DEVRE TEORİSİ II

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

- Laplace Dönüşümü Tanımı
- Basamak Fonksiyonu
- Dürtü Fonksiyonu
- Fonksiyonel Dönüşümler
- İşlemsel Dönüşümler
- Laplace Dönüşümünün Devrelere Uygulanması
- Ters Laplace Dönüşümü
- F(s)'nin kutup ve Sıfırları
- Başlangıç ve Son değer Teoremleri

Laplace Dönüşümü Tanımı

- Elektriksel işaretler: Analog, sayısal
  - Ses, görüntü, ışık, radyasyon, ultrason,
  - Dönüştürücüler
  - Fourier Dönüşümü
  - Sinüsoidal işaretler
- Kaynaklar
  - DC kaynak + anahtar (Birim basamak), Süreksizlik noktası
  - Süreksizlik noktasında türev
    - Dirac Delta fonksiyonu (Impulse)
  - Süreksizlik noktasında integral
    - Bir boyutu sıfır olan alan
  - AC
- Lineer Devrelere görülen işaretler
  - Doğru gerilim/akım
  - AC gerilim/akım (Sönümlü)
  - Üstel gerilim akım

Laplace Dönüşümü Tanımı

- **Öyle bir dönüşüm olsun ki**
  - **Differensiyel denklemin tam çözümünü versin**
  - **Tanım, Çevre ve Düğüm denklemleri Cebirsel olsun**

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Laplace Dönüşümü Tanımı

Orjinde sürekli

Orjinde süreksiz

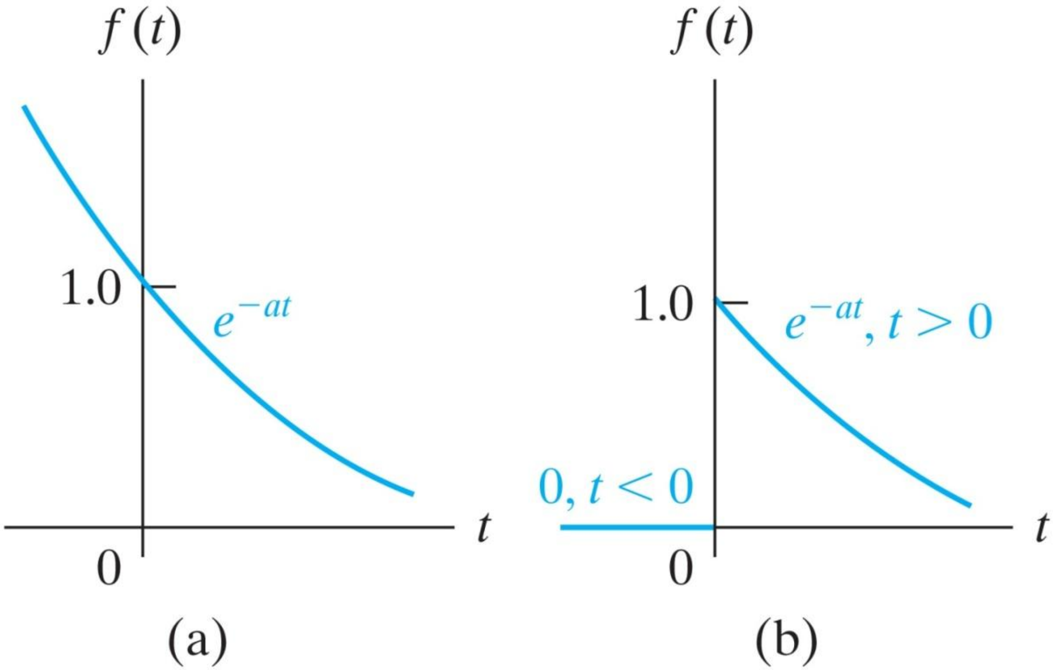


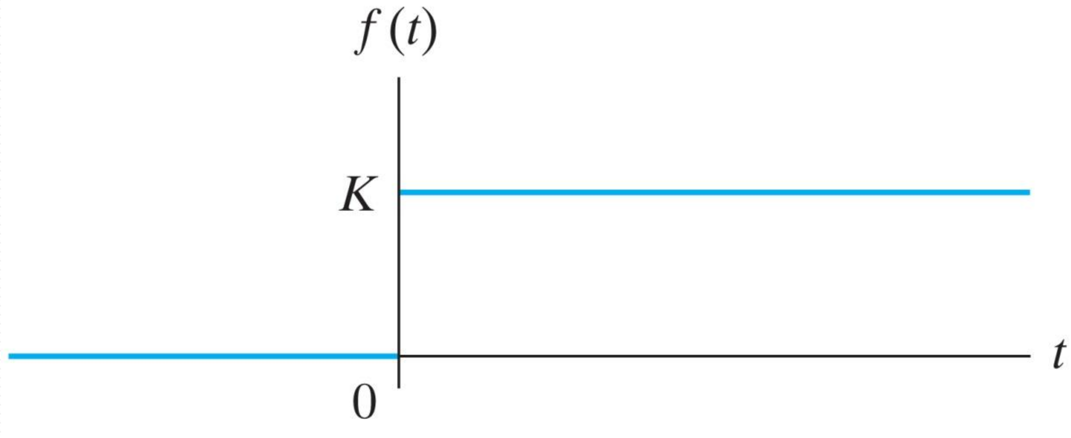
Figure: 12-01a,b

Alt limit t=0 da süreklilik/süreksizlik

- t = 0- alt limit alınır
- t<0- ilk koşulların oluşumu
- t = 0- ile t=0+ aralığında integral: (0)
- İstisna: Impulse function (Dirac Delta)

Basamak Fonksiyonu (Step Function)

$$Ku(t) = 0, \qquad t < 0,$$
$$Ku(t) = K, \qquad t > 0.$$



K=1
Birim basamak fonksiyonu
Unit step function

Basamak fonksiyonu(matematik model).
devrelerde Anahtarlamanın karşılığı:
doğru gerilim kaynağının(DC) bir anahtarla devreye uygulanması.

Basamak Fonksiyonu (Step Function)

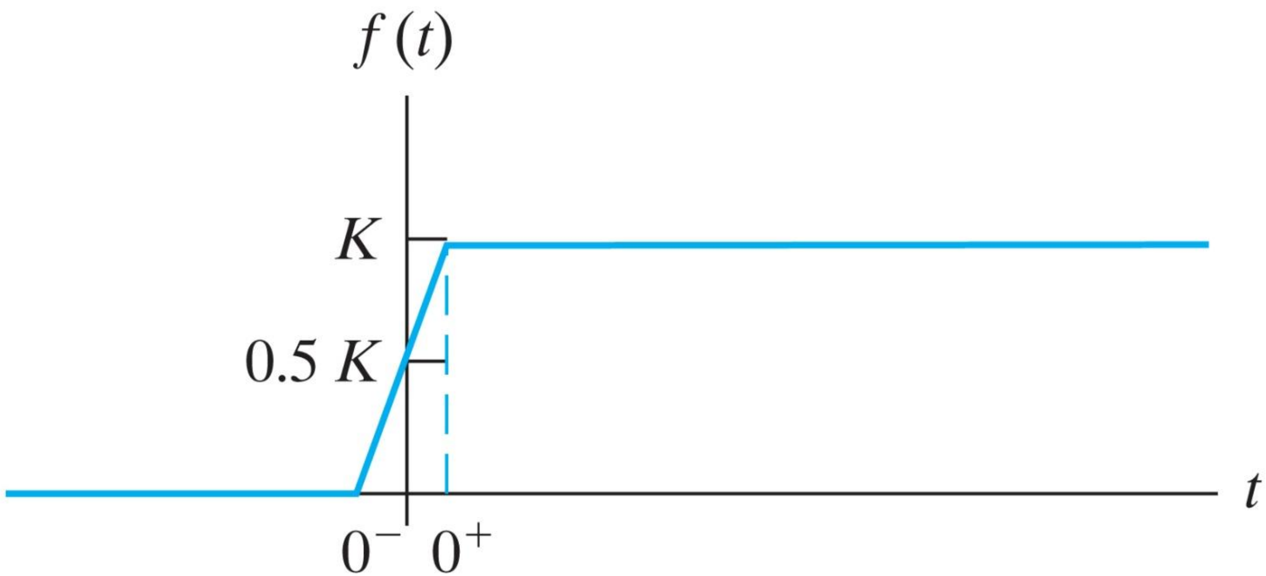


Figure: 12-03

$$Ku(t) = 0, \qquad t < 0,$$

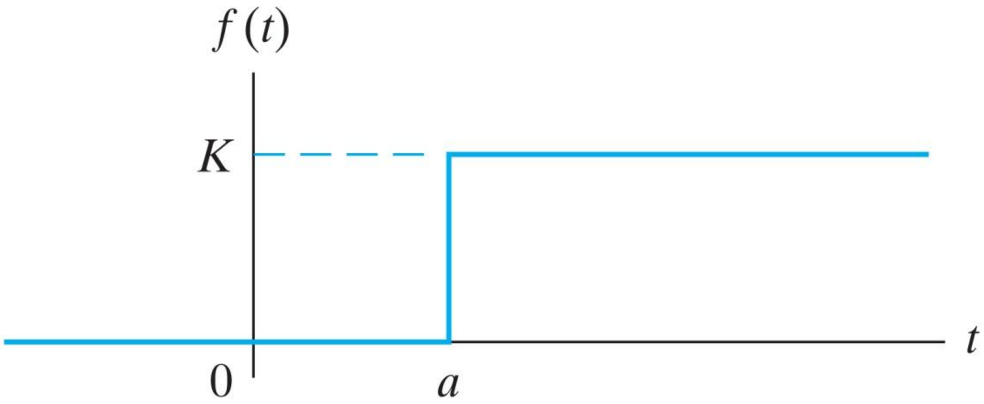
$$Ku(t) = K, \qquad t > 0.$$

$$Ku(0) = 0.5K$$

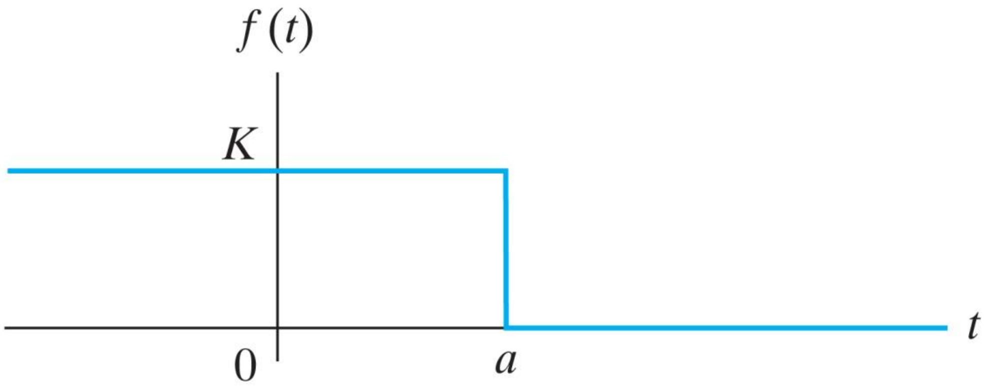
Teori*uygulama uyumluluğu

Basamak Fonksiyonu (Step Function)

$$Ku(t-a) = 0, \qquad t < a,$$
$$Ku(t-a) = K, \qquad t > a.$$

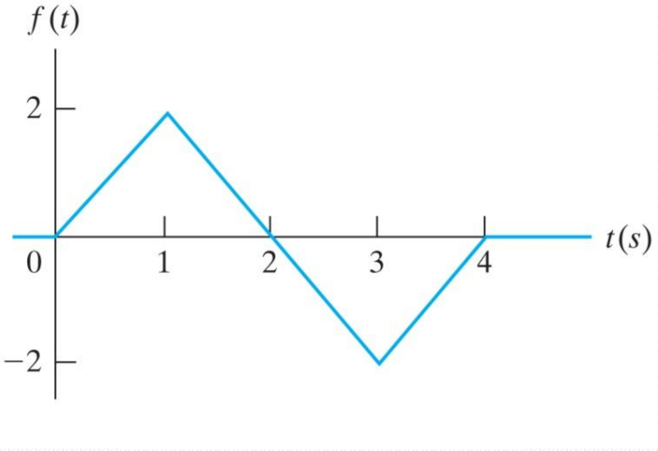


$$Ku(a-t) = K, \qquad t < a,$$
$$Ku(a-t) = 0, \qquad t > a.$$

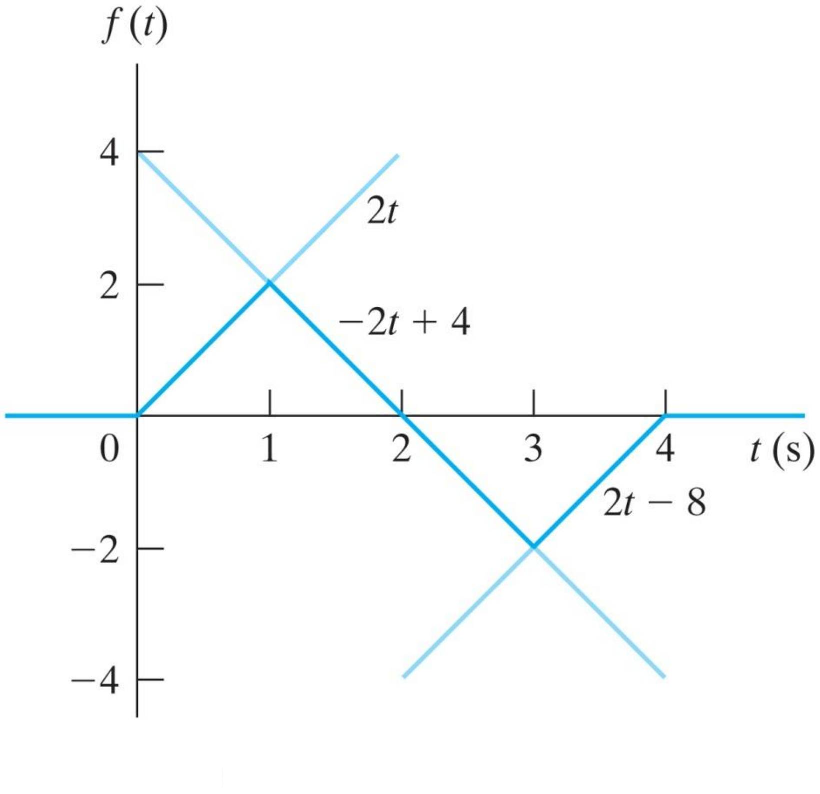


Basamak Fonksiyonu (Step Function)

Örnek:



$$f(t) =$$
$$= 2t\left[u(t) - u(t-1)\right] +$$
$$+ (-2t+4)\left[u(t-1) - u(t-3)\right]$$
$$+ (2t-8)\left[u(t-3) - u(t-4)\right]$$



Dürtü Fonksiyonu (Impulse Function)

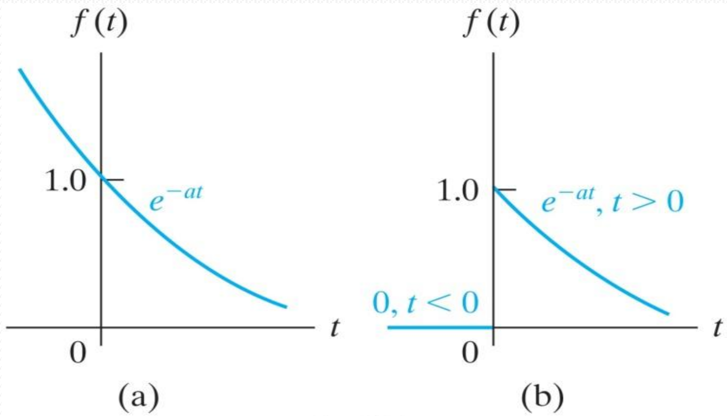


Figure: 12-01a,b

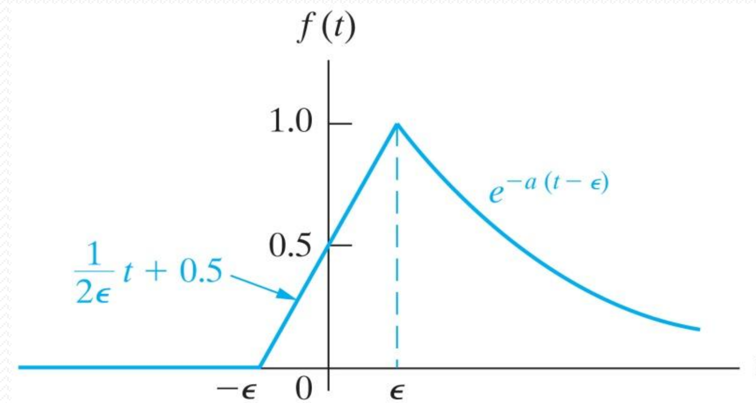
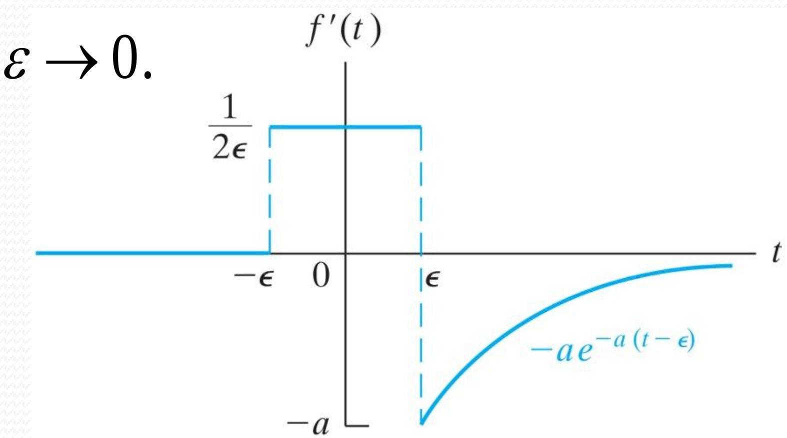


Figure: 12-08

$$f'(0) = \delta(t) \qquad \varepsilon \to 0.$$



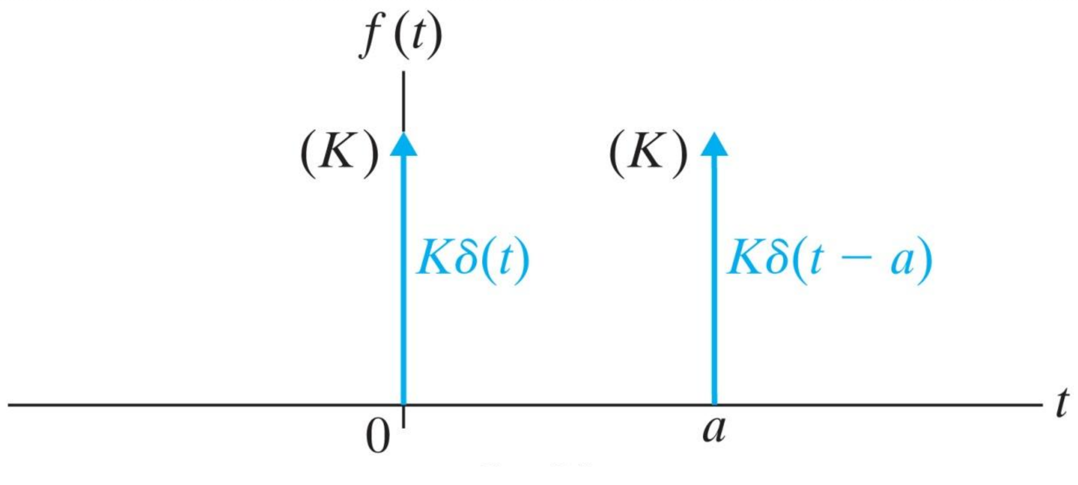
Değişken parametreli fonksiyon δ(t):
Değişken parametre 0 a giderken;
Fonksiyon, t=0 da sonsuza gider,
Foksiyonun değişim aralığı, 0 a gider,
Fonksiyon altındaki alan (1) dir.

Dürtü Fonksiyonu (Impulse Function)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K\delta(t)dt = K$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$K = strenght$$



Dirac delta fonksiyonunun zamanda kayma özelliği (Shifting property):

$\boldsymbol{f(t)}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{t = a}$ **da sürekliise,**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)\delta(t-a)dt = f(a).}$$

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Sifting özelliği: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a).$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t).1.dt = 1$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathscr{L}\{\delta'(t)\} = s$$

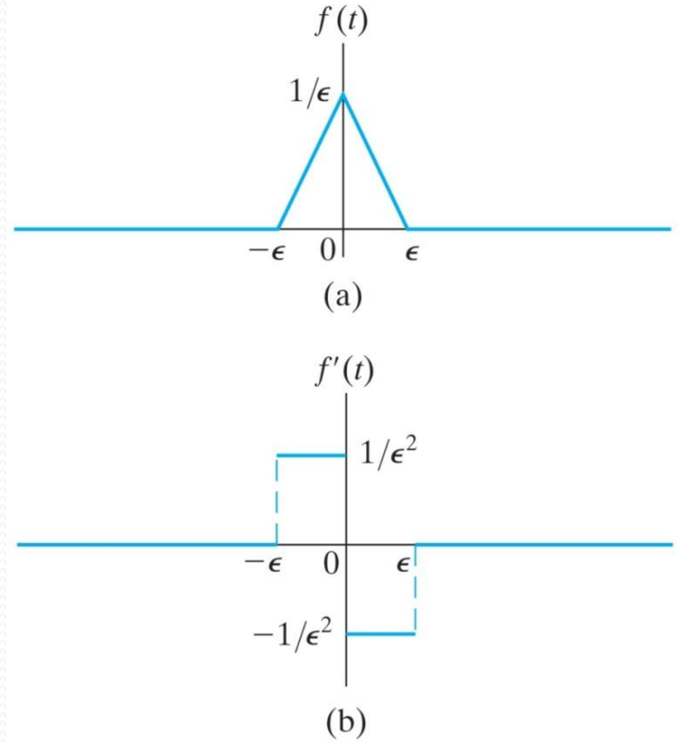


Figure: 12-12a,b

Genelleştirilmişi:

$$\mathscr{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Fonksiyonel Dönüşümler

$f(t) \rightarrow u(t) \quad \varepsilon \rightarrow 0$

$f'(t) \rightarrow \delta(t) \quad \varepsilon \rightarrow 0$

$\delta(t) = du(t)/d(t)$

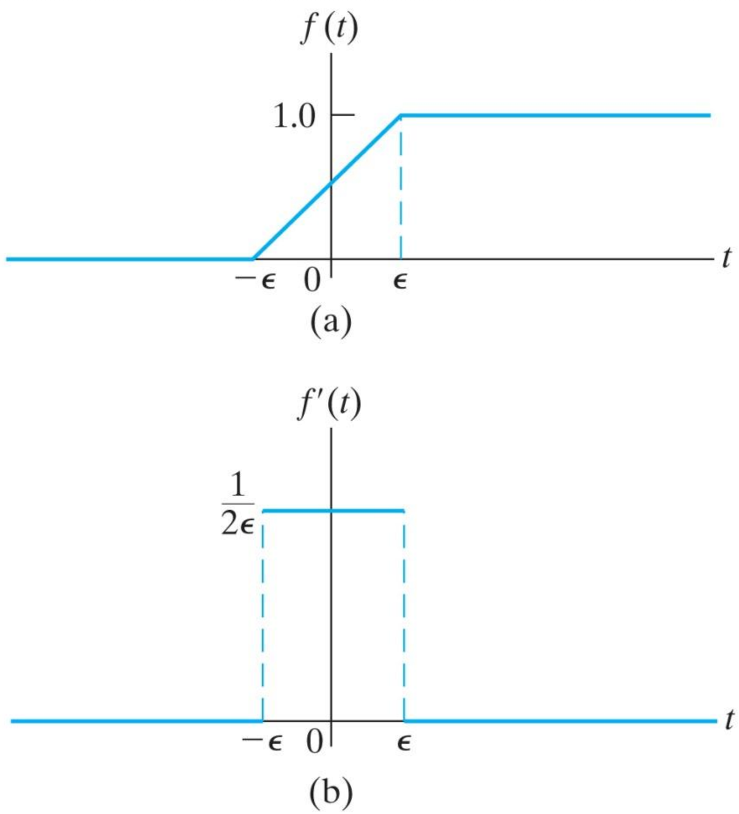


Figure: 12-13a,b

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

$\mathscr{L}\{u(t)\}$= 1/s

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\} = 1/(s+a)$$

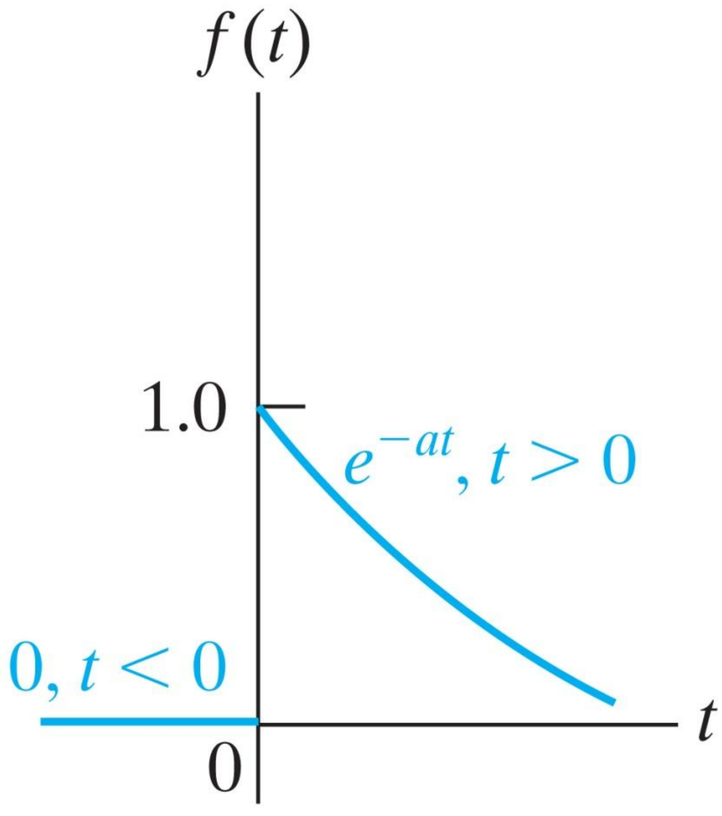


Figure: 12-14

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

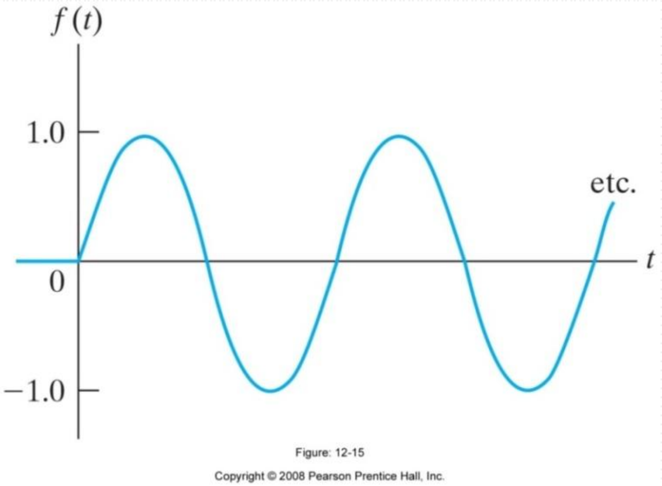


Figure: 12-15

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\mathscr{L}\{\sin \omega t\} = \omega/(s^2+\omega^2)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = s/(s^2+\omega^2)$$

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt = ?$$

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-st} \rightarrow du = -se^{-st}dt \\ v &= t \quad\;\; \rightarrow dv = dt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \int vdu = uv - \int udv$$

$$\int_{0^-}^{\infty} -ste^{-st}dt = te^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt = (0-0) - \frac{1}{s}$$

$$-s\left\{\int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt\right\} = -\frac{1}{s}$$

$$\int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

Fonksiyonel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

İmpuse	$\delta(t)$	1
Step	$u(t)$	$1/s$
Ramp	t	$1/(s^2)$
Exponential	e^{-at}	$1/(s+a)$
Sine	$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
Cosine	$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
Damped Ramp	te^{-at}	$1/(s+a)^2$
Damped sine	$e^{-at}\sin\omega t$	$\omega/((s+a)^2+\omega^2)$
Damped cosine	$e^{-at}\cos\omega t$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$

İşlemsel Dönüşümler

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Bir sabit ile çarpma	$Kf(t)$	$KF(s)$
Toplama ve çıkarma	$f_1(t)+f_2(t)-f_3(t)$	$F_1(s)+F_2(s)-F_3(s)$
Türev alma	$df(t)/dt$	$sF(s)-f(0^-)$
2. Dereceden türev alma	$d^2f(t)/dt^2$	$s^2F(s)-sf(0^-)-df(0^-)/dt$
n. Dereceden türev alma	$d^nf(t)/dt^n$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}df(0^-)/dt-df^{n-1}(0^-)/dt^{n}$
İntegral alma	$\int_0^t f(x)dx$	$F(s)/s$
Zaman bölgesinde kaydırma	$f(t-a)u(t-a),\ a>0$	$e^{-as}F(s)$
S bölgesinde kaydırma	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Ölçek değiştirme	$f(at),\ a>0$	$(1/a)F(s/a)$
S bölgesinde 1. türev alma	$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
S bölgesinde n. türev alma	$t^nf(t)$	$(-1)^n\ d^nF(s)/ds^n$
S bölgesinde integral alma	$f(t)/t$	$\int_s^{\infty} F(u)du$

Laplace Dönüşümünün Devrelere Uygulanması

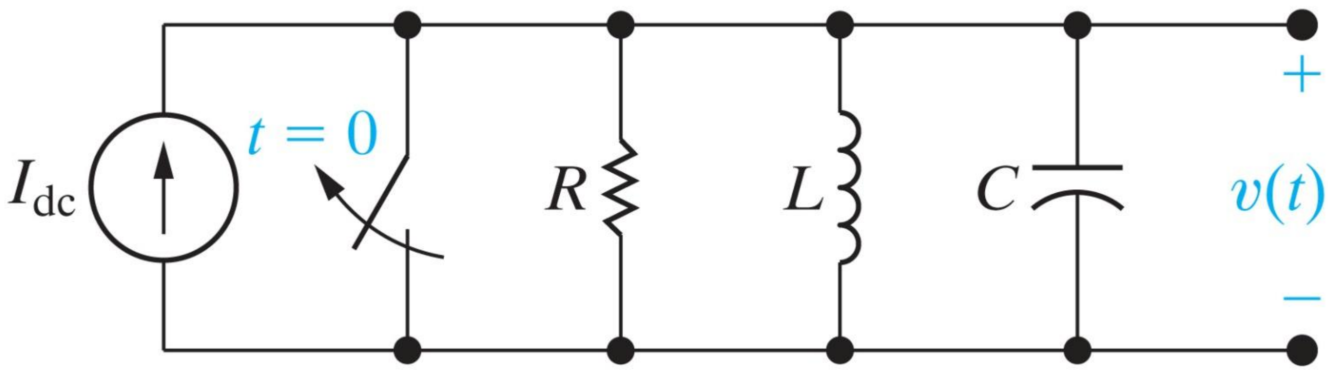


Figure: 12-16

$i_{dc} = I_{dc} u(t)$

$I_{dc}(s) = \frac{1}{s} I_{dc}$

ilk koşoşulla (0) ise:

$V_L(s) = sLI_L(s)$

$I_c(s) = sCV_c(s)$

$V_R(s) = RI_R(s)$

$$\boldsymbol{v(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}}$$

Ters Laplace Dönüşümü

- Devre çözümleri s-domeninde rasyonel fonksiyonlar

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+....a_1 s^1 + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+....b_1 s^1 + b_0}$$

  - Proper rational n<m
  - Improper rational m<n
- Rasyonel fonksiyonlar basit kesirler (Partial fraction expansion) toplamı biçiminde yazılabilir.
- Bu basit kesitlerden de Laplace dönüşümünün doğrusallığından yararlanarak t domenine geçilebilir

Ters Laplace Dönüşümü

Reelkök	$\dfrac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
Katlı reel kök	$\dfrac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
Komplex kök	$\dfrac{K}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
Katlı kompleks kök	$\dfrac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\dfrac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

$$K=\lvert K\rvert\angle\theta^0$$

K'nın $s=-\alpha+j\beta$ köküne ait olduğu unutulmamalıdır!!!

Rasyonel fonksiyonun kutupları
- reel ise ters laplace eksponansiyel
- Kompleks ise eksponansiyel sönümlü sinüsoidal
- İmajiner ise sinüsoidal

$u(t)$	$1/s$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
te^{-at}	$1/(s+a)^2$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\omega/((s+a)^2+\omega^2)$
$e^{-at}\cos\omega t$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Ters Laplace Dönüşümü

Katsız reel köklü bir rasyonel fonksiyon için ters Laplace örneği:

$$F(s)=\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+8}+\frac{K_3}{s+6}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\right\}=(120-72e^{-8t}+48e^{-6t})u(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\right\}=e^{-at}$$

$u(t)$	$1/s$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
te^{-at}	$1/(s+a)^2$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\omega/((s+a)^2+\omega^2)$
$e^{-at}\cos\omega t$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$

Ters Laplace Dönüşümü

Katsız /katlı reel köklü bir rasyonel fonksiyon için ters Laplace örneği:

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{(s+1)}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\} = (K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-t} + K_4 e^{-t})u(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\right\} = e^{-at}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}$$

Ters Laplace Dönüşümü

Katsız /katlı reel köklü bir rasyonel fonksiyon için ters Laplace örneği:

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}$$

$$K_1 = 20$$

$$K_2 = -400$$

$$K_3 = -100$$

$$K_4 = -20$$

$$\left\{\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}\right\} = \left[20 - 200t^2 e^{-5t} - 100t\ e^{-5t} - 20e^{-5t}\right]u(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$$

Ters Laplace Dönüşümü

Katsız eşlenik komplex kök

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)}\right\}=\left[2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)$$

Katlı eşlenik komplex kök

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}=\left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)$$

$$K=|K|e^{j\theta}$$

Yorum: Eşlenik komplex köklerden $-\alpha+j\beta$ ait K katsayısını bulmak yeter,
K* bulmaya gerek yok; bu veri ile ters laplace doğrudan yazılabilir.
Kökler yalnız imajiner olursa sonuç?

Ters Laplace Dönüşümü

Eşlenik Kompleks kutupları olan rasyonel fonksiyonların ters laplace'ına örnek

$$F(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}$$

$$s^2+6s+25=(s+3-j4)(s+3+j4)$$

$$F(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)(s+3+j4)}=\frac{K_1}{(s+6)}+\frac{K_2}{(s+3-j4)}+\frac{K_3}{(s+3+j4)}$$

$$K_1=-12$$

$$K_2=6-j8=10e^{-j53^0}$$

$$K_3=6+j8=10e^{j53^0}=K_2^*$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\}=\left[-12e^{-6t}+20e^{-3t}\cos(4t-53^0)\right]u(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$$

Komplex kök $\quad \dfrac{K}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$

Ters laplace $\rightarrow \quad Ke^{-(\alpha-j\beta)t}+K^*e^{-(\alpha+j\beta)t}$

$\rightarrow \quad 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

$$K=|K|\angle\theta^0$$

Ters Laplace Dönüşümü

Katlı kompleks kutbu olan rasyonel fonksiyonların ters laplace'ını almaya örnek

$$F(s) = \frac{768}{(s^2+6s+25)^2}$$

$$= \frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2}$$

$$= \frac{K_1}{(s+3-j4)^2} + \frac{K_2}{(s+3-j4)}$$

$$+ \frac{K_1^*}{(s+3+j4)^2} + \frac{K_2^*}{(s+3+j4)}$$

$$K_1 = -12$$

$$K_2 = -j3 = 3e^{-j90}$$

$$K_1^* = -12$$

$$K_2^* = j3 = 3e^{j90}$$

$$f(t) = \left[-24te^{-3t}\cos 4t + 6e^{-3t}\cos(4t-90^0)\right]u(t)$$

Katlı Komplex kök $\dfrac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \dfrac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}$

Ters laplace $\left[\dfrac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)$

$$K = |K|\angle\theta^0$$

Ters Laplace Dönüşümü

- Payın derecesi paydanınkinden büyük ise bölme işlemi yapılarak polinom uygun rasyonel fonksiyona dönüştürülür
- Polinomun ters dönüşümünden Dirac delta fonksiyonun türevleri ve/veya kendisi gelir
- Uygun rasyonel fonksiyonun ters dönüşümü ise önce yapıldığı gibidir

Ters Laplace Dönüşümü

Örnek :

$$F(s)=\frac{s^4+13s^3+66s^2+200s+300}{s^2+9s+20}$$

$$F(s)=s^2+4s+10+\frac{30s+10}{s^2+9s+20}$$

$$=s^2+4s+10-\frac{20}{s+4}+\frac{50}{s+5}$$

$$f(t)=\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+4\frac{d\delta(t)}{dt}+10\delta(t)-(20e^{-4t}-50e^{-5t})u(t)$$

S-düzleminde Kutup Ve Sıfırlar

(Poles/Zeros)

$$F(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}$$

$$F(s)=\frac{10(s+5)(s+3-j4)(s+3+j4)}{s(s+10)(s+6-j8)(s+6+j8)}$$

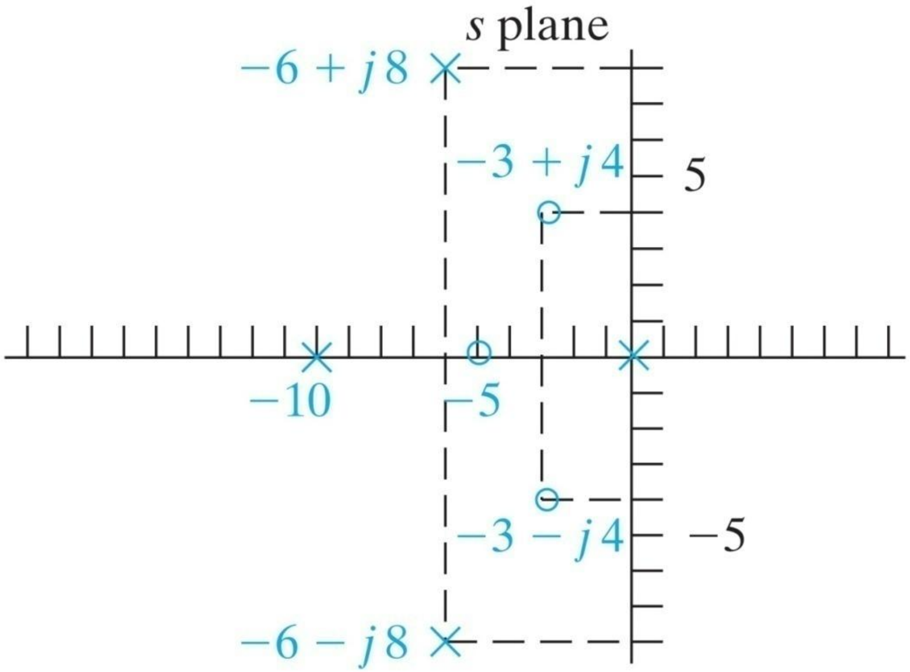


Figure: 12-17

Başlangıç ve Son Değer Teoremleri

•Bulunan sonuçları test etmekte kullanabiliriz

•F(s)'nin ve f(t)'nin 0 ve ∞'daki davranışını belirlemizde yardımcı olur

•F(s)'nin ters dönüşümünü almadan f(t)'ninb başlangıç ve son değerlerini bilinen devre davranışından kontrol ederek uyumlu olup olmadıklarını gözlemleyebiliriz

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$