Başkent Üniversitesi
MAT 340 Olasılık

Bölüm 6 Rassal Süreçler

Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay
Öğr. Gör. Dr. Pelin toktaş

Rassal Süreçlere Giriş

- Gerçek hayatta, zaman içerisinde gelişen dalga şekilleri ile ilgilenme ihtiyacı ortaya çıkabilmektedir.

- Bazı sistemlerdeki istenilen bir sinyal rassal olabilir.

Rassal Süreçlere Giriş

- Örneğin, ikili haberleşme sisteminde veri akışı rassaldır. Çünkü akıştaki her veri rastlantısaldır.
- Diğer taraftan, istenilen bir sinyal genellikle gürültü (noise) adını verdiğimiz istenmeyen bir sinyalle ortaya çıkar. Gürültü mesaja engel olmakta ve sonuçta sistemin performansını kısıtlamaktadır. Bu kesimde amaç rassal dalga şekillerini tanımlamak ve sistemin performansını belirlemektir.

Rassal süreç kavramı

- Tanım: Rassal değişken kavramına zaman değişkeninin eklenmesi ile rassal süreçler elde edilir.

- X rassal değişkeni, bir deneydeki mümkün olan tüm sonuçların kümesi (S: örnek uzay)'nin bir fonksiyonu idi.

Rassal süreç kavramı

- X(t,s) fonksiyonu ise olası sonuçlara zamanın eklenmesi ile elde edilen rassal süreçtir.
- Kısaca X(t) ile de gösterilir.
- x(t) ise X(t) rassal sürecinin aldığı değerdir.

Örnek 1:

- Bir paranın 10 kez atılması deneyinde
- X_i :i. Atışta üste gelen tura sayısı i=1,2,3…,10

0,1,1,0,0,0,0,1,1,1

1,0,1,1,0,0,1,1,0,1

0,0,0,1,1,0,1,0,1,1

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \qquad\qquad\qquad X_{10}$$

Örnek fonksiyon (realizasyon)

- Tanım: Topluluğun elemanı olan her zaman fonksiyonuna ‘örnek fonksiyonu’ denir.

- Her üye zaman fonksiyonu bir örnek fonksiyondur.

X(t,s) rassal sürecinde

- t değişken, s sabit bir değer iken:

  Rassal süreç

Zamanın bir fonksiyonunu gösterir.

- t sabit bir değer ve s değişken iken:

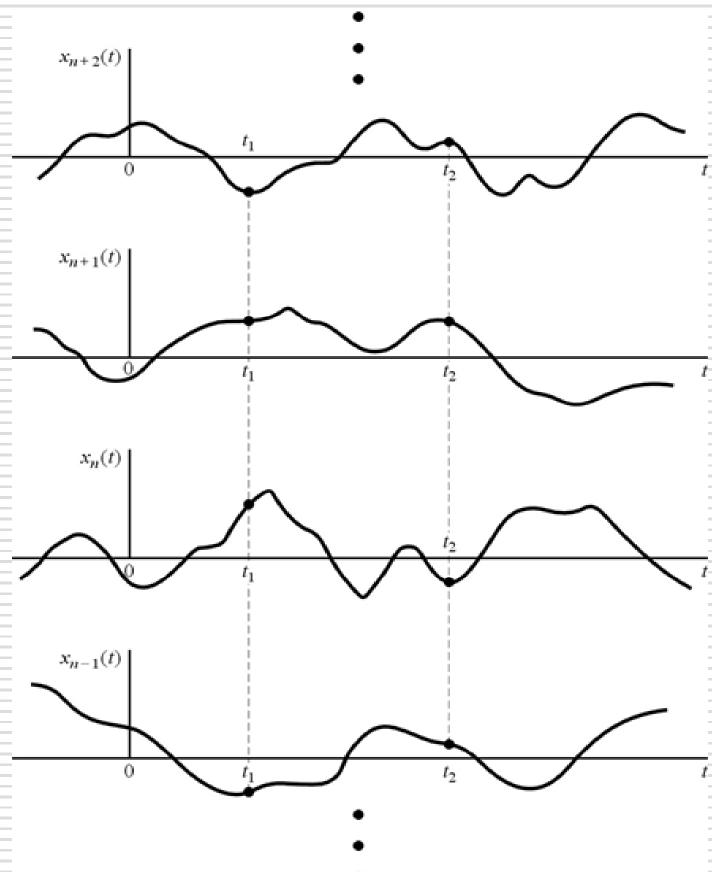
  Rassal değişken

- t ve s sabit bir değer iken:

  Sabit sayı

Rassal süreçlerin sınıflandırılması

- X rassal değişkeni sürekli ve t değişkeni sürekli iken, X(t) *'sürekli rassal süreç'* olarak adlandırılır.



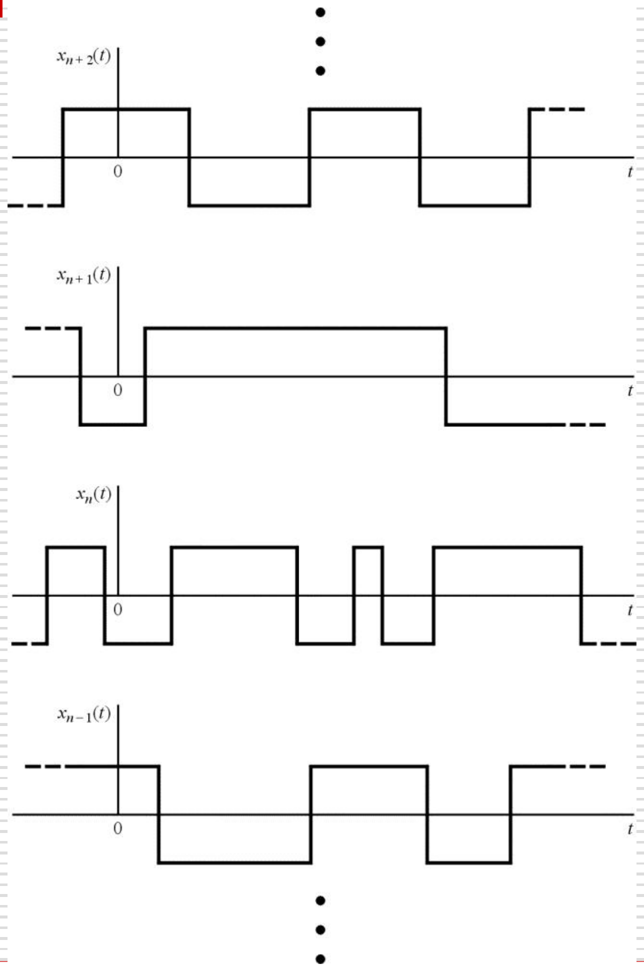
Şekil 1

Sürekli rassal süreç

- t_1 zamanında X_1'in alabileceği değerler dikey olarak gösterilmiştir.
- $X_1 = X(t_1)$'in istatistiksel özellikleri, t_1 zamanında rassal sürecin istatistiksel özelliklerini tanımlar.
- X_1'in beklenen değerine, rassal sürecin beklenen veya ortalama değeri denir.

Rassal süreçlerin sınıflandırılması

- X rassal değişkeni kesikli ve t değişkeni sürekli iken, X(t) ‘*kesikli rassal süreç*’ olarak adlandırılır.



Şekil 2

Kesikli rassal süreç

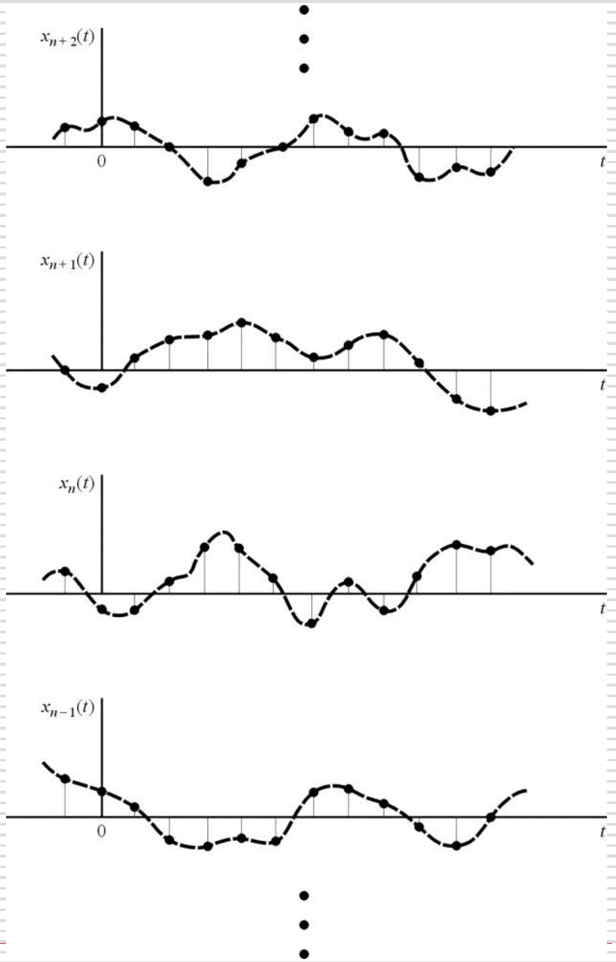
- Şekildeki kesikli rassal süreç **Şekil 1'**deki örnek fonksiyonlarının kısıtlanmasıyla elde edilmiştir.

- Burada, örnek fonksiyonları sadece 2 kesikli değere sahiptir: Pozitif seviye ve negatif seviye.

Rassal süreçlerin sınıflandırılması

- X rassal değişkeni sürekli ve t değişkeni kesikli iken, X(t) *'sürekli rassal seri'* olarak adlandırılır.

- Şekil 1'deki realizasyonlardan periyodik olarak örnek alınmasıyla elde edilir.

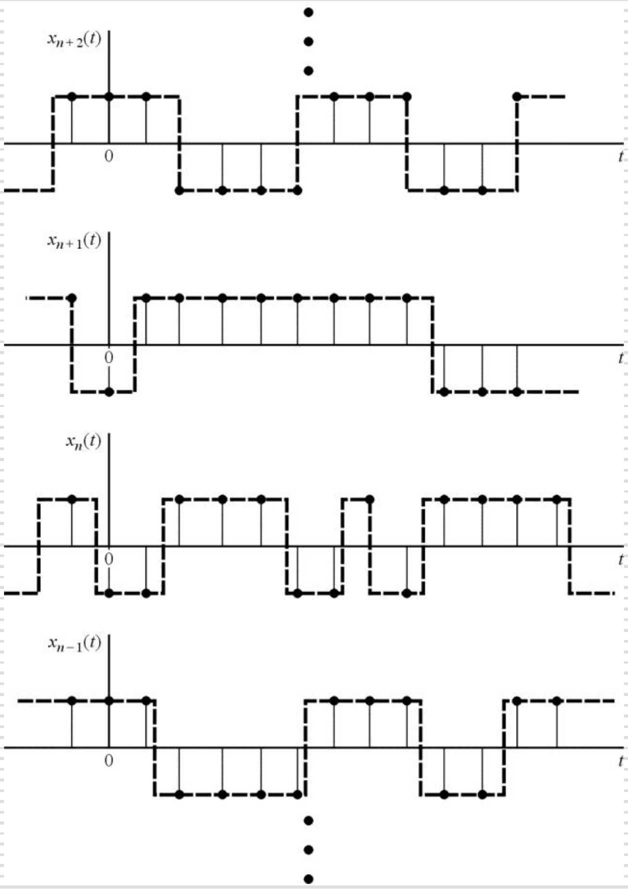


Şekil 3

Rassal süreçlerin sınıflandırılması

- X rassal değişkeni kesikli ve t değişkeni kesikli iken, X(t) '*kesikli rassal seri'* olarak adlandırılır.

- Şekil 2'deki realizasyonlardan periyodik olarak örnek alınmasıyla elde edilir.



Şekil 4

Deterministik ve Deterministik Olmayan Süreçler

Tanım: Herhangi bir örnek fonksiyonunda, gelecekteki değerler gözlenmiş eski değerlerden kesin olarak tahmin edilemiyorsa, bu sürece '*deterministik olmayan süreç*' denir. Şekil 1'deki süreç bu tip süreçlere bir örnektir.

Deterministik ve Deterministik Olmayan Süreçler

- Tanım:Herhangi bir örnek fonksiyonunda, gelecekteki değerler gözlenmiş eski değerlerden tahmin edilebiliyorsa, bu sürece *deterministik süreç* denir. Örneğin,

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

şeklinde tanımlanan süreçte, A, Θ veya ω_0 (veya hepsi) rassal değişken olabilir. Örnek fonksiyonu hakkında daha önceden bilgimiz varsa otomatik olarak örnek fonksiyonlarının gelecek değerleri için tahminde bulunabiliriz.

Otokorelasyon Fonksiyonu

$X(t)$ rassal sürecinin otokorelasyon fonksiyonu:

$$R_{XX}\left(t_1, t_2\right) = E\left(X(t_1)X(t_2)\right)$$

$t_1 = t$ ve $t_2 = t + \tau$ olarak alınırsa

$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = E\left(X(t)\,X(t+\tau)\right) \quad \tau \in R$$

En az geniş anlamda durağan süreç

- $X(t)$ rassal sürecinin *en azından geniş anlamda durağan* olması için $R_{xx}(t, t+\tau)$ sadece zaman farklarının yani

$$\tau = t_2 - t_1$$

'nun bir fonksiyonu olması gerekir.

Geniş anlamda durağan süreçler için;

$$R_{xx}(\tau) = E\big(X(t)X(t+\tau)\big)$$

olmalıdır.

Çapraz Korelasyon Fonksiyonu

$X(t)$ ve $Y(t)$ rassal süreçlerinin çapraz korelasyon fonksiyonu:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)$$

$t_1 = t$ ve $t_2 = t + \tau$ olarak alınırsa

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E\left(X(t)Y(t+\tau)\right)$$

elde edilir.

Bileşik geniş anlamda durağan

$X(t)$ ve $Y(t)$ rassal süreçleri bileşik geniş anlamda durağansa

$$R_{XY}(t, t+\tau)$$

mutlak zamandan bağımsızdır ve

$$R_{XY}(\tau) = E\left(X(t)Y(t+\tau)\right)$$

yazılabilir.

“Ortogonal” süreçler

Eğer,

$$R_{XY}\left(t, t+\tau\right) = 0$$

$X(t)$ ve $Y\left(t\right)$ rassal süreçleri **“ortogonal”** süreçler olarak adlandırılır.

“**Bağımsız”** süreçler

Eğer iki süreç istatistiksel olarak “**bağımsız”** süreçler ise, çapraz korelasyon fonksiyonu:

$$R_{XY}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X(t)\right)E\left(Y(t+\tau)\right)$$

biçiminde ifade edilir.

Bağımsızlığa ek olarak, $X(t)$ ve $Y(t)$ rassal süreçleri en azından geniş anlamda durağan süreçler ise;

$$R_{XY}(\tau) = \overline{X}\,\overline{Y} = \mu_X \mu_Y$$

olmak üzere sabittir.

Otokovaryans fonksiyonu

$$C_{XX}(t,t+\tau) = E\left[\left\{X(t)-E\left(X(t)\right)\right\}\left\{X(t+\tau)-E\left(X(t+\tau)\right)\right\}\right]$$

ya da

$$C_{XX}(t,t+\tau) = R_{XX}(t,t+\tau) - E\left(X(t)\right)E\left(X(t+\tau)\right)$$

Çapraz kovaryans fonksiyonu:

$X(t)$ ve $Y(t)$ rassal süreçlerinin *çapraz kovaryans fonksiyonu:*

$$C_{XY}(t,t+\tau)=E\left[\left\{X(t)-E\left(X(t)\right)\right\}\left\{Y(t+\tau)-E\left(Y(t+\tau)\right)\right\}\right]$$

ya da

$$C_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)-E\left(X(t)\right)E\left(Y(t+\tau)\right)$$

En azından bileşik geniş anlamda durağan süreçler için;

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \overline{X}^2$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \overline{X}\overline{Y}$$

- Bir rassal sürecin **varyansı** otokovaryans fonksiyonunda $\tau = 0$ koyularak elde edilir.

- Geniş anlamda durağan (wide-sense) süreç için

varyans zamana bağlı değildir.

$$\sigma_x^2 = E\left[\left\{X(t) - E\left(X(t)\right)\right\}^2\right] = R_{XX}(0) - \bar{X}^2$$

İlişkisiz (uncorrelated) rassal süreçler

İki rassal süreç için

$$C_{XY}\left(t,t+\tau\right)=0$$

ise iki süreç ilişkisizdir. Buna göre;

$$R_{XY}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X(t)\right)E\left(Y(t+\tau)\right)$$

Not: Bağımsız süreçler ilişkisizdir.

Kaynaklar

- Peyton Z. Peebles, ‘Probability, Random Variables, and Random Signal Principles’ McGraw-Hill, Inc. (1993)