Başkent Üniversitesi
MAT 340 OLASILIK

Bölüm 5 BAZI SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Yrd.Doç Dr. Kumru Didem Atalay
Öğr.Gör.Dr. Pelin Toktaş

Sürekli Düzgün Dağılım

- [A,B] aralığında sürekli düzgün rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A}, & A \le x \le B \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(B-A)^2}{12}$$

Örnek 1

- Bir durağa sabah saat 7.00'dan başlayarak her 15 dakikada bir otobüs gelmektedir. Bir kişi saat 7.00-7.30 arasında düzgün dağılıma sahip bir zamanda durağa geliyor olsun. Bu kişinin otobüsü,
  - 5 dakikadan az,
  - 10 dakikadan fazla bekleme olasılıklarını bulunuz.

Normal Dağılım

- Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal rassal değişken için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

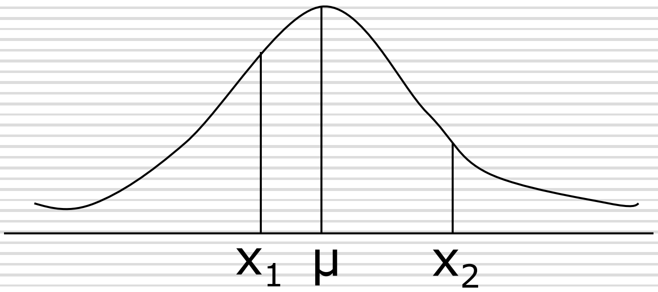
$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Normal Eğrisinin Özellikleri

- Ortalama, ortanca ve mod değerleri birbirine eşittir, tam orta değerdir.
- Eğri ortalama μ'ye göre simetriktir.
- Eğrinin büküm (inflection) noktaları $x=\mu\pm\sigma$.
  - $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$ => concave downward
  - Diğer durumda => concave upward.
- Ortalamadan uzaklaştıkça eğeri asimtotik olarak yatay eksene yaklaşır.
- Eğri ile yatay eksen arasında kalan alan 1'e eşittir.

Normal Eğrisinin Altında Kalan Alan



$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = ?$$

Normal Eğrisinin Altında Kalan Alan

- $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ dönüşümüyle,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dx$$

$$= P(z_1 < X < z_2)$$

Standart Normal Dağılım

- Ortalaması 0 ve varyansı 1 olan normal rassal dğişkeninin dağılımına standart normal dağılım denir.
- $Z=(X-\mu)/\sigma$ dönüşümüyle standart normal dağılıma geçiş yapılır.
- Dönüşüm yapıldıktan sonra, normal eğrisi altında kalan alanın bulunması için tablo (Tablo A.3) kullanılır.

Örnek 2

- Standart normal dağılım veriliyor.
  - z=1.84'ün sağındaki,
  - z=-1.97 ve z=0.86 arasındaki,

bölgeler için eğri altında kalan alanları bulunuz.

Örnek 3

- Standart normal dağılım veriliyor.
  - $P(Z>k)=0.3015$
  - $P(k<Z<-0.18)=0.4197$

$k=?$

Örnek 4

- $\mu=50$ ve $\sigma=10$ olan normal rassal değişkeni veriliyor. X'in 45 ve 62 arasında olma olasılığı nedir?

Örnek 5

- $\mu=300$ ve $\sigma=50$ olan normal rassal değişkeni veriliyor. X'in 362'den büyük olma olasılığı nedir?

Gözlem!

$$z=(x-\mu)/\sigma$$

$$\Rightarrow$$

$$x=\sigma z+\mu$$

Örnek 6

- μ=40 ve σ=6 olan normal rassal değişkeni veriliyor.
  - Sol tarafta %45'lik bir alan,
  - Sağ tarafta %14'lük bir alan,

bırakan x değerlerini bulunuz.

Örnek 7

- Bir fabrikada üretilen ampullerin ömrü ortalaması 800 saat ve standart sapması 40 saat olan normal dağılıma sahiptir. Bir ampulün ömrünün 778 ve 834 saatleri arasında olma olasılığı nedir?

Örnek 8

- Bir sınavın ortalaması 74 ve standart sapması 7’dir. Alınan notların dağılımı normaldir. Sınıfın %12’sine A notu verilecekse, A notu için en düşük değer kaçtır?

Binomial Dağılımının Normal Dağılıma Yakınsaması

- Teorem: X rassal değişkeni, ortalaması $\mu=np$ ve varyansı $\sigma^2=npq$ olan binomial dağılımına sahip olsun. $n\to\infty$,

$$Z=\frac{X\pm 0.5-np}{\sqrt{npq}}$$

dağılımı standart normal dağılımdır.

Süreklilik Düzeltmesi

İstenen Olasılık	Süreklilik Düzeltmesi
$P(X = x)$	$P(x - 0.5 \leq X \leq x + 0.5)$
$P(X \leq x)$	$P(X \leq x + 0.5)$
$P(X < x)$	$P(X \leq x - 0.5)$
$P(X \geq x)$	$P(X \geq x - 0.5)$
$P(X > x)$	$P(X \geq x + 0.5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5)$
$P(a < X < b)$	$P(a + 0.5 \leq X \leq b - 0.5)$

Örnek 9

- $X \sim Bin(n=15, p=0.4)$ binom dağılımının normal dağılıma yakınsamasını kullanarak $P(X=4)$ olasılığını hesaplayınız.

Örnek 10

- 4 şıklı 200 sorudan oluşan bir sınavda her soruda yalnızca bir şık doğrudur. 200 sorudan 80 tanesini cevaplayan bir kişinin 25 den 30 soruya doğru cevap verme olasılığı nedir?

Üstel Dağılım

- X üstel rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu, λ>0 olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Poisson ve Üstel Dağılımlar Arasındaki İlişki

- X, ortalaması λt olan Poisson dağılmış rassal değişken olsun.
- X, (0,t] aralığında ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı olduğuna göre, bu aralıkta biri diğerini izleyen olaylar arasında geçen süre de bir rassal değişken olacaktır.

Poisson ve Üstel Dağılımlar Arasındaki İlişki

- T: Biri diğerini izleyen iki olay arasında geçen süre
- T'nin dağılım fonksiyonu: $P(T \leq t) = F(t)$
- $P(T>t)=1-F(t)$ => Biri diğerini izleyen iki olay arasında geçen sürenin t'den büyük olması demek bu arada hiç olayın ortaya çıkmaması, yani, Poisson dağılmış rassal değişkenin verilen t zamanı için (0,t]'de sıfır değerini alması demektir. Sonuç olarak, $P(T>t)=P(X=0)= e^{-\lambda t}$ elde edilir.

Poisson ve Üstel Dağılımlar Arasındaki İlişki

- $F(t)=P(T\leq t)=1-P(T>t)=1-e^{-\lambda t}$

olarak bulunur.

- Biri diğerini izleyen olaylar arasında geçen sürenin dağılımı üstel dağılımdır. Yani,

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & \text{d.d.}\end{cases}$$

Örnek 1

- Bir banka gişesi önüne her 10 dakikada ortalama 4 müşterinin geldiği bilinmektedir.
  - Bu gişe önüne gelen müşteriler arası zamanın dağılımını,
  - 10 dakika içinde hiç müşteri gelmeme olasılığını,
  - Biri diğerini izleyen iki müşteri arasında geçen sürenin 4 dakika veya fazla olma olasılığını bulunuz.

Kaynak

- Walpole, Ronald E.; Myers, Raymond H.; Myers, Sharon L. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Pearson Education.