Başkent Üniversitesi
MAT340 OLASILIK

Bölüm 3 RASSAL DEĞİŞKENLER VE OLASILIK DAĞILIMLARI

Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay
Öğr.Gör.DR. Pelin Toktaş

Rassal Değişken Kavramı

- Deney:Bir üretim hattından alınan 3 ürünün testi.

$$S = \{BBB, BSB, BBS, SBB, SBS, SSB, BSS, SSS\}$$

S: Sağlam B:Bozuk

- X:Üç ürünün testinde bozuk ürünlerin sayısı

Rassal Değişken Kavramı

- X: Rassal değişken

  x: Rassal değişkenin sayısal değeri

Örnek Uzayın Elemanları	*x*
BBB	3
BSB	2
BBS	2
SBB	2
SBS	1
SSB	1
BSS	1
SSS	0

Rassal Değişken ve Çeşitleri

- *Rassal değişken* (*random variable*), örnek uzayın her bir elemanını reel bir sayı ile birleştiren bir fonksiyondur.
- Olası sonuçlarının kümesi sayılabilen rassal değişkene *kesikli rassal değişken* (*discrete random variable*) denir. Kesikli rassal değişkenler, sayılabilir veriler için tanımlanır. Örneğin; bozuk ürünlerin sayısı, kampüse giriş yapan otobüs sayısı…
- Rassal bir değişken, sürekli ölçek üzerinde değerler alabiliyorsa, bu değişkene *sürekli rassal değişken* (*continuous random variable*) denir. Sürekli rassal değişkenler ölçülebilir veriler için tanımlanır. Örneğin; ağırlık, boy, sıcaklık, mesafe, bir ürünün raf ömrü…

Kesikli Olasılık Dağılımları (Discrete Probability Distributions)

- *X* rassal değişkeni için olasılık kütle fonksiyonu (probability mass function) , ile gösterilir ve her olası sonuç *x* için,
  - $f(x) \geq 0$
  - $\sum_{x} f(x) = 1$
  - $P(X = x) = f(x)$

sağlanmalıdır.

Örnek 1

- X rassal değişkeninin olasılık (kütle) fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{k}, & x=1,2,3,4,5\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

  - k sabitinin değerini bulunuz.
  - $P(X\geq 2)=?$
  - $P(X<1)=?$
  - $P(3/2<X<3)=?$
  - $P(X=5/2)=?$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Kesikli Durum)

- Olasılık (kütle) fonksiyonu *f(x)* olan kesikli rassal bir değişkenin *birikimli dağılım fonksiyonu* (*cumulative distribution function*) aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Örnek 2

- Bir önceki örnekteki X rassal değişkeninin (birikimli) dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Sürekli Olasılık Dağılımları (Continuous Probability Distributions)

- *X* rassal değişkeni için olasılık kütle fonksiyonu (probability mass function) , ile gösterilir ve her olası sonuç *x* için,
  - $f(x) \geq 0, \qquad x \in R$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

sağlanmalıdır.

Örnek 3

- *X*’in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} c\,(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

  - c sabitinin değeri kaçtır?
  - $$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = ?$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Sürekli Durum)

- Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu *f(x)* olan sürekli rassal bir değişkenin *birikimli dağılım fonksiyonu* (*cumulative distribution function*) aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

Sürekli Durumda Bazı Sonuçlar

- $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- $$P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$$
  $$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Örnek 4

- Örnek 3'teki rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Örnek 5

- *X*'in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

- $P(X < 1.2) = ?$
- $P(0.5 < X < 1) = ?$
- $F(x) = ?$

Bileşik Olasılık Dağılımları (Kesikli Durum)

- *X* ve *Y* rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı veya olasılık kütle fonksiyonu (joint probability mass function), *f(x,y)* ile gösterilir ve her olası sonuç *x* ve *y* için,
  - $f(x,y) \geq 0, \qquad \forall (x,y)$
  - $\sum_{x} \sum_{y} f(x,y) = 1$
  - $P(X = x, Y = y) = f(x,y)$

A, *xy* düzleminde bir alan olmak üzere,

$$P\left[(X,Y) \in A\right] = \sum\sum_{A} f(x,y)$$ sağlanmalıdır.

Örnek 6

- 3 mavi, 2 kırmızı ve 3 yeşil topun bulunduğu bir kutudan rasgele 2 top çekiliyor.

  X: Çekilen iki top içerisindeki mavi topların sayısı

  Y: Çekilen iki top içerisindeki kırmızı topların sayısı

  - X ve Y rassal değişkenlerinin bileşik olasılık dağılımını bulunuz.
  - $A=\{(x,y)\mid x+y\leq 1\}$ olmak üzere $P[(X,Y)\in A]$ hesaplayınız.

Bileşik Olasılık Dağılımları (Sürekli Durum)

- *X* ve *Y* rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı veya olasılık yoğunluk fonksiyonu (joint probability density function), *f(x,y)* ile gösterilir ve her olası sonuç *x* ve *y* için,
  - $f(x,y) \geq 0, \qquad \forall(x,y)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$
  - *A*, *xy* düzleminde bir alan olmak üzere,

$P\left[(X,Y)\in A\right] = \iint_A f(x,y)\,dxdy$ sağlanmalıdır.

Örnek 7

- X ve Y rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y), & 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

a. Bileşik olasılık dağılımının *ii*. koşulunun sağlandığını gösteriniz.

b. $A=\{(x,y)\mid 0<x<1/2, 1/4<y<1/2\}$ olmak üzere $P[(X,Y)\in A]$ hesaplayınız.

Marjinal Dağılımlar (Kesikli Durum)

- X ve Y kesikli rassal değişkenlerinin marjinal dağılımları aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

$$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

Marjinal Dağılımlar (Sürekli Durum)

- X ve Y sürekli rassal değişkenlerinin marjinal dağılımları aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

Örnek 8

- Örnek 6’daki kesikli rassal değişkenler için marjinal dağılımları bulunuz.

Örnek 9

- Örnek 7’deki X ve Y sürekli rassal değişkenlerinin marjinal dağılımlarını bulunuz.

Koşullu Olasılık Dağılımları

- X ve Y (kesikli veya sürekli) rassal değişkenler olsun. *X*=*x* verildiğinde *Y* rassal değişkeninin koşullu dağılımı,

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \qquad g(x) > 0.$$

- Benzer şekilde, *Y*=*y* verildiğinde *X* rassal değişkeninin koşullu dağılımı,

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \qquad h(y) > 0.$$

Örnek 10

- Örnek 6’daki X ve Y kesikli rassal değişkenleri için, Y=1 verildiğinde X’in koşullu dağılımını bulunuz.

Örnek 11

- X ve Y rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y)=\begin{cases}10xy^2, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

  - $g(x)$, $h(y)$, $f(y|x)$.
  - $P(Y>1/2|X=0.25)=?$

İstatistiksel Bağımsızlık

- X ve Y rassal değişkenleri bağımsızdır

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rassal değişkenleri bağımsızdır

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)$$

Örnek 12

- X ve Y rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0<x<2, \quad 0<y<1\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

  - $g(x)$, $h(y)$, $f(x|y)$.
  - $P(1/4<X<1/2|Y=1/3)=?$

Örnek 13

- X rassal değişkeni, bir yiyeceğin raf ömrünü (yıl) şeklinde tanımlanmaktadır.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

X_1, X_2 **ve** X_3 bağımsız olarak seçilmiş 3 ürünün raf ömrünü temsil ediyorsa,

$$P(X_1<2, 1<X_2<3, X_3>2)=?$$

Kaynak

- Walpole, Ronald E.; Myers, Raymond H.; Myers, Sharon L. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Pearson Education.