Pelin TOKTAŞ

MAT 250 1. ÖDEV ÇÖZÜMLERİ

① $\boxed{1-10}$ 8 kişi

a) Hiçbir koşul olmaksızın $8! = 40320$ değişik şekilde oturabilirler.

b) A ve B yanyana oturursa,

$$2.7! = 10080$$

c) 8 kişi = 4 erkek + 4 kadın

iki erkek ve iki kadın yanyana oturmamak şartıyla,

$\underbrace{K\overset{1}{E}K\overset{2}{E}K\overset{3}{E}K\overset{4}{E}}_{\text{olası yerler}}$ veya EKEKEKEK şeklinde oturabilirler.

$$2\,4!\,4! = 1152$$

d) 8 kişi = 5 erkek + 3 kadın

5 erkek yanyana oturmak istiyorlarsa, 5 erkeği bir kişi gibi düşüneceğiz.

$$4!.\underset{\substack{\downarrow \\ \text{erkeklerin kendi} \\ \text{aralarında yer} \\ \text{değiştirme sayısı}}}{5!} = 2880$$

e) 8 kişi = 4 evli çift

Evli çiftler yanyana oturmak koşuluyla,

$$4!\underset{\substack{\downarrow \\ \text{çiftlerin} \\ \text{kendi aralarında} \\ \text{yer değiştirme sayısı}}}{2^4} = 384$$

② $\boxed{1-20}$

8 kişi → 5 kişi gelecek.

a) 2 kişi (A ve B) beraber gelmeyi istemiyorsa,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{A ve B} \\ \text{yok!}}}{\binom{6}{5}} + \binom{2}{1}\underset{\substack{\downarrow \\ \text{A veya B} \\ \text{geliyor!}}}{\binom{6}{4}} = \frac{6.5!}{5!\,1!} + 2.\frac{\overset{3}{\cancel{6}}.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,\cancel{2}} = 36$$

b) 2 kişi (C ve D) beraber gelirse,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{A ve B} \\ \text{yok!}}}{\binom{6}{5}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{A ve B} \\ \text{beraber gelirse!}}}{\binom{6}{3}}$$

③ $\boxed{1-31}$ Kitabınızda Proposition 6.2 ve 6.1 'i inceleyiniz. (Sayfa: 13 6. baskı)

8 tahta 4 okula dağıtılıyor.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \qquad r = 4 \quad n = 8$$

$$\text{Prop. } 6.2 \Rightarrow \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{11}{3} = 165$$

Her okula en az bir tahta verilirse

$$\text{Prop. } 6.1 \Rightarrow \binom{n-1}{r-1} = \binom{7}{3} = 35.$$

④ [1-32]

a) 8 kişi $\Rightarrow n=8$, 6 kat $\Rightarrow r=6$ $\quad x_1+x_2+\dots+x_6=8$

$$\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{13}{5}=\frac{13.12.11.10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}\,5.4.3.2.1}=1287$$

b) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=5 \Rightarrow n_1=5,\ r=6$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3 \Rightarrow n_2=3,\ r=6$

$$\binom{n_1+r-1}{r-1}\binom{n_2+r-1}{r-1}=\binom{10}{5}\binom{8}{5}=\frac{10.9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,5.4.3.2}\cdot\frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,3.2}$$

⑤ [2-6]

Sigortalı $\to 1$ $\quad$ good $\to$ g $\quad$ fair $\to$ f $\quad$ serious $\to$ s

Sigortasız $\to 0$

a) $S=\{(1,g),(0,g),(1,f),(0,f),(1,s),(0,s)\}$

b) $A=\{(1,s),(0,s)\}$

c) $B=\{(0,g),(0,s),(0,f)\}$

d) $B'\cup A=?$

$B'=\{(1,g),(1,f),(1,s)\}$

$B'\cup A=\{(1,g),(1,f),(1,s),(0,s)\}$

⑥ Zar $\to$ 2 yüzü kırmızı, 2 yüzü siyah, 1 yüzü sarı, 1 yüzü beyaz

[2-19] P(atılan bir çift zarın aynı renk gelmesi) $=\underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{ikiside kırmızı}}+\underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{ikisi de siyah}}+\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{ikisi de sarı}}+\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{ikisi de beyaz}}$

$$=\frac{4}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\boxed{\frac{5}{18}}$$

⑦ [2-27] Önce A kutudan bir top çekmek şartıyla,

(3K, 7S) A kişisi kırmızı bir top çekene kadar B ile sırasıyla kutudan top çekiyorlar.

$$P(\text{A'nın kırmızı top çekmesi})=\overbrace{\frac{3}{10}}^{\text{A 1.denemede}}+\overbrace{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}}^{\text{2. denemede}}+\overbrace{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}}^{\text{3. denemede}}+\overbrace{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}^{\text{4. denemede}}$$

$= 0.58333$

⑧ [2-28] (5K, 6M, 8Y) $\to$ ○○○

a) $P(\text{tüm topların aynı renk olması})=\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$

b) $P(\text{topların farklı renkte olması})=\dfrac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}$

Eğer çekilen top yerine konursa,

a') $P(\text{tüm topların aynı renk olması})=\dfrac{5^3+6^3+8^3}{19^3}$

b') $P(\text{topların farklı renkte olması})=P(KYM)+P(KMY)+\dots+P(MKY)=6\cdot\dfrac{5.6.8}{19^3}$

(9) $\boxed{2\text{-}45}$

A_i: i. denemede doğru anahtarı bulma

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Denenen anahtar ayrılırsa,

$$P(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_3) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_4) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} = \frac{1}{n}$$

$\vdots$

$$P(A_k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

Denenen anahtar ayrılmazsa,

$$P(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$P(A_3) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

$$P(A_4) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^3}{n^4}$$

$\vdots$

$$P(A_k) = \underbrace{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-1}{n}}_{k-1 \text{ tane}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

(10) $\boxed{2\text{-}52}$

a) $$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}$$

b) $$\frac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}\frac{8!}{2!}\,2^6}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}$$

(11) $\boxed{3\text{-}62}$

R_i: Röle i 'nin kapalı olması $i=1,2,3,4,5$

a) $P(\text{Akım geçmesi}) = P\{[(R_1\cap R_2)\cup(R_3\cap R_4)]\cap R_5\}$

$= P[(R_1\cap R_2)\cup(R_3\cap R_4)]\cdot P(R_5)$

$= [P(R_1\cap R_2)+P(R_3\cap R_4)-P(R_1\cap R_2\cap R_3\cap R_4)]\,P(R_5)$

$= [P(R_1)P(R_2)+P(R_3)P(R_4)-P(R_1)P(R_2)P(R_3)P(R_4)]\,P(R_5)$

$= [p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4]\,p_5$

b) $E_1=\{1 \text{ ve } 4 \text{ kapalı}\}$
$E_2=\{\underbrace{1,3 \text{ ve } 5}_{\text{hepsi}} \text{ kapalı}\}$
$E_3=\{2 \text{ ve } 5 \text{ kapalı}\}$
$E_4=\{2,3 \text{ ve } 4 \text{ kapalı}\}$

Akımın geçmesi için tüm olası kombinasyonlar

$P(\text{Akım geçmesi}) = P(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)$

$= P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)-P(E_1\cap E_2)-P(E_1\cap E_3)-P(E_1\cap E_4)$
$-P(E_2\cap E_3)-P(E_2\cap E_4)-P(E_3\cap E_4)+P(E_1\cap E_2\cap E_3)+$
$P(E_1\cap E_2\cap E_4)+P(E_1\cap E_3\cap E_4)+P(E_2\cap E_3\cap E_4)-P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4)$

$= p_1p_4+p_1p_3p_5+p_2p_5+p_2p_3p_4-p_1p_3p_4p_5-p_1p_2p_4p_5-p_1p_2p_3p_4-$
$p_1p_2p_3p_5-p_2p_3p_4p_5-2p_1p_2p_3p_4p_5+3p_1p_2p_3p_4p_5$

(12) $\boxed{3\text{-}69}$

$\underbrace{P(\text{erkek})=P(\text{kız})}_{\text{bağımsız}}=\frac{1}{2}$

a) $P(\text{Hepsinin aynı cinsiyetten olması}) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{hepsi kız}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{hepsi erkek}} = \frac{1}{16}$

b) $P(\text{En büyük 3 tanesi erkek, diğerleri kız}) = \underset{\text{3 erkek}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\cdot\underset{\text{2 kız}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{32}$

c) $P(\text{3 tane erkek}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5.4}{2}!\ \frac{1}{\cancel{32}_{8}} = \frac{5}{16}$

d) $P(\text{En büyük 2 tanesi kız}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{x=0}^{3}\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}}_{1}\Big) = \frac{1}{4}$

e) $P(\text{En az bir kız}) = 1 - P(\underbrace{\text{Hiç kız olmaması}}_{\text{hepsi erkek}})$

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1-\frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

(13) $\boxed{3-78}$

(T) → A zarı → 4 yüzü kırmızı , 2 yüzü beyaz
(Y) → B " → 2 " " , 4 " "

K: Zarın kırmızı gelmesi
T: Paranın tura gelmesi
Y: " yazı "

a) $P(K) = P(K|T) \cdot P(T) + P(K|Y) \cdot P(Y)$
$= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $P(K|KK) = \dfrac{P(KKK)}{P(K)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{5}.$

c) $P(A\,\text{zarı}\,|\,KK) = \dfrac{P(KK|A) \cdot P(A)}{P(KK)} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{5}.$

Pelin TOKTAŞ

MAT 250 2. ÖDEV ÇÖZÜMLERİ

① 4.1

8B, 4S, 2T → OO

Herbir siyah top için 2\$ kazanılıyor.
" beyaz " " 1\$ kaybediliyor.

X: kazanılan miktar

$2B \to x=-2$ $\quad 2S \to x=4$
$1B, 1S \to x=1$ $\quad 1S, 1T \to x=2$
$1B, 1T \to x=-1$ $\quad 2T \to x=0$

$\Rightarrow x=-2,-1,0,2,4$

$P(X=-2)=\dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{28}{91}$ $\qquad P(X=1)=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{32}{91}$

$P(X=-1)=\dfrac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{16}{91}$ $\qquad P(X=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{8}{91}$

$P(X=0)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{1}{91}$ $\qquad P(X=4)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}=\dfrac{6}{91}$

② 4.13

	1. randevu	2. randevu
Satış var →	0.3	0.6
Satış yok →	0.7	0.4

Her randevuda, satış varsa,
1/2 olasılıkla \$1000 lik
1/2 " \$500 lik
ansiklopedi satılıyor.

1. randevu	2. randevu	Toplam	Olasılık
1000	1000	2000	$1/2(0.3)1/2(0.6)=0.045$
1000	500	1500	$1/2(0.3)1/2(0.6)=0.045$
500	1000	1500	$1/2(0.3)1/2(0.6)=0.045$
500	500	1000	$1/2(0.3)1/2(0.6)=0.045$
1000	0	1000	$1/2(0.3)(0.4)=0.06$
500	0	500	$1/2(0.3)(0.4)=0.06$
0	1000	1000	$(0.7)1/2(0.6)=0.21$
0	500	500	$(0.7)1/2(0.6)=0.21$
0	0	0	$(0.7)(0.4)=0.28$

X: Tüm satışlardan kazanılan miktar (\$)

$P(X=0)=0.28$
$P(X=500)=0.06+0.21=0.27$
$P(X=1000)=0.045+0.06+0.21=0.315$
$P(X=1500)=0.09$
$P(X=2000)=0.045$

x	0	500	1000	1500	2000
$p(x)$	0.28	0.27	0.315	0.09	0.045

③ $\boxed{4.14}$

5 numara, 5 farklı kişiye bir sıra oluşturacak şekilde $5! = 120$ farklı şekilde dağıtılabilir.

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$\boxed{X=0}$

1
$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 24$

2
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 18$

3
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 12$

4
$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 6$

60

$P(X=0) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$\boxed{X=1}$

2 1 3,4,5
$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 6$

3 2,1 4,5
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1} = 8$

4 1,2,3 5
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1} = 6$

20

$P(X=1) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

$\boxed{X=2}$

4 1,2,3 5
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1} = 6$

3 1,2 4,5
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1} = 4$

10

$P(X=2) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

$\boxed{X=3}$

4 1,2,3
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1} = 6$

$P(X=3) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

$\boxed{X=4}$

5 1,2,3,4
$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 24$

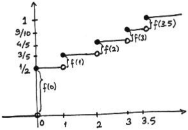
$P(X=4) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

④ $\boxed{4.19}$

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b<0 \\ 1/2 & 0 \le b < 1 \\ 3/5 & 1 \le b < 2 \\ 4/5 & 2 \le b < 3 \\ 9/10 & 3 \le b < 3.5 \\ 1 & b \ge 3.5 \end{cases}$$

$\downarrow$

$P(X \le b)$



↘ Bu şekli çizmek zorunda değilsiniz!

$p(0) = F(0) = \frac{1}{2}$

$p(1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$p(2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

$p(3) = F(3) - F(2) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

$p(3.5) = F(3.5) - F(3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

x	0	1	2	3	3.5
$p(x)$	1/2	1/10	1/5	1/10	1/10

5 [4.21]

$$\begin{array}{r} 40 \\ 33 \\ 25 \\ 50 \\ \hline 148 \text{ öğrenci} \end{array}$$

X: Rasgele seçilen öğrencinin bulunduğu otobüsteki öğrencilerin sayısı
Y: Rasgele seçilen otobüsteki öğrencilerin sayısı

a) $x = 25, 33, 40, 50$
$y = 25, 33, 40, 50$

Seçilen öğrencinin içerisinde fazla sayıda öğrenci taşıyan otobüsten seçilme şansı daha fazladır. Herbir otobüs şöförünün seçilme şansı birbirine eşit olduğuna göre X'in beklenen değeri Y'ninkinden büyüktür.

b) $x = 25, 33, 40, 50$

$P(X=25) = \frac{25}{148}$ $\quad P(X=33) = \frac{33}{148}$ $\quad P(X=40) = \frac{40}{148}$ $\quad P(X=50) = \frac{50}{148}$

$$E(X) = 25 \cdot \frac{25}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 40 \cdot \frac{40}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} = 39.28$$

$y = 25, 33, 40, 50$

$P(Y=25) = \frac{1}{4}$ $\quad P(Y=33) = \frac{1}{4}$ $\quad P(Y=40) = \frac{1}{4}$ $\quad P(Y=50) = \frac{1}{4}$

$$E(Y) = 25 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37.$$

6 X: Her çekilişte kazanılan (veya kaybedilen) miktar

[4.35] $x = -1\$, 1.1\$$

$$P(X=-1\$) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9} \qquad P(X=1.1\$) = \underbrace{\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{0}}{\binom{10}{2}}}_{2 \text{ kırmızı}} + \underbrace{\frac{\binom{5}{0}\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}}_{2 \text{ mavi}} = \frac{4}{9}$$

a) $E(X) = (1.1) \cdot \frac{4}{9} + (-1) \cdot \frac{5}{9} = -0.067\$$ kaybediliyor.

b) $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = (1.1)^2 \cdot \frac{4}{9} + (-1)^2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{756}{4} \Rightarrow Var(X) = \frac{756}{4} - \frac{0.36}{81} = 1.089$$

7 [4.38]

$E(X) = 1 \quad Var(X) = 5$

a) $E[(2+X)^2] = E[4 + 4X + X^2] = 4 + 4E(X) + E(X^2)$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$5 = E(X^2) - 1 \Rightarrow E(X^2) = 6$

$E[(2+X)^2] = 4 + 4(1) + 6 = 14$

b) $Var(4+3X) = 9Var(X) = 9(5) = 45.$

⑧ $\boxed{4.42}$

P(motorun bozulması) = 1 - p

Uçağın uçuşunu başarıyla tamamlaması için motorlarının çoğunluğunun sağlam olması gerekiyor. 5 motorlu uçağın, 3 motorlu uçağa tercih edilmesi için, aşağıdaki koşulu sağlaması gereklidir:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+\binom{5}{5}p^5(1-p)^0 \geqslant \binom{3}{2}p^2(1-p)+\binom{3}{3}p^3(1-p)^0$$

$$\Rightarrow 6p^3-15p^2+12p-3\geqslant 0$$

$$\Rightarrow 6(p-1/2)(p-1)^2\geqslant 0$$

$$\boxed{p\geqslant 1/2}$$

⑨ $\boxed{4.57}$ X: Bir otoyolda birgünde meydana gelen kazaların sayısı

$$\lambda=3 \quad t=1 \quad \Rightarrow X\sim POI(\lambda t=3)$$

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x e^{-3}}{x!}, & x=0,1,2,\dots\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

a) $P(X\geqslant 3) = 1-p(0)-p(1)-p(2)$

$$= 1-e^{-3}-3e^{-3}-e^{-3}\frac{3^2}{2} = 1-\frac{17}{2}e^{-3}$$

b) $P(X\geqslant 3 \mid X\geqslant 1) = \dfrac{P(X\geqslant 3)}{P(X\geqslant 1)} = \dfrac{1-\frac{17}{2}e^{-3}}{1-e^{-3}}$

⑩ $\boxed{4.66}$

a) 38 - 12 = 26 durumda Smith kazanamaz.

P(ilk 5 bahsi kaybetmesi) $= \left(\frac{26}{38}\right)^5$

b) P(4. bahsinde ilk kez kazanması) $= \underbrace{\left(\frac{26}{38}\right)^3}_{\text{ilk 3 bahiste kaybediyor.}}\left(\frac{12}{38}\right)$

⑪ $\boxed{4.74}$ 100 nesne $\begin{cases}\to 6 \text{ bozuk}\\ \to 94 \text{ sağlam}\end{cases}$ 10 nesne rasgele seçiliyor.

X: seçilen 10 nesne içerisinde bozuk olanların sayısı

a) $P(X=0)=\dfrac{\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}$

b) $P(X>2) = 1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) = 1-\dfrac{\binom{94}{10}+\binom{94}{9}\binom{6}{1}+\binom{94}{8}\binom{6}{2}}{\binom{100}{10}}$

MAT 250 OLASILIK ve İSTATİSTİK 3. ÖDEV ÇÖZÜMLERİ

① $\boxed{5\text{-}5}$

$$P(X>c)=0.01 \Rightarrow P(X>c)=\int_c^1 5(1-x)^4dx = (1-x)^5\Big|_c^1 = (1-c)^5=0.01$$

$$\Rightarrow c = 1-(0.01)^{1/5}$$

② $\boxed{5\text{-}7}$

1. denklem:

$$\int_0^1 (a+bx^2)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (a+bx^2)dx = ax+\frac{bx^3}{3}\Big|_0^1 = a+\frac{b}{3}=1$$

$$\boxed{3a+b=3}$$

2. denklem

$$E(X)=\int_0^1 x(a+bx^2)dx = \int_0^1 (ax+bx^3)dx = \frac{ax^2}{2}+\frac{bx^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{3}{5}$$

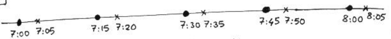
$$\boxed{10a+5b=12}$$

iki denklemin ortak çözümünden,

$$a=\frac{3}{5}\ ,\ b=\frac{6}{5}$$

③ $\boxed{5\text{-}10}$

a)



● → A'ya giden trenin istasyona geldiği saatler

× → B'ye " " " " "

X: Yolcunun istasyona geldiğinde 7'yi geçen dakikaların sayısı

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60} & ,0<x<60\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

$$P(\text{A'ya gitme}) = P(5<X<15)+P(20<X<30)+P(35<X<45)+P(50<X<60)$$

$$=\int_5^{15}\frac{1}{60}dx+\int_{20}^{30}\frac{1}{60}dx+\int_{35}^{45}\frac{1}{60}dx+\int_{45}^{60}\frac{1}{60}dx$$

$$=\frac{x}{60}\Big|_5^{15}+\frac{x}{60}\Big|_{20}^{30}+\frac{x}{60}\Big|_{35}^{45}+\frac{x}{60}\Big|_{45}^{60} = \frac{10}{60}\cdot 4=\frac{2}{3}$$

b) Y: Yolcunun istasyona geldiğinde 7:10'u geçen dakikaların sayısı

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{60} & ,0<y<60\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

$$P(\text{A'ye gitme}) = P(0<Y<5)+P(10<Y<20)+P(25<Y<35)+P(40<Y<50)+P(55<Y<60)$$

$$=\frac{5}{60}+\frac{10}{60}+\frac{10}{60}+\frac{10}{60}+\frac{5}{60}=\frac{2}{3}.$$

(4) 6-9

$$f(x,y)=\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right) \qquad 0<x<1, \quad 0<y<2$$

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ olmalı.

$$\int_0^2\int_0^1 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx\,dy = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{4}\Big|_0^1\right)dy = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{4}\right)dy$$

$$=\frac{6}{7}\left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{8}\Big|_0^2\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{8}\right)=\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6}=1$$

b) $$f_X(x)=\int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy = \frac{6}{7}\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}\Big|_0^2\right)$$

$$=\frac{6}{7}(2x^2+x), \quad 0<x<1$$

$$=0, \quad d.d.$$

c) $$P(X>Y)=\frac{6}{7}\int_0^1\int_0^x\left(x^2+\frac{xy}{2}\,dy\,dx\right)=\frac{6}{7}\int_0^1\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}\Big|_0^x\right)dx$$

$$=\frac{6}{7}\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{4}\right)dx=\frac{6}{7}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{16}\Big|_0^1\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=\frac{\cancel{6}^{3}}{7}\cdot\frac{5}{\cancel{16}_{8}}=\frac{15}{56}$$

d) $$P(Y>1/2\mid X<1/2)=\frac{P(Y>1/2,\,X<1/2)}{P(X<1/2)}$$

$$=\frac{\int_{1/2}^{2}\int_0^{1/2}\left(x^2+\frac{xy}{2}\,dx\,dy\right)}{\int_0^{1/2}(2x^2+x)dx}=\frac{\int_{1/2}^{2}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{4}\Big|_0^{1/2}dy}{\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2}}$$

$$=\frac{\int_{1/2}^{2}\frac{1}{24}+\frac{y}{16}\,dy}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{y}{24}+\frac{y^2}{32}\Big|_{1/2}^{2}}{\frac{5}{24}}=\frac{\frac{2}{24}+\frac{4}{32}-\frac{1}{48}-\frac{1}{128}}{\frac{5}{24}}=\frac{39}{80}$$

e) $$E(X)=\int_0^1\frac{6}{7}(2x^3+x^2)dx=\frac{6}{7}\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{7}$$

f) $$f_Y(y)=\int_0^1\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx=\frac{6}{7}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{4}\Big|_0^1\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{4}\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{4+3y}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{14}(4+3y), \quad 0<y<2$$

$$=0, \quad d.d.$$

$$E(Y)=\int_0^2\frac{1}{14}(4y+3y^2)dy=\frac{1}{14}\left(2y^2+y^3\Big|_0^2\right)$$

$$=\frac{1}{14}(8+8)=\frac{8}{7}$$

⑤ $\boxed{6-21}$

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ olduğunu göstermelisiniz.

$$\int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,dx\,dy = \int_0^1 12y(1-y)^2\,dy = \int_2^1 12(y-2y^2+y^3)\,dy$$

$$= 12(1/2 - 2/3 + 1/4) = 1$$

b) $f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2 \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$= 0 \quad , \quad$ d.d.

$$E(X) = \int_0^1 12x^2(1-2x+x^2)\,dx = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right)$$

$$= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \left(4 - 6 + \frac{12}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

c) $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24xy\,dx = 24y\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1-y} = 12y(1-y)^2 \quad , \quad 0 \le y \le 1$

$= 0 \quad , \quad$ d.d.

$E(Y) = \int_0^1 12y^2(1-2y+y^2)\,dy = \frac{2}{5}$ (b şıkkından benzer şekilde çözülür)

⑥ $\boxed{6-22}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y \;, & 0<x<1, \; 0<y<1 \\ 0 \;, & \text{d.d.} \end{cases}$$

a) $f(x,y) \overset{?}{=} f_X(x).\,f_Y(y) \xrightarrow{E}$ X ve Y bağımsız ras. değ.

$\xrightarrow{H}$ X ve Y bağımlı ras. değ

$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{2} \;, \quad 0<x<1$

$= 0, \quad$ d.d.

$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y = \frac{2y+1}{2} \;, \quad 0<y<1$

$= 0, \quad$ d.d.

$f(x,y) = x+y \neq \frac{2x+1}{2}.\,\frac{2y+1}{2} \Rightarrow$ X ve Y bağımlı ras. değişkenlerdir.

b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2} \;, & 0<x<1 \\ 0 \;, & \text{d.d.} \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow$ "a" şıkkında bulundu.

c) $P(X+Y<1) = \int_0^1\int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 [x(1+x) + (1+x)^2/2]\,dx = 1/3.$

7 $\boxed{7\text{-}38}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-2x}/x, & 0\le x<\infty,\quad 0\le y\le x \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

gamma fonksiyonu

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^x y\,2e^{-2x}\,dy\,dx=\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx=\frac{1}{8}\int_0^\infty y^2e^{-y}\,dy=\frac{\Gamma(3)}{8}=\frac{1}{4}$$

$$f_X(x)=\int_0^x \frac{2e^{-2x}}{x}\,dy=2e^{-2x},\quad 0\le x<\infty$$

$$E(X)=\int_0^\infty 2xe^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=\int_y^\infty \frac{2e^{-2x}}{x}\,dx$$

$$E(Y)=\int_0^\infty\int_y^\infty y\,\frac{2e^{-2x}}{x}\,dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^x y\,\frac{2e^{-2x}}{x}\,dy\,dx=\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx=\frac{1}{4}\int ye^{-2}\,dy$$

$$=\frac{\Gamma(2)}{4}=\frac{1}{4}$$