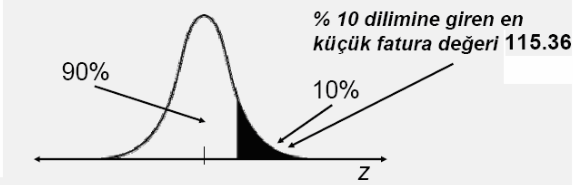
<u>Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri</u>

SORU) Aylık zorunlu giderler faturası herhangi bir şehir için normal dağılım göstermektedir. Ortalaması 100 TL ve standart sapması 12 TL olarak verilmektedir. %10 luk dilime düşen en küçük fatura değerini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u>



Tablodan %90 (0.9000) kümülatif alan dilimine en yakın değer 0.8997 dir. Bu da 1.28 z puanına karşılık gelir.

Bu z puanına karşılık gelen x-değeri: $x = \mu + z\sigma$

$x = 100 + 1.28(12) = 115.36.$

SORU) (X, Y) rastgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-3x-2y} & ; x > 0, y > 0 \\ 0 & ; \text{diğer x, y değerleri için,} \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. (X, Y)'nin moment çıkaran fonksiyonuyla $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$ ve $E(XY)$ değerlerini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u> $M(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 x} e^{t_2 y}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t_1 x} e^{t_2 y} 6e^{-3x-2y} dx dy$

$$= 6\int_0^\infty e^{t_2 y - 2y} \left[\int_0^\infty e^{(t_1-3)x} dx\right] dy$$

$$= 6\int_0^\infty e^{(t_2-2)y} \left(\frac{1}{3-t_1}\right) dy$$

$$= 6\frac{1}{(3-t_1)}\frac{1}{(2-t_2)} \quad ; t_1 < 3 \ , \ t_2 < 2$$ şeklinde bulunur.

$$E(X) = \frac{\partial}{\partial t_1} M(t_1, t_2) I_{t_1=t_2=0} = 6\frac{1}{(3-t_1)^2}\frac{1}{(2-t_2)} I_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \frac{\partial}{\partial t_2} M(t_1, t_2) I_{t_1=t_2=0} = 6\frac{1}{(3-t_1)}\frac{1}{(2-t_2)} I_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{\partial^2}{\partial t^2_1} M(t_1, t_2) I_{t_1=t_2=0} = \frac{12}{(2-t_2)(3-t_1)^3} I_{t_1=t_2=0} = \frac{2}{9}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$E(Y^2) = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} M(t_1, t_2) I_{t_1=t_2=0} = \frac{12}{(3-t_1)(2-t_2)^3} I_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$ olur.

$$E(XY) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M(t_1, t_2) I_{t_1=t_2=0} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left[\frac{6}{(3-t_1)^2(2-t_2)}\right] I_{t_1=t_2=0}$$

$$= \frac{6}{(3-t_1)^2(2-t_2)^2} I_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{6}$$ olarak bulunur.

<u>2.yol:</u>
!!!**<u>Beklenen değerler;</u>** son sorudaki çözüm tekniği ile marginal dağılım ve beklenen değer tanımdan bulunabilir…!!!

SORU) Bir partide 3 erkek şapkalarını havaya fırlatıyor ve şapkalar karışıyor. Her biri rastgele bir şapka seçiyor. Erkeklerden hiçbirinin kendisine ait şapkayı seçmeme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

Önce hesaplaması daha kolay olan en az bir erkeğin kendisine ait şapkayı seçme olasılığını bulalım.

E_i, i= 1,2,3 i. erkeğin kendisine ait şapkayı seçme olayı olsun. Dolayısıyla en az bir erkeğin kendisine ait şapkayı seçme olasılığı P ($E_1 \cup E_2 \cup E_3$) olur.

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = ?$

$E_1 \cap E_2 = F$ olsun

$P(F) = 1/6$

$P(F \cap E_3) = P(E_3 | F).P(F) = 1.\ 1/6 = 1/6$

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/3$

$P(E_1 \cap E_2) = ?$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1).P(E_1) = ½.\ 1/3 = 1/6$

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = ?$

$E_1 \cap E_2 = F$ olsun

$P(F) = 1/6$

$P(F \cap E_3) = P(E_3 | F).P(F) = 1.\ 1/6 = 1/6$

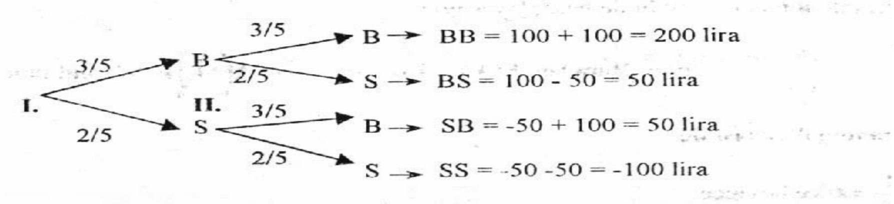
Genel olarak $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C).P(B \cap C).P(C)$ dir.

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1/3+1/3+1/3-1/6-1/6-1/6+1/6 = 1-3/6+1/6 = 1-2/6 = 2/3$

P (her bir erkeğin kendisine ait şapkayı seçmeme olayı) = 1-2/3 = 1/3

SORU) İçinde 3 beyaz ve 2 siyah top bulunan bir kavanozdan çekileni yerine koyma şartıyla iki top çekilmiştir. Çekilen her beyaz top için 100 lira kazanılacak ve çekilen her siyah top içinde 50 lira kaybedilecektir. Bu oyunda beklenen kar nedir.

Çözüm: Aşağıdaki tablo ile mümkün sonuçların örnek uzayına, karşılık gelen olasılıklar ve kar gösterilmiştir.



$$E(X) = 200.\frac{9}{25} + 50.\frac{6}{25} + 50.\frac{6}{25} - 100.\frac{4}{25} = 80 \text{ lira olarak bulunur.}$$

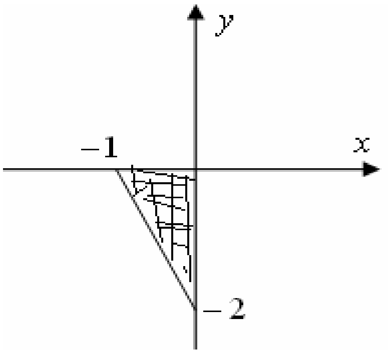
SORU) Bir telefon santraline 9:00-10:00 saatleri arasında gelen işaretlerin sayısı, X_1; 3 parametreli Poisson dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Benzer şekilde bu santrale 10:00-11:00 saatleri arasında gelen işaretlerin sayısı, X_2; 5 parametreli Poisson dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer X_1 ve X_2 bağımsız ise 9:00-11:00 saatleri arasında gelen işaretlerin sayısının 5 ten daha fazla olması olasılığını bulunuz.

Yol Gösterme: **Eğer $X_1, X_2, ...X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız olmak üzere X_i rasgele değişkeni α_i, $i = 1,2,....n$, parametreli bir Poissson dağılımına sahip ise $Z = X_1 + X_2 ... + X_n$ rasgele değişkeni de $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ parametreli bir Poisson dağılımına sahiptir.**

ÇÖZÜM: $Z = X_1 + X_2$; $\alpha = 3+5 = 8$ parametreli Poisson dağılımına sahip olacaktır. Bu nedenle;

$$P(Z>5) = 1 - P(Z \le 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-8}(8)^k}{k!} = 1 - 0{,}1912 = 0{,}8088$$ elde edilir.

SORU) (X,Y) rasgele değişkeni <u>şekildeki üçgen bölge üzerinde düzgün dağılıma sahip olsun.</u> Bu takdirde



A) X ve Ynin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

B) $E[X]$, $E[Y]$ ve $E[XY]$ beklenen değerlerini bulunuz.

C) $\sigma_x^2 = V(X)$ ve $\sigma_y^2 = V(y)$ Varyans değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: (X,Y) rasgele değişkeni şekildeki <u>üçgen bölge üzerinde düzgün dağılıma sahip olduğundan;</u>

$$f(x,y) = \frac{1}{Alan} = \frac{1}{1.2(1/2)} = 1$$

elde edilir. Böylece

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-2x-2}^{0} dy = 2x+2, \qquad -1 \le x \le 0$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{\frac{-y-2}{2}}^{0} dx = \frac{y+2}{2}, \qquad -2 \le y \le 0$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_x(x) = \int_{-1}^{0} x.(2x+2) = -\frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f_y(y)dy = \int_{-2}^{0} y.\left(\frac{y+2}{2}\right)dy = -\frac{2}{3}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) = \int_{-1}^{0} x^2.(2x+2) = \frac{1}{6}$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2.f_y(y)dy = \int_{-2}^{0} y^2.\left(\frac{y+2}{2}\right)dy = \frac{2}{3}$$

$$E[X.Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y)dx.dy = \int_{-2}^{0} \int_{\frac{-y-2}{2}}^{0} x.y.dx.dy = \frac{1}{6}$$

Varyans tanımına göre;

$$V(x) = \sigma_x^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{1}{18}$$

$$V(y) = \sigma_y^2 = E[Y^2] - \{E[Y]\}^2 = \frac{2}{9}$$