ELK 307
İletişim Kuramı-I

Nihat KABAOĞLU

Ders 2

Dersin İçeriği

- Sinyaller ve Sistemlerin Temelleri
  - Sinyaller
  - Sinyallerin Sınıflandırılması
  - Trigonometrik ve Üstel Fourier Serileri
  - Fourier Dönüşümü ve Özellikleri
  - Birim Dürtü (Delta Dirac) Fonksiyonu
  - Sinyallerin Doğrusal Sistemlerden İletimi

Kısım-2

Sinyaller ve Sistemlerin Temelleri

Sinyaller

- Sinyal, bilgi ya da veri kümesi olarak tanımlanabilir.
- Örneğin
  - Telefon ya da televizyon sinyali.
  - Bir kuruluşun ayın günlerine göre satış tutarları
- Ancak, bu derste zamanın fonksiyonu olan sinyaller ile ilgilenilecek.
- Bir dalga şeklinin fiziksel olarak gerçeklenebilmesi için
  - Zamanda sınırlı
  - Bant genişliği sonlu
  - Zamanda sürekli
  - Aldığı değerler sonlu ve gerçel

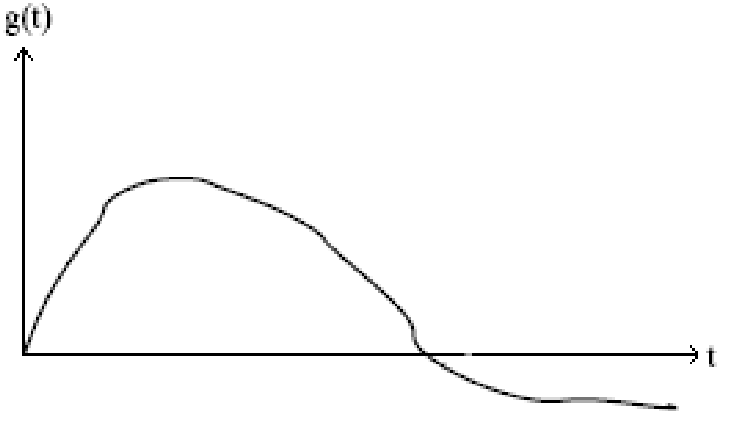
olmalıdır.

Sinyallerin Sınıflandırılması

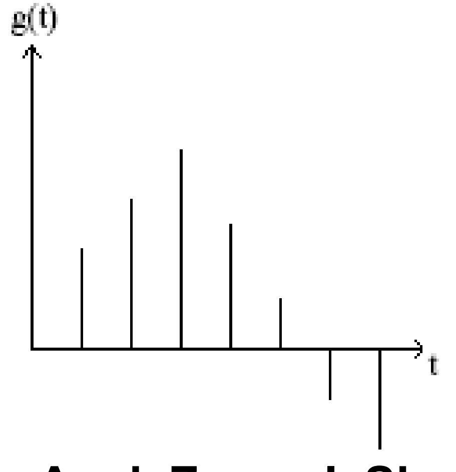
- Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller
- Analog ve sayısal sinyaller
- Deterministik ve rasgele sinyaller
- Periyodik ve periyodik olmayan sinyaller
- Enerji ve güç sinyalleri

Sürekli ve Ayrık Zamanlı Sinyaller

- Zamanın her anında belirtilen sinyaller sürekli zamanlı sinyaller olarak tanımlanır.
- Zamanın belirli anlarında belirtilen sinyaller ayrık zamanlı sinyaller olarak tanımlanır.



Sürekli Zamanlı Sinyal



Ayrık Zamanlı Sinyal

Sürekli ve Ayrık Zamanlı Sinyaller

- Ayrık zamanlı bir sinyal sürekli zamanlı bir sinyalin örneklenmesi ile elde edilebilir.
- Bazı durumlarda ise ayrık zamanlı sinyalden tekrar sürekli zamanlı sinyale geri dönmek istenebilir.
- Örnekleme Teoremi' ne uygun yapılan örnekleme sonunda sürekli zamanlı sinyali yeniden elde etmek mümkün.
- Örnekleme teoremi şunu ifade eder:

  Sinyalin spektrumundaki en yüksek frekans B ise, bu sinyalden saniyede 2B' den az olmayacak şekilde alınacak örnekler kullanılarak sinyali yeniden oluşturmak mümkündür.

Analog ve Sayısal Sinyaller

- Genlik değerlerini sürekli bir bölgeden alan sinyallere analog sinyal adı verilir.
- Analog ve sayısal sinyal kavramı sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyal kavramından farklıdır.
- Çünkü, bir sinyal sayısal ve sürekli zamanlı olabileceği gibi analog ve ayrık zamanlı da olabilir.

Analog ve Sayısal Sinyaller

- Kuvantalayıcı kullanarak analog bir sinyalden sayısal bir sinyal elde etmek mümkündür.
- Analog sinyalin genliği *L* aralığa bölünür.
- Her bir örnek değeri orijinal değerin bulunduğu aralığın orta noktasındaki değere yuvarlanır.
- Kuvantalama kayıplı bir işlemdir.

Dikkat : Öyleyse, sayısal ayrık zamanlı bir sinyal, analog sürekli zamanlı bir sinyalin örneklenip kuvantalanmasıyla elde edilir. (Kodlama da yapıldığı varsayılıyor)

Deterministik ve Rasgele Sinyaller

- Fiziksel tanımı tamamıyla bilinen bir sinyale deterministik sinyal denir.
- Yalnızca istatistiksel özellikleri ile tanımlanan bir sinyale ise rasgele sinyal denir.

Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller

- Bazı sabit pozitif T_0 değerleri için eğer

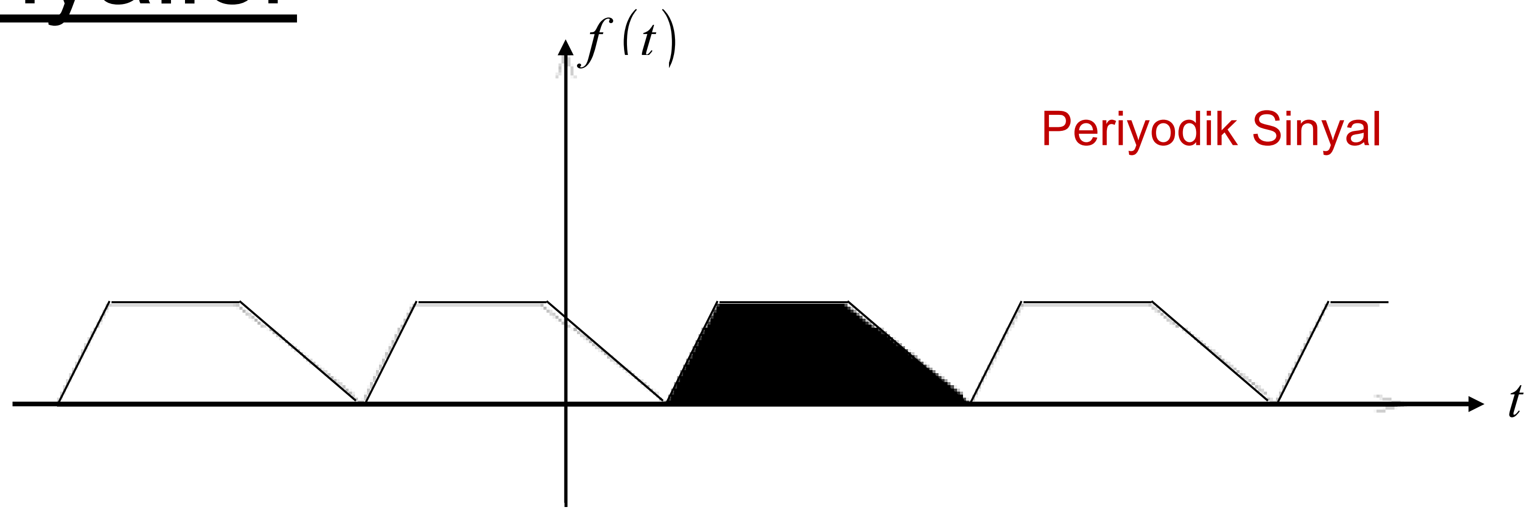
$$f(t) = f(t + T_0)\ ;\ \forall t$$

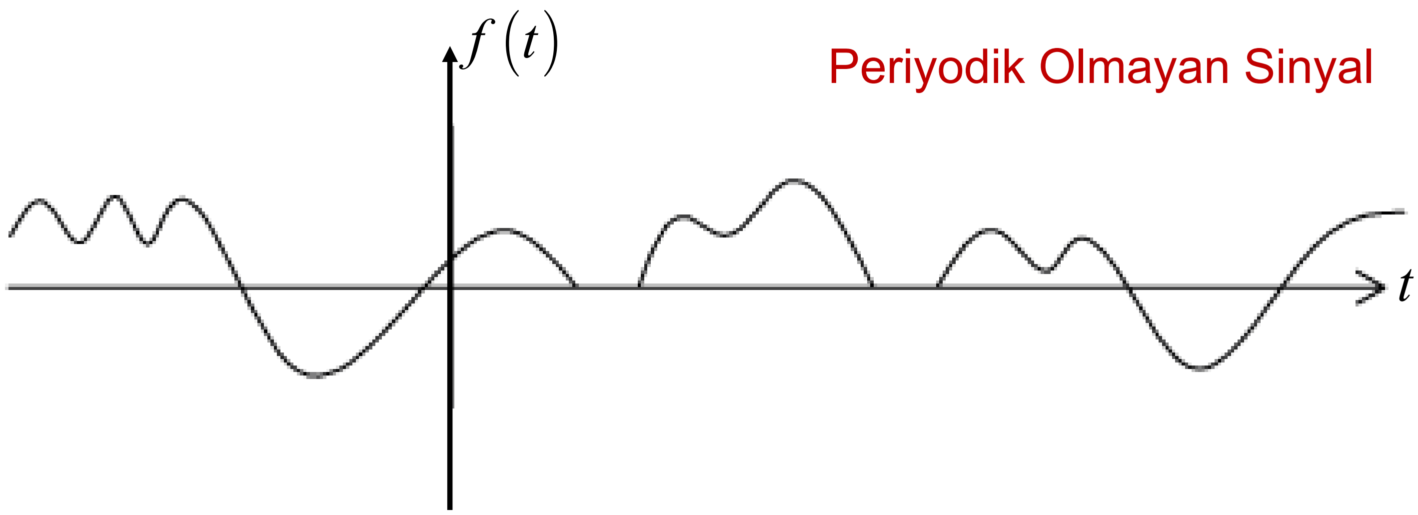
  sağlanıyorsa *f*(*t*) *periyodiktir* denir.
- Eğer bu şartı sağlamıyorsa da o zaman bu sinyal *periyodik değildir* denir.
- Yaygın olarak bilinen bazı periyodik sinyaller şunlardır:

$$\sin\left(\omega_0 t\right), \quad \cos\left(\omega_0 t\right), \quad e^{j\omega_0 t}$$

  burada, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ ‘ dır ve T_0 periyottur.

Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller





Enerji ve Güç Sinyalleri

Gerçel bir $f(t)$ sinyalinin enerjisi E_f

$$\boxed{E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt}$$

olarak tanımlanır. Karmaşık değerli bir sinyal içinse,

$$\boxed{E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

olarak tanımlanır.

Eğer, $E_f < \infty$ ise o zaman bu $f(t)$ <u>sinyali enerji sinyalidir.</u>

<u>Dikkat!</u> Enerji sinyallerinin ortalama gücü sıfırdır!

Enerji ve Güç Sinyalleri

- Enerjinin sonlu olabilmesi için gerekli koşul zaman sonsuza giderken sinyal genliğinin sıfıra gitmesidir. Sonsuz enerjili sinyaller ile ilgilenildiğinde ise (örneğin periyodik işaretler) sinyalin enerjisi ile değil gücü ile ilgilenmek daha anlamlı olacaktır.

$$\boxed{P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt}$$

Dikkat!
Güç sinyalleri fiziksel olarak gerçeklenemez! Çünkü, sinyaller ya sonsuza kadar devam eder ya da bir anda sonsuz değer alırlar. Dolayısıyla enerjileri sonsuzdur.

- Eğer bir sinyal

Güç sinyalleri periyodik olabilirler ya da olmayabilirler.

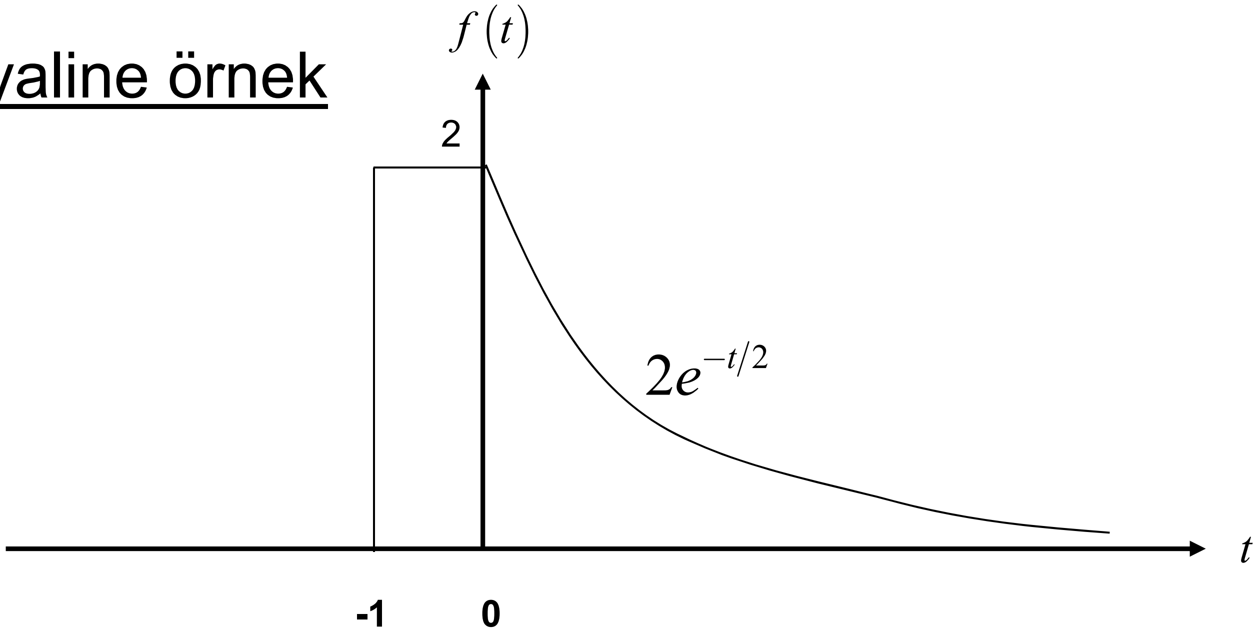
$$\boxed{0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt < \infty}$$

şartını sağlıyorsa bu sinyal <u>güç sinyalidir</u> denir.

- ***Bir sinyal aynı anda hem enerji hem güç sinyali olamaz.***

Enerji ve Güç Sinyalleri

Enerji sinyaline örnek



Yukarıda grafiği verilen sinyalin enerjisi

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \int_{-1}^{0} (2)^2 dt + \int_{0}^{\infty} \left(2e^{-t/2}\right)^2 dt = 4 + 4 = 8$$

olur.

Enerji ve Güç Sinyalleri

Güç sinyaline örnek

$g(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ ' nin gücünü hesaplayalım.

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)\, dt$$

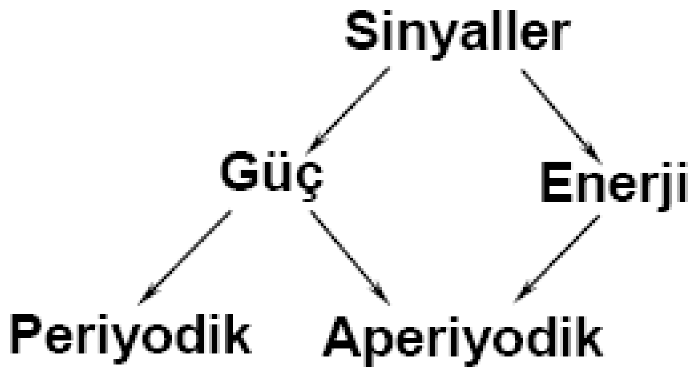
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \left(1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\right) dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

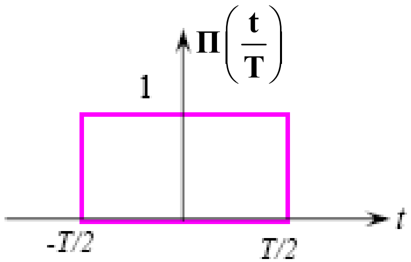
Enerji ve Güç Sinyalleri

- Bir sinyal ***güç veya enerji sinyali olarak sınıflandırılır.***
  - Güç Sinyali → $0 < P < \infty$
  - Enerji Sinyali: → $0 < E < \infty$
- Güç sinyalleri ***periyodik olabilir veya olmayabilir.***
- Enerji sinyalleri daima ***periyodik değildirler***.

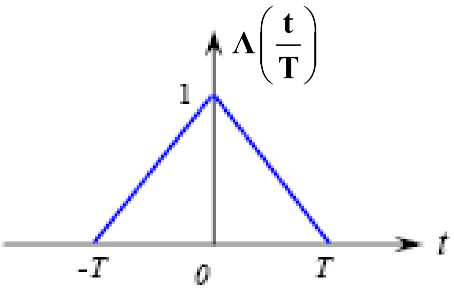


Bazı Önemli Sinyaller

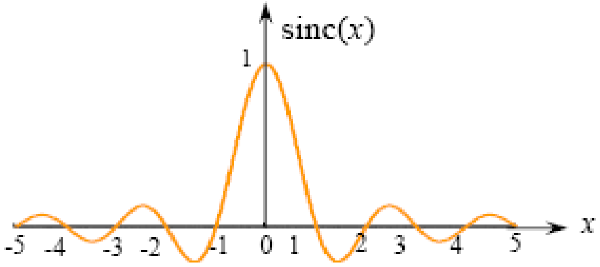
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & , \quad |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & , \quad |t| \le T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}$$



$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



Trigonometrik ve Üstel Fourier Serileri

- Fiziksel olarak gerçeklenebilir T_0 ile periyodik bir f(t) sinyali Fourier serisine açılabilir:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n \cos(n\omega_0 t) + \cdots$$
$$+ b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots + b_n \sin(n\omega_0 t) + \cdots$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right) \longrightarrow \boxed{\text{Genel ya da Trigonometrik Fourier Serisi}}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \longrightarrow \boxed{\text{Trigonometrik Fourier Serisi (Compact Form)}}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\text{Üstel Fourier Serisi}}$$

Trigonometrik ve Üstel Fourier Serileri

- Burada, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$ temel frekansı, $n\omega_0$ ise n' inci harmonik frekansını göstermektedir. $a_0, a_n, b_n, C_0, C_n, \theta_n$ ve G_n aşağıdaki gibi tanımlanan sabitlerdir:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

$$G_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$t_0 = 0 \text{ ya da } -T_0/2$$

Trigonometrik ve Üstel Fourier Serileri

- Fourier Serilerinde Simetri
  - *f*(t) tek simetri özelliğine sahiptir eğer

$$\boxed{f(t) = -f(-t)}$$

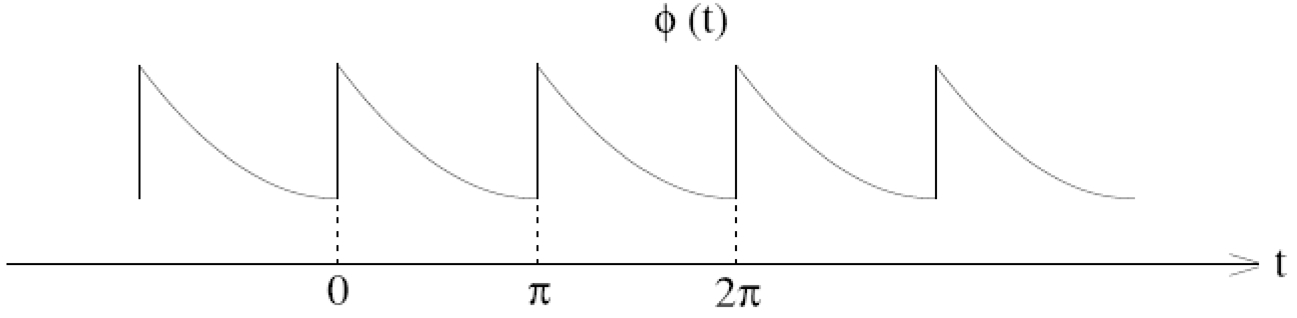
ise, o zaman tüm $n = 0, 1, 2, \ldots$ değerleri için $\boxed{a_n = 0}$ olur. Yani, seride yalnızca sinüslü terimler vardır.

  - *f*(t) çift simetri özelliğine sahiptir eğer

$$\boxed{f(t) = f(-t)}$$

ise, o zaman tüm $n = 0, 1, 2, \ldots$ değerleri için $\boxed{b_n = 0}$ olur. Yani, seride yalnızca kosinüslü terimler vardır.

Örnek



Yukarıda verilen sinyali Fourier serisine açınız.

Örnek (devam)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ rad\ /\ sn$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2nt + \theta_n)$$

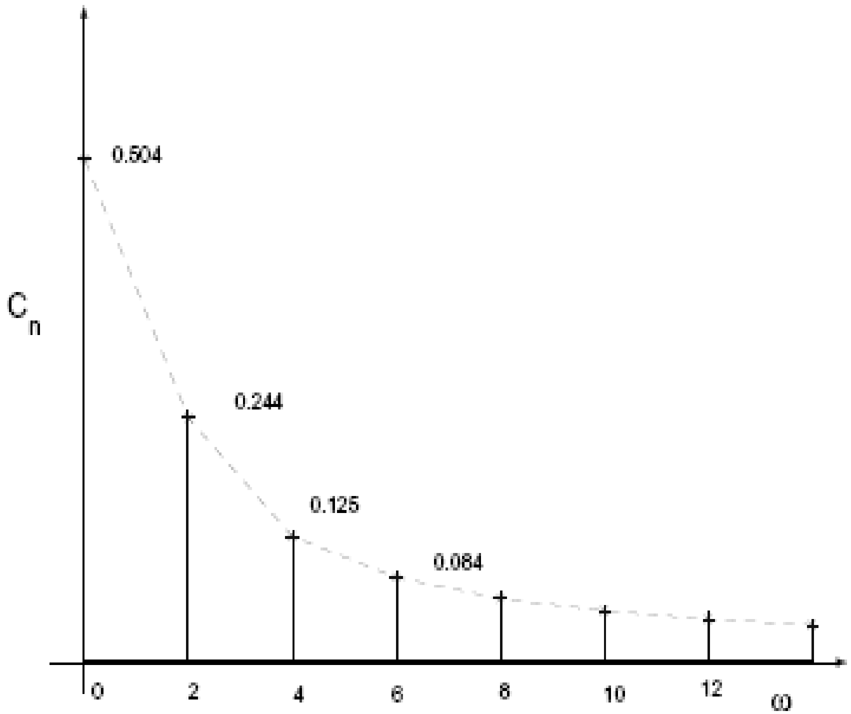
n	0	1	2	3	4
C_n	0.504	0.244	0.125	0.084	0.063
θ_n	0	-75.96	-82.87	-85.84	-86.42

Bu verileri kullanarak şunları çizebiliriz:

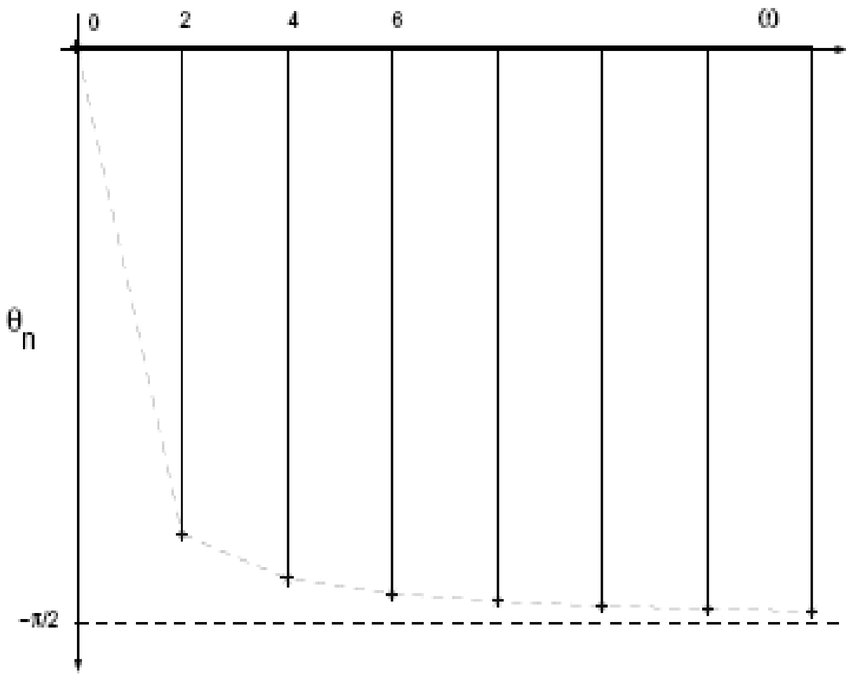
- genlik C_n' nin ω ile değişimi ⇨ **Genlik Spektrumu**
- faz θ_n' in ω ile değişimi ⇨ **Faz Spektrumu**

Bu iki çizim birlikte *f*(*t*)' nin **frekans spektrumu** olarak adlandırılır.

Örnek (devam)



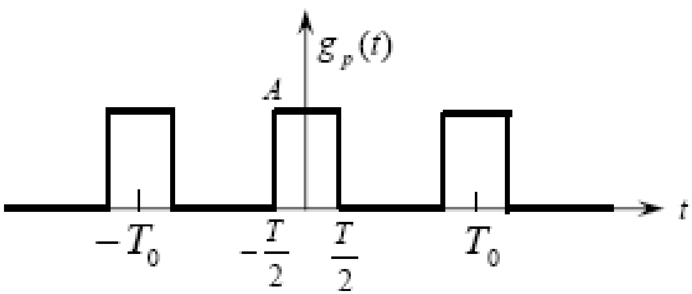
Genlik Spektrumu



Faz Spektrumu

Örnek

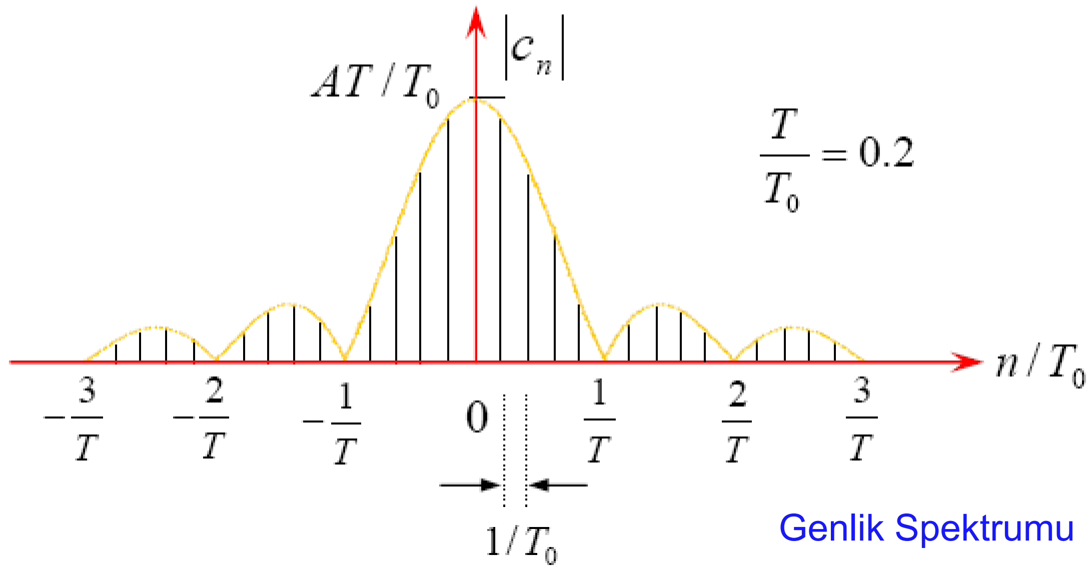
$$g_p(t) = \begin{cases} A \quad , & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 \quad , & diğer \end{cases}$$



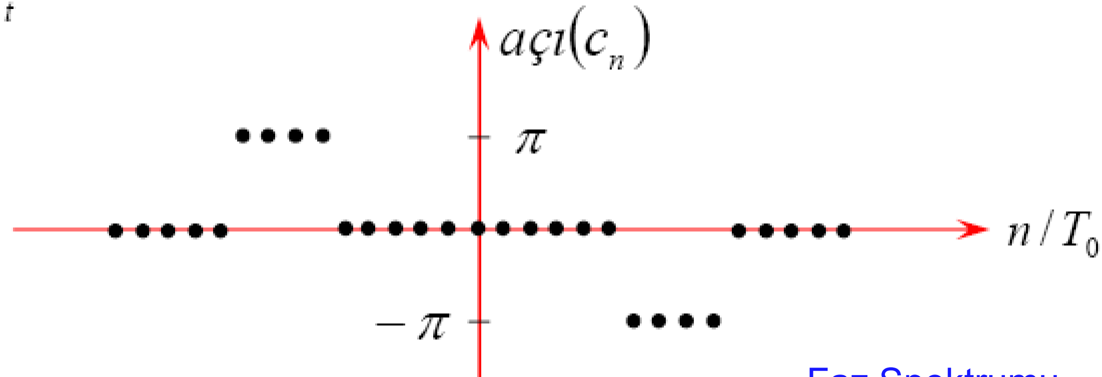
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A e^{-\frac{j2\pi nt}{T_0}} dt$$

$$= \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi T}{T_0}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= \frac{TA}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_0}\right)$$



Genlik Spektrumu



Faz Spektrumu

Dikkat!!!
Spektrum Ayrık
Faz tek, genlik ise çift simetrik

Fourier Dönüşümü

- Periyodik sinyaller Fourier serisine açılarak temsil edilmişlerdi. Benzer şekilde, periyodik olmayan sinyalleri de Fourier dönüşümü kullanılarak kendi frekans bileşenleriyle ifade etmek mümkündür.
- Periyodik olmayan bir *f*(*t*) sinyalinin Fourier dönüşümü

$$\boxed{F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

ya da

$$\boxed{F(f) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi f t}dt}$$

Fourier Dönüşümü

- Ters Fourier dönüşümü ise

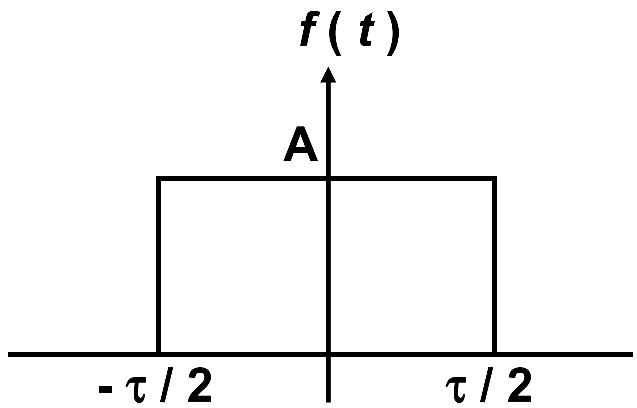
$$\boxed{f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$

ya da

$$\boxed{f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\pi ft}\,df}$$

Örnek

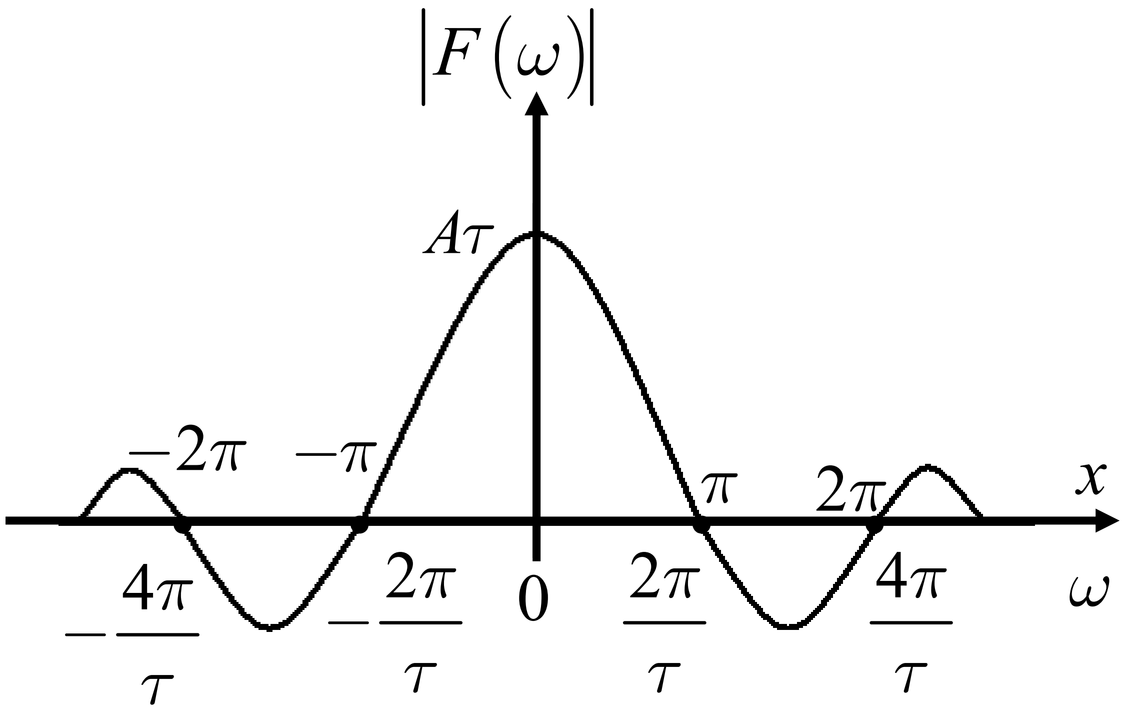
Aşağıda verilen sinyalin Fourier dönüşümünü bulunuz.



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\tau/2}-e^{j\omega\tau/2}\right)$$

$$=A\tau\left(\frac{e^{j\omega\tau/2}-e^{-j\omega\tau/2}}{2j\omega\tau/2}\right)=A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \rightarrow \boxed{F(\omega)=A\tau\sin c\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

Örnek(Devam)



$\left|F(\omega)\right|$
$A\tau$
-2π
$-\pi$
π
2π
x
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
0
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
ω

Örnek

$f(t) = A\cos(\omega_0 t)$ sinyalin Fourier dönüşümünü bulunuz. Frekans spektrumunu çiziniz.

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \rightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

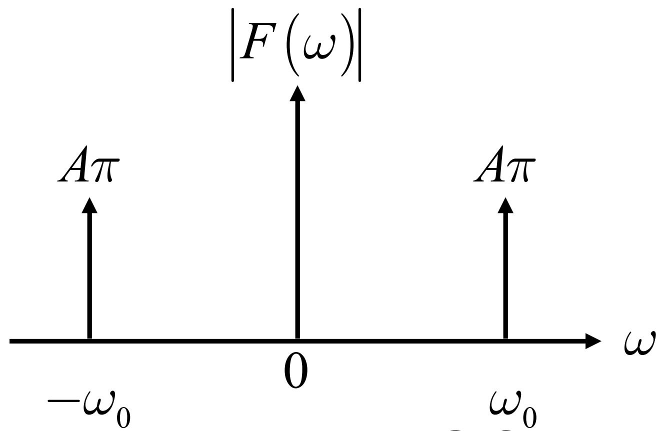
$$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

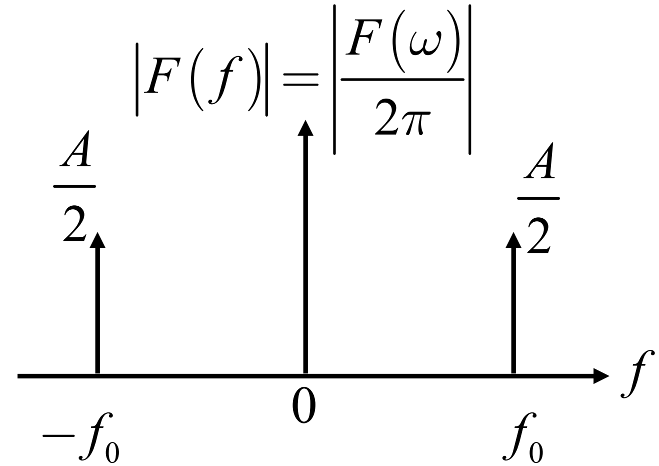
$$= \frac{A}{2} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{A}{2} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\boxed{F(\omega) = A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0)}$$

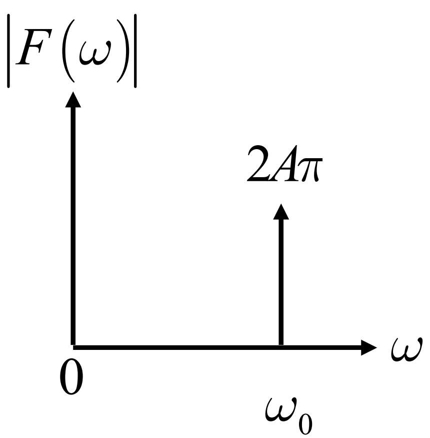
$$\boxed{F(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)}$$

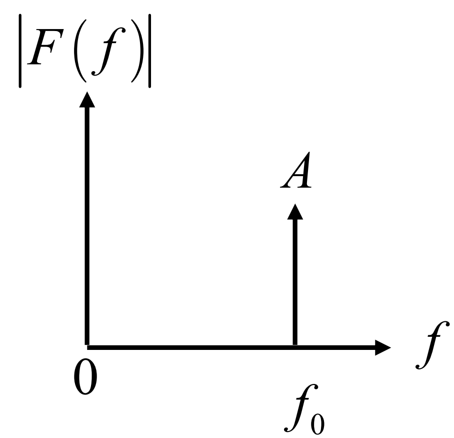
Örnek(Devam)





Çift taraflı genlik spektrumu





Tek taraflı genlik spektrumu

Dikkat !!!   f(t) çift simetrik fonksiyon olduğu için Faz Spektrumu sıfırdır.

Fourier Dönüşüm Özellikleri

- Doğrusallık (Süperpozisyon) Özelliği

$$\left.\begin{array}{l} g_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_1(f) \\ \\ g_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_2(f) \end{array}\right\} \Rightarrow \; ag_1(t)+bg_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aG_1(f)+bG_2(f)$$

- Ölçekleme Özelliği

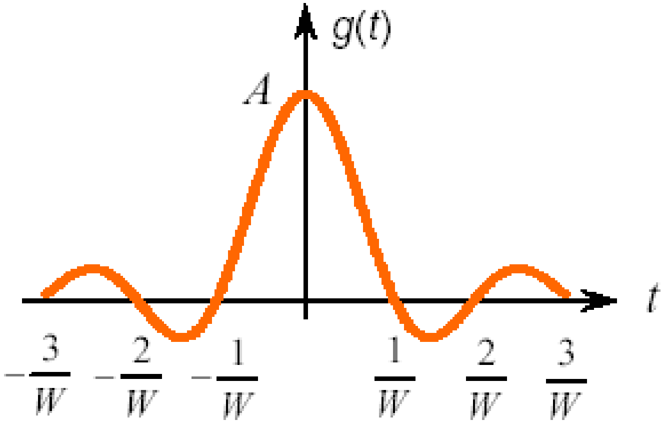
$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \quad \Rightarrow \quad g(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

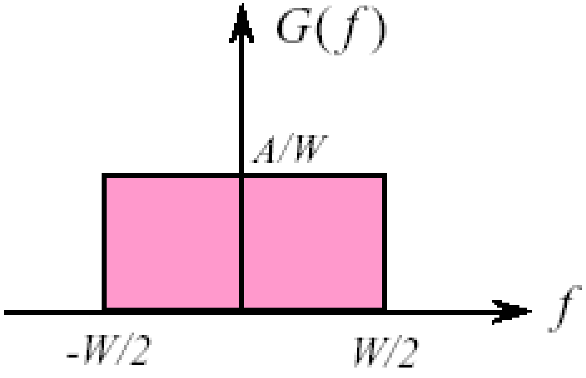
Fourier Dönüşüm Özellikleri

- Simetri ya da Dualite Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f) \Rightarrow G(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} g(-f)}$$

- **Örnek** $g(t) = A\text{sinc}(Wt) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f) = \dfrac{A}{W}\Pi\left(\dfrac{f}{W}\right)$





Fourier Dönüşüm Özellikleri

- Zamanda Öteleme Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f) \Rightarrow g(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)\, e^{-j2\pi f\, t_0}}$$

- Frekansta Öteleme Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f) \Rightarrow g(t)\, e^{j2\pi f_0\, t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f-f_0)}$$

Fourier Dönüşüm Özellikleri

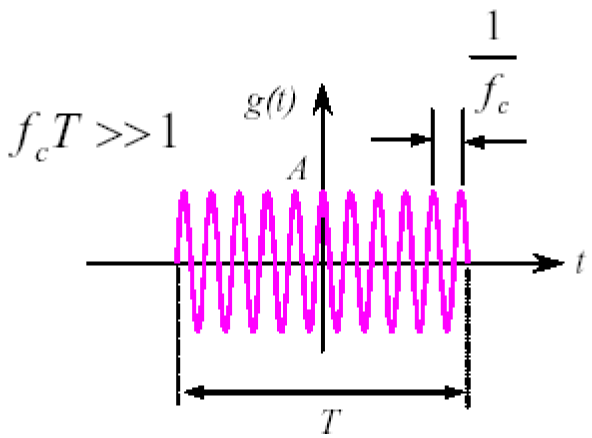
- Frekansta Öteleme Özelliği
  - **Örnek**

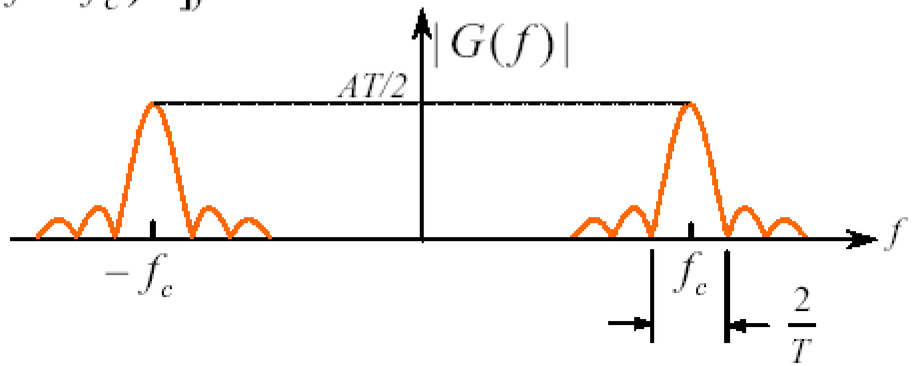
$$g(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}\left[\exp(j2\pi f_c t) + \exp(-j2\pi f_c t)\right]$$

$$G(f) = \frac{AT}{2}\left\{\mathbf{sinc}\left[(f - f_c)T\right] + \mathbf{sinc}\left[(f + f_c)T\right]\right\}$$

$$G(f) \approx \begin{cases} \frac{AT}{2}\mathrm{sinc}\left[(f - f_c)T\right], & f > 0 \\ \frac{AT}{2}\mathrm{sinc}\left[(f + f_c)T\right], & f < 0 \end{cases}$$





Fourier Dönüşüm Özellikleri

- g(t) ve G(f)' in Altında Kalan Alan

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \frac{G(0)}{2\pi} \quad ve \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df = 2\pi g(0)}$$

- Türev Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (j2\pi f)^n G(f)} \quad \text{zaman bölgesinde}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{df^n} G(f) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (-j2\pi t)^n g(t)} \quad \text{frekans bölgesinde}$$

Fourier Dönüşüm Özellikleri

- İntegral Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} g(t)dt \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f} G(f)}$$ zaman bölgesinde

$$\boxed{\int_{-\infty}^{f} G(f)df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(-j2\pi t)} g(t)}$$ frekans bölgesinde

Fourier Dönüşüm Özellikleri

- Kompleks Eşlenik Özelliği

$$\boxed{g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)}$$

$$\boxed{g^*(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G^*(-f)}$$

İspat

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$g^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) e^{-j2\pi f t} df = -\int_{\infty}^{-\infty} G^*(-f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(-f) e^{j2\pi f t} df$$

Fourier Dönüşüm Özellikleri

- Konvolüsyon Özelliği

$$\boxed{g(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)H(f)}$$

Zamanda Konvolüsyon

$$\boxed{g(t).h(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G(f)*H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)H(f-\lambda)\,d\lambda}$$

Frekansta Konvolüsyon

Birim Dürtü (Dirac Delta) Fonksiyonu

- Tanımı:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \;\; için, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Özellikleri:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t) dt = g(0)$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0) dt = g(t_0)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$g(t)\delta(t-t_0) = g(t_0)\delta(t-t_0)$$

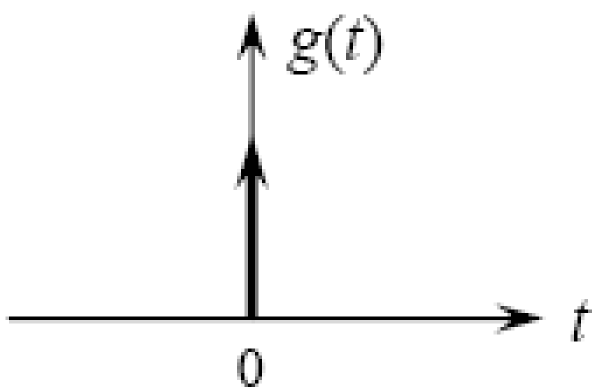
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\lambda) d\tau = g(t)$$

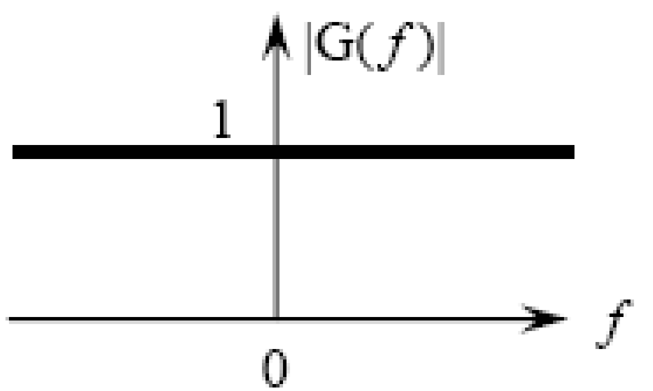
$$g(t) * \delta(t) = g(t)$$

Birim Dürtü Fonksiyonu

- Birim Dürtü Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathscr{F}\left[\delta(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-j2\pi ft}\, dt = 1 \qquad \delta(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 1$$

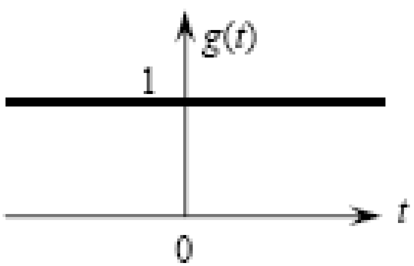


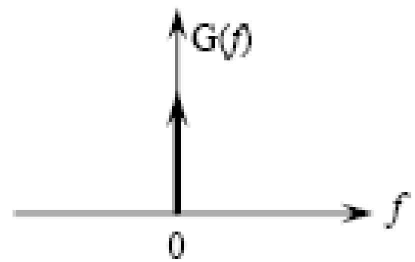


$\delta(t)$ Uygulamaları

- DC Sinyal

$$\boxed{1 \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \delta(f)}$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f)$$

- Kompleks Üstel

$$\boxed{e^{j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \delta(f - f_c)}$$

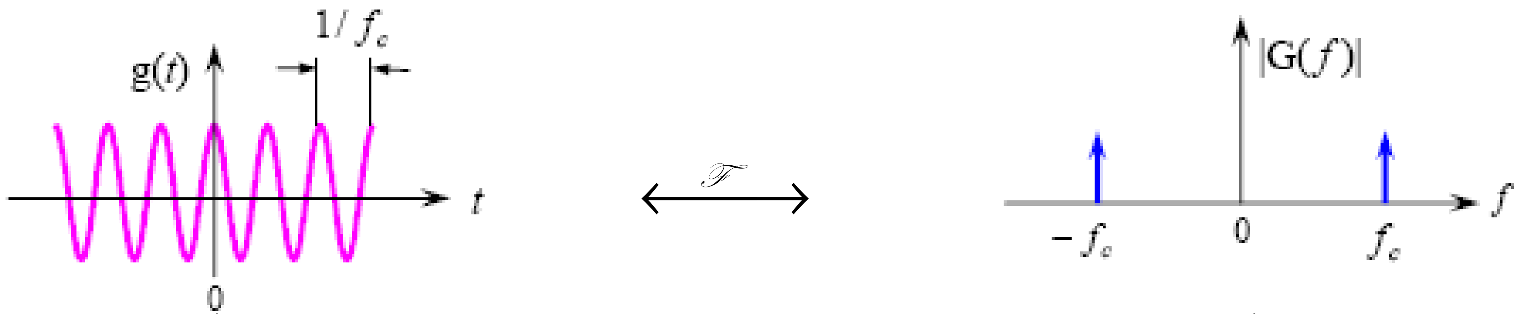
$\delta(t)$ Uygulamaları

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right]$$

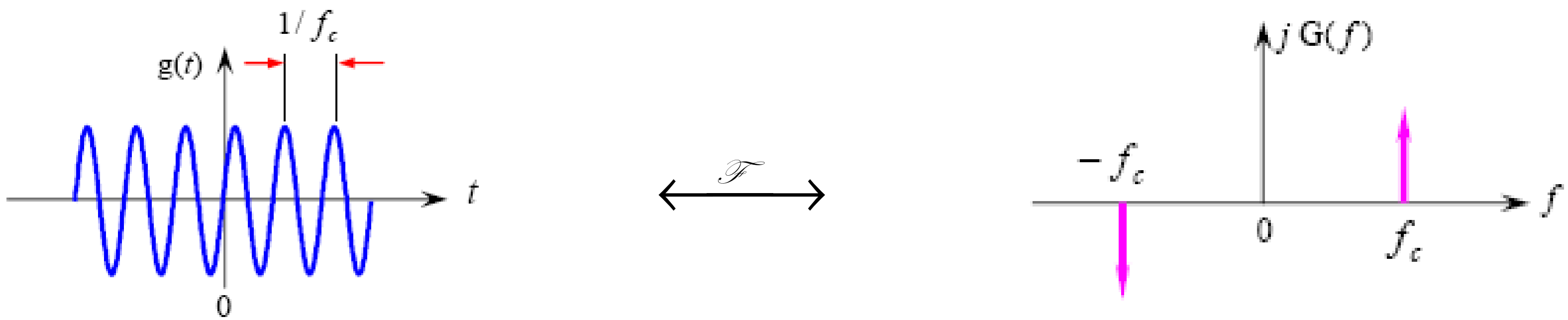
$$\sin(2\pi f_c t) = \frac{1}{2j}\left[e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}\right]$$

- Sinüzoidal Sinyal

$$\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$$



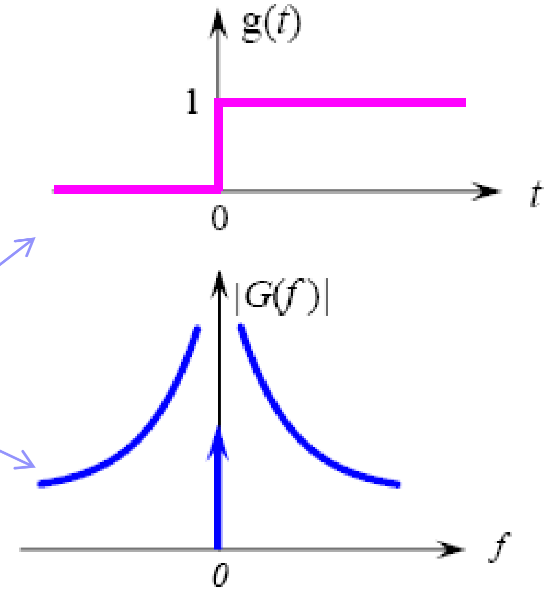
$$\sin(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)\right]$$



$\delta(t)$ Uygulamaları

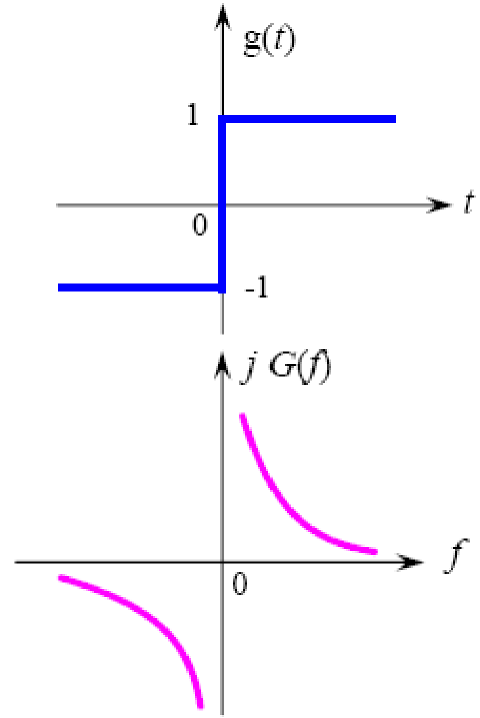
- Birim Basamak Sinyali

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f}+\frac{\delta(f)}{2}$$



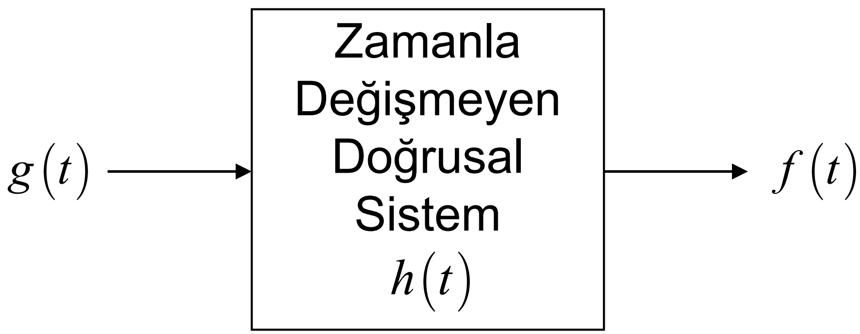
- İşaret Fonksiyonu

$$\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1 \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f}$$



Sinyallerin Zamanla Değişmeyen Doğrusal Sistemlerden İletimi

- **Doğrusal Sistemler**



Eğer bir sistem hem doğrusalsa hem de zamanla değişmiyorsa o zaman bu sistemin giriş çıkış ilişkisi şu şekilde tanımlanır:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Sinyallerin Zamanla Değişmeyen Doğrusal Sistemlerden İletimi

Bu ifadeye konvolüsyon integrali adı verilir ve çıkış ifadesi konvolüsyonun sembolik gösterimi kullanılarak da ifade edilebilir:

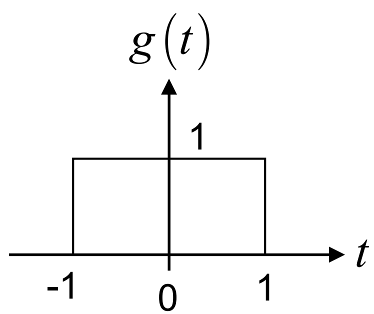
$$f(t) = g(t) * h(t)$$

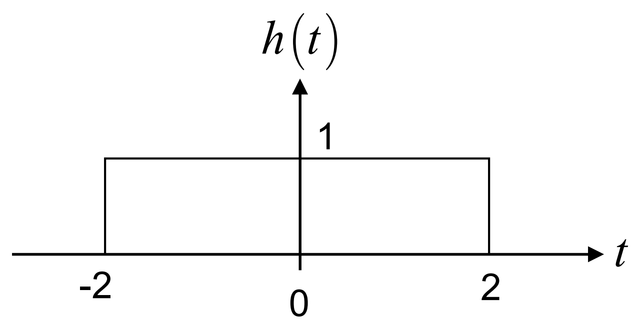
Konvolüsyon integrali doğrusal bir sistemin giriş zaman fonksiyonu ve çıkış zaman fonksiyonu arasındaki ilişkiyi sistemin birim dürtü cevabı $h(t)$ cinsinden tanımlar.

Sinyallerin Zamanla Değişmeyen Doğrusal Sistemlerden İletimi

- Örnek:

  Aşağıda şekilleri verilen fonksiyonların konvolüsyon integralini hesaplayınız.





Örnek(Devam)

$$t < -3 \quad \Rightarrow \quad \text{üst üste çakışma yok}, f(t) = 0$$

$$-3 \le t \le -1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{-3}^{t} (1)(1)\,d\tau = \tau\Big|_{-3}^{t} = t + 3$$

$$-1 \le t \le -1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{-1}^{1} (1)(1)\,d\tau = \tau\Big|_{-1}^{1} = 1 + 1 = 2$$

$$1 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{t}^{3} (1)(1)\,d\tau = \tau\Big|_{t}^{3} = 3 - t$$

$$t > 3 \quad \Rightarrow \quad \text{üst üste çakışma yok}, f(t) = 0$$