



ELK 307

İletişim Kuramı-I

Nihat KABAOĞLU

Ders 7

Dersin İçeriği

■ Temel Tanımlar

- ☐ Frekans Modülasyonu (FM)
- ☐ Faz Modülasyonu (PM)

■ Tek Tonlu FM

■ Dar Bantlı FM

■ Çok Tonlu FM

■ FM Sinyallerinin Üretilmesi

■ FM Sinyallerinin Demodülasyonu

- ☐ Frekans Diskriminatörü
- ☐ Faz Kilitlemeli Çevrim



Kısım-5

Açı Modülasyonu

Temel Tanımlar

Açı Modülasyonu

Bir taşıyıcı sinyalin açısının $m(t)$ sinyalinin genliğiyle değiştirilmesi ile elde edilir. Açı, frekans veya faz vasıtasıyla iki ayrı yolla değiştirilebilir. Bu yüzden, açı modülasyonu, seçilen yaklaşıma göre

- Frekans modülasyonu
- Faz modülasyonu

şeklinde yapılır.

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

Taşıyıcı sinyal

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

Açının $t=0$ anındaki değeri

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

Açı

$$\phi_c$$

Faz

Temel Tanımlar

Faz Modülasyonu

$\theta_i(t)$, $m(t)$ **temel bant sinyaliyle orantılı olarak değiştirilir.**

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

Modülasyonsuz
taşıyıcının açısı

Modülatörün
faz duyarlılığı
[rad/volt]

Modüle edilmiş sinyal

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

Not: $\phi_c = 0$ kabul edilmiştir.

Temel Tanımlar

Frekans Modülasyonu

$f_i(t)$, $m(t)$ **temel bant sinyaliyle doğrusal orantılı olarak değiştirilir.**

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

Modülasyonsuz
taşıyıcının
frekansı

Modülatörün
frekans duyarlılığı
[Hz/volt]

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Modüle edilmiş sinyal

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

Not: $\phi_c = 0$ kabul edilmiştir.

Temel Tanımlar

Çıkarımlar

Genlik Modülasyonu

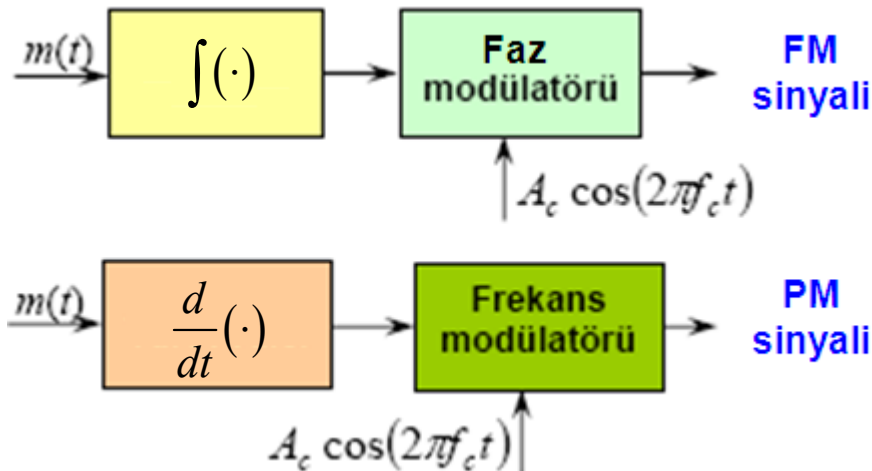
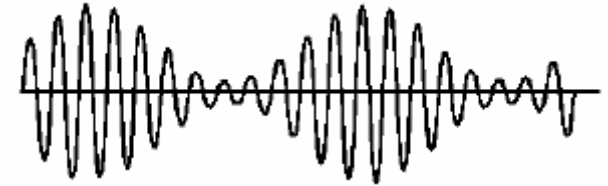
Sinyal sıfır geçişleri düzgün

Sinyal genliği sabit değil

Açı Modülasyonu

Sinyal sıfır geçişleri düzgün değil

Sinyal genliği sabit



FM sinyali Faz Modülatörü ile
veya PM sinyali Frekans
Modülatörü ile üretilebilir.

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

$$s_{PM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

Tek Tonlu FM

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

$$\Delta f = k_f A_m \longrightarrow f_c \text{ 'den maksimum sapma frekansı}$$

Dikkat! Δf , $m(t)$ nin genliğine bağlı.

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= 2\pi \int_0^t f_i(\tau) d\tau \\ &= 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \\ &= 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

Modülasyon İndeksi
 $m(t)$ nin genliğine ve frekansına bağlı.

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Darbant FM : β küçük

Genişbant FM : β büyük

Örnek

Frekansı 100 MHz olan bir taşıyıcının tepe değeri 3V' tur. Frekansı 2kHz olan bir sinüsoidal, bu taşıyıcının frekansını modüle etmekte ve taşıyıcı frekansındaki max. sapma 75 KHz olmaktadır. *t=0 anında* modüle eden sinyalin değeri sıfır ise, modüle edilmiş sinyalin ifadesi hangisidir?

- a) $3 \cos(2\pi 10^8 t + 37.5 \sin(4\pi 10^3 t))$
- b) $3 \cos(2\pi 10^8 t - 37.5 \cos(4\pi 10^3 t) + 37.5)$
- c) $3 \cos(2\pi 10^8 t - 37.5 \sin(4\pi 10^3 t))$
- d) $3 \cos(2\pi 10^8 t - 37.5 \cos(4\pi 10^3 t))$
- e) Hiçbiri

Tek Tonlu FM

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

$$\begin{aligned} c_n &= f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \tilde{s}(t) \exp(-j2\pi n f_m t) dt \\ &= f_m A_c \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt \\ c_n &= \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin x - nx)] dx = J_n(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}[A_c \exp(j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t))] \\ &= \text{Re}[\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \end{aligned}$$

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

FM sinyalinin Kompleks zarfı

$$J_n(\beta)$$

**n. mertebeden
birinci tür Bessel
fonksiyonu**

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t)$$

$$s(t) = A_c \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t] \right]$$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

Tek Tonlu FM

Genlik Modülasyonunun tersine

- FM doğrusal olmayan bir modülasyondur.
- FM sinyallerinin spektrumunun $m(t)$ ile bağlantısı basit değildir.
- FM sinyalinin bant genişliği, $m(t)$ ' ninkinden çok büyüktür.
- FM sinyallerinin spektrumu, bir taşıyıcı ve etrafına simetrik olarak yerleşmiş sonsuz sayıda yan frekanslar içerir.
- FM sinyalinin taşıyıcı genliği $J_0(\beta)$ ile modülasyon indeksine bağlıdır.

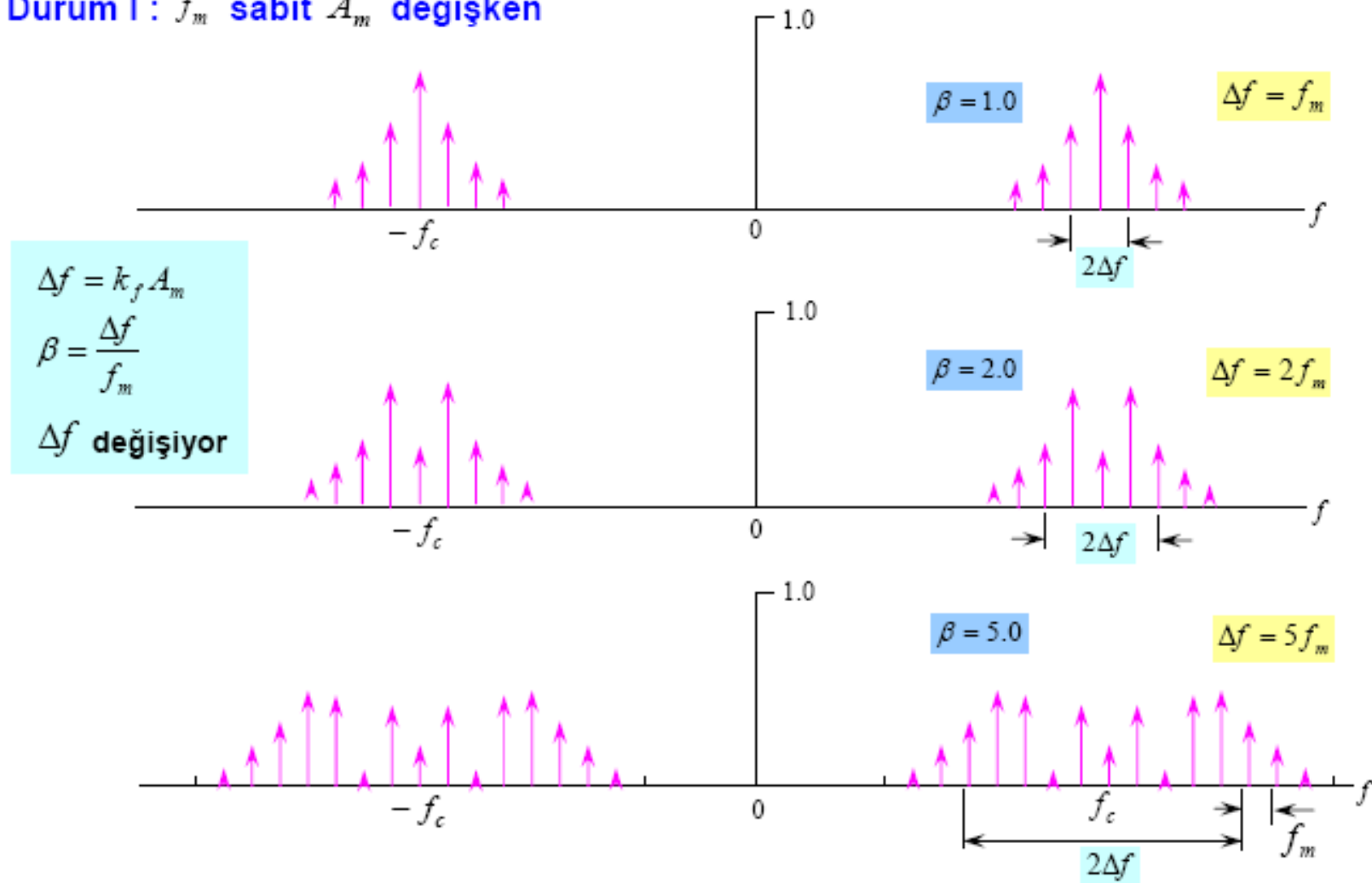
Modüle eden sinüzoidal sinyal $m(t)$ nin genlik ve frekansındaki değişimler FM sinyalinin spektrumunu nasıl etkiler?

Bunu iki ayrı durumda incelemek gerekir:

1. Frekans sabit, Genlik değişken
2. Genlik sabit, Frekans değişken

Tek Tonlu FM

Durum I : f_m sabit A_m değişken



Tek Tonlu FM

Durum I : A_m sabit f_m değişken

Not: Sadece pozitif frekanslar gösterilmiştir

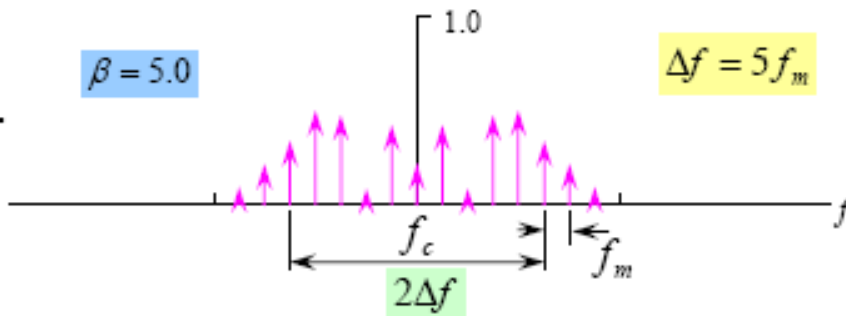
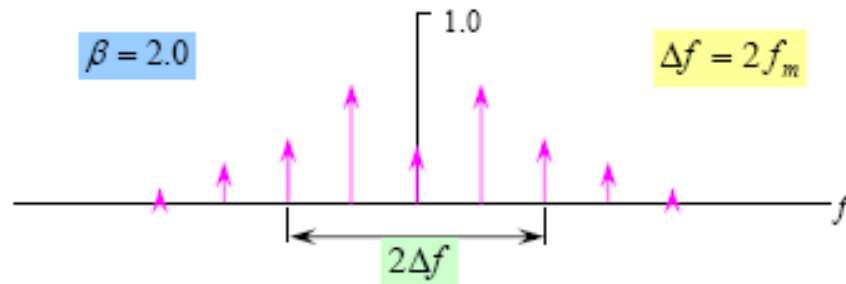
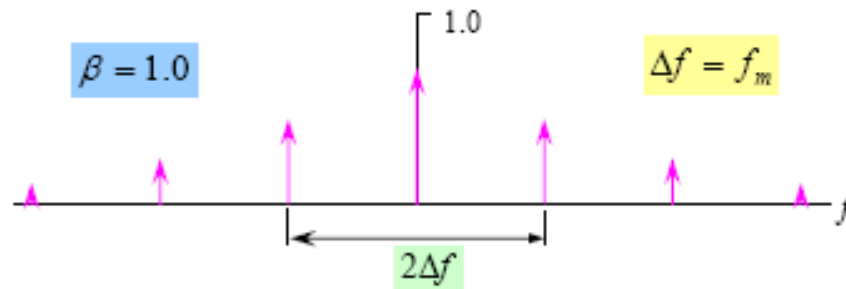
$$\Delta f = k_f A_m$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

f_m değişiyor

$$B_T \cong 2(\Delta f + f_m) = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Carson kuralı ile
transmisyon bant genişliği.



Örnek

FM'de modüle eden sinyalin genliği 2 katına çıkar ve frekansı da yarıya düşerse, maksimum frekans sapması / komşu spektral bileşenler arasındaki mesafe,

- a) artar/artar b) artar/azalır c) azalır/aynı kalır
d) artar/aynı kalır e) bir şey söylenemez**

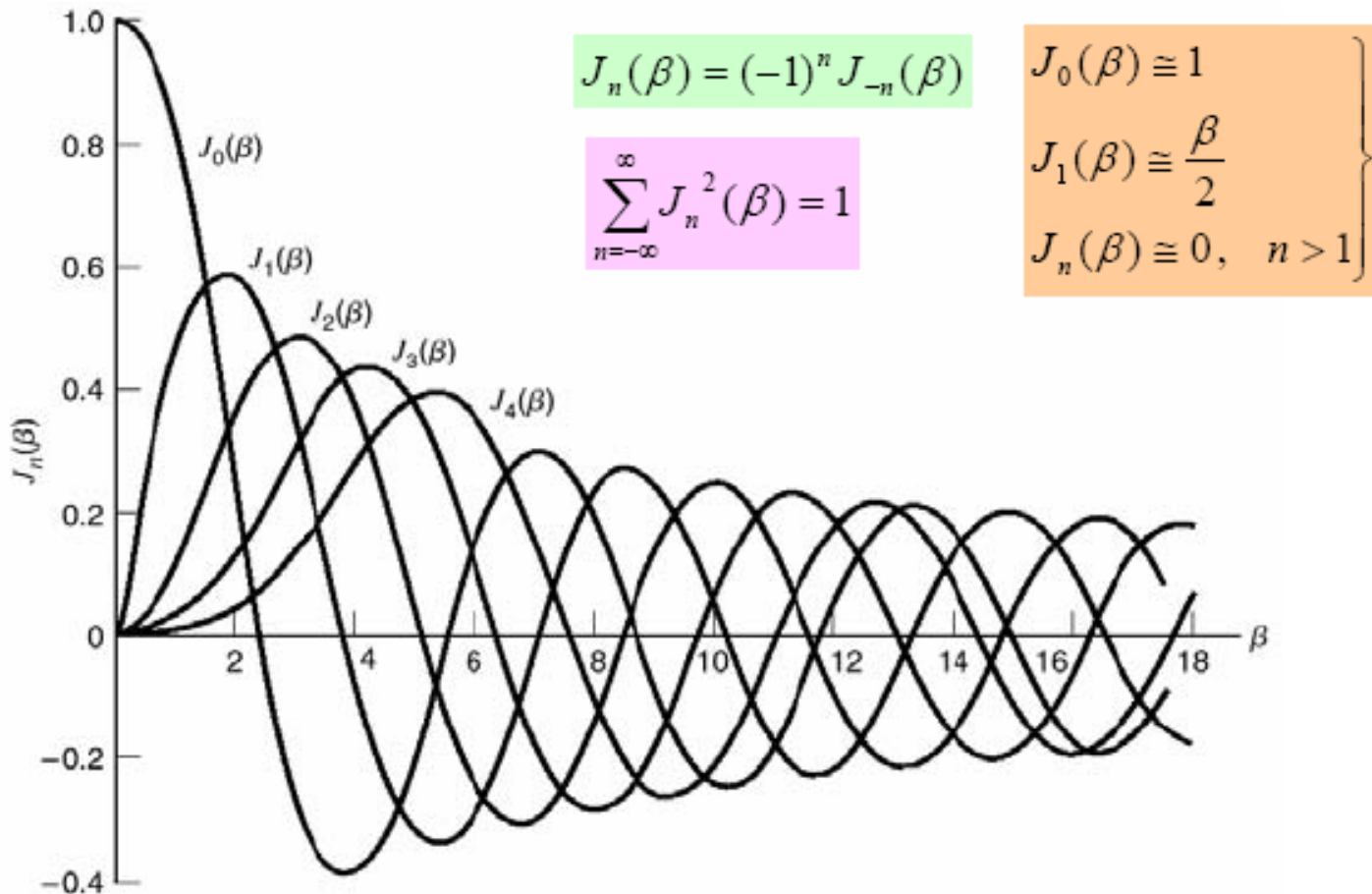
$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ **sinyali** $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ **taşıyıcı sinyalini bir**

AM bir de FM yapmaktadır. FM sinyalinin maksimum frekans sapması, AM sinyalinin bant genişliğinin 4 katı olacak şekilde ayarlandığına göre, FM sinyalinin modülasyon indeksi nedir?

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{4(2f_m)}{f_m} = 8$$

Tek Tonlu FM

Bessel Fonksiyonunun Özellikleri



*küçük β
değerleri için*

Dar Bantlı FM

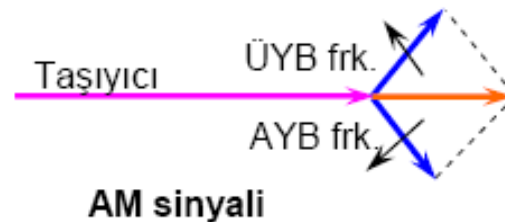
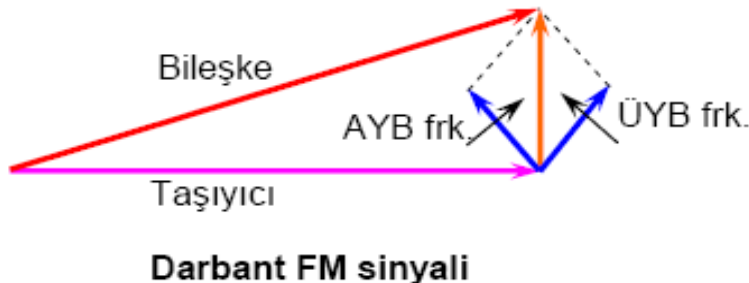
$\beta \ll 1$ olduğunda FM spektrumunun $J_0(\beta)$ ve $J_1(\beta)$ haricindeki bileşenleri ihmal edilebilir değerde olduğundan, sinyal sadece $f_c \pm f_m$ yan frekanslarından oluşmaktadır. Bu durumda sinyal, Darbant FM olarak adlandırılır.

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

$\beta \ll 1$ için sinyal bileşenlerinden sadece $n = -1, 0, 1$ için olanları anlamlıdır.

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \beta A_c \{ \cos[2\pi(f_c - f_m)t] - \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \}$$

$$s_{AM}(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \mu A_c \{ \cos[2\pi(f_c - f_m)t] + \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \}$$



Darbant FM bant genişliği AM bant genişliği ile aynıdır.

Çok Tonlu FM

Pratikte kullanılan sinyaller, çok sayıda (binlerce) tondan meydana gelirler.

$$m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)] \quad \beta_1 = \frac{\Delta f_1}{f_1} \quad \beta_2 = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

$$s(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t]$$

Sinyal dört tür terimden meydana gelir:

1. f_c frekansında ve $J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$ terimli taşıyıcı bileşeni.
2. $f_c \pm mf_1$ frekanslarında $J_m(\beta_1)J_0(\beta_2)$ terimli yan frekanslar.
3. $f_c \pm nf_2$ frekanslarında $J_0(\beta_1)J_n(\beta_2)$ terimli yan frekanslar.
4. $f_c \pm mf_1 \pm nf_2$ frekanslarında $J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)$ terimli yan frekanslar.

FM spektrumu, aynı modüle eden sinyal için AM spektrumu ile karşılaştırıldığında süperpozisyon ilkesinin FM için geçerli olmadığı kolayca görülür.

Örnek

$m(t) = \cos(10\pi t) + \cos(20\pi t)$ sinyali, $10 \cos(2\pi f_c t)$ sinyalinin frekansını modüle ederse, taşıyıcı genliği kaç Volt olur? ($k_f = 50 \text{ Hz/V}$ alınız)

- a) $J_2(5)J_1(10)$ b) $J_1(10)J_2(5)$ c) $J_m(10)J_n(5)$ d) H.B.

$$\beta_1 = \frac{50 \text{ Hz/V} \times 1}{5} = 10$$

$$\beta_2 = \frac{50 \text{ Hz/V} \times 1}{10} = 5$$

$$10 J_0(10) J_0(5)$$

$s(t) = 10 \cos(10^6 t + 5 \sin(\pi 10^3 t))$ FM sinyalinin:

a) Modülasyon indeksi kaçtır? $\beta = 5$

b) Maksimum frekans sapması ne kadardır?

$$\Delta f = \beta f_m = 5(500 \text{ Hz}) = 2.5 \text{ kHz}$$

c) Taşıyıcı spektral genliği? $\frac{A_c}{2} J_0(\beta) = 5 J_0(5)$