ELK 307
İletişim Kuramı-I

Nihat KABAOĞLU

Ders 3

Dersin İçeriği

- Sinyaller ve Sistemlerin Temelleri
  - Enerji ve Güç Spektral Yoğunluğu
  - Öz ve Çapraz İlinti Fonksiyonları
  - Hilbert Transformu ve Özellikleri
  - Ön Zarf ve Kompleks Zarf Kavramları
  - Bant Geçiren Sinyal ve Sistemler
  - Faz ve Grup Gecikmesi

Kısım-2

Sinyaller ve Sistemlerin Temelleri

Enerji ve Güç Spektrumları

- Hem deterministik hem de periyodik olmayan sinyaller enerji sinyalleridir.
- Periyodik sinyaller ve rasgele sinyaller güç sinyalleridir.

Enerji Spektral Yoğunluğu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(f)\right|^2 df$$

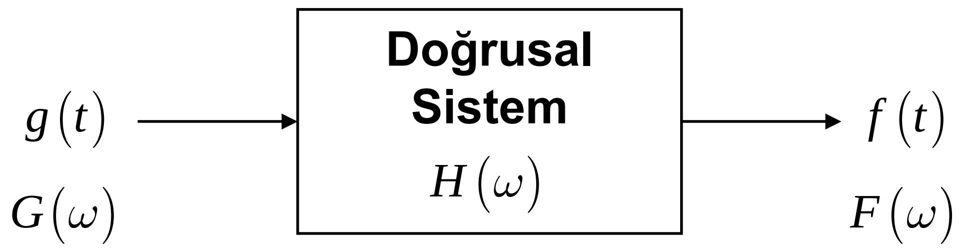
Bu ilişki Parseval teoremi olarak bilinir ve şunu ifade eder: Bir *f*(*t*) sinyalinin toplam enerjisi *f*(*t*)' nin tüm frekans bileşenlerinin toplam enerjisine eşittir.

Enerji ve Güç Spektrumları

$|F(\omega)|$, $f(t)$' nin genlik spektrumu

$\Psi_f(\omega) = |F(\omega)|^2$ enerji spektral yoğunluğu olarak tanımlanır.

Enerji Spektral Yoğunluğunun birimi [Joule / Hz]' dir.



$$F(\omega) = H(\omega)G(\omega)$$

$$\Psi_f(\omega) = |F(\omega)|^2 = |H(\omega)G(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |G(\omega)|^2$$

$$\boxed{\Psi_f(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_g(\omega)}$$

Enerji ve Güç Spektrumları

Güç Spektral Yoğunluğu

f(*t*) bir güç sinyali ise (-∞,∞) aralığında sonsuz bir enerjiye sahiptir. Fourier dönüşümünü bulmak için *f*(*t*)' nin kesilmiş hali olan $f_T(t)$ sinyali kullanılmalı.

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & , \quad |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_T(\omega) \right|^2 d\omega \right)$$

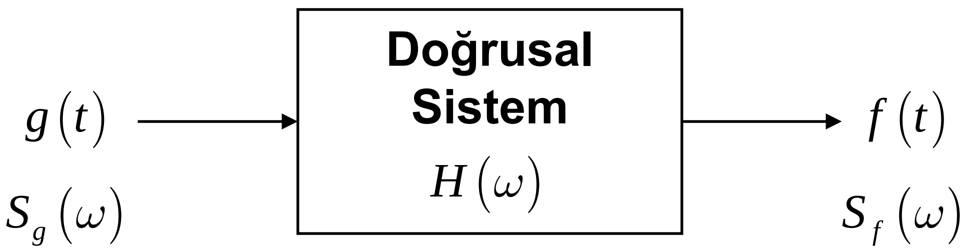
$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\left| F_T(\omega) \right|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,d\omega$$

Enerji ve Güç Spektrumları

Bu durumda *f*(*t*)' nin güç spektral yoğunluğu

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T} \quad \Rightarrow \quad S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\Psi_f(\omega)}{T}$$

Güç Spektral Yoğunluğunun birimi [Watt / Hz]' dir.



$$S_f(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 S_g(\omega)$$

Özilinti Fonksiyonu

- Özilinti fonksiyonu, bir sinyalin belli bir miktar geciktirilmiş hali ile kendisi arasındaki benzerlik veya uyumun bir ölçüsüdür.
  - Enerji Sinyalleri İçin:

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau) g^*(t)\, dt$$

  - Özellikleri
    - $R_g(\tau) = R_g^*(-\tau)$
    - $\left| R_g(\tau) \right| \le R_g(0), \quad \forall \tau$
    - $R_g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(t) \right|^2 dt$
    - $R_g(\tau) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \Psi(f)$

Özilinti Fonksiyonu

- Güç Sinyalleri (Periyodik) için:

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) g_p^*(t-\tau)\, dt$$

- Özellikleri:

  - $R_{gp}(\tau) = R_{gp}^*(-\tau)$
  - $R_{gp}(\tau) \le R_{gp}(0), \quad \forall \tau$
  - $R_{gp}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left| g_p(t) \right|^2 dt$
  - $R_{gp}(\tau) = R_{gp}(\tau + nT_0), \; n = 1, 2, \ldots$
  - $R_{gp}(\tau) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} S_{gp}(f)$

Karşılıklı İlinti Fonksiyonu

- Bir sinyal ile, başka bir sinyalin belli bir miktar geciktirilmiş hali arasındaki benzerlik veya uyumun bir ölçüsüdür.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) g_1^*(t-\tau)\, dt$$

  - Özellikleri
    - $$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = 0 \Rightarrow R_{12}(\tau) = 0$$
    - $$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau) \Rightarrow R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau)$$
    - $$R_{12}(\tau) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} G_1(f)\, G_2^*(f)$$

Karşılıklı İlinti Fonksiyonu

- Güç Sinyalleri (Periyodik) için:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_1(t) g_2^*(t-\tau)\, dt$$

Sinyallerin periyodu aynı ve T_0 ise,

- $$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{p1}(t)\, g_{p2}^*(t)\, dt$$

- $$R_{12}(\tau) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) G_2^*\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Doğrusal Sistemlerden İletim

$$x(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Birim Dürtü Cevabı}\\ h(t)\end{array}} \rightarrow y(t)$$

Zaman Bölgesi

$$h(t)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-j2\pi f t} df$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Frekans Bölgesi

$$H(f)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$Y(f) = H(f) X(f)$$

$$H(f) = |H(f)| e^{j\beta(f)}$$

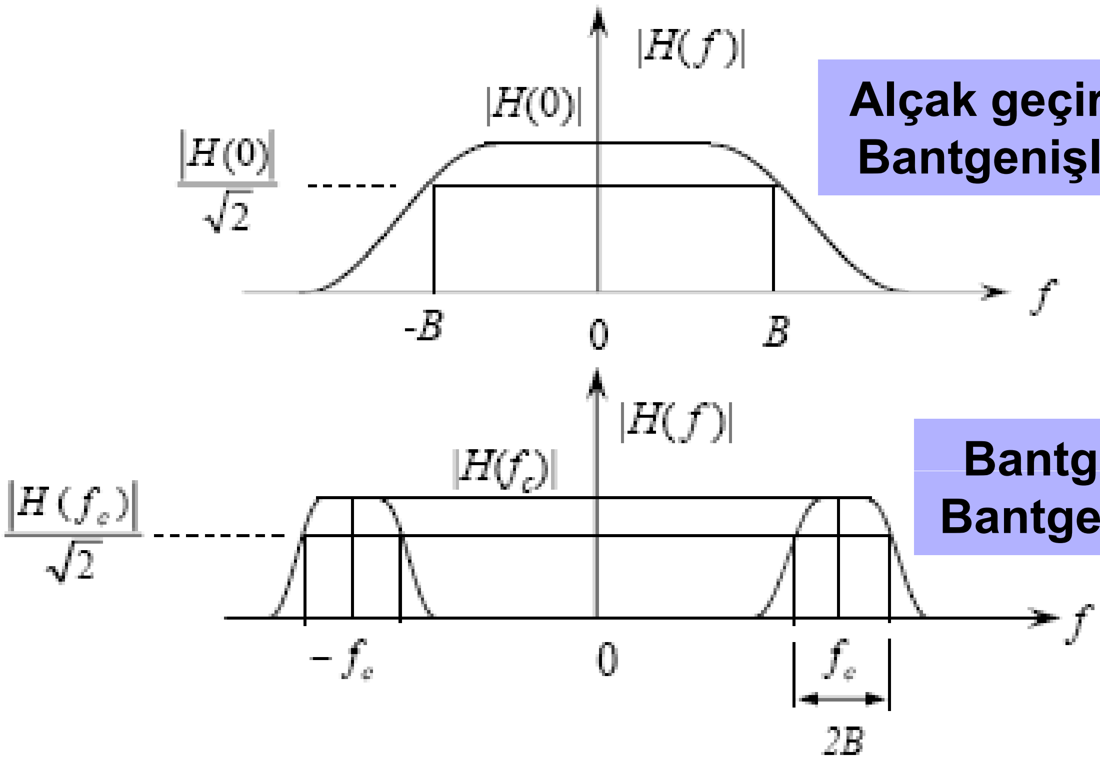
Genlik Cevabı

Faz Cevabı

$$\boxed{\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega)}$$

Giriş ve Çıkış Arasındaki
Enerji Spektral Yoğunluğu İlişkisi

Doğrusal Sistemlerden İletim



Alçak geçiren sistem
Bantgenişliği = B Hz

Bantgeçiren sistem
Bantgenişliği = 2B Hz

Genlik cevabının sıfır frekanstaki değerinin $1/\sqrt{2}$ ‘ sine düştüğü frekans aralığına 3dB bant genişliği denir.

Bozulmasız İletim

$$y(t) = Kx(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ke^{-j2\pi f t_0}}$$

Daha genel bir ifadeyle,

$$H(f) = Ke^{j(-2\pi f t_0 \pm n\pi)}$$

Öyleyse, $|H(f)| = K \quad ve \quad \beta(f) = -2\pi f\, t_0 \pm n\pi$ **olmalıdır.**

DİKKAT!

İletimde iki tür bozulma olabilir: **1. Genlik bozulması**
2. Faz bozulması

Hilbert Dönüşümü

Hilbert Dönüşümü

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{(t-\tau)}d\tau$$

Ters Hilbert Dönüşümü

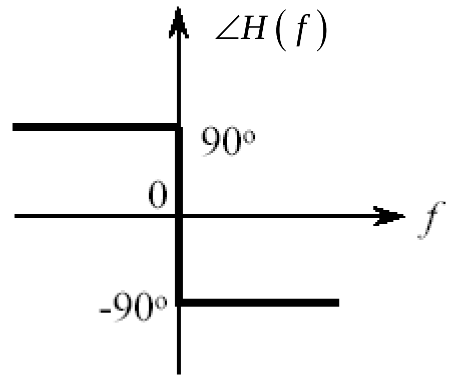
$$g(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{(t-\tau)}d\tau$$

$$g(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = 1/\pi t} \longrightarrow \hat{g}(t)$$

$$\hat{g}(t) = g(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$G(f) \longrightarrow \boxed{H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)} \longrightarrow \hat{G}(f)$$

$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)$$



Örnek

$$g(t) = \cos(2\pi f_c t)$$

$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)G(f) = \frac{-j}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]\mathrm{sgn}(f)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{G}(f)\right\} = \hat{g}(t) = \sin(2\pi f_c t)$$

Aynı şekilde, $g(t) = \sin(2\pi f_c t)$ için

$$\hat{g}(t) = -\cos(2\pi f_c t)$$

Hilbert Dönüşümünün Özellikleri

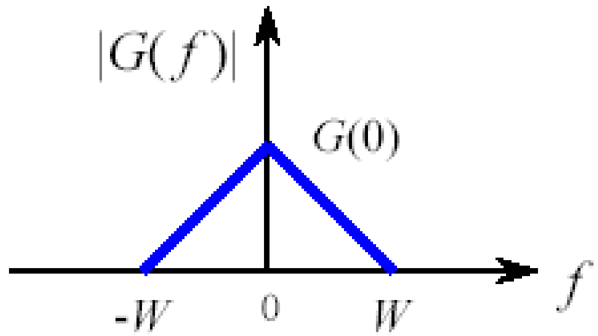
- $g(t)$ ve $\hat{g}(t)$‘ nin spektral yoğunlukları aynıdır.
- $g(t)$ ve $\hat{g}(t)$ ‘ nin özilinti fonksiyonları aynıdır.
- $g(t)$ ve $\hat{g}(t)$ birbirine diktir.
- $\hat{g}(t)$‘ nin Hilbert Dönüşümü $-g(t)$ ‘ dir.

Hilbert Dönüşümü’ nün Fiziksel Anlamı

Bu filtre güçlendirme ya da zayıflatma yapmaz, frekans bileşenlerinin genlikleri değişmez. Ancak, bu filtre her frekans bileşeninin fazını 90^0 kaydırır. Her frekans bileşenine 90^0 ’lik faz kayması vermek sinyale sabit bir gecikme vermek anlamına gelmez. Çünkü, 90^0 ’lik faz farkı her frekans bileşeni için farklı sürelerde gecikmelere karşı gelir.

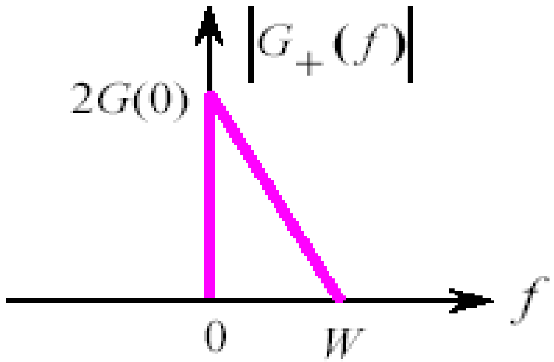
Ön Zarf

$$g_{+}(t) = g(t) + j\hat{g}(t)$$



$$G_{+}(f) = G(f) + j\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right]G(f)$$

$$G_{+}(f) = \begin{cases} 2G(f) & , \quad f > 0 \\ G(0) & , \quad f = 0 \\ 0 & , \quad f < 0 \end{cases}$$



$$g_{+}(t) = 2\int_{0}^{\infty} G(f)\,\mathrm{e}^{j2\pi f t}\,df$$

Kompleks Zarf

- Dar bantlı bir g(*t*) sinyalinin ön zarfının temel bant şekli Kompleks Zarf olarak adlandırılır ve $\tilde{g}(t)$ ile gösterilir.

Yani, $\boxed{g_+(t) = \tilde{g}(t)e^{j2\pi f_c t}}$ ya da $\boxed{\tilde{g}(t) = g_+(t)e^{-j2\pi f_c t}}$

$g(t) = \mathrm{Re}\left[g_+(t)\right]$ olduğundan $\boxed{g(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{g}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]}$

$\tilde{g}(t) = g_c(t) + jg_s(t)$

$g_c(t)$: **Eş Fazlı Bileşen**

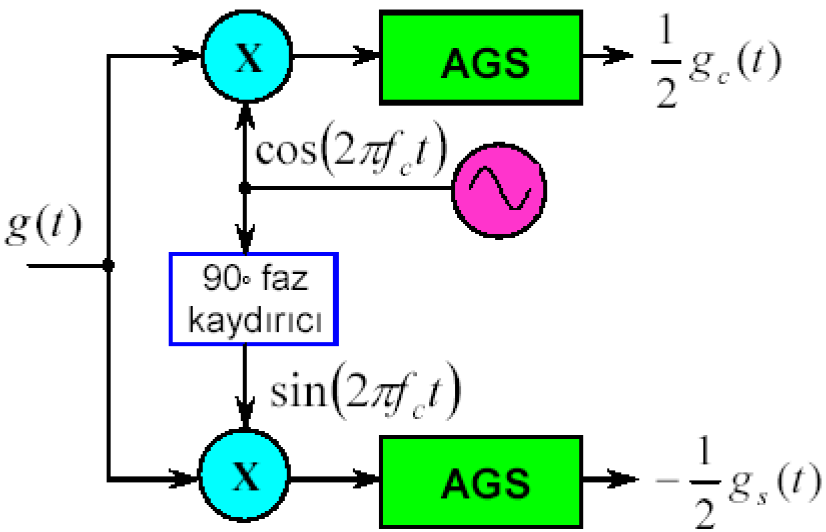
$g_s(t)$: **Dik Fazlı Bileşen**

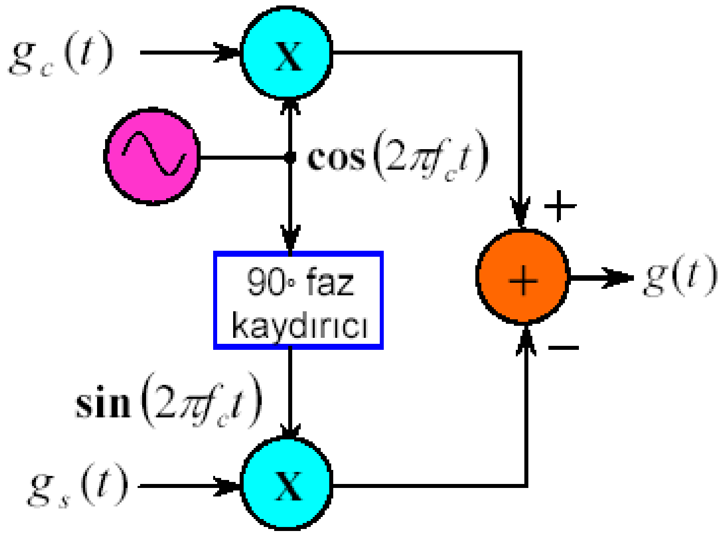
Gerçel değerli alçak geçiren

$\boxed{\tilde{g}(t) = a(t)e^{j\phi(t)}}$ $\boxed{g(t) = a(t)\cos(2\pi f_c t)}$ $a(t)$: **Zarf Doğal Zarf**

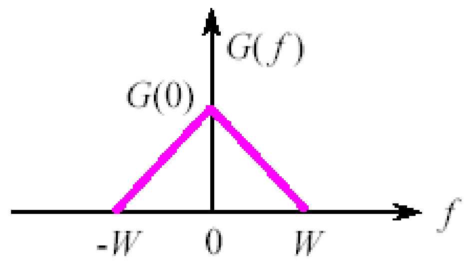
$\boxed{\tilde{g}(t) = g_c(t)\cos(2\pi f_c t) - g_s(t)\sin(2\pi f_c t)}$ **Kanonik Yapı**

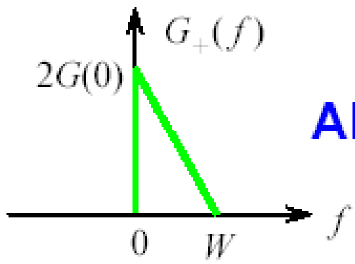
Eş ve Dik Fazlı Bileşenler



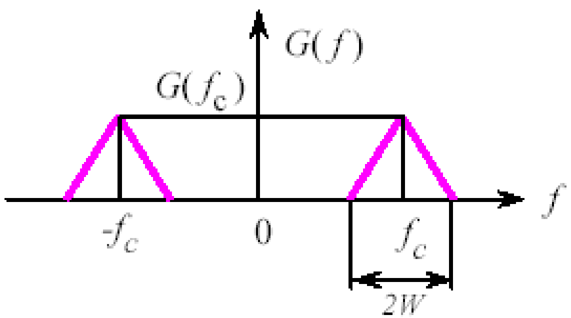


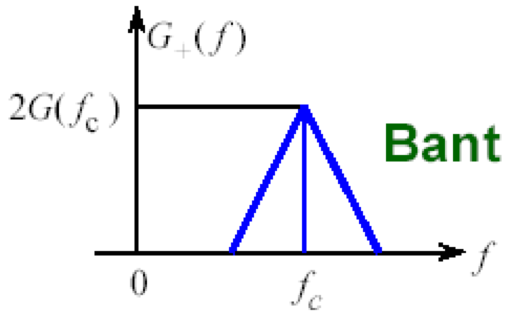
Zarf Örnekleri



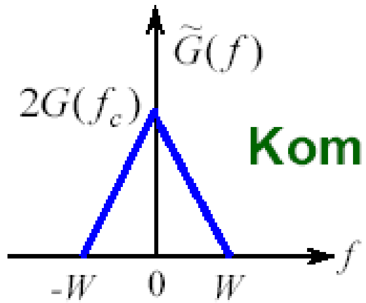


Alçak geçiren ön zarf





Bant geçiren ön zarf



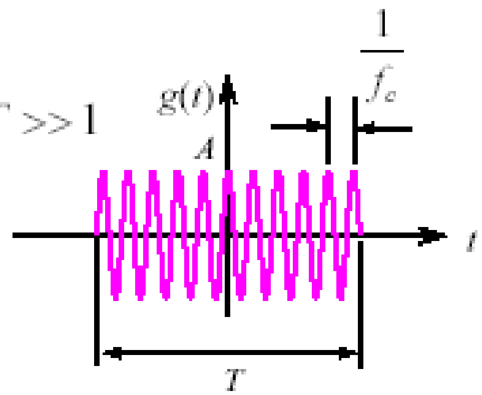
Kompleks zarf

Örnek

$$g(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t) \quad , \quad G(f) \approx \begin{cases} \frac{AT}{2}\mathbf{sinc}[T(f-f_c)] \ , & f > 0 \\ \frac{AT}{2}\mathbf{sinc}[T(f+f_c)] \ , & f < 0 \end{cases}$$

$$G_+(f) = \begin{cases} AT\,\mathrm{sinc}[T(f-f_c)] & f > 0 \\ 0 & f \le 0 \end{cases} \qquad g_+(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{exp}(j2\pi f_c t)$$

$f_c T >> 1$



$$\tilde{g}(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

Zarflara Genel Bakış

- **Ön Zarf** $$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t)$$

  - Alçak veya bant geçiren olabilir.
  - Kompleks değerlidir.

- **Kompleks Zarf** $$\tilde{g}(t) = g_+(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

  - Genellikle kompleks değerlidir.
  - Alçak geçiren bir sinyaldir.
  - Ön zarfın ötelenmiş halidir.

- **Doğal Zarf** $$a(t) = \left|\tilde{g}(t)\right| = \left|g_+(t)\right|$$

  - Kompleks veya ön zarfın genliğidir.
  - Her zaman gerçel değerli ve alçak geçirendir.

Bantgeçiren Sistemler

- Bantgeçiren sistemler de, bantgeçiren sinyaller gibi kanonik formda veya kompleks zarf cinsinden temsil edilirler. Birim dürtü cevabı h(t) olan bantgeçiren bir sistem için:

$$h(t) = h_c(t)\cos(2\pi f_c t) - h_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$\tilde{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t)$$

$$h(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{h}(t)\exp(2\pi f_c t)\right]$$

- Bantgeçiren bir sistemin bantgeçiren bir sinyale cevabı:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Bantgeçiren}\\ \text{Sistem}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Bantgeçiren Sistemler

- Kompleks zarflar yardımıyla daha basit olarak

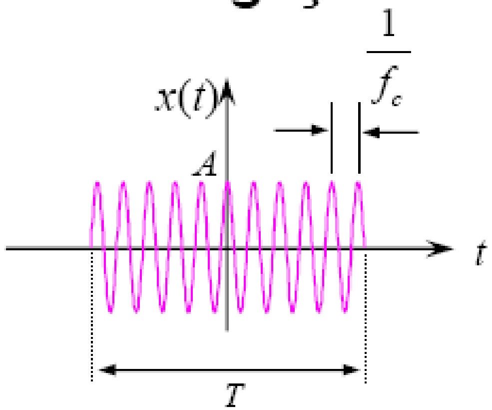
$$\tilde{y}(t) = \tilde{h}(\tau) * \tilde{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)\,d\tau$$

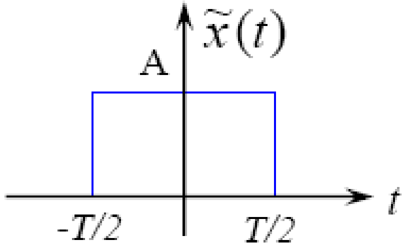
$$y(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

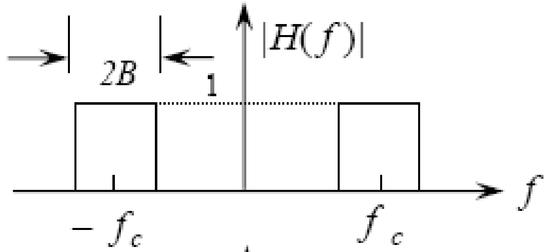
çıkış ifadesine ulaşmak mümkündür.

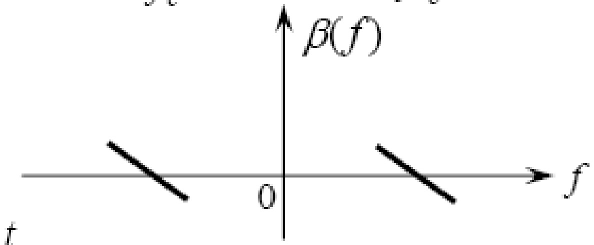
Örnek

İdeal bant geçiren süzgecin RF darbesine cevabını bulunuz.



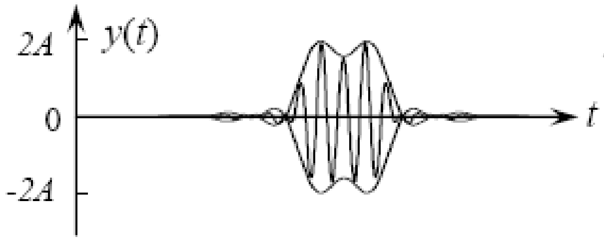






$$x(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

$$\tilde{x}(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} 2\exp(-j2\pi f t_o), & -B < f < B \\ 0, & |f > B| \end{cases}$$

$$\tilde{h}(t) = 4B\,\mathrm{sinc}[2B(t - t_o)]$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{2A}{\pi}\left\{Si\left[2\pi B\left(t + \frac{T}{2} - t_o\right)\right] - Si\left[2\pi B\left(t - \frac{T}{2} - t_o\right)\right]\right\}$$

$$y(t) = \tilde{y}(t)\cos(2\pi f_c t)$$

Grup ve Faz Gecikmesi

- Fazı $\beta(f)$ olan aşağıdaki doğrusal olmayan sistemi ele alalım.

$$\tau_p = -\frac{\beta(f_c)}{2\pi f_c} \longrightarrow \text{Faz Gecikmesi}$$

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\beta(f)}{\partial f}\bigg|_{f=f_c} \longrightarrow \text{Grup Gecikmesi}$$

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) = Kx_c(t-\tau_g)\cos\left[2\pi f_c(t-\tau_p)\right]$$