MAT 340

Ders 7

Bilesik Olasilik Dagilimi

Bilesik Olasilik Dagilimi

- Bazi durumlarda ayni anda iki yada daha fazla rassal degisken ile ilgilenilebilir .
- Ornegin, bir urunun (vidget)
  - uzunlugu
  - agirligi.
  - Her ikisi de rassal degiskendir.
- Bu dersin amaci
  - Iki yada daha fazla rassal degisken icin bilesik olasilik fonksiyonun tanimlamak
  - Marjinal ve kosullu olasilik dagilimlarini elde etmek.
  - Rassal degiskenlerin bagimsizligini arastirmak
  - Korelasyon ve kovaryamsi tanimlamak

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu

- $[x_1,x_2]$ ‘nin aldigi degerler sonlu yada sayilabilir sonsuz ise $[x_1,x_2]$ iki boyutlu kesikli rassal vektordur.
- $[x_1,x_2]$’nin aldigi mumkun degerler sayilamaz ise $[x_1,x_2]$ iki boyutlu surekli rassal vektordur.

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu

Kesikli Durum

$$p(x_1,x_2)=p(X_1=x_1,X_2=x_2)$$

$$p(x_1,x_2)\geq 0 \quad and$$

$$\sum_{all\ j}\sum_{all\ i}p(x_1,x_2)=1$$

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu

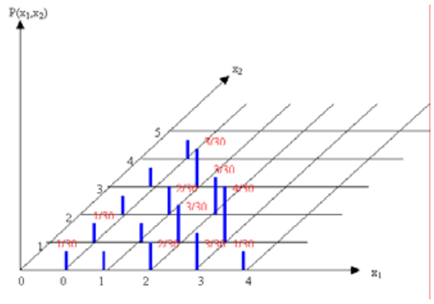
Ornek:

x1 / x2	0	1	2	3	4	P(x2)
0	1/30	1/30	1/15	1/10	1/30	4/15
1	1/30	1/30	1/10	2/15		3/10
2	1/30	1/15	1/10			1/5
3	1/30	1/10				2/15
4	1/10					1/10
P(x1)	7/30	7/30	4/15	7/30	1/30	top p(x)=1

p(x1,x2)’nin tablo gosterimi

x_1=0 ve x_2=0 olma olasiligi 1/30’dur.

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu



Iki degiskenli olasilik dagiliminin grafiksel gosterimi

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu

Ornek: Bir tukenmez kalem icin 2 yedek ic, icerisinde 3 mavi, 2 kirmizi ve 3 yesil ic bulunan bir kutudan rassal olarak secilmistir.

X; secilen mavi iclerin sayisi
Y; secilen kirmizi iclerin sayisi
Ise

a) X ve Y icin bilesik olasilik fonksiyonunu tanimlayiniz.
b) A={(x,y)|x+y≤1} ise P((x,y)∈A)+?

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Fonksiyonu

Cozum

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}} & x=0,1,2;\quad y=0,1,2;\quad 0\le x+y\le 2\\ 0 & \text{dd}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P((x,y)\in A)&=P(X+Y\le 1)\\&=p(0,0)+p(0,1)+p(1,0)\\&=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{9}{28}=\frac{9}{14}\end{aligned}$$

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

- $[X_1,X_2]$; R deger uzayina sahip surekli rassal degisken ise; bilesik olaslik yogunluk fonksiyonu asagidaki ozelliklere sahiptir.

$$f(x_1,x_2)\ge 0 \quad for\ all\ (x_1,x_2)\in R$$

$$\iint_R f(x_1,x_2)dx_1dx_2=1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2=1$$

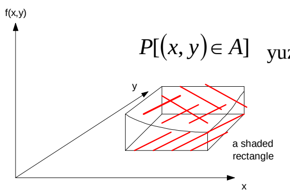
Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

2. Surekli Durum

$$P(a_1\le X_1\le b_1, a_2\le X_2\le b_2)=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$f(x_1,x_2)=0 \quad for\ (x_1,x_2)\notin R$$

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu



$P[(x,y)\in A]$ yuzeyin altindaki hacime esittir.

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

Ornek Bir banka iki tur vezneye sahiptir. Birinci vezne araba ile gelen musterilere hizmet verirken digeri normal musterilere hizmet vermektedir. Rassal olarak secilen bir gun icin;

x=birinci veznenin doluluk orani
y=ikinci veznenin doluluk orani.

x ve y'nin deger kumesi;

$$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$$

(x,y)'nin bilesik yogunluk fonksiyonu:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x+y^2) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

a) Bu fonksiyon bir olasilik yogunluk fonksiyonumudur ?
b) Her iki veznenin de zamanin ¼'unden daha fazla dolu olmama olasiligini bulunuz

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

a)

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

b)

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

Ornek

Bir sekerleme fabrikasinda uretilen cikolata ve gofretler beyaz ve siyah cikolata ile kaplanmaktadir. Rassal olarak bir urun secildiginde X ve Y; urundeki beyaz ve siyah cikolata oranini gostermektedir ve asagidaki bilesik yogunluk fonksiyonuna sahiptir:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y) & 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{dd}\end{cases}$$

a) Bu fonksiyonun bilesik olasilik yogunluk fonksiyonu olup olmadigini gosteriniz.
b) P(0<X<1/2; 1/4<Y<1/2)=?

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

Cozum

Iki Rassal Degisken icin Bilesik Olasilik Yogunluk Fonksiyonu

Ornek

$$f(x_1,x_2)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{500} & 0\le x_1\le 0.25\ ,\ 0\le x_2\le 200\\ 0 & o.w.\end{Bmatrix}$$

$$P(0.1\le x_1\le 0.2\ ,\ 100\le x_2\le 200)=?$$

Marjinal Dagilimlar

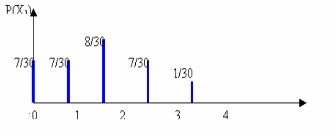
- Birden fazla rassal degiskenler icin bilesik olasilik fonksiyonuna yada bilesik olasilik yogunluk fonksiyonuna sahip olundugunda bazi durumlarda sadece bir rassal degisken ile ilgilenilebilir. Bu durumda bir rassal degiskenin olasilik fonksiyonu "marjinal dagilim" olarak adlandirilir.
- X_1 kesikli rassal degiskeni icin marjinal dagilim;

$$p(x_1) = \sum_{tum\ x_2} p(x_1, x_2) \qquad \forall x_1$$

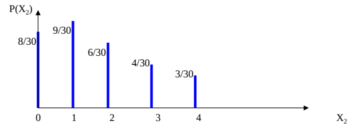
- X_2 kesikli rassal degiskeni icin marjinal dagilim

$$p(x_2) = \sum_{tum\ x_1} p(x_1, x_2) \qquad \forall x_2$$

Marjinal Dagilimlar



X_1 kesikli rassal degiskeni icin marjinal dagilim



X_2 kesikli rassal degisken icin marjinal dagilim

Marjinal Dagilimlar

X_1 surekli rassal degisken icin marjinal dagilim

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2$$

X_2 surekli rassal degisken icin marjinal dagilim

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1$$

Marjinal Dagilimlar

Ornek

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x + y^2\right) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

a) X; araba ile gelen musterilere hizmet veren veznenin dolu zamani icin rassal degisken ise X'in marjinal dagilimini bulunuz.
b) Y icin marjinal dagilim fonksiyonunu bulunuz.
c) $P\left(\frac{1}{4} \le y \le \frac{3}{4}\right) = ?$

Cozum

Marjinal Dagilimlar

a)

b)

Marginal Distributions

c)

Beklenen Deger ve Varyans

1. Kesikli Durum icin

$$E(x_1)=\mu_1=\sum_{all\ i} x_1 p(x_1)=\sum_{all\ i}\sum_{all\ j} x_1 p(x_1,x_2)$$
$$=\sum_{all\ i} x_1 \sum_{all\ j} p(x_1,x_2)$$
$$=\sum_{all\ i} x_1 p(x_1)$$

$$v(x_1)=\sigma_1^2=\sum_{all\ i}(x_1-\mu_1)^2 p(x_1)=\sum_{all\ i}\sum_{all\ j}(x_1-\mu_1)^2 p(x_1,x_2)$$
$$=\sum x_1^2 p(x_1)-\mu_1^2=\sum_i\sum_j x_1^2 p(x_1,x_2)-\mu_1^2$$

Beklenen Deger ve Varyans

$$E(x_2)=\mu_2=\sum_j x_2 p(x_2)=\sum_j\sum_i x_2 p(x_1,x_2)$$

$$V(x_2)=\sigma_2^2=\sum_j (x_2-\mu_2)^2 p(x_2)=\sum_j\sum_i (x_2-\mu_2)^2 p(x_1,x_2)$$
$$=\sum x_2^2 p(x_2)-\mu_2^2=\sum_j\sum_i x_2^2 p(x_1,x_2)-\mu_2^2$$

Beklenen Deger ve Varyans

Ornek

Bilesik olasilik fonksiyonunun tablo olarak verildigi ornekte, X_1 nin beklenen deger ve varyansini bulunuz.

Beklenen Deger ve Varyans

2. Surekli Durum

$$E(x_1)=\mu_1=\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

$$V(x_1)=\sigma_1^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)^2 f(x_1)dx_1$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)^2 f(x_1,x_2)dx_2dx_1=\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f(x_1)dx_1-\mu_1^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f(x_1,x_2)dx_2dx_1-\mu_1^2$$

Beklenen Deger ve Varyans

$$E(x_2)=\mu_2=\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2)dx_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$V(x_2)=\sigma_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x_2-\mu_2)^2 f(x_2)dx_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_2-\mu_2)^2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f(x_2)dx_2-\mu_2^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2-\mu_2^2$$

Beklenen Deger ve Varyans

Ornek

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{500} & 0\le x_1\le 0{,}25\ ,\ 0\le x_2\le 2000\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

a) X_1 in marjinal dagilimini bulunuz
b) $E(X_1)$=? ve $Var(X_1)$=?

Beklenen Deger ve Varyans

Cozum:

a)

b)

Kosullu Dagilim

X ve Y kesikli yada surekli rassal degiskenler olsun. X=x olduğunda Y rassal degiskeninin kosullu dagilimi:

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}, \qquad f(x) > 0.$$

Benzer sekilde, Y=y oldugunda X rassal degiskeni icin kosullu dagilimi:

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}, \qquad f(y) > 0.$$

Kosullu Dagilim

- Ornek

Kesikli rassal degiskenler icin verilen birinci ornekte;

a) X_2 =1 oldugunda X_1 icin kosullu dagilimini bulunuz
b) $P(X_1 = 0 \mid X_2 = 1) = ?$

Kosullu Dagilim

Cozum

Kosullu Dagilim

Ornek

(X,Y) r.d. icin bilesik olasilik yogunluk fonksiyonu;

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2 & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

X; birim sicaklik degeri
Y; atomik parcanin kayma orani

a) Marjinal yogunluk fonksiyonlarini f(x), f(y) ve kosullu yogunluk fonksiyonunu f(y|x) bulunuz.
b) Sicaklikta 0.25 birim artis oldugunda, tum gozlemlerin yarisindan fazlasinda atomik parcalarin kayma olasiliki nedir? P(Y>1/2|X=0.25)=?

Kosullu Dagilim

Cozum

Bagimsiz Rassal Degiskenler

X ve Y , her x ve y deger cifti icin asagidaki sarti sagliyorlar ise bagimsiz rassal degiskenlerdir.

$p(x,y) = p(x)p(y)$ X ve Y kesikli ise

$f(x,y) = f(x)f(y)$ X ve Y surekli ise

Herhangi bir (x,y) cifti icin bu esitlik saglanmiyor ise X ve Y bagimli rassal degiskenlerdir.

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Ornek

Kesikli rassal degiskenler icin verilen ornekte X ve Y rassal degiskenlerinin bagimsiz olmadigini gosteriniz.

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Ornek

Kesikli rassal degiskenler icin verilen ornekte X ve Y rassal degiskenlerinin bagimsiz olmadigini gosteriniz.

Cozum

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Ornek

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2 & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

X ve Y'nin istatistiksel bagimsiz olmadigini gosteriniz.

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Cozum

Kovaryans

- X ve Y rassal degiskenleri bagimsiz olmadiginda bu iki degisken arasindaki iliskinin derecesi bilinmek istenir.
- X ve Y rassal degiskenleri arasindaki kovaryans;

$$\operatorname{cov}(x,y) = E(x-\mu_x)(y-\mu_y) =$$

$$\begin{Bmatrix} \sum\sum (x-\mu_x)(y-\mu_y)\,p(x,y) & x,y \quad discrete \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y)\,f(x,y)dxdy & x,y \quad continuous \end{Bmatrix}$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = E(xy) - \mu_x\ \mu_y = E(xy) - E(x)E(y)$$

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Korelasyon

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Ornek

Bir maraton yarisinda X; bayan sporcularin oranini ve Y; erkek sporcularin oranini gostermek uzere X ve Y icin bilesik yogunluk fonksiyonu asagida verilmektedir.

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

X ve Y icin kovaryansi bulunuz

Bagimsiz Rassal Degiskenler

Cozum

References

- Walpole, Myers, Myers, Ye, (2002),
  - *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*
- Dengiz, B., (2004),
  - *Lecture Notes on Probability,* http://w3.gazi.edu.tr/web/bdengiz
- Hines, Montgomery, (1990),
  - *Probability & Statistics in Engineering* & Management *Science*