Başkent Üniversitesi

MAT 340 Olasılık

Bölüm 6 Rassal Süreçler(EK)

Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay
Öğr. Gör. Dr. Pelin toktaş

Durağan rassal süreçler

Bir sürecin tüm istatistiksel özellikleri (ortalama, varyans, bileşik momentleri gibi) zaman içerisinde değişmiyorsa rassal süreç ***durağan süreç***, aksi durumda durağan olmayan süreç olarak adlandırılır.

Rassal sürecin dağılım fonksiyonu

$X(t_1)$ rassal sürecinin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

ile gösterilir. Bu fonksiyon t_1 zamanında X_1 rassal değişkeninin dağılım fonksiyonunu tanımlar. Bu aynı zamanda birinci dereceden bir dağılım fonksiyonudur.

İkinci ve n. dereceden bileşik dağılım fonksiyonu

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

Genelleştirirsek n. dereceden bileşik dağılım fonksiyonu

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

Rassal sürecin yoğunluk fonksiyonları

1. dereceden

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{\partial F_X(x_1; t_1)}{\partial x_1}$$

2. dereceden

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

n. dereceden

$$f_X(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Rassal sürecin bağımsızlığı

$X(t_1)$, $X(t_2)$,…, $X(t_n)$ rassal süreç grubu $Y(t_1')$1, $Y(t_2')$,…, $Y(t_m')$ rassal süreç grubundan bağımsız ise, $X(t)$ ve $Y(t)$ süreçleri istatistiksel olarak bağımsız süreçlerdir.

Rassal sürecin bağımsızlığı

$X(t)$ ve $Y(t)$ rassal süreçleri bağımsız ise,

$$f_{X,Y}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t_1', \dots, t_m')$$

$$= f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) f_Y(y_1, \dots, y_m; t_1', \dots, t_m')$$

Birinci dereceden durağan süreç

Rassal sürecin birinci dereceden yoğunluk fonksiyonu zaman orijininin kaydırılması ile değişmiyorsa bu süreç birinci dereceden durağan süreçtir.

Birinci dereceden durağan süreç

Daha açık olarak;

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta)$$

koşulunu sağlamalıdır. Dolayısıyla sürecin ortalama değeri $E(X(t))$ sabit bir değer olmalıdır.

Birinci dereceden durağan süreç

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{sabit}$$

ise $X(t)$ rassal süreci birinci dereceden durağandır.

İkinci dereceden durağan süreç

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Koşulu tüm t_1, t_2 ve Δ değerleri için sağlanıyorsa, süreç ikinci dereceden durağan süreçtir.

İkinci dereceden durağan süreç

- Fonksiyon mutlak zamanın değil zaman farklarının yani $t_2 - t_1$ in bir fonksiyonudur.
- İkinci dereceden durağan süreç aynı zamanda birinci dereceden durağan süreçtir.

İkinci dereceden durağan süreç

$X(t)$ rassal sürecinin otokorelasyon fonksiyonu

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

ile hesaplanır.

İkinci dereceden durağan süreç

İkinci dereceden durağan sürecin otokorelasyon fonksiyonu zaman farklarının bir fonksiyonudur.

$\tau = t_2 - t_1$ olmak üzere $t_2 = t_1 + \tau$ dur.

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) \\ &= E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \\ &= R_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

olmalıdır.

Geniş anlamda durağan süreç

- Aşağıdaki iki koşul birden sağlanırsa süreç geniş anlamda durağan süreçtir.

1. $E[X(t)] = \bar{X} =$ sabit
2. $E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$

Kaynaklar

- Peyton Z. Peebles, ‘Probability, Random Variables, and Random Signal Principles’ McGraw-Hill, Inc. (1993)