TEC | Tecnológico de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Computación

Compiladores e Interpretes

Profesor:

Francisco Torres Rojas

Estudiante:

Ariana Michelle Bermúdez Venegas

Apuntes del 29 de marzo

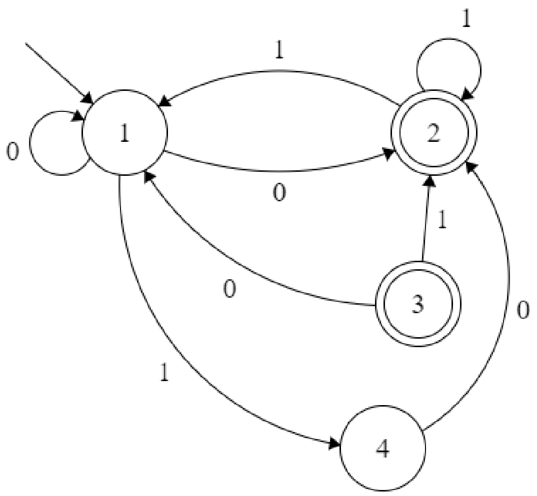
I Semestre

Año:

2017

Quiz 06

1. Considere el siguiente NFA. Presente el DFA equivalente.



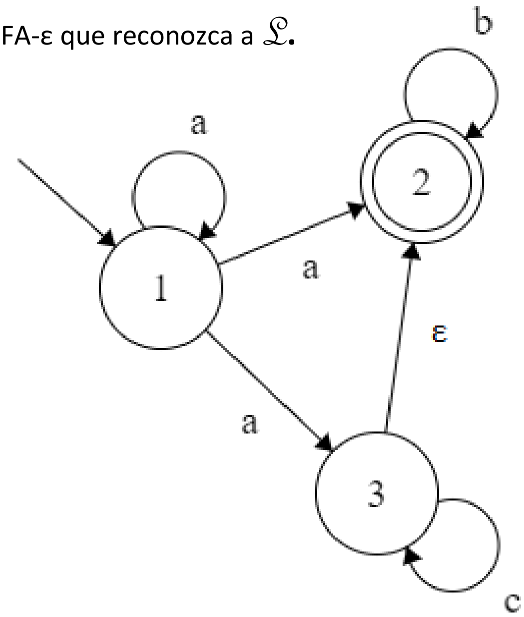
2. Diseñe un DFA que reconozca el lenguaje sobre ∑ = {0,1} de hileras donde en ninguna subhilera de tamaño 4 haya más 0's que 1's.

Transiciones ε (Épsilon)

Ejemplo 1

Sea $\mathfrak{L}$ el lenguaje sobre ∑ = {a, b, c} de hileras que empiecen con una serie de una o más "a", seguida de cero o más "c" y terminada en cero o más "b".

- Diseñe un NFA-ε que reconozca a $\mathfrak{L}$.

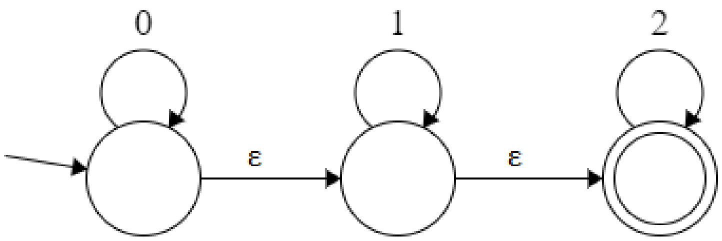


Cada épsilon es como pegar un brinco, sin consumir ningún símbolo. Pero una vez que pegó el brinco no se puede regresar.

Y no sean como el conejito, por favor…

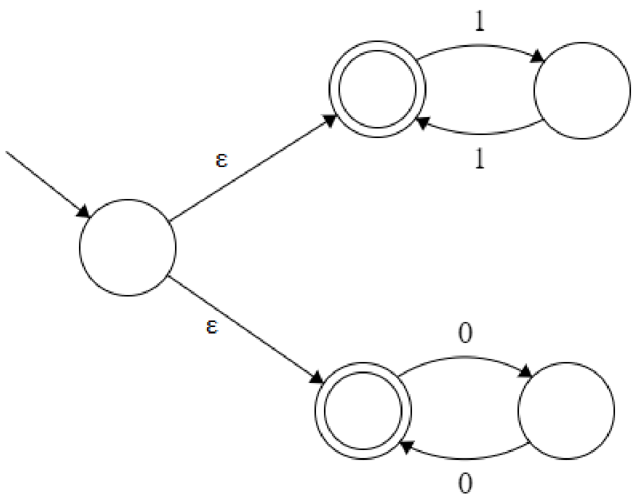
Ejemplo 2

- Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ de hileras que empiecen con cualquier número de 0's seguidos por cualquier número de 1's y terminada en cualquier número de 2's.
- Diseñe un NFA-ε que reconozca a $\mathcal{L}$.



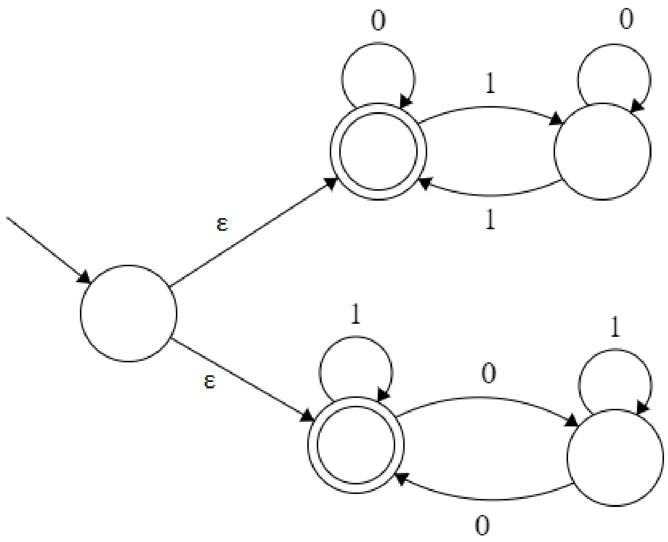
Ejemplo 3

- Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ de hileras de longitud par con un único tipo de símbolo.
- Diseñe un NFA-ε que reconozca a $\mathcal{L}$.



Ejemplo 4

- Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ de hileras que tengan un número par de 0's o un número par de 1's.
- Diseñe un NFA-ε que reconozca a $\mathcal{L}$.

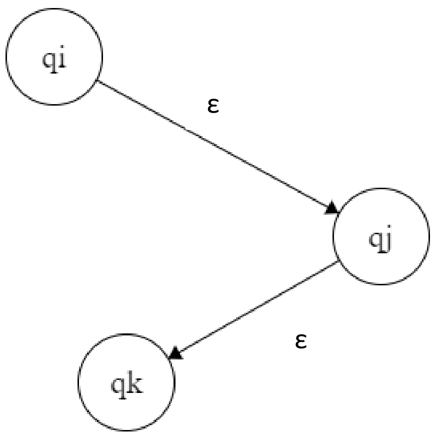


Propiedades de Transiciones ε

- Mientras haya transiciones ε podemos saltar entre estados sin consumir símbolos.
- Podemos seguir moviéndonos **después del final de la hilera** (si es que hay transiciones ε).
- No es obligatorio usar este tipo de transiciones.
- Son de naturaleza no determinística.
- Un autómata con transiciones ε es un NFA-ε.

En algunos libros se llaman Transiciones espontaneas.

Ejemplo que venía con la presentación (no sé porque el de la presentación no trae estado inicial, ni estados de aceptación jaja, recuerden aprender de los errores):

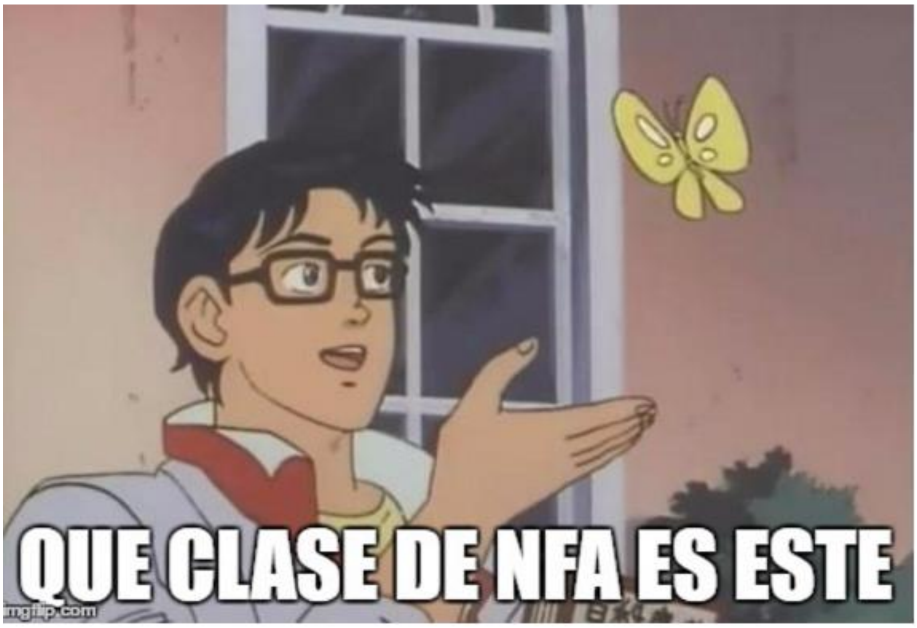


Definición Formal

- Un Autómata No Determinístico de Estados Finitos con movimientos ε (NFA-ε) es un quinteto M = (Q, ∑, δ, q_0, F) donde:
    - Q es un conjunto finito de **estados**.
    - ∑ es un **alfabeto**.
    - δ: Q x (∑ ∪ ε) → P(Q) es la **función de transición.**

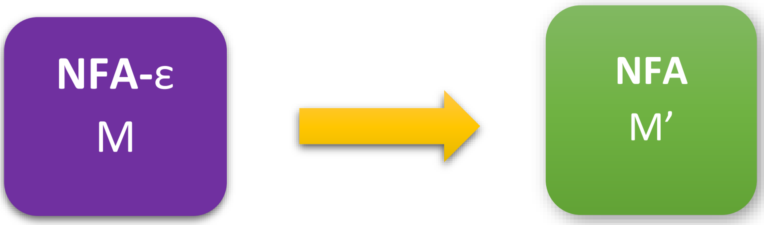
Torres (Torrex): Van entendiendo? Digan, si…
Todos: Si ☺

- $q_0 \in Q$ es el **estado inicial**.
- $F \subseteq Q$ conjunto de **estados de aceptación.**



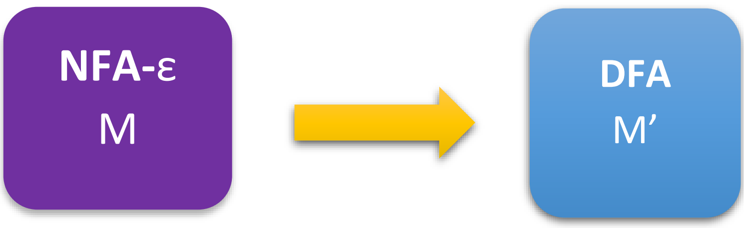
Teorema

- Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ε. Siempre existe un NFA $M' = (P(Q), \Sigma, \delta', Q_0, F')$ que reconoce exactamente el mismo lenguaje que M.
- Todo NFA-ε tiene un NFA sin movimientos ε que reconoce exactamente el mismo lenguaje.



Corolario

- Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ε. Siempre existe un DFA $M' = (P(Q), \Sigma, \delta', Q_0, F')$ que reconoce exactamente el mismo lenguaje que M.



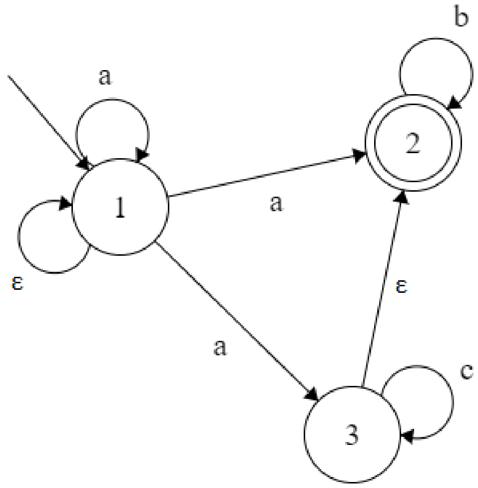
Cierre-ε

- Función que recibe un estado de Q y regresa un subconjunto de Q.
- El **Cierre-ε** del estado **p** es el conjunto de todos los estados alcanzables desde **p** sin consumir **ningún** símbolo de la entrada.
- Solo usando transiciones **ε**.
- Implícitamente hay una transición **ε** de **p** a sí mismo.
- En todos los siguientes cálculos, cada vez que necesitamos usar **p** usaremos **Cierre-ε (p)…** inclusive al calcular **Cierre-ε.** ☺

Ejemplo de Cierre-ε

- "Conjunto de todos los estados alcanzables desde **p** sin consumir **ningún** símbolo de la entrada"

Estado	Cierre-ε
1	{1}
2	{2}
3	{2,3}



- Recuerden que siempre existe una transición épsilon al mismo estado.

Convirtiendo NFA-ε en DFA

- El alfabeto ∑ es el mismo en las dos máquinas.
- Los estados de M' son subconjuntos de conjunto Q de M.
- Hay que calcular la nueva función de transición δ'.
- F' es un conjunto de subconjuntos del conjunto Q de M.
- Hay que calcular el **Cierre-ε** de todos los estados de Q.

Cálculo de Nueva Función de Transición

1. El estado inicial de M' es **Cierre-ε**(q_0). Este es la primera fila de la tabla asociada a δ'.
2. En la tabla asociada a la función de transición δ' coloque en la columna de cada símbolo de ∑ la unión de todos los **Cierre-ε** de todos los estados a los que se puede llegar desde todos los elementos de **Cierre-ε**(q_0) con dicho símbolo (el conjunto vacío es una opción válida).
3. Tome el primero de estos subconjuntos y póngalo como una nueva fila de la tabla de δ'.

4. Llene las columnas con la unión de todos los **Cierre-ε** de todos los estados a los que se puede llegar desde todos los elementos del conjunto asociado a la fila actual con el símbolo correspondiente a la columna actual (puede ser el conjunto vacío).
5. Repita mientras queden subconjuntos pendientes.

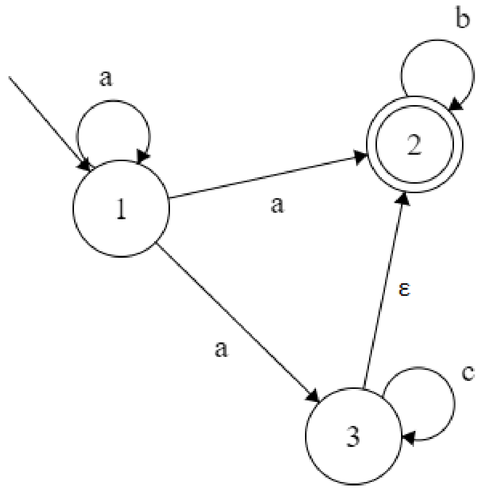
Como podemos sentirnos:

Y en el mejor de los casos:

Entonces volviendo al ejemplo anterior…

Tenemos:

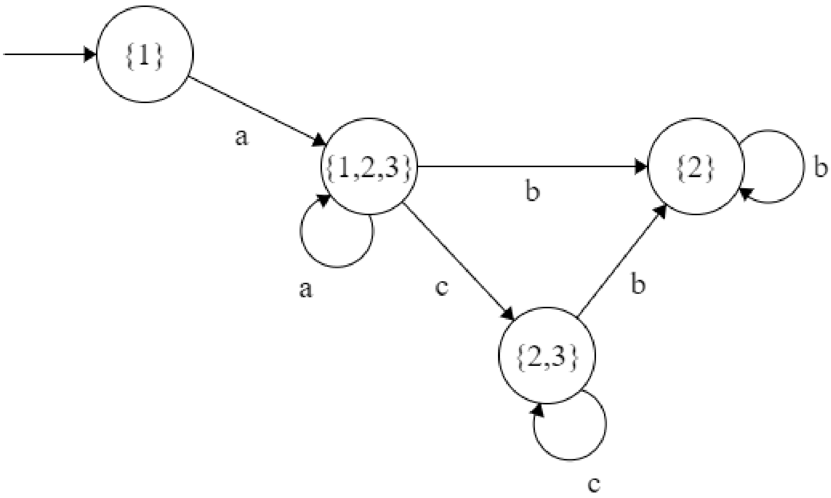
Estado	Cierre-ε
1	{1}
2	{2}
3	{2,3}



Hacemos la tablita…

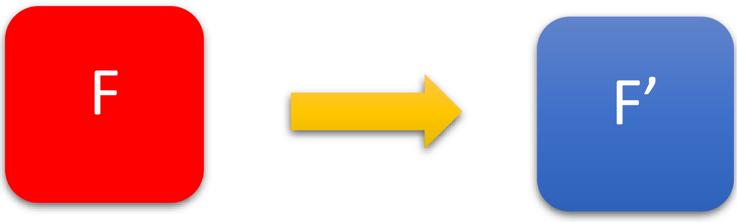
	a	b	c
{1}	{1,2,3}	Ø	Ø
{1,2,3}	{1,2,3}	{2}	{2,3}
{2}	Ø	{2}	Ø
{2,3}	Ø	{2}	{2,3}

Y a partir de esto hacemos el DFA.



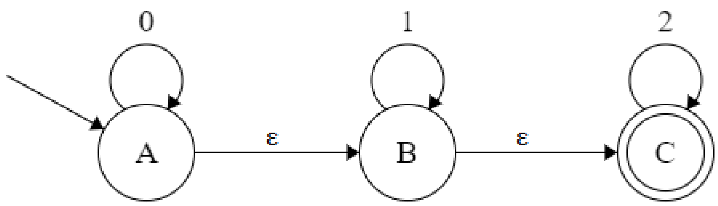
Estados de Aceptación

- Cualquier estado en M’ que contenga al menos un elemento que sea miembro de F es miembro de F’.



Ejemplo 2

- Encuentre el DFA correspondiente al siguiente NFA-ε.



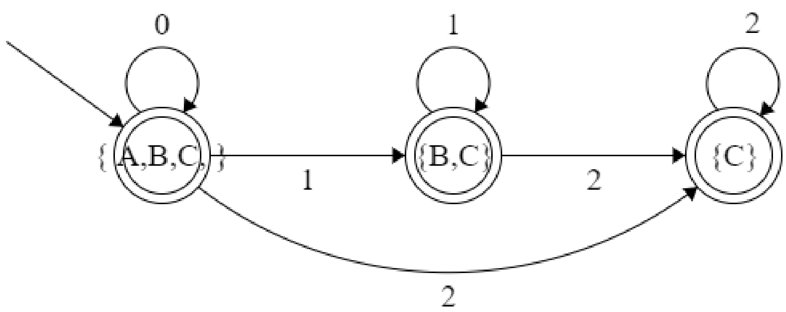
- Cierre-ε

Estado	Cierre-ε
A	{A, B, C}
B	{B, C}
C	{C}

- Función de Transición

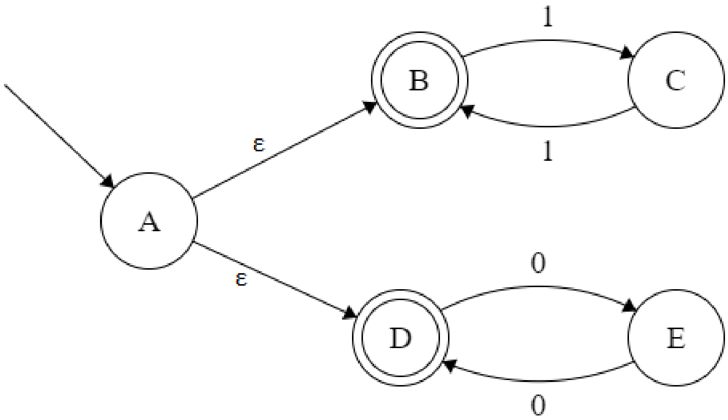
	0	1	2
{A, B, C}	{A, B, C}	{B, C}	{C}
{B, C}	Ø	{B, C}	{C}
{C}	Ø	Ø	{C}

- DFA Equivalente



Ejemplo 3

- Encuentre el DFA correspondiente al siguiente NFA-ε.



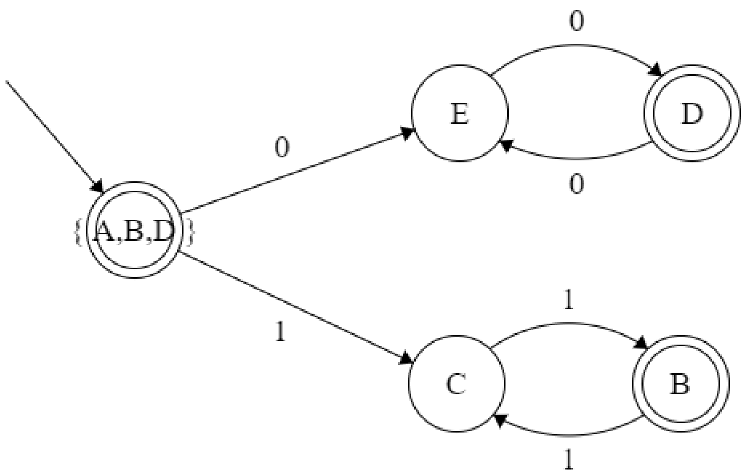
- Cierre-ε

Estado	Cierre-ε
A	{A, B, D}
B	{B}
C	{C}
D	{D}
E	{E}

- Función de Transición

	0	1
{A, B, D}	{E}	{C}
{E}	{D}	Ø
{C}	Ø	{B}
{D}	{E}	Ø
{B}	Ø	{C}

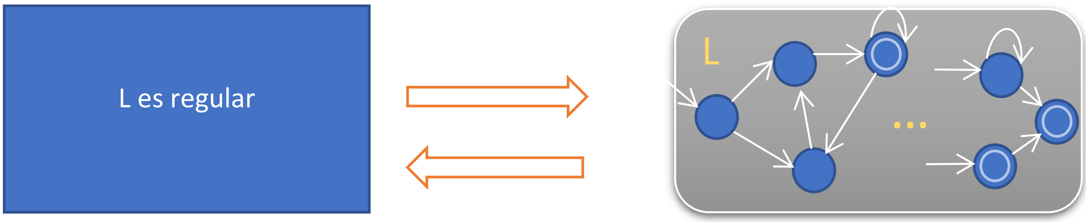
- DFA Equivalente



Lenguajes Regulares

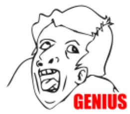
- **Definición:**

  Un lenguaje $\mathscr{L}$ es **regular** si y solo si existe un DFA que lo reconozca exactamente (acepta todas las hileras de $\mathscr{L}$ y rechaza cualquier hilera que no sea miembro de $\mathscr{L}$).
- Entonces, si nos dicen que un lenguaje es regular significa que existe un DFA que lo reconozca y viceversa.



- Todo NFA o NFA-ε tiene un DFA equivalente
- Entonces, un lenguaje es regular si hay un NFA o un NFA-ε que lo reconozca
  - Los NFA o NFA-ε **no** son más poderosos que un DFA.
- ¿Cómo se demuestra que un lenguaje es regular?
  - **Diseñando un DFA que lo reconozca.**
- ¿Cómo se demuestra que un lenguaje no es regular?
  - **Demostrando que no existe ningún DFA que lo reconozca.**

    ¿Y cómo demostramos eso? Chiste… pues no lo hacemos.



  - **Pumping Lemma**
- **Ejemplos de Lenguajes Regulares:**
  - Todos los lenguajes que hemos detectado hasta el momento son regulares (hicimos DFAs que lo reconocían) ☺

Cierre en Conjuntos

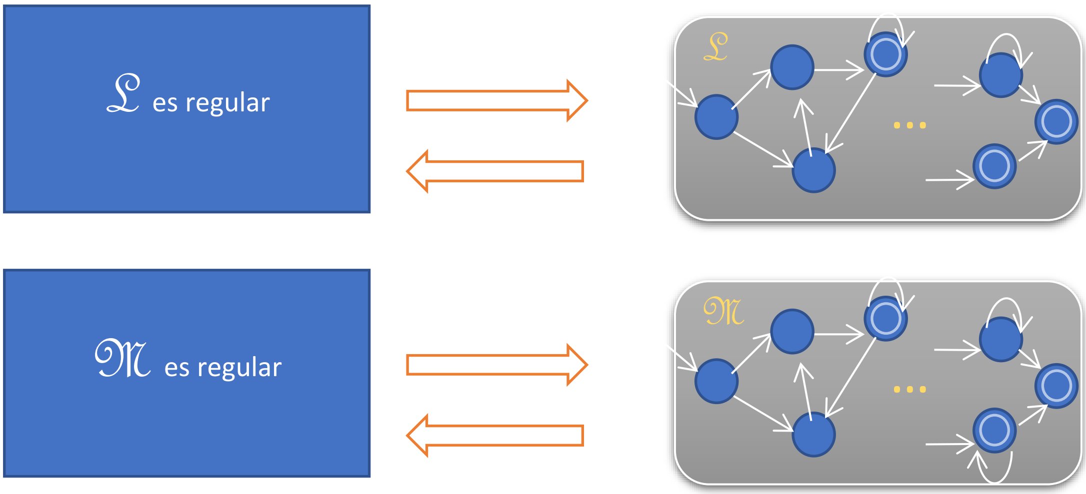
- Un conjunto $\mathscr{X}$ puede ser "**cerrado con respecto a una operación ϕ**".
- Significa que siempre que aplicamos ϕ operación sobre elementos de $\mathscr{X}$ obtenemos algo que también es elemento de $\mathscr{X}$.
- Ejemplos:
  - Números naturales son cerrados respecto a suma o multiplicación.
  - Números naturales **no son** cerrados con respecto a resta o división.
  - Números enteros son cerrados respecto a suma, resta o multiplicación.
  - Números enteros **no son** cerrados respecto a división o exponenciación.

Cierre en Unión de Lenguajes Regulares

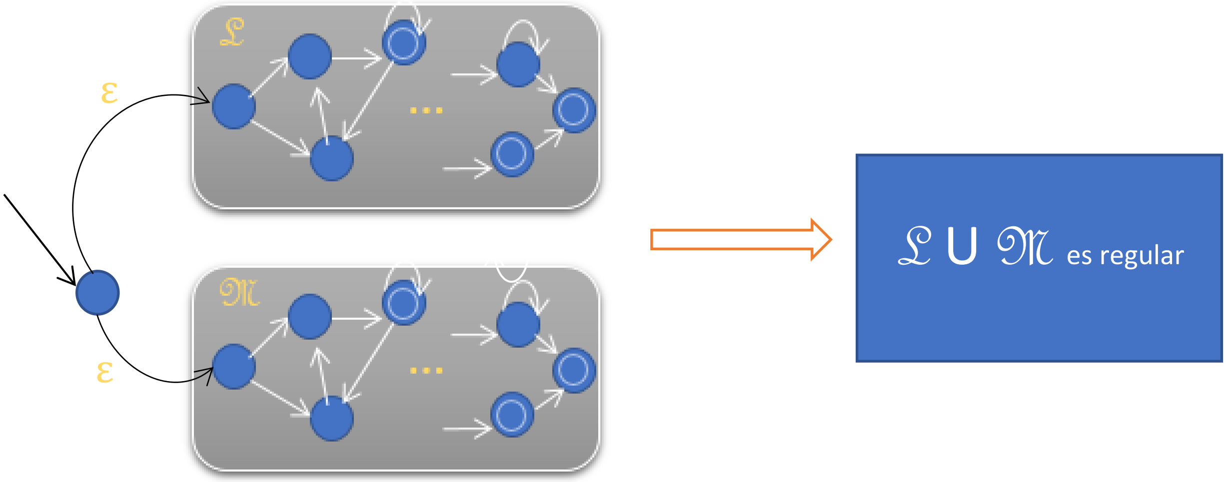
- **Teorema:**
  Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son lenguajes regulares entonces $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ también es regular.
- Los lenguajes regulares son **cerrados** respecto a la unión de lenguajes.

Demostración (Idea General)

- Si $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ fuera regular, existiría un NFA que lo reconozca.
- Premisas:



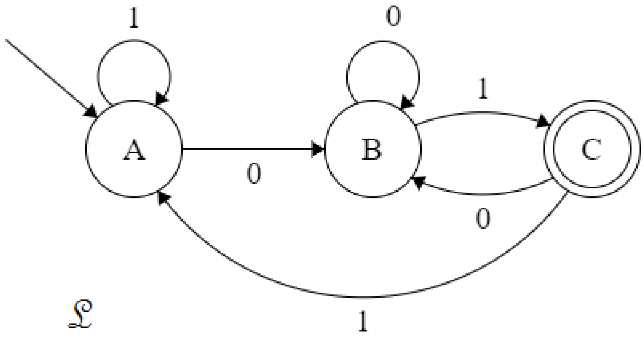
Entonces…

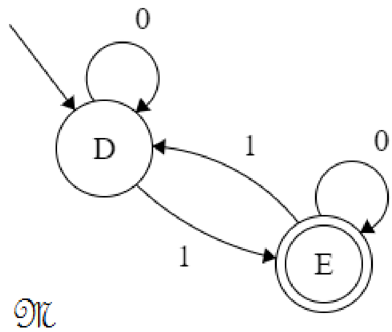


Ejemplo de Unión de Lenguajes Regulares

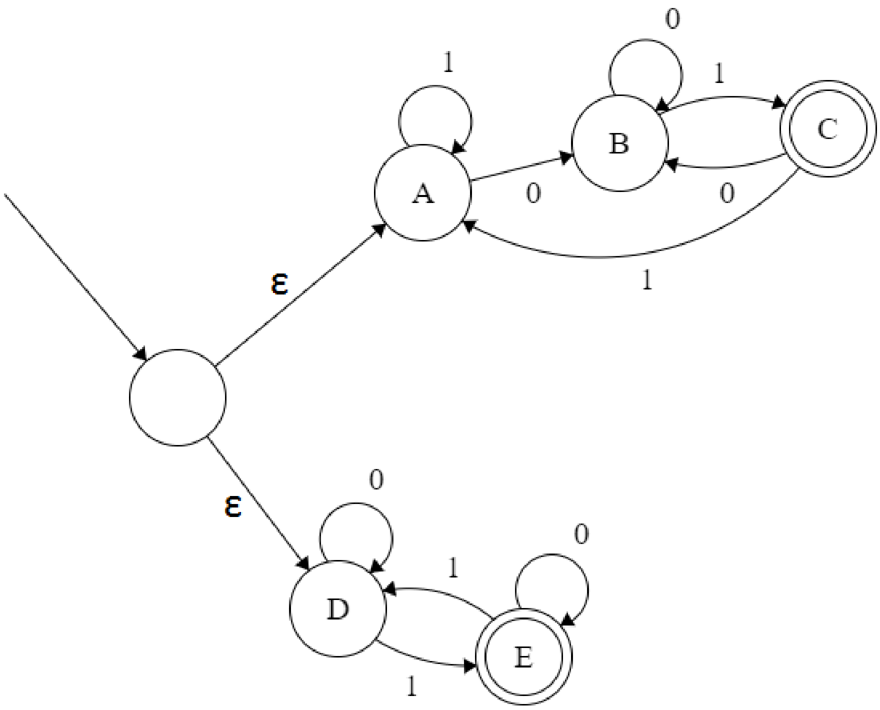
- $\mathcal{L}$ = Lenguaje sobre $\Sigma = \{0,1\}$ de hileras que terminan en 01.

- $\mathfrak{M}$ = Lenguaje sobre ∑= {0,1} de hileras con número impar de 1's.
- $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{M}$ es regular.





Resultado de la unión



Torres: Luego le pedimos a un estudiante que le quite el “epsilonismo”.

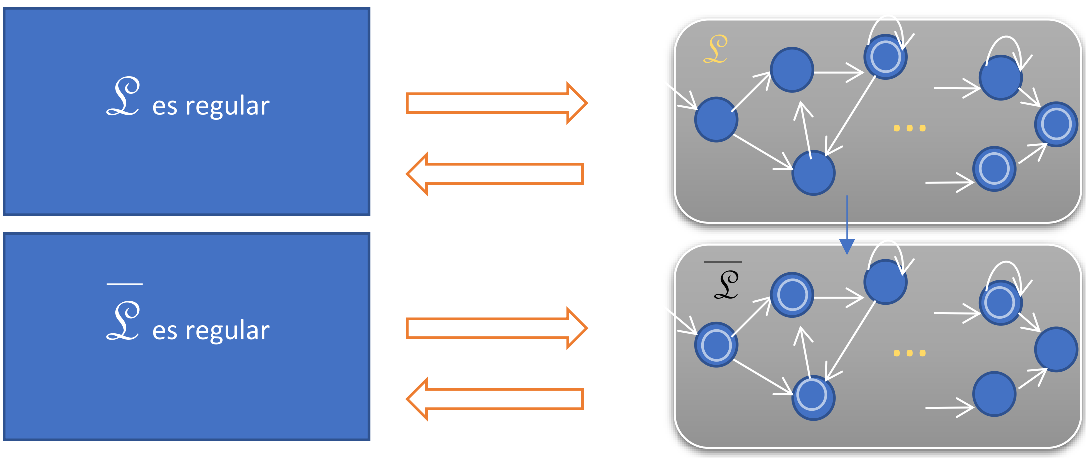
Cierre en Complemento de Lenguajes Regulares

- **Teorema:** Torres: Agárrense del sombrero…

  Si $\mathfrak{L}$ es un lenguaje regular entonces $\overline{\mathfrak{L}}$ también es regular.
- Los lenguajes regulares son **cerrados** respecto al complemento de lenguajes.

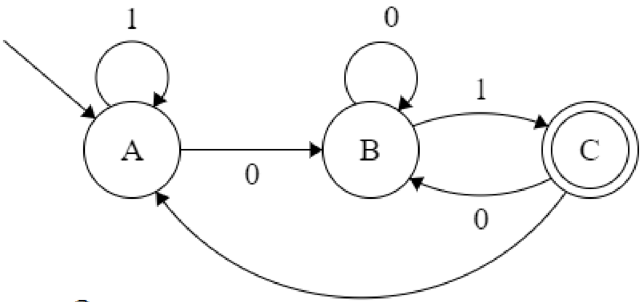
Demostración (Idea General)

- Si $\overline{\mathfrak{L}}$ fuera regular, existiría un DFA que lo reconozca.
- Premisas: Víctor nos recuerda que: “Los infiernos se convierten en cielos”. Ósea agreguen los sinks faltantes.

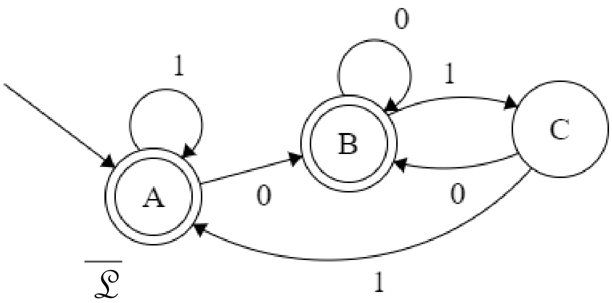


Ejemplo de Complemento de un Lenguaje Regular

- $\mathcal{L}$ = lenguaje sobre E = {0, 1} de hileras que terminan en 01.
- $\overline{\mathcal{L}}$ es regular.

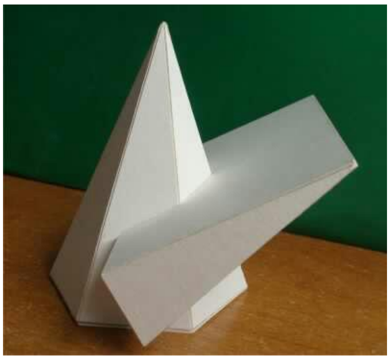


$\mathcal{L}$



$\overline{\mathcal{L}}$

Cierre en Intersección de Lenguajes Regulares



- Teorema
  Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son lenguajes regulares entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ también es regular.
- Los lenguajes regulares son **cerrados** respecto a la intersección de lenguajes.

Demostración

- $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \overline{\overline{\mathcal{L} \cap \mathcal{M}}}$ (Propiedad del complemento de lenguajes)
- $\overline{\overline{\mathcal{L} \cap \mathcal{M}}} = \overline{\overline{\mathcal{L}} \cup \overline{\mathcal{M}}}$ (De Morgan)
- $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son lenguajes regulares.
- Los lenguajes regulares son cerrados respecto a complemento y respecto a la unión.
- **Los lenguajes regulares son cerrados respecto a intersección.**

Ilustración 1: Augustus De Morgan