OLASILIK

Ör İki farklı para birlikte atıldığında örnek uzay = ?

$S = \{(Y,Y), (Y,T) (T,Y) (T,T)\}$

Ör Bir öğr. 5 ayrı dersten 2 ders seçerse örn. uz = ?

$\binom{5}{2} = 10$

Ör 3 farklı para birlikte atılsın. Bu durumda ör. uzay?

$S = 2^3 = 8$

$O_1 \to$ Birinci para yazı, ikinci tura ve üçüncü yazı

$O_2 \to$ En az iki yazı $= \{(Y,Y,Y), (Y,T,Y), (YYT), (T,YY)\}$

i → $O_i \cup O_j$: O_i veya O_j ortaya çıkmasıyla tanımlanan olaylar

ii : $O_i \cap O_j$: O_i ve O_j " " " "

iii : $\overline{O_i}$: O_i'nin ortaya çıkmamasıyla tanımlanan olaylar

iv : $\cup_i O_i$: En az bir O_i nin ortaya çıkmasıyla tanımlanan olaylar.

v : $\cap_i O_i$: Bütün O_i lerin ortaya çıkmasıyla tanımlanan olaylar.

Ör O_1, O_2, O_3 bir rassal deneyle ilgili üç olay olsun.

En az bir olay çıksın : $O_1 \cup O_2 \cup O_3$

Yalnız bir olay ort. çıksın : $(O_1 \cap \overline{O_2} \cap \overline{O_3}) \cup (\overline{O_1} \cap O_2 \cap \overline{O_3}) \cup (\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap O$

Yalnız iki olay ort. çıksın : $(O_1 \cap O_2 \cap \overline{O_3}) \cup (O_1 \cap \overline{O_2} \cap O_3) \cup (\overline{O_1} \cap O_2 \cap O$

İkiden fazla olay birlikte ortaya çıkmasın (üç olayda ortaya çıkmasın

$(\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap \overline{O_3})$

Ör $S = \{x \mid x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

$O_1 = \{x \mid x < 10\}$

$O_2 = \{x \mid 5 \leq x \leq 20\}$ şeklinde tanımlanıyor

$O_3 = \{x \mid x > 15\}$

a) $O_1 \cup O_2 = ?$ $\quad 0 \leq x \leq 20$

b) $O_1 \cap O_2 = ?$ $\quad 5 \leq x < 10$

c) $O_1 \cap \overline{O_3} = ?$ $\quad 0 \leq x < 10$

d) $(\overline{O_1} \cap O_2) \cap O_3$ $\quad 15 < x \leq 20$

Ayrık Olay:

$O_1, O_2 \subseteq S$ iken $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ise O_1 ve O_2 olaylarına ayrık olaylar denir.

$O_1, O_2, O_3 \dots O_n$ aynı örnek uzayın alt kümeleri iken tüm i ve j ler için $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$ ise, bu olaylara karşılıklı ayrık olaylar denir.

$$\bigcup_{i=1} O_i = S$$

Olasılık Tanımları:

Kişisel Tanım: Olasılık, gelecekteki bir olay için bireylerin umutlarının bir ölçüsüdür. Ortak bir dil oluşturabilmek için bir olayın ortaya çıkma olasılığı $P(O)$ şeklinde gösterilmiş ve ölçüye 0 ile 1 ar. bir değer verilmiştir.

Klasik Tanım: Bir rassal deney sonucu karşılaşılabilir her olayın ortaya çıkma şansı aynı olsun. Eş olasılı olaylardan oluşan böyle bir örnek uzayında karşılaşılabilir birim sayısı $s(S)$ ve ilgilenilen O_i olayına ilişkin birim sayısı $s(O_i)$ ise O_i olayının ortaya çıkma olasılığı $P(O_i) = \dfrac{s(O_i)}{s(S)}$ dir.

$$O_i \leq S \Rightarrow s(O_i) \leq s(S)$$

Göreli Sıklık Tanımı: Bir rassal deney aynı koş. alt n defa tekrarlansın. Bu n deneyden ilgilenilen olaya ait sonuç sayısı f (sıklık) olsun. Deney sayısı yapılabildiğince artırılırsa $\frac{f}{N}$ oranının belirli bir değerde durağanlaştığı görülür. İşte f, ilgilenilen O olayına ilişkin sıklık iken f/N göreli sıklığın yaklaştığı bu değer O olayının ortaya çıkma olasılığı olarak tanımlanır.

$$P(O) = \lim_{N \to \infty} \frac{f}{N} \qquad 0 \leq P(O) \leq 1$$

$$P(s) = 1$$

Varsayımlarla Tanım: Bilim dallarını biri diğerinden ayıran yapay göstergeler, özel amaç, özgün yöresi alanı ve belirli yaklaşımlarla bu bilim dalının kendi geliştirdiği bilimsel kuram, genelleme, teknik ve öndgörüler olarak görülebilir.

Rassal olaylar üz. yapılan işlemler 1933 lere kadar varsayımlara dayalı kuramsal bir tabandan yoksun olarak gelişmiştir.

1933 te Kolmogorov'un yaptığı varsayımlara dayalı olasılıkla ilgili işlemleri kuramsal bir tabana oturtulmuş ve böylece bugünkü olasılık kuramı oluşturulmuştur.

=

Teorem 1: $\emptyset$ boş küme iken $P(\emptyset)=0$

2. $O_1 \subseteq O_2$ ise $P(O_1) \leq P(O_2)$

3. O örnek uzayın herhangi bir uzayı ise $P(O) \leq 1$

4. $\bar{O}$ bir O olayının tümleyeni ise $P(\bar{O}) = 1 - P(O)$ olur.

5. O_1 ve O_2 ayrık ise $P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2)$

6. $O_1 \neq \emptyset$ ve $O_2 \neq \emptyset$ ise $P(O_1 - O_2) = P(O_1) - P(O_2 \cap O_1)$

Ör/ Bir öğrenci 5/8 olasılıkla Mat dersinden 2/3 olasılıkla fiz dersinden 10/24 olasılıkla her ikisinden başarılıdır. Bu öğr. mat veya fiz. dersini başarma olasılığı?
$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$

$= \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - \frac{10}{24} = 7/8$

Ör/ $A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanlarıyla herbiri birer defa kull. 3 hanedi sayılar yapılmıştır. Bunlardan gelişigüzel çekilen sayının tek sayı olma ihtimali?
$\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{3} = 60 \quad \underline{3}\,\underline{4}\,\underline{3} = 36 \quad 3/5$

ÖZEL OLAYLARIN OLASILIKLARI

Koşullu Olasılık: O_1 ve O_2 aynı örnek uzayında tanınmış iki olay olsun. O_1 in ortaya çıktığı bil. O_2 olayının ortaya çıkma olasılığı ile il.

araştırılan değer $P(O_2 / O_1)$ O_2'nin O_1'e göre koşullu olasılığıdır.

Ör/ Kusursuz bir tavla zarı atıldığında sonucun çift bir rakam old. bil. bu rakamın 4 çıkma olasılığı? 1/3

Ör/ Bir işletmedeki yöneticiler lisans ve evlilik durumlarına göre ayrılmaktadır.

	Evli	Bekar	Toplam
işletme	3	5	8
iktisat	12	4	16
Toplam	15	9	24

Bu firmaya yön. ilişkin olş. tanımlansın

O_1: Evli yöneticiler

O_2: Bekar "

O_3: İşletme "

O_4: İktisat "

a) işletme lisans old bilinen kişinin bekar çıkma olasılığı: 5/8

b) Evli old. bil. kişinin işletme lisanslı olm. olasılığı: 1/5

RASSAL DEĞİŞKENLER

Örnek uzayı S nin herbir basit olayını yalnız bir gerçel (reel) değişkenlere dönüştüren X fonk. rassal değişken (tesadüfi) denir. Bu tanıma göre, $X: S \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ olup her basit O_i olayı için $X_i = X(O_i)$ dir.

Örnek uzayının her elemanı $\mathbb{R}^n$ de bir vektör ile eşlendirilirse yani $X: S \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ X'e n boyutlu (bileşenli) rassal değişken denir.

⇒ İçinde 3 beyaz 5 siyah top bulunan bir torbadan gelişigüzel 2 top çekilsin ve bunlara ilişkin; O_1 2side beyaz, O_2 1 beyaz 1 siyah, O_3 ikiside siyah X: siyah top sayısı

$$X(O_1) = 0 \quad X(O_2) = 1 \quad X(O_3) = 2$$

Tanım: X rassal değişkeninin $\mathbb{R}$'deki değer kümesi olan A sayılabilir ya da sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise X'e kesikli (süreksiz) rassal değişken denir.

Tanım: X rassal değişkeninin $\mathbb{R}$ deki değ. küm olan A sayılamaz bir küme ise X e sürekli rassal değ. denir.

OLASILIK FONKSIYONU

X kesikli bir rassal değ. ve bunun değer küm. $A = \{x_i ; i = 1, 2, 3 \ldots\}$ olsun.
$x_i \in A$ için $P\{X = x_i\} = p(x_i)$ ve $x_i \notin A$ için $p(x_i) = 0$ şeklinde tanımlanan $p(x)$'e X'in olasılık fonk. denir.

Ör: İki farklı paranın birlikte atılması deneyinde X: üste gelen tura sayısı.

$S = \{(T,T), (T,Y), (Y,T), (Y,Y)\}$ $A = \{0, 1, 2\}$

$X(T,T) = 2$ $X(Y,T) = 1$ $X(T,Y) = 1$ $X(Y,Y) = 0$

X	0	1	2
$p(x) = P(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Özellikler: 1) x_i örnek uzayında bir olaya karşılık geldi. göre $P(O_i) \rightarrow$ $0 \leq P(O_i) \leq 1$ $\forall_{x_i} \in A$ için $0 \leq P(x_i) \leq 1$

ii) X rassal değişkeni $X(s) = A$ dönüşümünü gerçekleştirip $P(s) = 1$ old., ayrık olayların toplam öz. göre $P(X \in A) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) \ldots$ $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i) = 1$

Ör: X rassal değişkeninin olasılık fonk.,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} ; & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 ; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$ şeklinde verilmiş bir

Bu rassal değişkene göre, $A_1 = \{x ; x \geq 2\}$, $A_2 = \{x ; x > 3\}$
$A_3 = \{x : 1 < x < 4\}$ ise

a) $P(A_1 \cup A_2) = ?$ b) $P(A_3 \setminus A_1)$ c) $P(A_2 \setminus A_1 \cap A_3)$ olasılıklarını hesaplayın.

$A_1 \cap A_2 = \{4, 5\}$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$\frac{14}{15} + \frac{9}{15} - \frac{9}{15} = 14/15$

$P(A_3 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_3)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5}{15}}{14/15} = \underline{\underline{5/14}}$

$P(A_2 / A_1 \cap A_3) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_3)} = 0$

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU (O.Y.F)

X değer kümesi A olan sürekli bir rassal değişken iken; $x \notin A$ için $f(x)=0$ olm. üzere, $\forall A_i=(a,b] \subset A$ için; $P\{X \in A_i\} = \int_a^b f(x)\,dx$ özelliğini gerçekleyen $f(x)$'e X in oyf si denir.

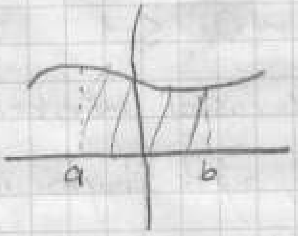
$f(x)$ bir rassal değişkenin o.y.f ise aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) Verilen fonk.un matematiksel olarak her $x \notin R$ için bir değer alabilir. Ancak tanım gereği $x \notin A$ için $f(x)=0$ olarak ele alınacaktır.

2) $\forall A_i \subset A$ için $P(A_i) \geq 0$ olması gerektiğine göre, $(a,b]$ aralığı yeterince küçültüldüğü zamanda; $P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ olabilmesi için $\forall x \in A$ için $f(x) \geq 0$ gerçekleşir.

3) X rassal değişkeni S örnek uzayının A küm. dönüştürdüğüne göre $P(S) = P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx = 1$

4) $\forall (a,b]$ için $P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x).dx$



$$\frac{1}{b-a}$$

Ör: X rassal değişkenin O yf

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{diğer dır} \end{cases}$$

a) $A_1 = \{x : 1/2 < x \leq 1\}$ olayının ortaya çıkma ols.

b) $A_2 = \{x : x \leq 3/4\}$ ol. ort. çıkma ols.

c) $A_3 = \{x ; x \geq 1/5\}$ ol. " " "

d) $P\{x \geq 1/2 \,/\, x \leq 3/4\}$ " " "

a) $P(A_1) = \int_{1/2}^{1} 2x\,dx = x^2 \Big|_{1/2}^{1} = 1 - 1/4 = 3/4$

b) $P(A_2) = \int_0^{3/4} 2x\,dx = x^2 \Big|_0^{3/4} = \frac{9}{16}$ → $P(A_2) = P(x \leq 3/4) = \int^{3/4} f(x)\,dx$ parçalayarak yaz. göster.

c) $P(A_3) = \int_{1/5}^{1} 2x\,dx = x^2 \Big|_{1/5}^{1} = \frac{24}{25}$

d) $P(x \geq 1/2 \setminus x \leq 3/4) = P(A_1 \setminus A_2)$

$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \Rightarrow \quad P(A_1 \cap A_2) = \int_{1/2}^{3/4} 2x\,dx = \frac{5}{16}$$

$$\frac{P\, A_1 \cap A_2}{P(A_2)} = \frac{5}{9}$$

DAĞILIM FONK

$X : S \to A$, $A_1 = \{t : t \leq x\}$ ve $A \subset R$ iken,

$P\{X \in A_1\} = P\{X \leq x\} = F_{(x)}$ ilişkisine karşı gelen $F_{(x)}$ e X in dağılım fonk. denir.

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$F_{(x)} = \sum_{-\infty}^{x} p(t)$, X kesikli

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, X – sürekli şeklindedir.

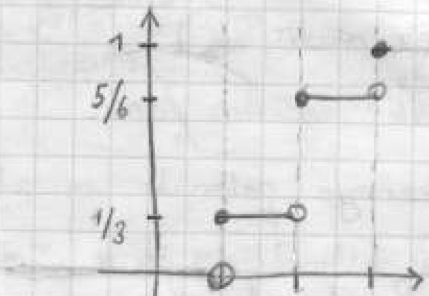
Ör — X rassal değişkeni 1, 2, 3 değerlerini 1/3, 1/2 ve 1/6 olasılıklarıyla alsın. X'in dağılım fonk. bulunuz ve çiziniz.

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad P(X=1) = 1/3 \quad P(x=3) = 1/6$

$P(x=2) = 1/2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/3 & 1 \leq x < 2 \\ 5/6 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \geq x \end{cases}$$

$P(x<1) = 0 \quad P(x \leq 1) = 1/3$

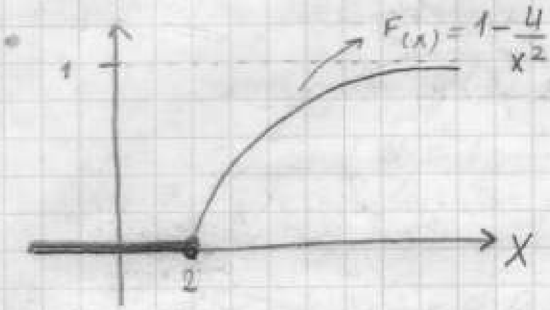


Ör: X sürekli rassal değ. O.y.f $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & x \geq 2 \\ 0 & \text{diğ dur} \end{cases}$

X in dağılım fonk. bulup $P(x<5)$ olasılığını hesaplayıp $f(x)$'i çiziniz.

$$F_{(x)} = \cancel{\int_{-\infty}^{2} 0\,dt} + \int_{2}^{x} \frac{8}{t^3}\,dt = \left.\frac{-4}{t^2}\right|_{2}^{x} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{4}{x^2}, & x\geq 2\\ 0 ; & x<2\end{cases} \qquad P(x<5)=\int_2^5 \frac{8}{x^3}\,dx=\left.\frac{-4}{x^2}\right|_2^5=\frac{21}{25}$$



$\left(\begin{matrix}2\to 0\\ \infty\to 1\end{matrix}\right)$

Dağılım Fonk. Özellikleri

1. $F_{(x)}$, X rassal değişkeninin dağılım fonk iken, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{(x)}=F(-\infty)=0$ olur.

2. $F_{(x)}$, X in artan bir fonk.idur. Yani, her i,j için $X_i \leq X_j$ olduğunda $F(x_i)\leq F(x_j)$ olur.

3. $A_1=\{X: a<x\leq b,\ a<b\}$ iken $P(A_1)=P(a<x\leq b)=F(b)-F(a)$ olur.

* 4) $P(X>x)=1-F(x)$ dir. *

5. $F_{(x)}$ dağılım fonk iken; $f(x)=\frac{d F_{(x)}}{dx}$, X - sürekli; $p(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$ X - kesikli

Çalışma Soruları:

1) Geliştirilen bir pilin ömrüne ilişkin olasılık yoğ. fonk. $f(x)=\frac{1}{200}e^{-\frac{x}{200}}, x\geq 0$ olarak belirlenmiştir. 225 saatten fazla kullanıldığı bilinen bir pilin 300 saatten fazla kullanılabilmesi olasılığı nedir? A) 0,483 B) 0,642 C) 0,687 D) 0,715 E) 0,835

2) Bir banka veznesi önünde bekleme süresinin (dk) dağılım fonk.

$F_{(x)}=\begin{cases}0; & x\leq 1\\ 1-e^{-2x}; & x>1\end{cases}$ olarak verilmiştir. Vezneye gelen bir müşterinin 5 dkdan az beklediği bilindiğine göre 2 dk fazla beklemesi olasılığı? $-\frac{1}{e^{10}}+\frac{1}{e^4}$

3) Bir tüketim malının kullanım süresi X saat iken X in olyf si $f(x)=\frac{1}{30}e^{-x/30}$, $x\geq 0$ şeklindedir. Böyle bir mal satın alan kimsenin bu malı 30 saat kullanması olasılığı =? A) 0,535 B) 0,804 C) 0,648 D) 0,510 E) 0,368

BEKLENEN DEĞER VE MOMENTLER

Olasılıkta gerek ilgili sistemin matematiksel modelinin parametreleri ve gerekse sistemin özel davranış göstergeleri için geliştirilen kavram ve tekniklerin ilki "beklenen değer" ve buna bağlı momentler başlığı altında incelenecektir.

Bir Rassal Değ. Beklenen Değeri

X rassal değ. S örnek uzayını $\mathbb{R}$'de A kümesiyle görüntülesin X rassal değ. beklenen değeri $B[X]$ ile gösterilir ve

$$B[X] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x), & x\text{-kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \cdot dx & X\text{-sürekli} \end{cases}$$ şeklinde tanımlanır.

Genel gösterimde $p(x)$'in Of'si ve $f(x)$'in Oyf'si olduğu yani $x \notin A$ için bunların 0 olarak ele alındığı gözönünde bulundurulmalıdır.

Bir rassal değişkenin beklenen değ. bulunabilmesi için X kesikli iken $\sum_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)$ serisi yakınsak, X sürekli iken ise $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \cdot dx$ belirli olmalıdır.

$B[X]$ gösteriminde "B" harfi işlem olarak ele alınır ve kullanılır. Bu nedenle B'ye beklenen değer işlemi denir.

Ör: İki farklı kusursuz paranın atılışıyla ilgili rassal deneyde X [illegible] yazı sayısı iken beklenen değer bul?

$$B[X] = \sum_{x=0}^{2} x \cdot p(x)$$

x	0	1	2
$p(x)$	1/4	1/2	1/4

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

Ör: X rassal değ. olasılık y.f. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer dur.} \end{cases}$

$$B[x] = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 3x^3 = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = 3/4$$

Beklenen değer, değer kümesi içindedir.

$\frac{3x^?}{?}$

$\int x \cdot f(x)$

$\sum x \cdot p(x)$

Beklenen Değer İşleminin Özellikleri

$U = u_x$, X rassal değ. bir fonk ise; $B[U] = \begin{cases} \sum_{x \in A} u(x) p(x) \\ \int_A u(x) f(x) dx \end{cases}$

k sbt bir sayı iken $B[k] = k$ olacağı aşikardır.

$k, a, b \in \mathbb{R}$, U ve V X in birer fonk iken;

$$B[kU] = k\,B[U]$$

$$B[aU+bV] = a\,B[U] + b\,B[V]$$

Ör// $B[x]=2$ ve $B[x^2]=5$ ise

a) $B[3x+5] = 11$

$B[2x^2-3] = 7$

$B[5x^2-2x+1] = 22$

Ör X rassal değ. oyf'si $\lambda>0$ olm üzere $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ şeklinde verilmiştir. $B[x]$'i bulunuz.

$$B[x] = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty x.e^{-\lambda x}\,dx$$ kısmi integrasyon

$$\int_0^\infty x.\lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

ARİTMETİK ORTALAMA VE VARYANS

Bir rassal deney sonucu gözlenen değerler toplamının birim sayısına oranı $\overline{X}$ ile gösterilir ve $\overline{X}$'ye aritmetik ort denir. Bu tanıma göre gözlenen değerler $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ ise bunların aritmetik ort $\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$ olur. Bir rassal deney sonucu X_i değeriyle n_i kere karşılaşılsın. n deney sayısı olm. üzere olasılığın göreli sıklık tanımı uyarınca $P\{x = x_i\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n} = P_i$ Özel bir durum olarak karşılaşılan her bir sonucun ortaya çıkma şansı aynı old. $P\{x = x_i\} = \frac{1}{n} = P_i$ ele alınabilir. $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i$

$$B[x] = \lim_{n \to \infty} \frac{\Sigma x_i}{n} = \text{Aritmetik ort.}$$

Rassal değişkenin aritmetik ortalamasını $\overline{X}$ yerine μ ile gösterilir.

$B[x] = \mu$ iken $B[x-\mu] = 0$ $\quad \underbrace{B[x]}_{\mu} - B[\mu] = \mu - \mu = 0$

VARYANS:

$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ olsun. Ölçülen değerlerin aritmetik ort. dan sapmalarının karelerinin aritmetik ortalaması S^2 ile gösterilir ve ölçülen değerlerin varyansı denir.

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Eğer örnek uzayın tamamı göz önüne alınmış ise N örnek uzayının birim sayısı ise ilgilenilen rassal değişkenin varyansı

$$V_{(x)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

$V_{(x)} = B[(X-\mu)^2]$ olduğu görülür. $V_x = B[x^2] - \mu^2$

X'in varyans karşılığı σ^2 şeklindedir.
standart sapma

ÖZELLİKLERİ

$k, a, b \in \mathbb{R}$ ve $B[x] = \mu$ iken

i- $V(x) = B[x^2] - \mu^2$

ii- $V(x+k) = V(x)$

iii $V(x k) = k^2 V(x)$

Ör/ X rassal değ. dağılım fonk. $F_{(x)} = \begin{cases} 0 & ; x < -1 \\ \frac{1}{8}(x^3+3x+4), & -1 \le x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ ise

Xin aritmetik ort, varyansı ve standart sapmasıyla $Y = 2x - 5$ şeklinde verilen Ynin aynı göstergelerini bulunuz.

$\Rightarrow$ o.y.f x türevine eşittir ($F(x)$'in)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2+1) & -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{diğer değ} \end{cases}$$

$$\mu_x = B[x] = \int_{-1}^{1} x \, \frac{3}{8}(x^2+1)\, dx = 0$$

$V_x = B[x^2] - \mu^2$

$$V_x = \sigma_x^2 = B[(x-\mu)^2] = B[x^2] - \mu^2$$

$$V_x = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{3}{8}(x^2+1) = \frac{3}{4}\int_0^1 x^4 + x^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\frac{3}{4}$$

$$= \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

$\sigma_x = \sqrt{2/5}$ olur

$$Y = 2x - 5 \qquad \mu_y = B[Y] = B[2x-5]$$

$$= 2\,B[x] - 5$$

$$\mu_y = -5$$

$$\sigma_y^2 = V(2x-5) = 4\,V_x \qquad \sigma_y = \sqrt{V_y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= 8/5$$

MOMENTLER:

a bir gerçel sayı iken $B[(x-a)^r]$ ye X rassal değişkeninin a civarındaki r. momenti denir.

$$B[(x-a)^r] = \begin{cases} \sum_A (x-a)^r \cdot p(x), & x - \text{kesikli} \\ \int_A (x-a)^r f(x).dx; & X - \text{sürekli olur.} \end{cases}$$

X rassal değişkeninin aritmetik ortalaması μ iken $a = \mu$ olarak alınırsa $B[(X-\mu)^r] = \mu_r$ ifadesi, x in aritmetik ortalama civarındaki r. momenti denir. Aritmetik ortalama civarındaki ikinci moment

$$\mu_2 = B[(x-\mu)^2] = V_x = \sigma^2$$

$$\mu_1 = B[(x-\mu)] = 0$$

$\Rightarrow B[(x-a)^r]$ $a = 0$ ise; X'in 0 civarındaki r. momenti.

$$B[(x)^r] = \mu_r'$$

$\mu_1' \rightarrow x$'in 0 civarındaki 1. momenti aritmetik ort. verir.

SK Değişim Katsayısı: Standart sapmanın aritmetik ort. oranı

$D.K = \frac{\sigma}{\mu}$

D.K'sı x rassal değişkeni ile aynı birime sahip standart sapma ve aritmetik ortalama arasında bir oran olduğundan bu ölçü ile rassal değişkenin birimi ortadan kalkmış olmaktadır.

D.K iki dağılımın karşılaştırılması gerektiği zaman başvurulan bir ölçü niteliği taşır.

SK Çarpıklık Ölçüsü:

X rassal değişkeninin aritmetik ort.ya göre 3. momentinin σ^3e oranına denir $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

SK Basıklık Ölçüsü

x rassal değ. aritmetik ort.ya göre 4. mom., σ^4a oranına denir.

$\alpha^4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

Ödev: $B[(x-\mu)^r] = \mu_r$ ve $B[x^r] = \mu_r'$ iken $\mu_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu^i \mu_{r-i}'$

(orijine değil)

Yol Gösterme: $(x-\mu)^r$ binom açılımını yap.

μ_r' tanımından yararlan

$B[(x)]$ işleminin özelliklerini kullan...

Ör. $p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$ Bu değ. aritmetik ort, $V(x)$, σ, DK, Ç.Ö, B.Ö bulunuz

$\frac{\sigma}{\mu}$

$B[x] = \sum_{x=1}^{3} x \cdot p(x)$

$= \sum_{1}^{3} \frac{x^2}{6} = 7/3 = \mu_1 = \mu \rightarrow$ aritmetik ort

$\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ $B[(x-\mu)^3]$

0 civarındaki momentler

$\mu_2' = B[(x-0)^2] = B[x^2] = \sum_{1}^{3} \frac{x^3}{6} = \frac{36}{6} = 6 = \mu_2'$

$\mu_3' = B[x^3] = \sum_{1}^{3} \frac{x^4}{6} = \frac{49}{3}$ $\mu_4' = B[x^4] = \sum_{1}^{3} \frac{x^5}{6} = 46$

⇒ aritmetik ort göre momentler

$\mu_1 = \mu_1' - \mu = 0$ $\qquad \mu_2 = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{r}{i} \mu^i \mu'_{r-i}$

$\mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$ $\qquad = \mu_2' - \mu_2$ $\qquad \boxed{\mu_0' = 1}$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3 = -\frac{7}{27}$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 = \frac{17}{27}$

$V_x = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{5}{9} \cong 0,556 \qquad \sigma = 0,0745$

$D.K = \frac{\sigma}{\mu} = 0,32 \qquad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -0,626 \qquad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 2,04$

MOMENT ÇIKARTAN FONK:

$h > 0$ ve $|t| < h$ için $B[e^{tx}]$ sonluysa $B[e^{tx}]$'e Xin moment çıkartan fonk derir ve $M_x(t)$ ile gösterilir.

$$M_x(t) = B[e^{tx}] = \begin{cases} \sum_A e^{tx} p(x) & ; \ x \text{ kesikli ise} \\ \int_A e^{tx} f(x).dx & ; \ x\text{-sürekli} \end{cases}$$

$t = 0$ için $M_x(0) = B[1] = 1$

Eğer $B[e^{tx}]$, yani X'in moment çıkartan fonk $M_x(t)$ varsa bu fonk $t=0$ için bütün türevleri vardır.

$M_x(t)$ nin t ye göre r. türevi $\qquad \frac{d^r M_x(t)}{dt^r} = M_x^r(t)$

$$M_x^r(t) = \begin{cases} \sum_A x^r e^{tx} p(x) & x\text{-kesikli} \\ \int_A x^r e^{tx} f(x).dx & x\text{-sürekli} \end{cases}$$

$$M_x^r(0) = \begin{cases} \sum_A x^r p(x) & x\text{-kesik} \\ \int_A x^r f(x).dx & x\text{-sürekli} \end{cases} \qquad M_x^r(0) = B[x^r] = \mu_r'$$

BİNOM, HİPERGEOMETRİK VE POİSSON DAĞILIMLARI

BİNOM olasılık Fonk.: n deneyde ilk x deneyin olumlu kalanların olumsuz sonuçlanma olasılığı

$$P\begin{pmatrix}\text{ilk } x \text{ deney olumlu} \\ (n-x) \text{ '' olumsuz}\end{pmatrix} = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}_{x} \underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-x}$$

$$= p^x (1-p)^{n-x}$$

n deneyde x olumlu sonuç elde etme olasılığı →

$$P(X=x) = \underbrace{p^x(1-p)^{n-x} + p^x(1-p)^{n-x} + \cdots + p^x(1-p)^{n-x}}_{n}$$

$$P(x) = C_n^x \, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Ör/ Bir hastalıktan kurtulma olasılığının 1/3 old. bilinmektedir. Bu hastalığa tutunmuş 10 kişiden a) 3ünün kurtulma
b) 2 veya daha fazlasının kurtulma olasılığı

$$p(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} \quad x=3 \text{ için}$$

$$= \frac{10.9.8}{3.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0,26$$

b) $P(x \geq 2) = 1 - p(x \leq 1) = 0,896$

Ör/ Olumlu sonuç elde etme olasılığı $P = 0,15$ olan bir deney aynı şartlar altında 10 defa tekrarlanıyor a) 3 olumlu sonuç elde etme olasılığı ile b) en az 3 olumlu sonuç elde etm. ol. bulunuz.

a) $p(x) = \binom{10}{3} \cdot (0,15)^3 \cdot (0,85)^7 = 0,1298$

b) $p(x) = \sum_{x=3}^{10} \binom{10}{x}(0,15)^x (0,85)^{10-x} = 0,1798$

⇒ BİNOM DAĞILIMININ ARİTMETİK ORTALAMA VE VARYANSI

1. Aritmetik Ort.: $\mu = B[x] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cdot x$

$$\mu = B[x] = n \cdot p \sum_{x=1}^{n} \underbrace{\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x}}_{1}$$

$$\mu = B[x] = n.p$$

Ödev: Binom dağılımının varyansının $\sigma^2 = V(x) = n.p(1-p)$ old. gösteriniz.

2. Binom Dağılımının Moment Çıkartan Fonksiyonu

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (a)^x (b)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

$$\left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = n \cdot \left[pe^t + (1-p)\right]^{n-1} \cdot p \cdot e^t \Big|_{t=0}$$

$$\mu = M_x'(t=0) = n.p = B[x]$$

Son Hafta

POISSON DAĞILIMININ MOMENT ÇIKARTAN FONK.

X poisson dağılmış bir rassal değişken iken bunun moment çık. fonk'u

$$M_x(t) = B[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} \Rightarrow M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Ödev: Aritmetik ortalama ve varyansı bul.

$\frac{dM_x(t)}{dt}$ = Aritmetik = $\bar{x}$

$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2}$ = Varyans

$$e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Ör/ X rassal değ. moment çıkartan fonk'u; $M_X(t) = e^{2(e^t-1)}$ olarak verilmiştir.

$P(x \le 1 \mid x < 3)$ olasılığını bulunuz.

$\lambda = 2$ $\quad P(x) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!}$ → poisson dağılımının olasılık fonk.

$$P(x<1 / x<3) = \frac{P(x=0)}{P(x<3)} = \frac{0,1353}{0,6767} = \frac{1}{5}$$

Ö/ Poisson dağılımının çarpıklık ölçüsü:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \text{değişim katsayısı}$$

BİNOM VE POISSON DAĞILIMI ARASINDAKİ İLİŞKİ

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots n$$

$n \cdot p = \lambda = \mu$ olmak üzere $\qquad n \cdot p = \lambda \Rightarrow p = \dfrac{\lambda}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{n.(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

→ Binom dağılmış bir rassal sistemde deney sayısı yeterince büyültülüp n.p sbt tutulduğunda tanımlanan rassal değişken için poisson dağılımı uygun bir matematiksel model olmaktadır.

Ör: Bir bölgede yaşayan her 100 insandan 5inin belirli bir hastalığa yakalandığı bilinmektedir. Bu bölgeden seçilen 4 kişinin hiçbirinin, 1inin, 2sinin 3ünün, 4ünün belirtilen hastalığa yakalanma olasılıkları?

$n=4$ $\quad p = 0,05 \quad \lambda = \underline{n.p} = 0,2$

* n ve p arasında büyük kat farkı varsa binom yerine poisson da kullanılabilir.

$$\binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x} \qquad \binom{4}{1}(0,05)^1(0,95)^3$$

Hasta sayısı (x)	$P(X=x)=\binom{4}{x}(0,05)^x \cdot (0,95)^{4-x}$	$P(x=x)=\frac{e^{-0,2}(0,2)^x}{x!}$
0	0,8145	0,8187
1	0,1715	0,1637
2	0,0135	0,0164
3	0,0005	0,0011
4	0,00...	0,0001

Çalışma Soruları: 1) Belirli bir saatte sinema gişesine önüne bilet almak için ortalama 5 kişinin geldiği bilinmektedir. X bilet almak için gelen kişi sayısı iken $P(x<3 / x\geq 1)=?$ A) 0,842 B) 0,675 C) 0,312 D) 0,119 E) 0,084

$\lambda=5$

$$P(x<3 / x\geq 1)=\frac{e^{-5} \cdot 5^x}{x!}$$

*"Ortalama" varsa poisson olma olasılığı

Ör/ Bir süpermarkete öğleden önce saat 10-11 arası gelen müşteri sayılarının moment çıkartan fon^k. $M_x(t)=e^{9(e^t-1)}$ olarak belirlenmiştir. Bu saatte en az 6 müşt. gelme olasılığı? A) 0,712 B) 0,608 C)

$\mu=9=\lambda$

0,884

6,7,8,9

$$\frac{e^{-9} \cdot 9^x}{x!}$$

0,8

Ör/ Bir bölgede bulunan 100 kişinin 80'i okuma yazma bilmektedir. X bu bölgeden seçilen 10 kişi içinde okuma yazma bilen kişi sayısı iken $P(x\geq 2)$ ve okuma yazma bilmesi beklenen kişi sayısı A) 0,645; 4 B) 0,719; 5 C) 0,795; 6 D) 0,915; 7 E) 0,995; 8

$\binom{10}{x}(0,8)^x(0,2)^{n-x}$ $1-P(x<2)$

$\mu=n\cdot p=8=\lambda$

Ör/ Bir yol üzerindeki özel bir noktadan geçen araçlar için poisson dağılımı bilinmekte olup, 1 dk'da hiç araç geçmeme olasılığı 0,1653 olarak verilmiştir. 1 dk'da iki veya daha fazla araç geçme olasılığı

A) 0,173 B) 0,111 C) 0,537 D) 0,725 E) 0,398

$$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = 0,1653 \qquad x = 1,8 \qquad 1 - P(x<2)$$

$$e^{-\lambda} = 0,1653 \qquad \lambda = 1,8$$

Ör/ Bir ambalajlama mak. hatalı ambalajlama oranı 0,08 dir. bu makinada ambalajlanan 10 paketten 3 tanesinin hatalı çıkma olasılığı?

A) 0,018 B) 0,034 C) 0,215 D) 0,320 E) 0,465

n ve p arası oran çok fazla

$n \cdot p = \lambda = \mu = 0,8$

$$\binom{10}{3}(0,08)^3(0,92)^7 \qquad \frac{e^{-0,8} \cdot 0,8^{x}}{x!} = \frac{e^{-0,8} \cdot 0,8^{3}}{3!}$$

Ör/ Bir rassal değişkenin moment çıkartan fonksiyonu $M_x(t) = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{t}\right)^4$ şeklinde verilmiştir. $P(1 < x < 4) = ?$

$P(x < 3 / x > 1) = ?$

A) 0,499, 0,659 B) 0,441, 0,718 C) 0,653, 0,512 D) 0,148, 0,215 E) 0,235, 0,563

Ör/ 3 adamın bir hedefi vurma olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ tür. Herbiri hedefe 1 atış yaparlar

a) Birinin hedefi vurma olasılığı

b) Sadece biri hedefi vurmuşsa bunun ilk kişi olma olasılığı?

a) $P(A).P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A}).P(\bar{B})P(C) = \frac{31}{72}$

$1/12 \quad +$ $\qquad = 31/72$

b) $\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)} = 1/12 \cdot \frac{72}{31} = \frac{6}{31}$

Ör/ $f(x) = \begin{cases} k & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{diğer dur.} \end{cases}$

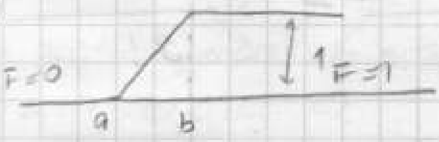
a) uygun k ne olmalıdır.

b) μ c) $F(x)=?$

a) $\int_a^b k\,dx = 1 \quad kx = 1 \quad k = \frac{1}{b-a}$

b) $\int x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2} = \frac{b+a}{2}$

c)



i) $x < a \quad F(x) = 0$

ii) $a \leq x \leq b \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}$

iii) $x > b \quad F(x) = 1$

Ör/ 500 sayfalık kitapta 300 yanlış vardır. Herhangi bir sayfa ort = 0,6 yanlış

a) Tam 2 yanlış 0,098 $\qquad \dfrac{e^{-0,6} \cdot 0,6^2}{2}$

b) 2 yada dahafazla yanlış iç. olasılığı 0,9

NORMAL DAĞILIM

Normal dağılım, ilk kez binomun özel bir durumu olarak 1733'te De Moivre tarafından önerilmiş, daha sonra Laplace da bu fonk. üzerinde çalışmıştır. Bilinen özellikleriyle bu dağılım 1809 da Gauss tarafından şekillendirilmiştir. Bu nedenle normal dağılıma Gauss dağılım denir.

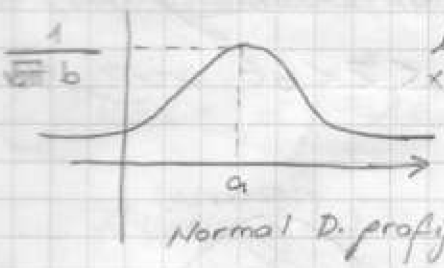
X rassal değişkeninin o.y.f.'u $b>0$ ve $a \in \mathbb{R}$ iken

(*) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$ $-\infty < x < \infty$ şeklinde ise $f(x)$'e N.D, x'e N. dağılmış bir rassal değişken denir.

(*) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = 1$ olduğu görülür.

(*) Normal dağılımda $\forall a, b$ için $f(a+x) = f(a-x)$

$x = a$'ya göre fonk. simetriktir.



Normal D. profili

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) \to 0$

NORMAL DAĞILIMIN ARİTMETİK ORT VE VARYANSI

(*) $\mu = B[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} . x e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = a$

(*) $\sigma^2 = b^2 = V(x)$ $\sigma = b$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

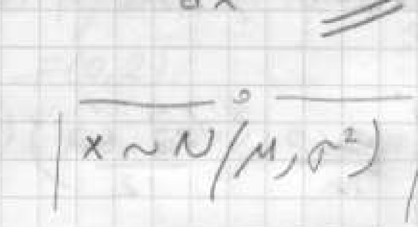
NORMAL DAĞILIMIN MOMENT ÇIKARTAN FONKSİYONU

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken bunun moment çıkartan fonk;

$M_x(t) = B[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$

Ödev: Normal dağılımın çarpıklık ölçüsünün $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 3$ old. gösteriniz

Ör// $Z \sim N(0, 1)$ iken



$P(Z \leq z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$P(0 < Z < 1.82)$

$P(Z < -0,96) \to 0,1685$

$P(-1,6 < Z < 2,3) \to 0,9345$

Tablo 3 ten yararlanılarak bulunur.

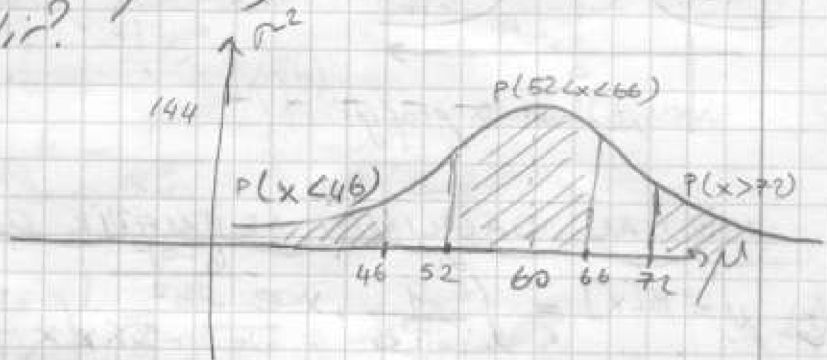
NORMAL DAĞILIMIN UYGULAMALARI

Standart normal dağılım, normal dağılmış rassal değ. ilgili bir kalıptır.
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ şeklinde tanımlanan rassal

değişkenin $Z \sim N(0,1)$ olduğu X'in moment ü. fonk. yardımıyla gösterilebilinir.

$$P(a<x<b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Ör/ Belirli bir derste öğrencilerin başarısının $\mu = 60$ ve $\sigma = 12$ olan normal dağılım göst bilinmektedir. Bu dersin sınavına girmiş bir öğr. almış old. puanın 72 den fazla, $52<Z<66$ arası, 46'dan az olma olasılıkları nedir?



$X \sim N(60, 144)$

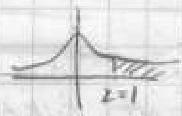
$P(x>72)$

$P(52<x<66)$

$P(x<46)$

$$P(x>72) = P\left(\frac{x-60}{12} > \frac{72-60}{12}\right)$$

$$= P(Z>1)$$



$P(Z>1) = 0,5 - P(Z<1)$

$= 0,5 - 0,3413$

$= 0,1587$

$P(52<x<66) = P(-0,66<z<0,5)$

$= P(0<z<0,66) + P(0<z<0,5)$

$= 0,2454 + 0,1915 = 0,4369$

$P(x<46) = P(z<-1,16) = 0,5 - P(0<z<1,16)$

$= 0,5 - 0,3770$

$= 0,123$

Üstel, Gamma ve Ki-Kare Dağılımları

Üstel Dağılım: X rassal değişkeninin oyf'u

(*) $\lambda > 0$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$

$f(x)$'e üstel dağılım ve x'e üstel dağılmış rassal değişken denir.

(*) $$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = 1$$

→ Üstel Dağılımın Birikimli Dağılım Fonk.

(*) $P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$ olur.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 1 & x \to \infty \end{cases}$$

(*) Ör/ x, $\lambda = 1{,}5$ olan üstel dağılmış bir rassal değişken iken $P(0{,}2 < x < 4)$

$$P(0{,}2 < x < 4) = F(4) - F(0{,}2)$$
$$= (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-0{,}3}) = 0{,}73834$$

$$P(x < 2 / x > 1) = \frac{P(1 < x < 2)}{P(x > 1)} = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = 0{,}7769$$

ÜSTEL DAĞILIMIN ARİTMETİK ORT VE VARYANSI

(*) $\mu = E[x] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$ olduğu görülür.

(*) $V(x) = E[x^2] - \mu^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$

$$V_x = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu$$

Üstel Dağılımın Moment alıcı tan Fonk.

$$M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{t-\lambda}$$

GAMMA DAĞILIMI:

$$\beta^\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

olabilir.

Gamma fonksiyonu $\alpha > 0$ iken

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Özellikleri:

i) $\alpha > 1$ iken $\Gamma(\alpha) = \alpha - 1 . \Gamma(\alpha-1)$

ii) $\Gamma(a) = (a-1)!$

iii) $\Gamma(1) = 0! = 1$

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int x^{\alpha-1} . e^{-\beta x} dx$$

Gamma fonk. olasılık yoğ. fonk;

$\alpha > 0$; $\beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\int x^\alpha . e^{-\beta x}$$

$a = 3$

$\beta = \frac{1}{2}$

Gamma Dağılımının Aritmetik Ort ve Varyansı

$$\mu = E[x] = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = V_x$$

Gamma Dağılımının Moment Çıkartan Fonk

$$M_x(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \qquad \beta > t$$

Ki-Kare Dağılımı:

Olasılık kuramı ve istatiksel alanda yoğun kullanımı ve önemli yoğunlukları olan ki-kare dağılımı gammanın özel bir şeklidir.

X gamma dağılmış bir rassal değ. $k > 0$ ve tamsayı olarak

$\alpha = \frac{k}{2}$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ ise, X'e özel olarak Ki-Kare (χ^2) gamma'nın özel şekli

dağılmış rassal değ. denir.

$\alpha = \frac{k}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$ için oyf

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1}, \quad x>0$$

k: serbestlik derecesi

$X \sim \chi^2_{(k)}$ x, kikare dağılımına uyuyorsa bu şekilde ifade edilir.

Ör $X \sim \chi^2_5$ iken $P(X>2,34) = ?$

$P(4,35 < x < 15,09) = ?$

$X \sim \chi^2_8$ iken $P(x<k) = 0,95$

$k = ?$

$\rightarrow 1 - P(x \leq 2,34) = 0,8$

$\rightarrow P(4,35 < x < 15,09) = F(15,09) - F(4,35) = 0,49$

$X \sim \chi^2_8$ iken $P(x<k) = 0,95$

$k = 15,51$

→ Ki-Kare Dağılımının A.O ve Varyansı:

$$\mu = \frac{\frac{k}{2}}{1/2} = k \qquad V_X = \frac{k/2}{1/4} = 2k$$

χ^2 Moment üreten fonk:

$$M_X(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{k/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}, \quad t<\frac{1}{2}$$

Ör) Bir berber dükkanına saatte 2 müşteri geldiği ve bunların poisson dağ. bil. T dükkana gelen müşt. arası geçen süre (dk),

$P(T < 60 / T > 20)$ A) 0,378 B) 0,513 C) 0,737 D) 0,865 E) 0,925

$$P(T<1 / T>1/3) = \frac{F(1) - F(1/3)}{1 - F(1/3)} \qquad \underline{1-e^{-x}}$$

dk 20

120

10^{-48}

9216

10^{-4}

$9,216 \cdot 10^{-52}$

0,9667

$964 \cdot 10^{-50}$

$96 \cdot 10^{-50}$

0,96

60

$\frac{2}{60}$

3/2

$2^{15} \Gamma(9/2)$

2) Bir kimyasal olayda istenilen sonucun elde edilişine kadar geçen rxn süresinin parametreleri $\alpha=2$ $\beta=0,02$ olan gamma dağılmış bir rassal değ. old. bil. T ardışık iki rxn arasındaki süre iken $P(T>50)$ olasılığı?

$$\int_{50}^{\infty} \left(\frac{0,02}{1}\right)^2 x \cdot e^{-0,02x}\,dx = \underset{\sim}{0,736}$$

A) 0,928 B) 0,736 C) 0,648 D) 0,625 E) 0,319

3) Bir bankaya gelen müşteriler arası geçen süre $\mu=4$ dk $\sigma(x)=8$ dk olan gamma dağılmış bir değ iken $P(t<10)$

A) 0,998 B) 0,96 C) 0,625 D) 0,647 E) 0,406

ÇOK DEĞİŞKENLİ RASSAL DEĞİŞKENLER:

$X=(X_1, X_2, \ldots X_n)$ olm. üzere X rassal değişkeni;

$X: S \longrightarrow A \subset R^n$ şeklinde tanımlanır ve n boy. rassal değişken olarak adlandırılır.

Bileşik Olasılık Fonk:

$X=(X_1, X_2 \ldots X_n)$ şeklinde n boyutlu kesikli bir rassal değ. ve A bunun değer kümesi iken:

i) $p(x_1, x_2 \ldots, x_n) \geq 0 \quad \forall x \in A$

ii) $\Sigma\Sigma \ldots \Sigma\, p(x_1, x_2 \ldots x_n) = 1$ özelliğini sağlayan $p(x_1, x_2 \ldots x_n)$ fonksiyonuna X in olasılık fonksiyonu (X_i lerin bileşik ol. fonk) denir.

Ör/

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{9}{4^{x_1 - x_2}}, & x_1 = 1,2,3\ldots \quad x_2 = 1,2,3\ldots \\ 0, & \text{dığ. der.} \end{cases}$$

$p(x_1,x_2)$nin olasılık fonk. old. göst.

$$\sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{9}{4^{x_1-x_2}} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1$$

(ak) (*) $\sum_{a=0}^{\infty} \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

Ör/ $p(x_1, x_2)$ için $A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 2,\ 2 < x_2 \leq 4\}$

$A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq x_2 \quad x_2 \leq 3\}$

$$P(A_1) = \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{3}^{4} \frac{9}{4^{x_1 - x_2}} = 0{,}0549$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(1;3),(2,3)\} = \{(1,3)\} \cup \{(2,3)\}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(x_1 = 1, x_2 = 3) + P(x_1 = 2, x_2 = 3) > 1 \text{ anlamsız}$$

Bileşik Olasılık Yoğ. Fonk.

değer kümesi A olan n boyutlu sürekli rastlantı değişkeni
$A_i \subseteq A$ iken $P(A_i) = \iiint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

$f(x) = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$'e bil o.y.f denir.

i) $\iiint_{A_i} f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1$

35,6

ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

Ör/ (X,Y) sürekli rassal değ için b.o.y.f

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{dış} \end{cases}$$ olarak ver-dir.

2 1 0 3 4

$$\int_0^1 \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx\, dy = 1$$

$A_1 = \{(x,y) \mid x+y \geq 1\}$ $\quad P(A_1) = ?$

$$P(A_1) = 1 - P(x+y<1)$$

$$= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy\, dx = \frac{65}{72}$$

$|a| < 1$

$$-\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

$A_2 = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1/2,\ 0 \leq y \leq 2\}$

$$P(A_2) = \int_0^{1/2} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) = 5/12$$

BILEŞIK DAĞ. FONKSİYONU:

$X=(x_1, x_2 \ldots x_n)$ değer kümesi A olan n boyutlu bir rassal değ. ilse

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 \ldots X_n \le x_n) = F(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{x_1} \sum_{-\infty}^{x_2} \ldots \sum_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2 \ldots t_n) & X\text{-kesikli} \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2 \ldots t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n & X\text{-sürekli} \end{cases}$$

*Bil. dağ. fonk., dağ. fonk. tüm öz. taşır.

Ör/ $X=(X_1, X_2)$ rassal değ. oyf'u; $f(x) = \begin{cases} e^{-x_1 - x_2} & x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0 \\ 0 & \text{diğ. dur.} \end{cases}$

$F(x_1, x_2) = ?$

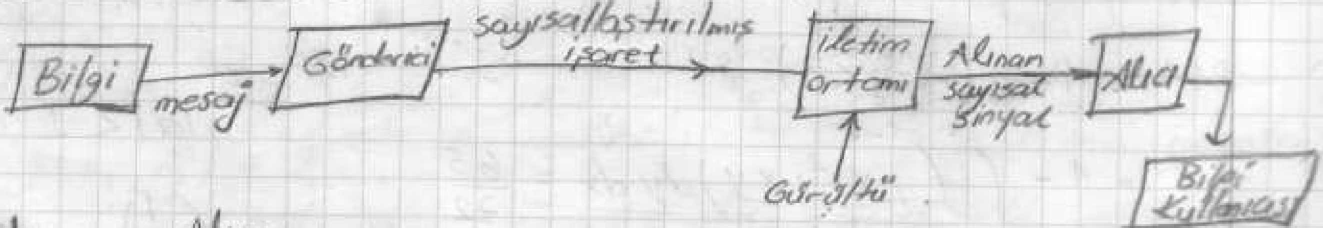
$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2) dt_2 \, dt_1$$

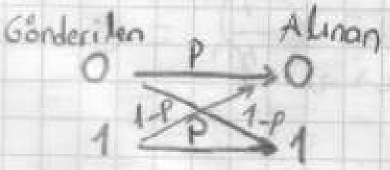
$$F(x_1, x_2) = \int_{0}^{x_1} \int_{0}^{x_2} (e^{-t_1 - t_2}) dt_2 \, dt_1$$

$$= (e^{-x_1} - 1)(e^{-x_2} - 1)$$

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2}) & x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

HATA DÜZELTME:





$n=3 \quad 101 \quad wt(101) = 2$

Hamming ağırlığı

hamming uz. $d(1001, 1000) = 1$

$t+1$ hamming uzaklığında t hata tespit edilebilir.

Min $2t+1$ ise t adet hata düzeltilebilir.

Ör/ n=3 olan bir kod iletimi için 0 veya 1 iletileceği ve her bitte hata oluşma ol. birbirinden bağımsız old. göre;

a) Matematiksel olarak 3 bitte 0 hata oluşma ol, 3 bitte 1 hata oluşma ols, 3 bitten 3'ününde hatalı olm. ols.

b) P=0,3 için A şıkkında bul. sayısal değ. bulunur.

a) $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ k=3 için

$$\binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = p^3$$

k=2

$$\binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 = 3p^2(1-p)$$

k=0 için $(1-p)^3$

→ Hipergeometrik DAĞILIM

$$P(X=x) = \frac{\binom{N}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$$

M+N → topluluktaki birim sayısı

N → toplulukta ilgilenilen birim sayısı

n → çekilen birim sayısı

$$\mu = E[x] = \sum_{x=0}^{N} x.p(x) = \sum_{x=0}^{N} \frac{\binom{N}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{M+N}{n}} \Rightarrow \mu = \frac{N}{M+N} \cdot n$$

POISSON DAĞILIM

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & , x=0,1,2\ldots \\ 0 & , \text{diğ. dur.} \end{cases}$$

$$\mu = \sum_{0}^{\infty} x\,p(x) = \sum_{0}^{\infty} x . \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!} \qquad \text{“}\mu = \lambda\text{''}$$

$V_x = \lambda = \sigma^2$ * Poisson dağ. değişim katsayısı

$$D.K = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

* Bir matbaa işçisinin sayfada ortalama 3 dizgi hatası yaptığı biliniyor. Bu işçinin dizgisini yaptığı sayfada

a) 2 dizgi hatası

b) en fazla 4 dizgi hatası

çıkma ol?

$\lambda = 3 \quad P(x=2) = 0{,}224$

→ Poisson Moment Ç. F.

$M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad \mu = \lambda$

Ör/ X rassal dğ. M. Ç. F $M_x(t) = e^{2(e^t-1)}$

$P(x<1 / x<3)$

$\lambda = 2 \qquad \dfrac{P(x=0)}{P(x<3)} = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!} = \dfrac{e^{-2}\cdot 2^0}{e^{-2}\cdot 2^0 + e^{-2}\cdot 2^1 + e^{-2}\cdot 2}$

NOT PAYLAŞIMINDAN

DOLAYI

"ILGAZ AZ"'a

TEŞEKKÜRLER