Başkent Üniversitesi
MAT 340 OLASILIK

Bölüm 4 BAZI KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay
Öğr.Gör.Dr. Pelin Toktaş

Kesikli Düzgün Dağılım

- X rassal değişkeni eşit olasılıklarla $x_1, x_2, ..., x_k$ değerlerini alabiliyorsa, kesikli düzgün dağılım aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x;k) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & x = x_1, x_2, ..., x_k \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

Örnek 1

- Birer tane 40-watt, 60-watt, 75-watt ve 100-wattlık ampul bulunan bir kutudan rasgele seçildiğinde örnek uzay

  $S = \{40, 60, 75, 100\}$ şeklindedir.

- Her bir sonucun ortaya çıkma şansı birbirine eşittir. Bu durumda olasılık dağılımı,

$$f(x;4) = \frac{1}{4}, \quad x = 40, 60, 75, 100.$$

Kesikli Düzgün Dağılımın Ortalaması ve Varyansı

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \mu\right)^2$$

Bernoulli Denemesi ve Süreci

- İki olası sonucu olan ve sonuçlarının başarı (success) ve başarısızlık (failure) olarak nitelendiği bir deneyin tekrarlandığını düşünelim.
- Örneğin; Bir üretim hattından rasgele seçilen ürünün bozuk ya da sağlam olması deneyinde, ilgilendiğimiz sonuç ürünlerin bozuk olması ise bu sonuca başarı, diğeri de başarısızlık olarak adlandırılabilir.
- Tekrarlanan bu tip denemelere *Bernoulli süreci*, her bir denemeye de *Bernoulli denemesi* denir.

Bernoulli Sürecinin Özellikleri

- Deney *n* tekrarlanmış denemeden oluşur.
- Her bir deneme, başarı veya başarısızlık olmak üzere iki sonuçtan birisiyle sonuçlanır.
- Denemeden denemeye başarı olasılığı (*p*) sabittir, değişmez.
- Tekrarlanan denemeler birbirinden bağımsızdır.

Bernoulli Dağılımı

- Aynı koşullar altında tekrarlanan bir rassal deney veya gözlem sonuçları, olumulu-olumsuz, başarılı-başarısız, geçerli-geçersiz gibi yalnız iki şekilde gözlemlensin. *X* rassal değişkeni,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{deney olumlu} \\ 0, & \text{deney olumsuz} \end{cases}$$

- $P(X=1)=p$ $\quad\quad$ $P(X=0)=1\text{-}p=q$

Bernoulli Dağılımı

$$f(x;p)=\begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x}, & x=0,1. \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

- Bernoulli rassal değişkeninin ortalaması ve varyansı:

$$X \sim Ber(p)$$

$$\mu = E(X) = p$$

$$\sigma^2 = Var(X) = pq$$

Binomial Dağılım

- *X* rassal değişkeni, bir Bernoulli denemesinin aynı koşullar altında *n* defa tekrarlanması ile karşılaşılan başarı sayısı olarak tanımlansın. X'in olasılık dağılımı,

$$f(x;n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}, & x=0,1,\ldots,n\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

Binomial Dağılım

- Binomial rassal değişkeninin ortalaması ve varyansı:

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = Var(X) = npq$$

Örnek 2

- Bir hastalıktan kurtulma olasılığının 1/3 olduğu bilinmektedir. Bu hastalığa tutulmuş 10 kişiden,
  - Üçünün,
  - En fazla birinin,
  - İki veya daha fazlasının,
  - Üçten fazla fakat 5 veya daha azının kurtulma olasılıklarını bulunuz.

Çok Terimli (Multinomial) Dağılım

- Bir deneme k farklı sonuçlanıyor olsun. Her bir sonucun ortaya çıkma olasılıkları sırasıyla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olsun. $X_1, X_2, \ldots, X_k$: n bağımsız denemede sırasıyla i. sonucun ortaya çıkma sayısı

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} . p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Hipergeometrik Dağılım

- X rassal değişkeni, N nesne içerisinden (k tanesi başarı ve N-k tanesi başarısızlık) rasgele seçilen n nesne içerisindeki başarıların sayısı olarak tanımlansın. Bu durumda X'in olasılık dağılımı aşağıdaki gibidir:

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \max\{0,n-(N-k)\}\le x\le \min\{n,k\}.$$

Hipergeometrik Dağılımın Ortalaması ve Varyansı

- Hipergeometrik rassal değişkeninin ortalaması ve varyansı:

$$X \sim HG(N, n, k)$$

$$\mu = E(X) = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Örnek 3

- İçinde 10 sağlam 4 arızalı mal bulunan bir kutudan 5 mal rasgele alınmıştır. Seçilen bu malların,
  - Üçünün,
  - En fazla ikisinin,
  - En az üçünün sağlam çıkması olasılıklarını hesaplayınız.
  - Seçilen 5 mal içerisindeki ortalama sağlam mal sayısı kaçtır?

Negatif Binomial Dağılım

- Tekrarlanan bağımsız denemeleri, p olasılıkla başarı; 1-p=q olasılıkla başarısızla sonuçlanıyor olsun. X rassal değişkeni, k. başarıyı elde edene yapılan deneme sayısı olarak tanımlanırsa, X'in olasılık dağılımı:

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \qquad x = k, k+1, \ldots$$

Örnek 4

- Geçmiş bir zamanda yapılan bir çalışmaya göre, A şehrinde yaşayan bir kişinin köpek sahibi olma olasılığı 0.3 olduğu belirleniyor. Bir anketör bu şehirde dolaşarak rasgele insanlara köpek sahibi olup olmadığını soruyor. Anketörün konuştuğu onuncu kişinin, köpek sahibi olan beşinci kişi olma olasılığı nedir?

Geometrik Dağılım

- Tekrarlanan bağımsız denemeleri, p olasılıkla başarı; 1-p=q olasılıkla başarısızla sonuçlanıyor olsun. X rassal değişkeni, ilk başarıyı elde edene yapılan deneme sayısı olarak tanımlanırsa, X'in olasılık dağılımı:

$$f(x) = pq^{x-1}, \qquad x = 1,2,3,\ldots$$

Geometrik Dağılımın Ortalaması ve Varyansı

$$X \sim GEO(p)$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Örnek 5

- Bir üretim sürecinde, ortalama olarak her 100 üründe 1 hatalı ürün çıkmaktadır. İncelenen 5. ürünün bozuk olan ilk ürün olma olasılığı nedir?

Poisson Dağılımı

- X rassal değişkeni, belirli bir bölge veya belirli bir zaman aralığı içerisinde meydana gelen sonuçların sayısı olarak tanımlanıyorsa, X'in olasılık dağılımı,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

Poisson Dağılımının Ortalaması ve Varyansı

$$X \sim POI(\lambda t)$$

$$\mu = E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda t$$

Örnek 6

- Bir havaalanına saatte ortalama 6 uçak iniş yapmaktadır.
  - Bir saatlik zaman içerisinde tam olarak 4 uçağın inme olasılığı nedir?
  - Yarım saatlik zaman içerisinde en az 1 uçağın iniş yapma olasılığı nedir?
  - Bir çalışanın 12 saatlik çalışma zamanı içerisinde ortalama kaç uçağın inmesi beklenir?

Kaynak

- Walpole, Ronald E.; Myers, Raymond H.; Myers, Sharon L. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Pearson Education.