Başkent Üniversitesi
MAT 340 OLASILIK

Bölüm 3 MATEMATİKSEL BEKLENEN DEĞER

Öğr.Gör.Dr. Pelin Toktaş
Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay

Bir Rassal Değişkenin Ortalaması

- *Deney*: Bir çift para 16 kez atılıyor.
- *X*: Her atıştaki turaların sayısı
- *x=0,1,2.*

x	0	1	2	*Toplam*
Frekans	4	7	5	16

- Bir çift paranın her atılışında ortalama tura sayısını bulmak istersek,

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16}=1.06$$

Bir Rassal Değişkenin Ortalaması

- Şimdi ortalama değeri başka bir formda tekrar hesaplayalım:

$$(0)\left(\frac{4}{16}\right)+(1)\left(\frac{7}{16}\right)+(2)\left(\frac{5}{16}\right)=1.06.$$

- Burada, 4/16, 7/16 ve 5/16 değerleri 16 atışta sırasıyla 0, 1 ve 2 tura gelme yüzdeleridir.

Bir Rassal Değişkenin Ortalaması

- Uzun vadede ortalama değeri hesaplamak isteyelim:
- Bir çift paranın atılması deneyinin örnek uzayında her birinin ortaya çıkma olasılığı birbirine eşit olan 4 eleman vardır.
- $S = \{TT, TY, YT, YY\}$

Bir Rassal Değişkenin Ortalaması

$$P(X = 0) = P(YY) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(TH) + P(HT) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

- Buradaki olasılıklar verilen olaylar için uzun vadedeki göreli sıklıklardır (olasılıklardır.)

Bir Rassal Değişkenin Ortalaması

- μ: *X rassal değişkeninin ortalama değeri veya X'in olasılık dağılımının ortalaması*
- E(X): *X'in matematiksel beklenen değeri veya kısaca X'in beklenen değeri*
- Sonuç olarak;

$$\mu = E(X) = (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{2} + (2)\frac{1}{4} = 1.$$

- Defalarca bir çift para atan bir kişi her atışta ortalama 1 tura elde eder.

Tanım: Beklenen Değer

- X rassal değişkeninin olasılık dağılımı $f(x)$ olsun. X rassal değişkeninin ortalaması veya beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{x} x f(x), & X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Örnek 1

- Bir kutuda bulunan 7 tane ampulden 4 tanesi sağlam ve 3 tanesi bozuktur. Rasgele 3 tane ampul seçiliyor. X rassal değişkeni, seçilen 3 ampul içersinde sağlam olanların sayısı olarak tanımlansın.
  - X rassal değişkeninin olasılık dağılımını bulunuz.
  - Seçilen 3 ampul içersindeki ortalama sağlam ampul sayısı kaçtır?

Örnek 2

- Bir oyunda üç paranın atılıyor. Eğer tüm paralar yazı veya tura gelirse 5$ kazanılıyor, diğer durumlarda 3$ kaybediliyor. Bu oyunu oynayan bir kişinin beklenen kazancı ne kadardır?

Örnek 3

- X rassal değişkeni, bir elektronik cihazın ömrünü göstersin. X rassal değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{x^3}, & x > 100 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

Bu cihazın beklenen ömrünü bulunuz.

Teorem:

- X rassal değişkeninin olasılık dağılımı *f*(*x*) olsun. *g*(*X*) rassal değişkeninin ortalaması veya beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu = E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum_{x} g(x) f(x), & X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Örnek 4

- *X* rassal değişkeni, güneşli bir cuma günü yıkatılan araba sayısı olarak tanımlanıyor. *X*'in olasılık dağılımı, aşağıda verilmiştir:

x	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

- $g(X) = 2X - 1$ araba yıkama işinden kazanılan ($ cinsinden) para olarak tanımlanırsa, bu işten elde edilen ortalama kazanç ne kadardır?

Örnek 5

- X rassal değişkeni aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

- $g(X)=4X+3$ 'ün beklenen değerini bulunuz.

Tanım:

- X ve Y rassal değişkenlerinin bileşik olasılık dağılımı *f*(*x*,*y*) olsun. *g*(*X*,*Y*) rassal değişkeninin ortalaması veya beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu_{g(X,Y)} = E\left[g(X,Y)\right] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y), & X \text{ ve } Y \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy, & X \text{ ve } Y \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Örnek 6

- Aşağıdaki olasılık dağılımı için $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ hesaplayınız.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0<x<2, \quad 0<y<1\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

Özel Durum:

- g(X,Y)=X alınrsa,

$$E\left[g(X,Y)\right]=E(X)=\begin{cases}\sum_{x}\sum_{y} xf(x,y)=\sum_{x} xg(x), & X \text{ ve } Y \text{ kesikli r.d.}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx, & X \text{ ve } Y \text{ sürekli r.d.}\end{cases}$$

- Benzer şekilde, g(X,Y)=Y alınırsa,

E(g(X,Y))=E(Y) olacaktır.

Rassal Değişkenlerin Varyansı ve Kovaryansı

- Ortalaması μ ve olasılık dağılımı f(x) olan X rassal değişkeninin varyansı,

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 f(x), & X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx, & X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Örnek 1

- *X* rassal değişkeni, bir şirkette bir gün içerisinde kullanılan araba sayısı olsun. A şirketi için olasılık kütle fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

x	1	2	3
f(x)	0.3	0.4	0.3

Başka bir B şirketi içinse,

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

- B şirketi için varyansın, A şirketinin varyansından büyük olduğunu gösteriniz.

Teorem

- X rassal değişkeninin varyansı aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Örnek 2

- X rassal değişkeni, bir üretim hattından rasgele seçilen 3 parça içerisinden bozuk olanların sayısını göstersin. X için olasılık kütle fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

- X'in ortalamasını ve varyansını bulunuz.

Örnek 3

- X rassal değişkeni, bir marketten haftalık talep edilen Pepsi miktarını (her 1000 litre için) gösteriyor olsun. X için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

- X'in ortalamasını ve varyansını bulunuz.

Tanım

- Olasılık dağılımı *f*(*x*) olan *X* rassal değişkeni olsun. *g*(*X*) rassal değişkeninin varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sigma^2_{g(X)} = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \begin{cases} \sum_x (g(x) - \mu_{g(X)})^2 f(x), & X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - \mu_{g(X)})^2 f(x)dx, & X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Örnek 4

- Olasılık dağılımı aşağıda verilen X rassal değişkeni ise, g(X)= 2X+3 rassal değişkeninin varyansını bulunuz.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/4	1/8	1/2	1/8

Tanım: (Kovaryans)

- X ve Y rassal değişkenlerinin bileşik olasılık dağılımı $f(x,y)$ olsun. X ve Y rassal değişkenlerinin kovaryansı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y), & X \text{ ve } Y \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\,dx\,dy, & X \text{ ve } Y \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

Teorem

- X ve Y rassal değişkenlerinin kovaryansı aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Örnek 5

- X: Bir maratondaki kadın atletlerin yüzdesi
- Y:Bir maratondaki erkek atletlerin yüzdesi

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

- X ve Y 'nin kovaryansını hesaplayınız ve yorumlayınız.

Tanım (Korelasyon Katsayısı)

- X ve Y rassal değişkenlerinin kovaryansı σ_{XY} ve standart sapmaları sırasıyla σ_X ve σ_Y olsun. X ve Y'nin korelasyon katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Örnek 6

- Örnek 5 için korelasyon katsayısını hesaplayınız ve yorumlayınız.

Rassal Değişkenlerin Lineer Kombinasyonlarının Ortalaması ve Varyansı

- Teorem: a ve b birer sabit olmak üzere

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

  - $a=0 \Rightarrow E(b)=b.$
  - $b=0 \Rightarrow E(aX)=aE(X).$

Teorem:

- X rassal değişkeninin fonksiyonlarının toplamının ya da farkının beklenen değeri,

$$E\left[g(X) \pm h(X)\right] = E\left[g(X)\right] \pm E\left[h(X)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 7

- X rassal değişkeninin olasılık kütle fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

x	0	1	2	3
f(x)	1/3	1/2	0	1/6

- $Y=(X-1)^2$ rassal değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Teorem:

- X ve Y rassal değişkeninin fonksiyonlarının toplamının ya da farkının beklenen değeri,

$$E\left[g(X,Y) \pm h(X,Y)\right] = E\left[g(X,Y)\right] \pm E\left[h(X,Y)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Bazı Sonuçlar:

- g(X,Y)=g(X) ve h(X,Y)=h(Y) =>

$$E\left[g(X)\pm h(Y)\right]=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(Y)\right]$$

- g(X,Y)=X ve h(X,Y)=Y =>

$$E\left[X\pm Y\right]=E\left[X\right]\pm E\left[Y\right]$$

Teorem:

- X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise E(XY)=E(X)E(Y).
  - X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise $\sigma_{XY} = 0.$

Teorem:

- *a* ve *b* birer sabit olmak üzere,

$$\sigma^2_{aX+b} = Var(aX+b) = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$$

  - a=1 => $\sigma^2_{X+b} = Var(X+b) = \sigma^2.$
  - b=0 => $\sigma^2_{aX+b} = Var(aX+b) = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$

Teorem:

- X ve Y rassal değişkenleri için bileşik olasılık dağılımı f(x,y) ise,

$$\sigma_{aX+bY}^{2} = a^{2}\sigma_{X}^{2} + b^{2}\sigma_{Y}^{2} + 2ab\sigma_{XY}$$

  - X ve Y rassal değişkenleri bağımsızsa,

$$\sigma_{aX\pm bY}^{2} = a^{2}\sigma_{X}^{2} + b^{2}\sigma_{Y}^{2}$$

Genel olarak,

- n bağımsız rassal değişken için,

$$\sigma^2_{a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n} = a_1{}^2\sigma^2_{X_1} + a_2{}^2\sigma^2_{X_2} + \ldots + a_n{}^2\sigma^2_{X_n}$$

Örnek 8

- X ve Y bağımsız rassal değişkenleri için Var(X)=5 ve Var(Y)=3, Z=-2X+4Y-3 rassal değişkeninin varyansını bulunuz.

Kaynak

- Walpole, Ronald E.; Myers, Raymond H.; Myers, Sharon L. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Pearson Education.