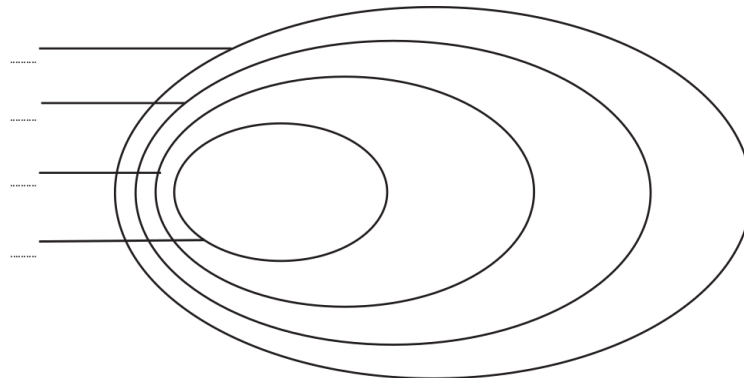
$$A = \{x \in E \mid x \text{ regarde des matchs de tennis à la TV}\}$$

$$B = \{x \in E \mid x \text{ pratique le tennis}\}$$

Représenter dans un diagramme de Venn les ensembles  $E$ ,  $A$  et  $B$  de telle sorte qu'aucun sous-ensemble ne soit vide, puis indiquer dans chaque sous-ensemble du diagramme le nombre d'éléments qu'il contient.

**4**

(1) Désigner les ensembles de la figure ci-dessous par leur symbole usuel  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ .



(2) Placer les nombres suivants dans le bon sous-ensemble de la figure ci-dessus.



(a) 0



(b) 4



(c) -2

(d)  $\pi$ 

(e) 0.75

(f)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (g)  $4.0\bar{1}$ (h)  $0.\bar{9}$ (i)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

**5**

Compléter les affirmations suivantes avec le symbole d'appartenance  $\in$  ou le symbole de non-appartenance  $\notin$  sans utiliser la calculatrice.

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $\frac{62}{2} \quad \mathbb{Q}_+$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $8 \quad \mathbb{Z}_-$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $0 \quad \mathbb{R}^*$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $-\pi \quad \mathbb{R}_-$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $0.42 \quad ] - 0.42; 0.42]$   
☐ ☐ ☐ ☐ (6)  $\frac{3}{7} \quad ] - 0.42; 0.42]$   
☐ ☐ ☐ ☐ (7)  $-\frac{3}{7} \quad ] - 0.42; 0.42]$   
☐ ☐ ☐ ☐ (8)  $-0.41 \quad ] - 0.42; 0.42]$   
☐ ☐ ☐ ☐ (9)  $|-4| \quad \mathbb{N}$

**6**

On considère les ensembles suivants :

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n^2 \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^* \text{ et } -2 \leq n < 4\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$
- $C = ] - \infty; 3[$

Si c'est possible, écrire les ensembles suivants sous forme d'intervalle. Si ce n'est pas possible, les donner par énumération.

Seules les réponses sont demandées.

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $A$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $B$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $B \cup C$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $C \cap B$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $B \setminus C$

**7**

Sans utiliser la calculatrice, effectuer et simplifier au maximum les calculs suivants.

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $\frac{1}{2} + 0.\bar{3}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{15}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $\frac{1}{24} + \frac{1}{36}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $\frac{5}{120} + \frac{1}{36}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $\frac{1}{252} - \frac{1}{360}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6) \quad 0.17 - \frac{3}{-25}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7) \quad \frac{8}{36} + 0.\overline{48}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (8) \quad \frac{35}{6} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (9) \quad \frac{4}{5} \div \frac{-7}{8}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (10) \quad \frac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{21}}$$

**8**

Sans utiliser la calculatrice, effectuer et simplifier au maximum les calculs suivants.

*Donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad 36^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad 4^{-2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad (0.00032)^{-\frac{1}{5}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \frac{(3^2 \cdot 2^4)^2}{(2^2)^3}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5) \quad \left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6) \quad \frac{1}{(81 \cdot 27^{-2})^2}$$

**9**

Sans utiliser la calculatrice, écrire les nombres suivants en notation scientifique.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad 0.000274$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad \frac{(3 \cdot 10^5) \cdot (2000)^2}{6 \cdot 10^{-5}}$$

**10**

In ein zylinderförmiges Glase werden 0.2ml der Flüssigkeit *A*, 2cm<sup>3</sup> der Flüssigkeit *B* und 4μl der Flüssigkeit *C* gegossen. Der Taschenrechner ist erlaubt.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \text{Wie viel ml Flüssigkeit hat es im Glas?}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad \text{Wie viel } \mu\text{l Flüssigkeit hat es im Glas?}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \text{Wie viel cm}^3 \text{ Flüssigkeit hat es im Glas?}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \text{Wie hoch steht die Flüssigkeit im Glas, wenn es einen Durchmesser von 2 cm hat?}$$

**11**

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \text{Die absolute Masse eines Protons beträgt } 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg, die eines Electrons } 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg. Wie viel mal ist das Proton schwerer als das Elektron? Der Taschenrechner ist erlaubt.}$$

**12**

Calculer et simplifier les expressions suivantes sans utiliser la calculatrice.

*Des réponses exactes sont exigées.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad -\sqrt{\frac{28}{5}} \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \sqrt[10]{25}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5) \quad \frac{8 - \sqrt{88}}{12}$$

**13**

Sans utiliser la calculatrice, rendre le dénominateur des expressions suivantes rationnel et simplifier le résultat si possible.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \frac{4}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

**14**

Sans utiliser la calculatrice, effectuer et simplifier les expressions suivantes au maximum.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad -4^2 + 8^{\frac{4}{3}} \div 4 \cdot 2^2 + 27^{-\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad 0.375 + \left( \frac{30}{345 \cdot 2^{-2}} \right)^{-1}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \frac{25^{-6} \cdot 5^{11}}{(-5^2 \cdot 7)^{-1}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad 216^3 \cdot (16 \cdot 81)^{-2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5) \quad \sqrt{24} - \sqrt{15} \cdot \sqrt{10} - \frac{18}{-\sqrt{6}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6) \quad \frac{1}{\sqrt{15} - 2} - \frac{\sqrt{60}}{22} + 1.\overline{81}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt[3]{\phantom{x}} & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (7) \quad \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{60}}$$



**15**

Sans utiliser la calculatrice, déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Il est possible que une/plusieurs/aucune/toutes les affirmations soient vraies. Aucune justification n'est exigée.

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1) L'inverse du carré de l'opposé de 4 vaut  $\frac{1}{16}$ .  
☐ ☐ ☐ ☐ (2) L'opposé de  $-2$  appartient à  $\mathbb{Z}_+ \cap ]-3; 5[$ .  
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $\sqrt{16} = \pm 4$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $-\frac{5}{51} > -\frac{5}{53}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $-(-4^{-2}) > 0$   
☐ ☐ ☐ ☐ (6)  $-2.5 \in ]-3; 1] \setminus \{-2; -1\}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (7) Pour tout nombre réel  $x$ , on a  $\sqrt{x^2} = x$ .

### Calcul littéral

**16**

Supprimer les parenthèses inutiles (sans changer les opérations). *Entfernen Sie die überflüssigen Klammern (ohne die Struktur des Terms zu verändern).*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $(4 \cdot x) + 5 \cdot (2 + x)$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $((x + 2) \cdot (x - 1)) + (3 \cdot x) - (x + 2)$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $((x^2) \div (1 - x) + (3 - x)) - (2 - (-x))$

**17**

Développer puis simplifier les expressions suivantes le plus possible. *Rechnen Sie die folgenden Terme aus, und vereinfachen Sie dann so weit wie möglich.*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $-[4 - 3(2 - c)] - (3c - 1)$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $((x^2 + 1) - 3x(x + 2))(x - (x^2 + 1))$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $a^3 + ax^2 - (x^3 - (a + x)(x^2 + a^2))$

**18**

Ecrire les expressions suivantes à l'aide de radicaux et/ou de puissances entières positives. *Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Wurzeln und/oder positiven Exponenten.*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $x^{-3}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $x^{\frac{1}{3}}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $x^{\frac{5}{6}}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $x^{-\frac{1}{4}}$

**19**

Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels mais sans radicaux. *Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von rationalen Exponenten (aber ohne Wurzel).*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $\sqrt[8]{x}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $\sqrt[3]{x^5}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

**20**

Effectuer puis simplifier les expressions suivantes le plus possible. *Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad (3y^3)^4 \cdot (4y^2)^{-3}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad \sqrt{\sqrt[3]{x^6}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad \left( \frac{c^{-5}}{a^{-3}b^9} \right)^{-3} \cdot \left( \frac{a^{-2}c^3}{b^{-5}} \right)^{-5}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5) \quad \frac{9\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{(3x \cdot x^3)^3}$$

**21**

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$  Rendre le dénominateur rationnel et simplifier. *Ändern Sie die folgenden Terme so, dass im Nenner keine Wurzel ausdrücke vorhanden sind. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.*

$$\frac{8a - 4}{\sqrt{4a + 7} + 3}$$

**22**

Développer puis simplifier les expressions suivantes le plus possible. *Rechnen Sie die folgenden Terme aus, und vereinfachen Sie dann so weit wie möglich.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad (3a + 5bc^2)^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad (2x - 3yz^2)^3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad (x - 1)^2 - (2 - x - 2)^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad (16 - 4y + y^2)(4 + y)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5) \quad (2x - 1)(1 + 2x) - (4x - 1)^3$$

**23**

Développer les expressions suivantes à l'aide du triangle de Pascal. *Rechnen Sie mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks die folgenden Terme aus.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad (a + b)^5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad (2 - 3a)^4$$

**24**

Factoriser si possible les expressions suivantes le plus possible. *Faktorisieren Sie falls möglich die folgenden Terme so weit wie möglich.*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad 15a^2x^3 - 21ax^5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2) \quad (y - 3)^2 - (3 - y)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3) \quad 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \checkmark & \exists & \emptyset \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4) \quad 1 + x^6 - 2x^3$$

- ☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $ab^2 + 12abc + 36ac^2$   
☐ ☐ ☐ ☐ (6)  $8v^3 + 48v^2w + 96vw^2 + 64w^3$   
☐ ☐ ☐ ☐ (7)  $8a^3 + 27$   
☐ ☐ ☐ ☐ (8)  $a^2 - 4a - 5$   
☐ ☐ ☐ ☐ (9)  $x^2 + 3x + 4$   
☐ ☐ ☐ ☐ (10)  $6x^2 - x - 35$   
☐ ☐ ☐ ☐ (11)  $r^3 + 6r^2 + 9r$   
☐ ☐ ☐ ☐ (12)  $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 - (x - 2y)^2$

**25**

Simplifier les fractions littérales suivantes le plus possible. *Vereinfachen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich.*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $\frac{x^2 - 4x + 4}{16 - 8x}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $\frac{y^2 - 9}{y^3 - 27}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $\frac{6x^2 - 7x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $\frac{(x - 2)^2 + 3(2 - x)}{x^3 - 8}$

**26**

Effectuer puis simplifier les fractions littérales suivantes le plus possible. *Rechnen Sie die folgenden Brüche aus, und vereinfachen Sie dann so weit wie möglich.*

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $\frac{2}{3x^2} + \frac{y}{xy} - \frac{2}{3y}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $\frac{3a - 5}{a^2 - 1} - \frac{4}{a + 1}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $\frac{p^4 - q^4}{q^2 + p^2} \cdot \frac{(p - q)^2}{(p - q)^3}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \div \frac{x + 1}{3x + 6}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $\frac{4a}{x^2 - 16} + \frac{a}{x^2 - 4x}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (6)  $\frac{1}{5a - 5} - \frac{6a - 4}{5a^2 - 5} + \frac{1}{a + 1}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (7)  $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$   
☐ ☐ ☐ ☐ (8)  $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{6x^2 + 3}{x^2}$

☐ ☐ ☐ ☐ (9)  $2x\sqrt{x-1} - \frac{x^2+3}{\sqrt{x-1}}$

☐ ☐ ☐ ☐ **27** Effectuer la division euclidienne et donner le reste. *Führen Sie die Polynomdivision mit Rest aus.*

$$\frac{6x^3 - 1 + 5x^2}{2x - 1}$$

**28**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig/falsch?

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1) Beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen müssen die Nenner zuerst gleichnamig gemacht werden.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (2) Bruchterme werden addiert, indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner addiert.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (3) Beim Dividieren von Bruchtermen wird der Kehrwert des Zählerbruchs mit dem Nennerbruch multipliziert.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (4) Die Vereinfachung bei der Multiplikation und Division von Bruchtermen findet häufig durch Kürzen statt, deshalb sollte man Summen in Produkte mit möglichst viele Faktoren verwandeln.

**29**

Déterminer si les énoncés suivants sont *vrai* ou *faux* tout en donnant une justification.

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1) Une puissance de base positive et d'exposant négatif est négative.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (2) Diviser deux puissances de même base revient à soustraire les exposants.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (3) L'expression  $\sqrt{x^2 + y^2}$  se simplifie et vaut  $x + y$ .
- ☐ ☐ ☐ ☐ (4) Un trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  se factorise toujours en un produit de deux parenthèses dépendant de  $x$ .
- ☐ ☐ ☐ ☐ (5) La mise au même dénominateur lors de l'addition de deux fractions consiste à trouver le plus petit multiple commun des dénominateurs des deux fractions à additionner.

**30**

Gegeben sind die folgenden Terme.

①  $\frac{x}{x+y}$

④  $\frac{x^2}{x^2 - 4y^2}$

⑦  $\frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - 9y^2}$

②  $\frac{x^2 - y^2}{x+y}$

⑤  $\frac{x+2y}{x^2 + xy - 6y^2}$

⑧  $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x}$

③  $\frac{x^2 - 4y^2}{x+2y}$

⑥  $\frac{x^2}{x+2y}$

⑨  $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5xy + 6y^2}$

- ☐ ☐ ☐ ☐ (1) Wählen Sie zwei Terme aus, so dass die Addition der Terme möglichst einfach ist. Begründen Sie Ihre Wahl.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (2) Wählen Sie zwei Terme aus, so dass die Addition der Terme möglichst aufwändig ist. Begründen Sie Ihre Wahl.
- ☐ ☐ ☐ ☐ (3) Wählen Sie zwei Terme aus, so dass das Endresultat der Multiplikation möglichst einfach ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

## Équations et systèmes d'équations

**31**

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an.

☐ ☐ ☐ ☐

(1)  $2x - 3 = x - 1$

☐ ☐ ☐ ☐

(2)  $2x - 3 = 2(x - 1) - 1$

☐ ☐ ☐ ☐

(3)  $2x - 3 = 2(x - 1) - 2$

**32**

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an.

☐ ☐ ☐ ☐

(1)  $3x^2 - x - 2 = 0$

☐ ☐ ☐ ☐

(2)  $2x^2 - x + 4 = 0$

☐ ☐ ☐ ☐

(3)  $5x^2 + 20 = 20x$

**33**

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an.

☐ ☐ ☐ ☐

(1)  $2x^3 + 54 = 0$

☐ ☐ ☐ ☐

(2)  $x^6 + 64 = 0$

☐ ☐ ☐ ☐

(3)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

☐ ☐ ☐ ☐

(4)  $48x^8 + 29x^4 = 2$

☐ ☐ ☐ ☐

(5)  $7x^3 + 8 = x^6$

☐ ☐ ☐ ☐

(6)  $x^3 + x^2 = 4x + 4$

☐ ☐ ☐ ☐

(7)  $x^3 - 6x^2 + 12x = 8$

**34**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.*Le domaine de définition et l'ensemble des solutions de l'équation sont exigés.*
☐ ☐ ☐ ☐

(1)  $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x-4}{6-2x}$

☐ ☐ ☐ ☐

(2)  $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} = \frac{x+1}{x^2-2x}$

☐ ☐ ☐ ☐

(3)  $\frac{2}{x-7} + \frac{5}{x^2-5x} = \frac{x-3}{(x-5)(x-7)}$

☐ ☐ ☐ ☐

(4)  $4 - \frac{8}{x^2+1} = x^2 - 1$

☐ ☐ ☐ ☐

(5)  $\frac{5x^4 - 18x^3 - 8x^2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x^3}{x-1}$

**35**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.*Le domaine de définition et l'ensemble des solutions de l'équation sont exigés.*
☐ ☐ ☐ ☐

(1)  $\sqrt{6-3x} + x = 2$

☐ ☐ ☐ ☐

(2)  $\sqrt{6-3x} + 2 = x$

☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1$

**36**

☐ ☐ ☐ ☐ Bestimmen Sie die Lösungsmenge bezüglich  $x$  in Abhängigkeit des Parameters  $k$  der folgenden Gleichung :  $kx = 2x$ .

**37**

☐ ☐ ☐ ☐ Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique  $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$  en fonction de la valeur de  $m \in \mathbb{R}$ .

**38**

Pour chacune des formules suivantes, isoler la lettre indiquée :

☐ ☐ ☐ ☐ (1)  $t$  dans  $v = at + v_0$

☐ ☐ ☐ ☐ (2)  $z$  dans  $g = G \frac{m}{(R+z)^2}$  ( $R+z > 0$ )

☐ ☐ ☐ ☐ (3)  $m$  dans  $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

☐ ☐ ☐ ☐ (4)  $V_1$  dans  $\frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \gamma V_1$

☐ ☐ ☐ ☐ (5)  $p$  dans  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$

**39**

Welche der folgenden Aussagen sind falsch ?

☐ ☐ ☐ ☐ (1) Addiert man zur rechten Seite einer Gleichung den Term  $x$ , dann ist dies eine Äquivalenzumformung.

☐ ☐ ☐ ☐ (2) Löst man nur auf der linken Seite einer Gleichung die Klammern auf, dann verändert sich die Lösungsmenge der Gleichung.

☐ ☐ ☐ ☐ (3) Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

☐ ☐ ☐ ☐ (4) Zwei Gleichungen heissen äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

**40**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

☐ ☐ ☐ ☐ (1) Eine reinquadratische Gleichung hat die Form  $ax^2 + bx = 0$ .

☐ ☐ ☐ ☐ (2) Eine quadratische Gleichung heisst auch Gleichung zweiten Grades.

☐ ☐ ☐ ☐ (3) Eine quadratische Gleichung hat maximal zwei Lösungen.

☐ ☐ ☐ ☐ (4) Bei einer gemischtquadratischen Gleichungen ohne Konstante ist eine Lösung immer gleich Null.

**41**

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme. Geben Sie die Lösungsmenge an.

☐ ☐ ☐ ☐ (1) 
$$\begin{cases} 3x - 5y = 27 \\ -x + 2y = -10 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (2) 
$$\begin{cases} \frac{y}{x+1} = 3 \\ \frac{y+1}{x} = 5 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (3) 
$$\begin{cases} xy = 4 \\ 81y^2 - 72 = -x^2 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (4) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x - 8y + 5z = 9 \end{cases}$$

**42**

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x - 2y = 17 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

mit Hilfe der ...

☐ ☐ ☐ ☐ (1) ... Einsetzungsmethode.

☐ ☐ ☐ ☐ (2) ... Additionsmethode.

**43**

Bestimmen Sie, ob das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat. Geben Sie für den Fall, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat, die Lösungsmenge an.

☐ ☐ ☐ ☐ (1) 
$$\begin{cases} 3x - 5y = 27 \\ -15x + 25y = -135 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (2) 
$$\begin{cases} 3x - 5y = 27 \\ -15x + 25y = 120 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (3) 
$$\begin{cases} 3x - 5y = 27 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (4) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x - 8y + 5z = 9 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (5) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 7 \\ 7x + y + 4z = 22 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ ☐ (6) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - 7y + 2z = -5 \end{cases}$$

**44**

☐ ☐ ☐ ☐ Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten auf, welches unendlich viele Lösungen hat.

**45**

☐ ☐ ☐ ☐ Stellen Sie ein Gleichungssystem mit den Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$  auf, das die Lösung  $x = 2$ ,  $y = -1$  und  $z = 4$  hat. Wie viele solcher Gleichungssysteme gibt es?

## Problèmes

- 46**  
☐ ☐ ☐ Die Fruchtsäfte  $A$  und  $B$  sollen gemischt werden.  $A$  enthält einen Fruchtanteil von 25% und  $B$  einen von 60%. Durch Mischung dieser Fruchtsäfte sollen 20 Liter Fruchtsaft entstehen, dessen Fruchtanteil 50% beträgt. Wie viel Liter muss man von  $A$  und  $B$  nehmen?
- 47**  
☐ ☐ ☐ Une dame commence son jogging à 15 heures et court plein nord à l'allure de 16 km/h. Plus tard, elle change de direction et court plein sud à l'allure de 14 km/h. Calculer la distance totale parcourue par cette dame sachant qu'elle revient à son point de départ à 15h45.
- 48**  
☐ ☐ ☐ Ein gleichschenkliges Trapez mit der Höhe  $h = 4$  cm hat ein Umfang von  $U = 28$  cm und eine Fläche von  $A = 36$  cm<sup>2</sup>. Berechnen Sie die untere und obere Seite des Trapezes.
- 49**  
☐ ☐ ☐ Bei einem Rechteck ergeben die Breite  $b$  und die Diagonale  $d$  zusammen 41 cm. Die Länge  $l$  des Rechtecks beträgt 27.6 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  des Rechtecks.
- 50**  
☐ ☐ ☐ Une somme de 24000 francs doit être distribuée à parts égales entre un certain nombre de personnes. Au moment du partage, cinq personnes se retirent, ce qui augmente la part de chacun des autres de 240 francs. Combien de personnes devaient participer initialement au partage?
- 51**  
☐ ☐ ☐ Une place de sport rectangulaire de 448 m<sup>2</sup> est bordée d'un champ sur trois côtés et d'une rivière sur le quatrième. Pour entourer la place de sport par un grillage, on a utilisé un grillage d'une hauteur de 2.5 mètres à 10 francs le mètre courant<sup>1</sup> pour les trois côtés bordant le champ et un grillage d'une hauteur de 4 mètres à 20 francs le mètre courant pour le côté bordant la rivière. En sachant que le grillage a coûté au total 1160 francs, quelle est la longueur du côté de la place bordant la rivière?  
*La solution contiendra une définition claire et précise de chaque inconnue utilisée ainsi que le domaine de définition relatif à chaque inconnue. Les réponses données doivent être exactes et formulées à l'aide d'une phrase.*
- 52**  
☐ ☐ ☐ Une entreprise a fabriqué 89 jouets en bois, dont certains sont des camions, d'autres des pantins et le reste des puzzles. Chaque camion a nécessité 2 kg de bois et trois heures de travail, chaque pantin 500 g de bois et quatre heures de travail et chaque puzzle 800 g de bois et trois heures et trente minutes de travail. Sachant que l'ensemble de la production des jouets a duré 313 heures et que 91 kg de bois ont été utilisés, déterminer le nombre de jouets de chaque type fabriqués.

---

1. Le mètre courant est la mesure de quelque chose par mètres, en longueur, sans avoir égard à la hauteur.