# Başkent Üniversitesi
# MAT 340 Olasılık

Bölüm 1 OLASILIK

Öğr. Gör. Dr. Pelin Toktaş (02)
Yrd. Doç. Dr. Kumru Didem Atalay (01)

## İstatistiksel Deney

- *İstatistikte deney*, veri seti üreten herhangi bir süreçtir.
- Örnek: Bir paranın atılışı istatistiksel bir deneydir. ,
- Bu deneyde sadece iki sonuç vardır: Yazı veya tura.

## Örnek Uzay

- İstatistiksel bir deneyin tüm olası sonuçlarının kümesine *örnek uzay* denir ve *S* ile gösterilir.
- Örnek uzaydaki her bir sonuca *örnek uzayın bir elamanı* veya *örnek noktası* denir.

## Örnek 1

- Deney: Hilesiz bir paranın bir kez atılması.

$$S = \{Y, T\}$$

- Deney: Hilesiz bir zarın bir kez atılması

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

## Ağaç Diyagramı

- Örnek uzayın elemanlarını sistemetik olarak sıralayabilmek için *ağaç diyagramından* yararlanılabilir.
- Örnek 2: İstatistiksel bir deneyde, bir para bir kez atılıyor. Eğer sonuç tura ise, para ikinci kez atılıyor. Diğer durumda ise, bir kez bir zar atılıyor. Örnek uzayın elemanlarını ağaç diyagramından yararlanarak yazınız.

## Kural Yazımı

- Çok elemanlı veya sonsuz elemanlı örnek uzaylar en iyi bir kural oluşturularak yazılabilir. Örneğin; Başkent Üniversitesi'nde genel not ortalaması (GNO) 2.5'in üzerinde olan öğrencilerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$S = \{x \mid x, \text{GNO 2.5'in üzerinde olan bir ögrencidir}.\}$$

## Olay Kavramı

- Örnek uzayın herhangi bir alt kümesine *olay* adı verilir.
- Örnek 3:Deney: Hilesiz bir zarın bir kez atılması.

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- A olayı, hilesiz bir zarın atılması deneyinde çift sayı elde edilmesi olarak tanımlanırsa, $A = \{2,4,6\}$ olacaktır.

## Kümelerle İlgili Bazı Tanımlar

- *A* kümesi, örnek uzay *S'*in bir olayı olsun. *A* olayının *tümleyeni*, *A'* ile gösterilir ve örnek uzay *S'*de olup *A* olayında bulunmayan elemanlardan oluşur.
- *A* ve *B* olaylarının *kesişimi* $(A \cap B)$, *A* ve *B* olaylarındaki ortak elemanları içeren bir olaydır.
- *A* ve *B* olayları, *ayrık olaylar* (*mutually exclusive* or *disjoint*) ise ortak hiç bir elemanları yoktur. Yani, .
- *A* ve *B* olaylarının *bileşimi* $(A \cup B)$, *A* veya *B* olaylarındaki veya her ikisindeki elemanları içeren bir olaydır

## Kümelerle İlgili Bazı Sonuçlar

$A \cap \emptyset = \emptyset.$ $\quad \emptyset' = S.$

$A \cup \emptyset = A.$ $\quad (A')' = A.$

$A \cap A' = \emptyset.$ $\quad S' = \emptyset.$

$A \cup A' = S.$

$$\text{Demorgan Kuralı} \begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

## Örnek Uzayın Elemanlarını Sayma

- **Eşleme Yoluyla Sayma**
- **Toplama Yoluyla Sayma**
- **Çarpım Kuralı:** Bir iş *n*1 farklı şekilde yapılabiliyorsa, ve her biri için ikinci bir iş *n*2 farklı şekilde yapılabiliyorsa, ve ilk ikisinin her biri için üçüncü bir iş *n*3 farklı şekilde yapılabiliyorsa, vs... *k* tane iş serisi beraber $n_1 n_2 \ldots n_k$ farklı şekilde yapılabilir.

## Örnek 4

- Bir adamın 3 kravatı, 4 gömleği ve 2 pantolonu varsa, bir kravat, bir gömlek ve bir pantolondan oluşan kaç farklı kıyafet seçebilir?

## Örnek 4

- Herbir rakamı bir kez kullanmak şartıyla, 0,1,2,5,6 ve 9 sayılarından kaç farklı 4 basamaklı çift sayı yazılabilir?

## Permütasyon

- Bir nesneler kümesinin bir kısmının veya hepsinin sıralanışına bir *permütasyon* denir.
- Örneğin; *a*, *b* ve *c* harflerini göz önüne alalım. Bu üç harfin olası permütasyonları *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* ve *cba*'dır.
- Çarpım kuralından bu permütasyonların sayısına ulaşmak istersek, 3x2x1= 6 farklı sıralanışa ulaşılır.

## Permütasyon

- Genel olarak, *n* farklı objenin farklı sıralanışlarının sayısı

  $$n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$$

  farklı sıralanıştır.
- Bu *n* farklı objenin sıralanışı *n*! 'dir.

## Permütasyon

- n farklı nesneden bir seferde alınan r tanesinin permütasyonlarının sayısı

  $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  şeklinde hesaplanır.

## Örnek 5

- Bir yarışmaya katılan 10 kişi ilk üç dereceyi kaç farklı şekilde paylaşabilirler?

## Dairesel ve Tekrarlı Permütasyon

- $n$ nesnenin bir daire etrafında sıralanışlarının sayısı ($n$-1)!'dir.
- $n$1 tanesi bir çeşit, $n$2 tanesi başka bir çeşit,…, $n$k tanesi başka bir çeşit olan toplam n nesnenin sıralanışlarının sayısı

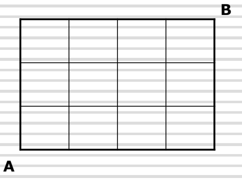
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\,dir.$$

## Örnek 6

- ANKARA kelimesinin harflerini kullanarak anlamlı-anlamsız 6 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

## Örnek 7

- Yandaki şekilde sadece sağa ve yukarı gitmek şartıyla *A* noktasından *B* noktasına kaç farklı yoldan gidilebilir?




## Örnek 8

- Bir konferansa katılan 7 öğrenci, bir tane 3 kişilik, iki tane 2 kişilik odaya kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

## Kombinasyon

- *n* farklı nesneden bir kerede alınan *r* tane nesnenin kombinasyonlarının sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## Örnek 9

- İkinci el ürünler satan bir mağazada, 15 televizyondan 10 tanesi sağlam, 5 tanesi kusurludur. Bir kişi bu televizyonlardan rasgele 5 tanesini satın alıyor. Kaç farklı şekilde 3 tanesi sağlam ve 2 tanesi de kusurlu televizyon satın alınabilir?

## Bir Olayın Olasılığı

- Örnek uzayı *S* olan bir deneyde, *S'*in her olayı *A* için *P*(*A*) tanımlıdır ve aşağıdaki koşulları sağlar:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(S) = 1$ ve $P(\emptyset) = 0$
  - Her ayrık olay dizisi $A_1, A_2, \ldots$ için,

    $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ olmak üzere

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## Örnek 10

- Bir para iki kez atılıyor.
  - En az bir tura gelme olasılığı nedir?
  - İlk atışta yazı gelme olasılığı nedir?

## Teorem

- A ve B iki olay olsun.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Bazı Sonuçlar

- *A* ve *B* olayları iki ayrık olay olsun.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olayları ayrık ve *S* örnek uzayını bütüne tamamlayan olaylar olsun.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(S) = 1$$

## Bazı Sonuçlar

- A,B ve C olayları için, (İspatı Ödev!)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- *A* ve olayları daima ayrıktır ve $A \cup A' = S$ olduğundan

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(S) = 1.$$

## Örnek 11

- A kutusunda 3 kırmızı ve 3 siyah, B kutusunda 4 kırmızı ve 6 siyah top vardır.
  - Her iki kutudan da rasgele bir top çekildiğinde ikisinin de aynı renkte olma olasılığı nedir?
  - Her iki kutudan da rasgele iki top çekildiğinde her kutudan farklı renkte toplar çekilmiş olma olasılığı nedir?

## Örnek 12

- Bir kişi mağazaya girdiğinde 0.22 olasılıkla bir takım elbise, 0.30 olasılıkla bir gömlek ve 0.28 olasılıkla bir kravat satın almaktadır. 0.11 olasılıkla hem takım elbise hem de gömlek, 0.14 olasılıkla hem takım elbise hem de kravat, 0.10 olasılıkla hem gömlek hem de kravat satın almaktadır. Bu kişi 0.06 olasılıkla da her 3 ürünü de satın almaktadır. Bu kişinin,
  - hiçbir ürünü almama,
  - tam olarak 1 tane ürünü alma olasılığını bulunuz.

## Koşullu Olasılık

- B olayının gerçekleştiği bilindiğine göre A olayının gerçekleşme olasılığına koşullu olasılık denir ve $P(A|B)$ ile gösterilir.
- B verildiğinde A'nın koşullu olasılığı,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0.$$

## Örnek 13

- Birden ona kadar numaralanmış topların bulunduğu bir torbadan rasgele bir top çekiliyor. Çekilen topun altıdan büyük olduğu bilindiğine göre, bu topun 10 numaralı top olma olasılığı nedir?

## Örnek 14

- İki çocuklu bir ailenin en az bir çocuğunun erkek olduğu bilindiğine göre ikisinin de erkek çocuk olma olasılığı nedir?

## Bağımsız Olaylar

- A ve B olayları bağımsızdır ⇔
  $P(A \mid B) = P(A)$ veya $P(B \mid A) = P(B)$.
- A ve B olayları bağımsızsa,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

olduğundan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \cdot$$

## Örnek 15

- Bir iskambil kağıdı destesinden (52 kart) bir kart çekiliyor. A olayı, seçilen kartın as olması ve B olayı da, seçilen kartın sinek olması olarak tanımlanıyor. A ve B olayları bağımsız mıdır? Gösteriniz.

## Üçlü Bağımsızlık

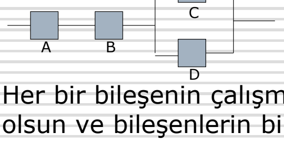
- A, B ve C olayları bağımsızsa,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

sağlanmalıdır.

## Örnek 16

- Dört bileşenden oluşan bir elektronik sistem aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:




- Her bir bileşenin çalışma olasılığı 0.9 olsun ve bileşenlerin birbirinden bağımsız çalıştığı varsayılıyor.

## Örnek 16 (Devam)

- Tüm sistemin çalışıyor olma olasılığı nedir?
- Tüm sistemin çalışıyor olduğu bilindiğine göre C bileşeninin çalışmama olasılığı nedir?

## Çarpım Kuralı

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

## Örnek 17

- Bir torbada 5 kırmızı, 3 mavi ve 4 yeşil top vardır. Ard arda ve çekilen top yerine konulmaksızın rasgele 2 top çekiliyor ve renkleri not ediliyor. Çekilen iki topun da kırmızı olması olasılığı nedir?

## Bayes Teorem

- Teorem: (Toplam Olasılık Formülü)

  $A_1, A_2, \ldots, A_k$ olayları ayrık ve *S* örnek uzayını bütüne tamamlayan olaylar olsun. $P(A_i) \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,k$ ve *B* örnek uzay *S*'in bir olayı olsun. $j = 1,2,\ldots,k$ için

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

## Bayes Teorem

- Teorem: (Bayes Kuralı)

  $A_1, A_2, \ldots, A_k$ olayları ayrık ve *S* örnek uzayını bütüne tamamlayan olaylar olsun. $P(A_i) \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,k$ ve *B* örnek uzay *S*'in bir olayı olsun. $j = 1,2,\ldots,k$ için

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B)} = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

## Örnek 18

- I. kutuda 2 beyaz, 7 siyah top; II. kutuda 5 beyaz, 6 siyah top vardır. Hilesiz bir para bir kez atılıyor. Tura gelirse I. kutudan, yazı gelirse II. kutudan bir top çekiliyor.
  - Çekilen topun beyaz olma olasılığı nedir?
  - Çekilen topun beyaz olduğu bilindiğine göre paranın tura gelme olasılığı nedir?

## Kaynaklar

- Ross, S. A First Course in Probability, Prentice-Hall.
- Walpole, Ronald E.; Myers, Raymond H.; Myers, Sharon L. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Pearson Education.