MAT 340

Ders 1

Giriş

- Neden istatistiğe ihtiyaç vardır?
- Belirsizlik ve değişkenlik
- Yığın ve Örnek
- Olasılık ve İstatistik arasındaki ilişki
- Küme Teorisi
- Sayma Teknikleri

Neden istatistiğe ihtiyaç vardır?

- İstatistik, belirsizlik ve değişkenliğin söz konusu olduğu ortamlarda mantıklı ve doğru kararların verilmesinde yardımcı olan bir araçtır.
- Gerçek dünya $\rightarrow$belirsizlik ve değişkenlik
  - Bir elektronik devrenin kullanım süresi
  - Merkezi işlem biriminde işlenmek için bekleyen iş sayısı
  - Bir ürüne olan talep
  - Bir elektronik devredeki hata sayısı
- İstatistik:
  - Değişkenliklerin sebeplerini görmemize
    - Farklı cihaz, farklı metot, gibi
  - doğru kararlar vermemize yardımcı olur.

Belirsizlik ve Değişkenlik (Uncertainity and Variability)

- Değişkenlik, gözlemlerin alındığı koşullardaki değişikliğin bir sonucudur.
- Bir üretim çevresinde bu değişiklikler;
  - malzeme tipi
  - işçiler
  - proses değişkenleri (sıcaklık, basınç, işlem zamanı)
  - çevresel faktörler (nem)
- Değişkenlik; kantitatif ölçümlerin olduğu her alanda söz konusudur.

Istatistik

- Tüm bilim dallarında çeşitli amaçlar için veri toplamak söz konusudur.
- İstatistik disiplini,
  - verinin organize edilmesi ve özetlenmesi,
  - verideki bilgiye dayalı olarak sonuç çıkarılması için

  gerekli metotları sağlar.

Yığın

- Yığın; ilgilenilen nesnelerin olusturdugu kümedir.
  - **somut yığın** (concrete population): Bir yığının tüm öğelerini listelemek mümkün

    örnek: 2005 yılında Başkent Üniversitesindeki öğrenciler
    Ankara'da çalışan universite mezunu bayanlar.
  - **soyut yığın** (hypothetical population): Bir yığının tüm öğelerini listelemek mümkün değil

    örnek: Başkent Üniversitesinden 2006 yılında mezun olacak öğrenciler

Örnek

- Yığındaki **tüm nesnelere** ulaşılabilirse, yapılan işlem **sayım** olarak adlandırılır.
- Ancak, **zaman, para, ve diğer kısıtlı kaynaklardan dolayı** sayım yapmak mümkün değildir.
- Örneğin, Başkent Üni. tüm öğrencileri dikkate alarak bir anket yapılmak istendiğini varsayalım.

  Amaç;
  - Öğrencilerin bölümlerini neden ve nasıl seçtiğini belirlemek olsun.

Tüm öğrencilere anketi yapmak zaman alıcı ve pahalı olacağı için pratik bir yol olmayacaktır.

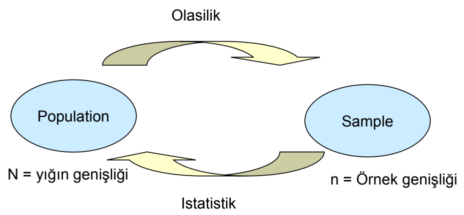
Örnek

- Bu nedenle, yığını temsil eden bir **örnek** kullanılması tercih edilir.
- **Örnek;** yığının bir alt kümesidir ve önceden tanımlanan bir yöntem ile seçilir.
  - Elektronik devrelerin montajının doğru yapılıp yapılmadığını belirlemek için
    - Montaj hattındaki üretimden bir grup elektronik devre seçimi
  - Bir üniversitenin eğitim kalitesini değerlendirmek için
    - Öğrencilerin bir grubunun seçimi
  - vb.

İstatistiğin Dalları

- Tanımlayıcı İstatistik
  - Veriyi organize eden ve özetleyen metotları içerir.
    - Şekil ve Tablo (Dal ve yaprak grafiği, Histogram, Kutu grafikleri)
    - Verinin yerleşim, değişkenlik ölçüleri.
- Kanıtlayıcı İstatistik
  - Örneği kullanarak yığın hakkında bir sonuç çıkarmak için kullanılan tüm teknikleri içerir.
    - Nokta tahminleri
    - Güven aralıkları
    - Hipotez testleri

Olasılık ve İstatistik Arasındaki İlişki



Olasılık ve İstatistik

- Olasılık ve istatistik bilim dalları
  - Belirsizliği tanımlamak ve modellemek,
  - Belirsizliğin söz konusu olduğu ortamlarda karar vermek için

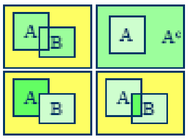
  araçları sağlar içerir.
- Olasılık teorisi, olayların belirsizliğini tanımlama ve modellemek için gerekli araçları sağlarken
- İstatistik, bu araçları belirsizlik altında karar vermek ve veriyi daha iyi anlamak için kullanır.

Olasılık Nedir?

- *Olasılık* belirsizliğin söz konusu olduğu ortamda ilgilenilen olaya olan güven derecesinin bir kantitatif ölçüsüdür
- Örneğin
  - Yağmur yağma olasılığı 0.20
  - *X* marka bilgisayarın tamir edilmeksizin 100000 saatten daha fazla çalışma olasılığı 0.75
- Olasılık, bir olayın ya da olaylar kumesinin olabilirliğinin ölçüsüdür.

Olasılık

- Küme Teorisi
  - Küme işlemleri
  - Küme özellikleri



- Küme; nesneler topluluğu.
- Kümeler, A, B, C,…gibi büyük harfler ile tanımlanır.

Küme Teorisi

- Kümeleri tanımlamak için 3 farklı yol vardır:
  - Tüm elemanları listelenir
    A={1, 2, 3, 4}
  - Bir cümle ile tanımlanır.
    A kümesi, "0" ve "1" arasındaki tüm gerçel sayıları içermektedir.
  - Matemetiksel bir ifade ile tanımlanır
    A={x |0 ≤ x ≤ 1 }

Küme Teorisi

a ∈ A ("a", A kümesinin elemanı)

a ∉ A ("a", A kümesinin bir elemanı değil)

Evrensel Küme : Ilgilenilen nesnelerin tumunu kapsayan küme (**S** yada **U**).

Boş Küme : Hiçbir ogesi olmayan küme (∅)

Alt Küme : Bir A kumesinin her ogesi bir B kümesininde ogesi ise A'ya B'nin alt kümesi denir (A ⊂ B)

Eşit Kümeler : A ⊂ B ve B ⊂ A ise A ve B eşit kümelerdir (A= B).

Küme Teorisi

- Her A kümesi için ,
  - ∅ ⊂ A
  - A ⊂ S (A, S'in bir alt kümesi)

Örnek;

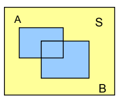
S : tüm gerçel sayılar

$$A=\{x \mid x^2+2x-3=0\} \quad \to \quad A=\{-3,1\}$$
$$B=\{x \mid (x-2)(x^2+2x-3)=0\} \quad \to \quad B=\{-3,2,1\}$$
$$C=\{x \mid x=-3,2,1\} \quad \to \quad C=\{-3,2,1\}$$

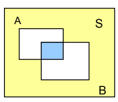
$$\text{ise } A \subset B \quad \text{ve} \quad B=C$$

Küme İşlemleri

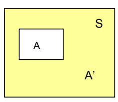
- A∪B: A ve B kumelerindeki ogelerin biraraya getirilmesi ile olusan kume



- A∩B: A ve B kumelerinin ikisininde ogesi olan nesnelerin olusturdugu kume



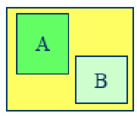
- A' : A kümesinde olmayan fakat A'nin evrensel kumesinde bulunan nesnelerin olusturdugu kume



Önemli Küme Özellikleri

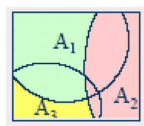
1. Karşılıklı Ayrık Kümeler

$$A_i \cap A_j = \phi, \text{ tüm } i \neq j$$
$$A \cap B = \phi \to \text{Sadece 2 küme için}$$



2. Bütüne Tamamlayan Kümeler

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$



Örnek

- A, B ve C kumeleri aşağıdaki gibi tanımlansın
  - S={1,2,3,4,5,6}
  - A = {6}
  - B = {2,4,6}
  - C = {1,3,5}
- A ve C → karşılıklı ayrık
- A ve B → karşılıklı ayrık değil
- B ve C → karşılıklı ayrık

Önemli Küme Özellikleri

properties

$a) A \cup B = B \cup A$ "commutative laws"

$b) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ "associative laws"

$c) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ "distributed property"

$d) A \cup \varnothing = A$

$e) (A \cup B)' = A' \cap B'$ "de morgon"

$a) A \cap B = B \cap A$

$b) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$c) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$d) A \cap \varnothing = \varnothing$

$e) (A \cap B)' = A' \cup B'$ "de morgon"

Örnek

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {0, 2, 4, 6, 8}
B = {1, 3, 5, 7, 9}
C = {2, 3, 4, 5}
D = {1, 6, 7}

Aşağıdaki işlemlere göre küme elemanlarını belirleyiniz:

a) A ∪ C = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 8}
b) (C'∩D)∪B = {1, 3, 5, 6, 7, 9}
c) (S∩C) ' = ?

Sayma Teknikleri

- Temel sayma prensibi çarpım kuralıdır.

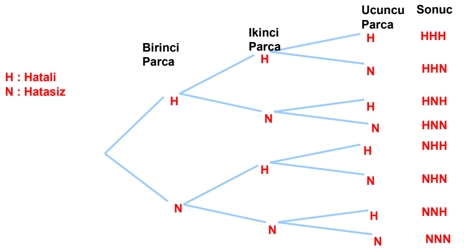
Bir islem n farkli sekilde, diger bir islem de k farkli sekilde yapiliyorsa, her iki islem birlikte nk farkli sekilde yapilabilir

Ornek: Iki zar birlikte atıldığında ortaya çıkan sonuçların sayısını bulunuz.

Cozum: Birinci zar için n = 6 adet mümkün sonuç
İkinci zar için k = 6 adet mümkün sonuç
nk = 36

Ağaç Diyagramı

- Agac diyagrami, tum durumlari sistematik olarak listeler.



Bir uretim hattindan rassal olarak 3 parca secilir. Her parca hatali (H) veya hatasiz (N) olarak ayrilmaktadir

Dizilem (Permütasyon)

- "n" nesnenin bir kismi yada hepsi ile yapilan her farkli siralamaya dizilem (permutasyon) denir.

"n" farkli nesneden yapilabilir "n" lik dizilem sayisi $n!$

"n" farkli nesneden yapilabilir r birimlik dizilem sayisi

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dizilem (Permütasyon)

Ornek: Her yil 25 kisilik bir sinifa 3 farkli odul verilmektedir. Her ogrenci en fazla bir odul alabilirse, 3 odul 25 ogrenciye kac farkli sekilde verilebilir?

Çözüm: $P_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = 13800$

Dizilem (Permütasyon)

Örnek (Walpole, s 35):
50 kişinin bulunduğu bir öğrenci topluluğundan bir başkan ve bir muhasebeci seçilecektir. Yapılabilecek farklı seçimlerin sayısını

a) Kısıtlama olmadığında
b) A başkan seçildiğinde görev alacaksa
c) B ve C birlikte görev alabilir yada hiç görev almazlar
d) D ve E birlikte görev almazlar ise

Dizilem (Permütasyon)

Çözüm:

Dizilem (Permütasyon)

n farklı nesne bir daire etrafına (n-1)! farklı şekilde dizilebilir

- Ornek : 6 kisi yuvarlak masa etrafina (6-1)!=120 farklı şekilde oturabilir

n nesnenin n_1'i bir tür, n_2'i bir tür, ve benzeri sekilde n_k'si başka bir tür ise bu n nesneden yapılabilir n'lik permutasyon sayısı

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Örnek: Aşağıda verilen her kelimedeki harfleri kullanarak kaç farklı kelime (anlamli/anlamsiz) elde edilir?

i) them ii) unusual iii) sociological

Birleşim (Kombinasyon)

- Çogu problemde, n farklı nesneden sıraya bakılmaksızın r farklı nesnenin kac farklı şekilde seçileceği ile ilgilenir.
- Bu tür seçimler birleşim (kombinasyon) olarak adlandırılır.

n farklı nesneden r' lik birleşimlerinin sayısı

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1!(n-r)!}$$

Birleşim (Kombinasyon)

Ornek: A, B ve C elemanlarindan olusan bir kumeden 3 elemanli elde edilebilecek dizilemlerin sayisini bulunuz.

(A,B,C); (A,C,B); (B,A,C); (B,C,A); (C,A,B); (C,B,A)

n! = 3! = 3.2.1 = 6 farkli sekilde

Bu kumeden elemanli birlesim sayisi $C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$

Birleşim (Kombinasyon)

Örnek: İçinde 5 hatalı, 15 hatasız ürün bulunan bir gruptan

a) İki hatasız ürün
b) Üç hatalı ürün
c) Üç hatasız, iki hatalı ürün

kaç farklı şekilde seçilebilir

Birleşim (Kombinasyon)

Çözüm:

Bazı Özel Birleşimler

$$i) C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

$$ii) C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$iii) C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

References

- Walpole, Myers, Myers, Ye, (2002),
  - *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*
- Dengiz, B., (2004),
  - *Lecture Notes on Probability,* http://w3.gazi.edu.tr/web/bdengiz
- Hines, Montgomery, (1990),
  - *Probability & Statistics in Engineering & Management Science*